

Сублоренцева задача на группе Энгеля

Андрей А. Ардентов

Институт программных систем,
Переславль-Залесский,

aaa@pereslavl.ru

Внутренний семинар ИЦПУ

Постановка задачи

$$q = (x, y, z, v)^T \in M = \mathbb{R}^4, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2,$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0, 0)^T, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$J = \int_0^{t_1} (-u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \max.$$

Гамильтонова система ПМП

$$\dot{x}_1 = -h_1,$$

$$\dot{x}_2 = h_2,$$

$$\dot{y} = \frac{x_2 h_1 + x_1 h_2}{2},$$

$$\dot{z} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} h_2,$$

$$\dot{h}_1 = -h_2 h_3,$$

$$\dot{h}_2 = -h_1 h_3,$$

$$\dot{h}_3 = -h_1 h_4,$$

$$\dot{h}_4 = 0.$$

Функция Гамильтона: $H = \frac{1}{2}(-h_1^2 + h_2^2).$

Времениподобные геодезические, $H < 0$

Новые координаты на поверхности уровня $\left\{ H = -\frac{1}{2} \right\}$:

$$h_1 = \pm \cosh \theta, \quad h_2 = \sinh \theta, \quad h_3 = c, \quad h_4 = \alpha.$$

Симметрия гамильтоновой системы:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: (h_1, h_2, h_3, h_4, x_1, x_2, y, z) &\mapsto (-h_1, h_2, -h_3, h_4, -x_1, x_2, -y, z) \\ &\Downarrow \\ h_1 &> 0. \end{aligned}$$

Интеграл энергии:

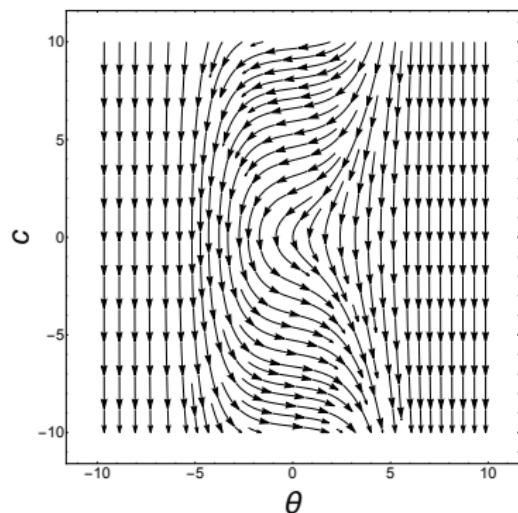
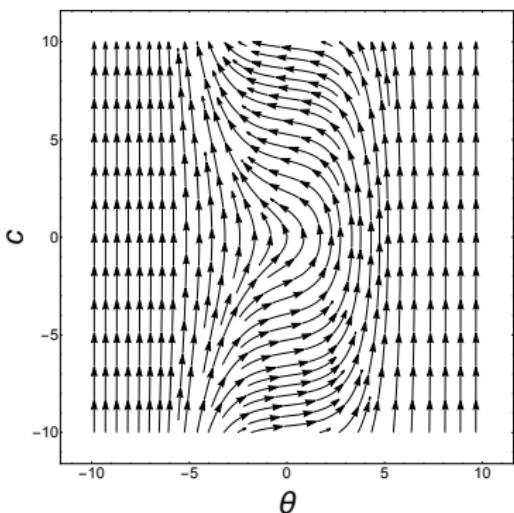
$$E = \frac{h_3^2}{2} - h_2 h_4 = \frac{c^2}{2} - \alpha \sinh \theta, \quad \dot{E} = h_3 \dot{h}_3 - h_4 \dot{h}_2 = 0.$$

Вертикальная подсистема

$$\dot{\theta} = -c,$$

$$\dot{c} = -\alpha \cosh \theta,$$

$$\dot{\alpha} = 0.$$



Разбиение на подмножества

Множество всех нормальных геодезических

$$C = T_{q_0}^* M \cap \left\{ H = -\frac{1}{2}, h_1 > 0 \right\} = \{(\theta, c, \alpha) \in \mathbb{R}^3\}$$

имеет следующее разбиение на подмножества:

$$C = C_0^0 \cup C^0 \cup C^- \cup C^+, \quad \lambda = (\theta, c, \alpha),$$

$$C_0^0 = \{\lambda \in C \mid c = 0, \alpha = 0\},$$

$$C^0 = \{\lambda \in C \mid c \neq 0, \alpha = 0\},$$

$$C^- = \{\lambda \in C \mid \alpha < 0\},$$

$$C^+ = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0\}.$$

Симметрия между множествами C^- и C^+ :

$$\varepsilon^1: (\alpha, c, \theta, x_1, x_2, y, z) \mapsto (-\alpha, -c, -\theta, x_1, -x_2, -y, -z).$$

Эллиптические координаты в C^+

$$c = -2\alpha \operatorname{sc}(\alpha\varphi) \operatorname{dn}(\alpha\varphi), \quad \varphi \in \left(-\frac{K}{\alpha}, \frac{K}{\alpha}\right),$$
$$\sinh \theta = \frac{2\alpha^2 \left(1 - k^2(1 + \operatorname{cn}^4(\alpha\varphi))\right)}{\alpha \operatorname{cn}^2(\alpha\varphi)}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{E^2 + \alpha^2}}{2}},$$
$$\cosh \theta = \frac{2\alpha^2 \left(1 - k^2(1 - \operatorname{cn}^4(\alpha\varphi))\right)}{\alpha \operatorname{cn}^2(\alpha\varphi)}, \quad k^2 = \frac{1}{2} + \frac{E}{4\alpha^2} \in (0, 1).$$

Вертикальная подсистема:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{E} = 0, \quad \dot{\alpha} = 0.$$

Параметризация геодезических в случае C^\pm

$$x_1(t) = \frac{2\alpha}{|\alpha|} (\operatorname{sc} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_0 - \operatorname{sc} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t),$$

$$x_2(t) = \frac{4\alpha \left(\alpha(1-k^2)t - (\operatorname{E}(\psi_t) - \operatorname{E}(\psi_0)) \right) - |\alpha|x_1(t)}{\alpha}.$$

$$\begin{aligned} y(t) = & -\frac{2\alpha^2}{\alpha|\alpha|} \left(k^2(\operatorname{cn}^2 \psi_t - \operatorname{cn}^2 \psi_0) + (1-k^2)(\operatorname{nc}^2 \psi_t - \operatorname{nc}^2 \psi_0) \right) + \\ & + \frac{\alpha}{|\alpha|} \left(\operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sc} \psi_0 + \operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sc} \psi_t \right) x_2(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{(x_2(t))^3}{6} + \frac{4\alpha^3}{3\alpha^3} \left(2\alpha(k^2-1)t + (1-k^2) \left(\frac{\operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t}{\operatorname{cn}^3 \psi_t} - \frac{\operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sn} \psi_0}{\operatorname{cn}^3 \psi_0} \right) + \right. \\ & \left. + k^2(\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sn} \psi_0) - 2(\operatorname{E}(\psi_t) - \operatorname{E}(\psi_0))(2k^2-1) \right) - \\ & - \frac{2\alpha \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sn} \psi_0 \left(\frac{\alpha \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sc} \psi_0}{|\alpha|} x_2(t) - \frac{1}{2} x_1(t) x_2(t) - y(t) \right)}{\operatorname{cn} \psi_0 |\alpha|} - \frac{2\alpha^2(2k^2-1)x_1(t)}{3\alpha|\alpha|}, \end{aligned}$$

где $\psi_0 = \alpha\varphi_0$, $\psi_t = \alpha\varphi_t \in (-K, K)$.

Параметризация геодезических в вырожденных случаях

Если $\lambda \in C^0$, то

$$\alpha = 0, \quad E = \frac{c^2}{2} \quad \Rightarrow \quad c \equiv \text{const}, \quad \theta = \theta_0 - c t,$$

$$x_1(t) = \frac{\sinh(\theta_0 - c t) - \sinh \theta_0}{c}, \quad x_2(t) = \frac{\cosh \theta_0 - \cosh(\theta_0 - c t)}{c},$$

$$y(t) = \frac{\sinh(c t) - c t}{2c^2},$$

$$z(t) = \frac{4 \sinh^3\left(\frac{c t}{2}\right) \sinh\left(3\theta_0 - \frac{3c t}{2}\right) - 3(\sinh(c t) - c t) \sinh \theta_0}{6c^3}.$$

Если $\lambda \in C_0^0$, то

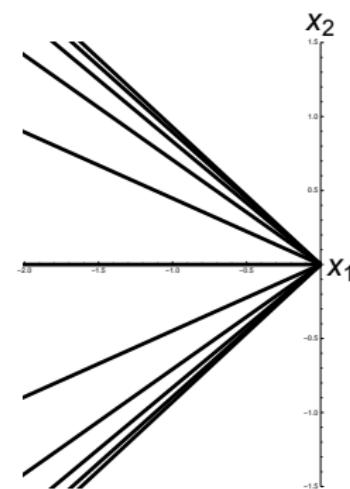
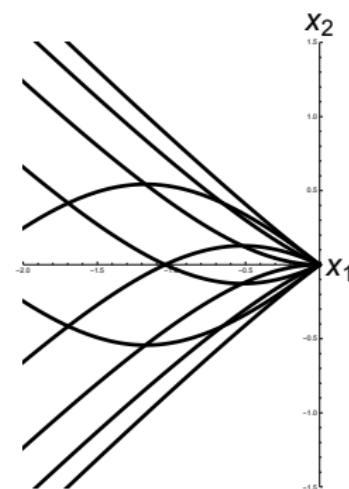
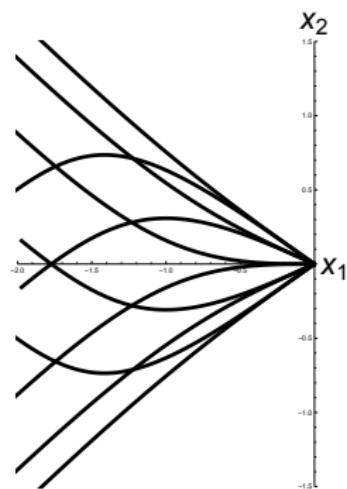
$$\alpha = c = E = 0, \quad \theta \equiv \text{const}, \quad \sinh \theta = s_0,$$

$$x_1(t) = -\sqrt{s_0^2 + 1} t, \quad x_2(t) = s_0 t,$$

$$y \equiv 0,$$

$$z(t) = \frac{(2s_0^2 + 1)s_0}{6} t^3.$$

Проекции геодезических на плоскость (x_1, x_2)
в случаях C^\pm , C^0 , C_0^0



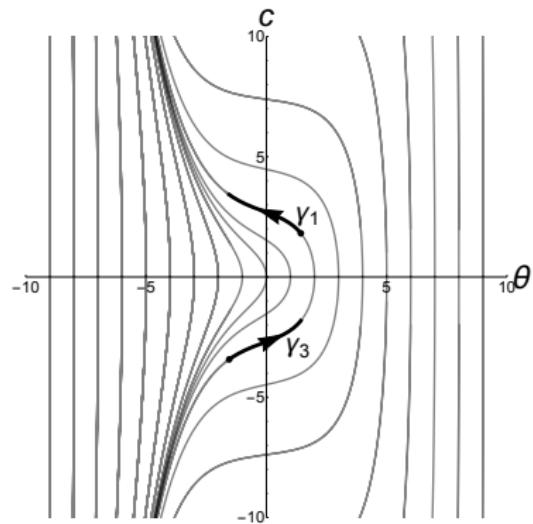
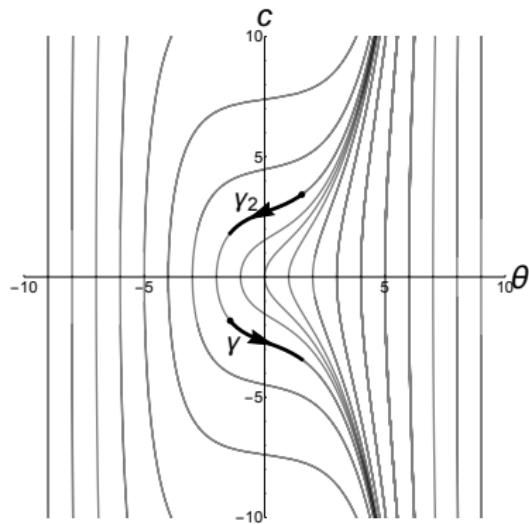
Экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : N \rightarrow M = \mathbb{R}^4, \quad \text{Exp}(\lambda, t) = q(t), \\ N = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \in (0, t_{\text{supr}}(\lambda))\}.$$

$$\lambda \in C^\pm \qquad \Rightarrow \qquad t_{\text{supr}}(\lambda) = \frac{\mathsf{K}(k) - \psi_0}{\mathfrak{A}}, \\ \lambda \in C^0 \cup C_0^0 \qquad \Rightarrow \qquad t_{\text{supr}}(\lambda) = \infty.$$

$$t_{cut}(\lambda) \leq t_{\text{supr}}(\lambda)$$

Отражения траекторий вертикальной системы



Действие отражений ε^i в прообразе N экспоненциального отображения

$$\varepsilon^i : C \rightarrow C, \quad \varepsilon^i(\theta, c, \alpha) = (\theta^i, c^i, \alpha^i),$$

$$(\theta^1, c^1, \alpha^1) = (-\theta, -c, -\alpha),$$

$$(\theta^2, c^2, \alpha^2) = (\theta, -c, \alpha),$$

$$(\theta^3, c^3, \alpha^3) = (-\theta, c, -\alpha).$$

$$\varepsilon^1(\lambda, t) = (\varepsilon^1(\lambda), t),$$

$$\varepsilon^i(\lambda, t) = (\varepsilon^i \circ e^{t\vec{H}_v}(\lambda), t), \quad i = 2, 3,$$

где $\vec{H}_v = -c \frac{\partial}{\partial \theta} - \alpha \cosh \theta \frac{\partial}{\partial c} \in \text{Vec}(C)$ — вертикальная
часть гамильтонова векторного поля.

Действие отражений ε^i в образе M экспоненциального отображения

$$\varepsilon^i : M \rightarrow M,$$

$$\varepsilon^i(q) = \varepsilon^i(x_1, x_2, y, z) = q^i = (x_1^i, x_2^i, y^i, z^i),$$

$$(x_1^1, x_2^1, y^1, z^1) = (x_1, -x_2, -y, -z),$$

$$(x_1^2, x_2^2, y^2, z^2) = (x_1, x_2, -y, z - x_1 y),$$

$$(x_1^3, x_2^3, y^3, z^3) = (x_1, -x_2, y, x_1 y - z).$$

Симметрии экспоненциального отображения и соответствующие множества Максвелла

Предложение

Отражения $\varepsilon^i, i = 1, 2, 3$, являются симметриями экспоненциального отображения, т.е.,

$$(\varepsilon^i \circ \text{Exp})(\theta, c, \alpha, t) = (\text{Exp} \circ \varepsilon^i)(\theta, c, \alpha, t), \quad (\theta, c, \alpha, t) \in N.$$

$$\lambda = (\theta, c, \alpha), \quad \lambda^i = \varepsilon^i(\lambda),$$

$$\text{MAX}^i = \{(\lambda, t) \in N \mid \lambda^i \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t)\}.$$

Описание неподвижных точек симметрий ε^i в прообразе экспоненциального отображения

$$\tau = \frac{\psi_t + \psi_0}{2}, \quad p = \frac{\psi_t - \psi_0}{2} = \frac{\alpha t}{2}.$$

Лемма

1. $\lambda^1 = \lambda \iff \lambda \in C_0^0, \theta = 0.$
2. $\lambda^2 = \lambda \iff \lambda \in C^\pm, \tau = 0 \quad \text{или} \quad \lambda \in C_0^0.$
3. $\lambda^3 = \lambda \iff \lambda \in C^0 \cup C_0^0, \theta + \frac{ct}{2} = 0$

Описание неподвижных точек симметрий ε^i в образе экспоненциального отображения

Лемма

1. $\varepsilon^1(q) = q \iff x_2 = 0, y = 0, z = 0.$
2. $\varepsilon^2(q) = q \iff y = 0.$
3. $\varepsilon^3(q) = q \iff x_2 = 0, z = \frac{x_1 y}{2}.$

Исследование множества Максвелла MAX²

$$y = -\frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau f_y(p)}{\alpha |\alpha| \mathfrak{a}^2 k^2 (\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{dn}^2 \tau \operatorname{sn}^2 p) (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 \tau)},$$
$$f_y(p) = (16 \mathfrak{a}^4 k^2 E(p) - \alpha^2 p) (\operatorname{dn}^2 p - k^2 \operatorname{cn}^2 p \operatorname{sn}^2 p) -$$
$$- 16 \mathfrak{a}^4 k^4 \operatorname{cn}^3 p \operatorname{dn} p \operatorname{sn} p.$$

$$\begin{aligned}\text{MAX}^2 \cap N^\pm &= \{\nu \in N^\pm \mid y(\nu) = 0, \tau \neq 0, \tau \in (-K, K), p \in (0, K)\} = \\ &= \{\nu \in N^\pm \mid f_y(p) = 0, p \in (0, K)\},\end{aligned}$$

где $\nu = (\tau, p, E, \alpha)$.

Исследование множества Максвелла MAX²

Лемма

Пусть гладкие функции $f(u), g(u)$ на $(0, u_0) \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям

$$f(u) \not\equiv 0, \quad g(u) > 0, \quad \left(\frac{f(u)}{g(u)} \right)' \geq 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{g(u)} = 0.$$

Тогда $f(u) > 0$ при $u \in (0, u_0)$.

Лемма

Функция $f_y(p) > 0$ при $p \in (0, K(k))$, $k \in (0, 1)$.

$g(p) = k^2(1 - k^2(1 - \operatorname{sn}^4 p))$ — функция сравнения.

Описание множества Максвелла

Теорема

$$\text{MAX}^2 \cap N^\pm = \emptyset$$

В общем случае $\lambda \in C^\pm$ времениподобная геодезическая не имеет времен Максвелла $t_{\text{MAX}}(\lambda) \in (0, t_{\text{supr}}(\lambda))$, соответствующих рассмотренным симметриям ε^i , $i = 1, 2, 3$.

Пространственноподобные геодезические, $H > 0$

Новые координаты на поверхности уровня $\left\{ H = \frac{1}{2} \right\}$:

$$h_1 = \sinh \theta, \quad h_2 = \pm \cosh \theta, \quad h_3 = c, \quad h_4 = \alpha.$$

Симметрия гамильтоновой системы:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : (h_1, h_2, h_3, h_4, x_1, x_2, y, z) &\mapsto (h_1, -h_2, -h_3, -h_4, x_1, -x_2, -y, -z) \\ &\Downarrow \\ h_2 &> 0. \end{aligned}$$

Интеграл энергии:

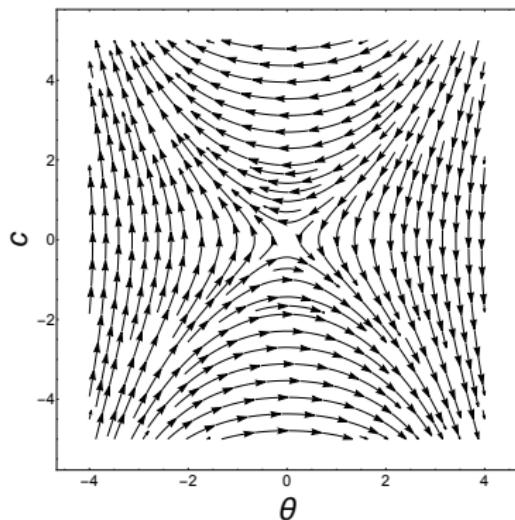
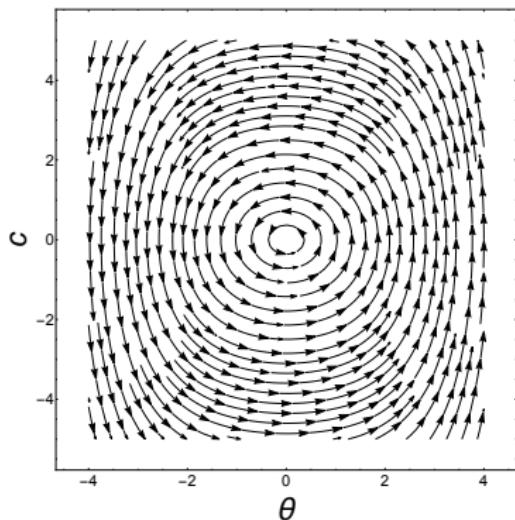
$$E = \frac{h_3^2}{2} - h_2 h_4 = \frac{c^2}{2} - \alpha \cosh \theta.$$

Вертикальная подсистема

$$\dot{\theta} = -c,$$

$$\dot{c} = -\alpha \sinh \theta,$$

$$\dot{\alpha} = 0.$$



Разбиение на подмножества

Множество всех нормальных геодезических

$$C = T_{q_0}^* \cap \left\{ H = \frac{1}{2}, h_2 > 0 \right\} = \{(\theta, c, \alpha) \in \mathbb{R}^3\}.$$

имеет следующее разбиение на подмножества:

$$C = \bigcup_{i=1}^7 C_i, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \lambda = (\theta, c, \alpha),$$

$$C_1 = \{\lambda \in C \mid \alpha < 0, E > -\alpha\},$$

$$C_2 = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E < -\alpha\},$$

$$C_3 = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E > -\alpha\},$$

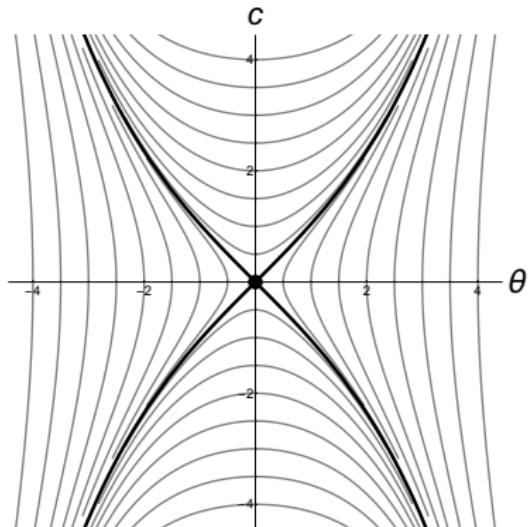
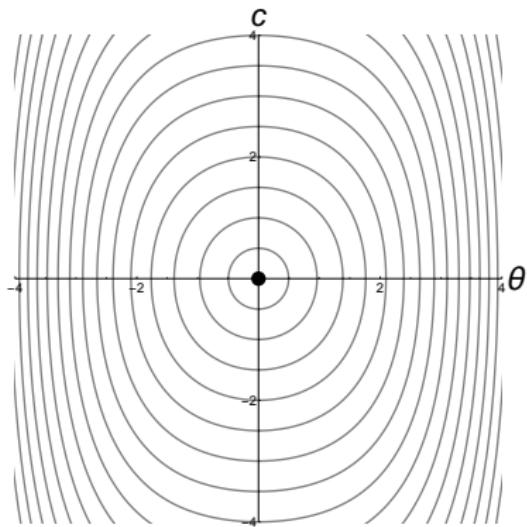
$$C_4 = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E = -\alpha, c \neq 0, \theta \neq 0\},$$

$$C_5 = \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = -\alpha, c = 0, \theta = 0\},$$

$$C_6 = \{\lambda \in C \mid \alpha = 0, E > 0, c \neq 0\},$$

$$C_7 = \{\lambda \in C \mid \alpha = 0, E = 0, c = 0\}.$$

Эллиптические координаты



Вертикальная подсистема:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{E} = 0, \quad \dot{\alpha} = 0.$$

Эллиптические координаты в C_1, C_2

$$c = \sqrt{2(E + \alpha)} \operatorname{sn}(\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

$$\sinh \theta = \frac{\sqrt{E - \alpha} \sqrt{E + \alpha} \operatorname{cn}(\alpha\varphi) \operatorname{dn}(\alpha\varphi)}{\alpha}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{E - \alpha}{2}},$$

$$\cosh \theta = 1 - \frac{(E + \alpha) \operatorname{cn}^2(\alpha\varphi)}{\alpha}, \quad k^2 = \frac{E + \alpha}{E - \alpha} \in (0, 1).$$

$$c = \operatorname{sgn} \theta \frac{\sqrt{2(-\alpha - E)} \operatorname{sn}(\alpha\varphi)}{\operatorname{cn}(\alpha\varphi)}, \quad \varphi \in \left(-\frac{K}{\alpha}, \frac{K}{\alpha} \right),$$

$$\sinh \theta = \operatorname{sgn} \theta \frac{\sqrt{-\alpha - E} \sqrt{\alpha - E} \operatorname{dn}(\alpha\varphi)}{\alpha \operatorname{cn}^2(\alpha\varphi)}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\alpha - E}{2}},$$

$$\cosh \theta = 1 - \frac{\alpha + E}{\alpha \operatorname{cn}(\alpha\varphi)}, \quad k^2 = \frac{2\alpha}{\alpha - E} \in (0, 1).$$

Эллиптические координаты в C_3, C_4

$$c = \operatorname{sgn} c \frac{2\alpha e^{\alpha\varphi}}{\operatorname{cn}(\alpha\varphi)}, \quad \varphi \in \left(-\frac{K}{\alpha}, \frac{K}{\alpha} \right),$$

$$\sinh \theta = \operatorname{sgn} c \frac{2 \operatorname{sn}(\alpha\varphi)}{\operatorname{cn}^2(\alpha\varphi)}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{E + \alpha}{2}},$$

$$\cosh \theta = \frac{1 + \operatorname{sn}^2(\alpha\varphi)}{\operatorname{cn}^2(\alpha\varphi)}, \quad k_2 = k^2 = \frac{E - \alpha}{E + \alpha} \in (-\infty, 1).$$

$$c = \operatorname{sgn} \theta \frac{4\alpha e^{\alpha\varphi}}{\alpha e^{2\alpha\varphi} - 1}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad \alpha e^{2\alpha\varphi} \neq 1,$$

$$\sinh \theta = \operatorname{sgn} \theta \frac{4\alpha e^{\alpha\varphi} (\alpha e^{2\alpha\varphi} + 1)}{(\alpha e^{2\alpha\varphi} - 1)^2}, \quad \alpha = \sqrt{\alpha},$$

$$\cos \theta = \frac{\alpha e^{2\alpha\varphi} (\alpha e^{2\alpha\varphi} + 6) + 1}{\alpha e^{2\alpha\varphi} - 1}.$$

Параметризация геодезических в случае C_1

$$x_1(t) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha+E}}{\alpha} \left(\operatorname{sn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi_0 \right),$$

$$x_2(t) = -\frac{2\alpha}{\alpha} \left(E(\psi_t) - E(\psi_0) \right) - t,$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{\sqrt{\alpha+E}}{\sqrt{2}\alpha^2} \left(2\alpha \left(\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_0 + (E(\psi_t) - E(\psi_0)) (\operatorname{sn} \psi_t + \operatorname{sn} \psi_0) \right) + \right. \\ & \left. + \alpha (\operatorname{sn} \psi_t + \operatorname{sn} \psi_0) t \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{(x_2(t))^3}{6} + \frac{1}{3\alpha^3} \left(2\alpha \left((\alpha+E) (\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t (\operatorname{sn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi_0) - \right. \right. \\ & - 2(\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_0) \operatorname{sn} \psi_0) - (E+3(\alpha+E) \operatorname{sn}^2 \psi_0) (E(\psi_t) - \\ & \left. \left. - E(\psi_0)) \right) + \alpha (\alpha - E - 3(\alpha+E) \operatorname{sn}^2 \psi_0) t \right), \end{aligned}$$

где $\psi_0 = \alpha\varphi_0$, $\psi_t = \alpha\varphi_t$.

Параметризация геодезических в случае C_2

$$x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\alpha - E} \operatorname{sgn} \theta}{\alpha} \left(\operatorname{sc} \psi_t - \operatorname{sc} \psi_0 \right),$$

$$x_2(t) = -\frac{2\alpha(E(\psi_t) - E(\psi_0) + \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sc} \psi_0 - \operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sc} \psi_t) + Et}{\alpha},$$

$$y(t) = -\frac{\sqrt{-\alpha - E} \operatorname{sgn} \theta}{\sqrt{2}\alpha^2} \left(E \left(\operatorname{sc} \psi_0 + \operatorname{sc} \psi_t \right) t + 2\alpha \left((\operatorname{sc} \psi_0 + \operatorname{sc} \psi_t) (\operatorname{E}(\psi_t) - \operatorname{E}(\psi_0)) + (\operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{dn} \psi_0) (1 - \operatorname{sc} \psi_0 \operatorname{sc} \psi_t) \right) \right),$$

$$z(t) = \frac{(x_2(t))^3}{6} + \frac{2\alpha(3(\alpha+E)\operatorname{sn}^2\psi_0 - E\operatorname{cn}^2\psi_0)}{3\alpha^3\operatorname{cn}^2\psi_0} \left(E(\psi_t) - E(\psi_0) \right) +$$

$$+ \frac{1}{3\alpha^3 \mathfrak{A} \operatorname{cn}^3 \psi_t \operatorname{cn}^3 \psi_0} \left(2\mathfrak{A} \left(\operatorname{cn} \psi_t \left(\alpha (\operatorname{cn}^2 \psi_t \operatorname{dn} \psi_0 (1 - 3 \operatorname{cn}^2 \psi_0) + \right. \right. \right.$$

$$+ 3 \operatorname{cn}^2 \psi_0 \operatorname{dn} \psi_t) + (\operatorname{cn}^2 \psi_t \operatorname{dn} \psi_0 (1 - 4 \operatorname{cn}^2 \psi_0) + 3 \operatorname{cn}^2 \psi_0 \operatorname{dn} \psi_t) E \Bigg) \operatorname{sn} \psi_0 -$$

$$-\operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_t \left(\alpha \operatorname{cn}^2 \psi_0 + 3\alpha \operatorname{sn}^2 \psi_0 \operatorname{cn}^2 \psi_t + \left(3 \operatorname{cn}^2 \psi_t + \operatorname{cn}^2 \psi_0 (1 - \right. \right.$$

$$- 4 \operatorname{cn}^2 \psi_t) \Big) E \Bigg) \operatorname{sn} \psi_t \Bigg) + \frac{(\alpha + E)(\operatorname{cn}^2 \psi_0 (\alpha - 4E) + 3E)}{3\alpha^3 \operatorname{cn}^2 \psi_0} t.$$

Параметризация геодезических в случае C_3

$$x_1(t) = \frac{2 \operatorname{sgn} c (\operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_0)}{\alpha \operatorname{cn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_0 (1 - k_2)},$$

$$x_2(t) = \frac{2}{\alpha(1 - k_2)} \left(\operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sc} \psi_t - \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sc} \psi_0 - E(\psi_t) + E(\psi_0) \right) + t,$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\operatorname{sgn} c}{\alpha(1 - k_2)} \left(\frac{2}{\alpha(1 - k_2)} \left((\operatorname{dc} \psi_t + \operatorname{dc} \psi_0) (E(\psi_t) - E(\psi_0)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\operatorname{dc} \psi_0 \operatorname{dc} \psi_t + k_2) (\operatorname{sn} \psi_0 - \operatorname{sn} \psi_t) \right) - (\operatorname{dc} \psi_0 + \operatorname{dc} \psi_t) t \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{2(E(\psi_t) - E(\psi_0)) (6 - 6k_2 + \operatorname{cn}^2 \psi_0 (1 + 7k_2))}{3\alpha^3 \operatorname{cn}^2 \psi_0 (-1 + k_2)^3} + \frac{2(3 \operatorname{dn}^2 \psi_0 + \operatorname{cn}^2 \psi_0)}{3\alpha^2 \operatorname{cn}^2 \psi_0 (-1 + k_2)^2} t + \\ &\quad + \frac{2}{3\alpha^3 \operatorname{cn}^3 \psi_t \operatorname{cn}^3 \psi_0 (-1 + k_2)^3} \left(\operatorname{cn}^3 \psi_t \operatorname{dn} \psi_0 (2 + \operatorname{cn}^2 \psi_0 - 2k_2 + 7 \operatorname{cn}^2 \psi_0 k_2) \times \right. \\ &\quad \times \operatorname{sn} \psi_0 - 6 \operatorname{cn}^2 \psi_0 \operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_0 (k_2 - 1) \operatorname{sn} \psi_t + 2 \operatorname{cn}^3 \psi_0 \operatorname{dn} \psi_t (k_2 - 1) \operatorname{sn} \psi_t - \\ &\quad \left. - \operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{cn}^2 \psi_t \operatorname{dn} \psi_t (6 - 6k_2 + \operatorname{cn}^2 \psi_0 (1 + 7k_2)) \operatorname{sn} \psi_t \right) + \frac{(x_2(t))^3}{6}, \end{aligned}$$

где $\psi_0 = \alpha \varphi_0$, $\psi_t = \alpha \varphi_t \in (-K, K)$.

Параметризация геодезических в случае C_4

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 4 \operatorname{sgn} \theta \left(\frac{e^{\psi_t}}{-1 + \alpha e^{2\psi_t}} - \frac{e^{\psi_0}}{-1 + \alpha e^{2\psi_0}} \right), \\
 x_2(t) &= \frac{4}{\alpha} \left(\frac{1}{-1 + \alpha e^{2\psi}} - \frac{1}{-1 + \alpha e^{2\psi_0}} \right) + t, \\
 y(t) &= -\operatorname{sgn} \theta \frac{2e^{\psi_0}(-1 + \alpha e^{\psi_t + \psi_0})(2 + \alpha t + e^{\psi_t - \psi_0}(\alpha t - 2))}{\alpha(-1 + \alpha e^{2\psi_0})(-1 + \alpha e^{2\psi_t})}, \\
 z(t) &= \frac{x_2^3(t)}{6} + \frac{4}{3} \left(\frac{6e^{2\psi_0}t}{(-1 + \alpha e^{2\psi_0})^2} + \frac{-1 - 9\alpha e^{2\psi_0}(-2 + \alpha e^{2\psi_0})}{\alpha\alpha(-1 + \alpha e^{2\psi_0})^3} + \right. \\
 &\quad + \frac{12(1 + \alpha e^{2\psi_0}(-1 + 2e^{\psi_t - \psi_0}))}{\alpha\alpha(-1 + \alpha e^{2\psi_0})(-1 + \alpha e^{2\psi_t})^2} - \frac{8}{\alpha\alpha(-1 + \alpha e^{2\psi_t})^3} - \\
 &\quad \left. - \frac{3(1 + \alpha e^{2\psi_0}(6 + 4e^{\psi_t - \psi_0} - \alpha e^{2\psi_0}(-1 + 4e^{\psi_t - \psi_0})))}{\alpha\alpha(-1 + \alpha e^{2\psi_0})^2(-1 + \alpha e^{2\psi_t})} \right).
 \end{aligned}$$

Параметризация геодезических в вырожденных случаях

Если $\lambda \in C_5$, то

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) = t, \quad y \equiv 0, \quad z = \frac{t^3}{6}.$$

Если $\lambda \in C_6$, то

$$\alpha = 0, \quad c \equiv \text{const} \neq 0, \quad \theta = \theta_0 - ct.$$

$$x_1(t) = \frac{\cosh(ct - \theta_0) - \cosh \theta_0}{c}, \quad x_2(t) = \frac{\sinh(ct - \theta_0) + \sinh \theta_0}{c},$$

$$y(t) = \frac{ct - \sinh(ct)}{2c^2}, \quad z(t) = \frac{4 \cosh\left(\frac{3ct}{2} - 3\theta_0\right) \sinh^3 \frac{ct}{2} - 3 \cosh \theta_0 (ct - \sinh(ct))}{6c^3}.$$

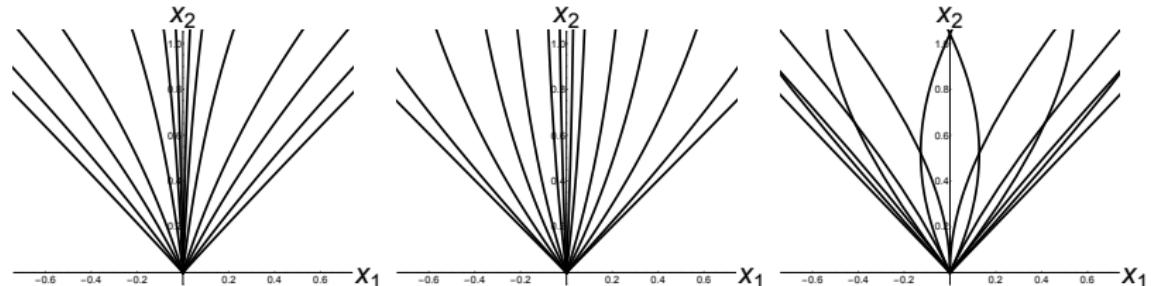
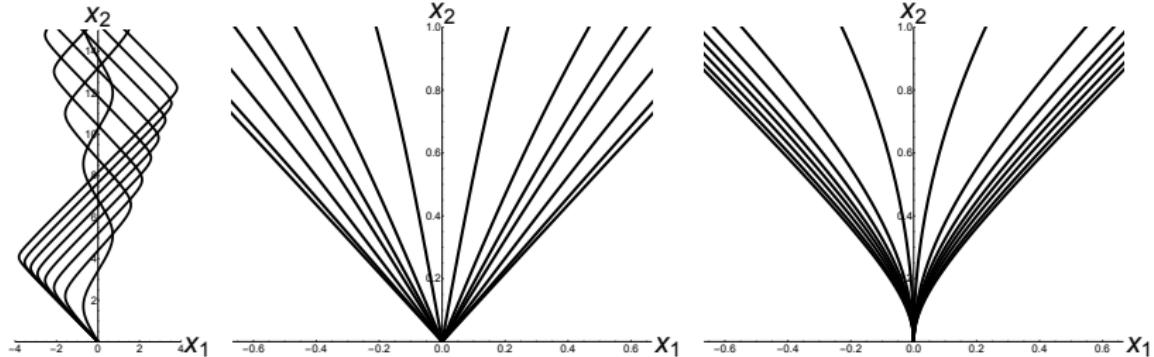
Если $\lambda \in C_7$, то

$$\alpha = 0, \quad c \equiv 0, \quad \theta \equiv \text{const}, \quad \sinh \theta = s_0,$$

$$x_1(t) = -s_0 t, \quad x_2(t) = \sqrt{1 + s_0^2} t,$$

$$y \equiv 0, \quad z(t) = \frac{(1 + 2s_0^2)\sqrt{1 + s_0^2}}{6} t.$$

Проекции геодезических на плоскость (x_1, x_2)
в случаях $C_i, i = 1, 2, 3, 4, 6$



Экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : N \rightarrow M = \mathbb{R}^4, \quad \text{Exp}(\lambda, t) = q(t),$$

$$N = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \in (0, t_{\text{supr}}(\lambda))\}.$$

$$\lambda \in C_1 \implies t_{\text{supr}}(\lambda) = \infty,$$

$$\lambda \in C_2 \cup C_3 \implies t_{\text{supr}}(\lambda) = \frac{\mathsf{K}(k) - \psi_0}{\alpha},$$

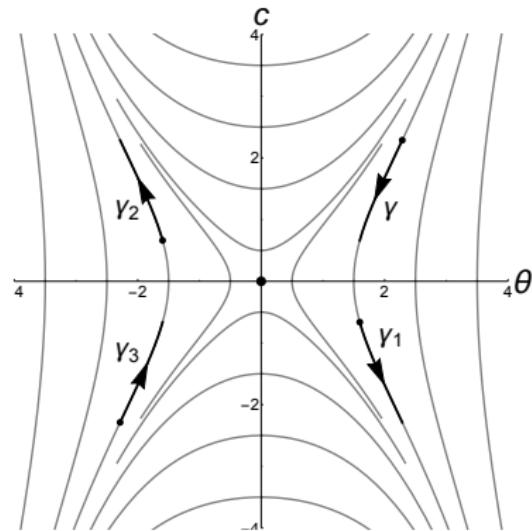
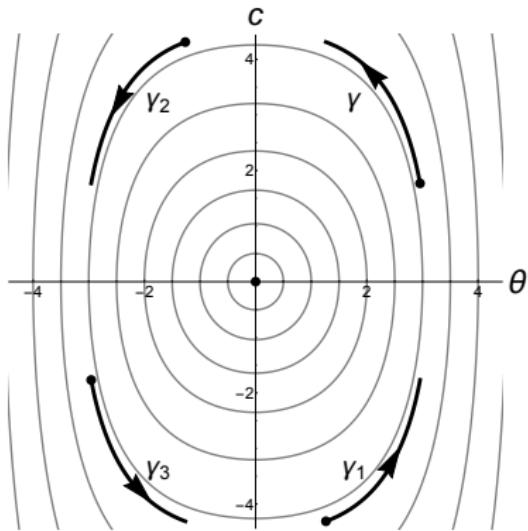
$$\lambda \in C_4, t_0 > 0 \implies t_{\text{supr}}(\lambda) = t_0,$$

$$\lambda \in C_4, t_0 < 0 \implies t_{\text{supr}}(\lambda) = \infty,$$

$$\lambda \in C_5 \cup C_6 \cup C_7 \implies t_{\text{supr}}(\lambda) = \infty,$$

$$\text{где } t_0 = -\frac{\ln \alpha}{2\sqrt{\alpha - \varphi_0}}.$$

Отражения траекторий вертикальной системы



Действие отражений ε^i в прообразе N экспоненциального отображения

$$\varepsilon^i : C \rightarrow C, \quad \varepsilon^i(\theta, c, \alpha) = (\theta^i, c^i, \alpha^i),$$

$$(\theta^1, c^1, \alpha^1) = (\theta, -c, -\alpha),$$

$$(\theta^2, c^2, \alpha^2) = (-\theta, c, \alpha),$$

$$(\theta^3, c^3, \alpha^3) = (-\theta, -c, -\alpha).$$

$$\varepsilon^i(\lambda, t) = (\varepsilon^i \circ e^{t\vec{H}_v}(\lambda), t), \quad i = 1, 2,$$

$$\varepsilon^3(\lambda, t) = (\varepsilon^3(\lambda), t),$$

где $\vec{H}_v = -c \frac{\partial}{\partial \theta} - \alpha \sinh \theta \frac{\partial}{\partial c} \in \text{Vec}(C)$ — вертикальная часть гамильтонова векторного поля.

Действие отражений ε^i в образе M
экспоненциального отображения

$$\begin{aligned}\varepsilon^i : M \rightarrow M, \varepsilon^i(q) = \varepsilon^i(x_1, x_2, y, z) = q^i = (x_1^i, x_2^i, y^i, z^i), \\ (x_1^1, x_2^1, y^1, z^1) = (x_1, x_2, -y, z - x_1 y), \\ (x_1^2, x_2^2, y^2, z^2) = (-x_1, x_2, y, z - x_1 y), \\ (x_1^3, x_2^3, y^3, z^3) = (-x_1, x_2, -y, z).\end{aligned}$$

Симметрии экспоненциального отображения и соответствующие множества Максвелла

Предложение

Отражения $\varepsilon^i, i = 1, 2, 3$, являются симметриями экспоненциального отображения, т.е.,

$$(\varepsilon^i \circ \text{Exp})(\theta, c, \alpha, t) = (\text{Exp} \circ \varepsilon^i)(\theta, c, \alpha, t), \quad (\theta, c, \alpha, t) \in N.$$

$$\lambda = (\theta, c, \alpha), \quad \lambda^i = \varepsilon^i(\lambda),$$

$$\text{MAX}^i = \{(\lambda, t) \in N \mid \lambda^i \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t)\}.$$

Описание неподвижных точек симметрий ε^i в прообразе экспоненциального отображения

Лемма

$$1. \lambda^1 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{sn} \tau = 0, & \text{если } \lambda \in C_1 \cup C_2, \\ \text{невозможно}, & \text{если } \lambda \in C_3 \cup C_4 \cup C_6, \\ c = 0, & \text{if } \lambda \in C_5 \cup C_7. \end{cases}$$

$$2. \lambda^2 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{cn} \tau = 0, & \text{если } \lambda \in C_1, \\ \text{невозможно}, & \text{если } \lambda \in C_2 \cup C_4, \\ \operatorname{sn} \tau = 0, & \text{если } \lambda \in C_3, \\ \theta = 0, & \text{если } \lambda \in \bigcup_{i=5}^7 C_i. \end{cases}$$

$$3. \lambda^3 = \lambda \iff \begin{cases} \text{невозможно}, & \text{если } \lambda \in (\bigcup_{i=1}^4 C_i) \cup C_6, \\ \theta = c = 0, & \text{если } \lambda \in C_5 \cup C_7. \end{cases}$$

Описание неподвижных точек симметрий ε^i в образе экспоненциального отображения

Лемма

1. $\varepsilon^1(q) = q \iff y = 0.$
2. $\varepsilon^2(q) = q \iff x_1 = 0.$
3. $\varepsilon^3(q) = q \iff x_1^2 + y^2 = 0.$

Исследование множеств Максвелла MAX¹, MAX² в случае $\lambda \in C_1$

$$x_1 = \frac{2\sqrt{2(\alpha + E)} \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau \operatorname{sn} p}{\alpha(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 \tau)},$$

$$y = \frac{2\sqrt{2(\alpha + E)} \operatorname{sn} \tau f_1(p)}{\alpha^2 \operatorname{ae}(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 \tau)},$$

$$f_1(p) = \alpha p \operatorname{cn} p \operatorname{dn} p + \operatorname{ae}^2(2 \operatorname{cn} p \operatorname{dn} p E(p) - (1 + k^2) \operatorname{sn} p + 2k^2 \operatorname{sn}^3 p).$$

$$\text{MAX}^1 \cap N_1 = \{\nu \in N_1 \mid y = 0, \operatorname{sn} \tau \neq 0\} = \{\nu \in N_1 \mid f_1(p) = 0\},$$

$$\text{MAX}^2 \cap N_1 = \{\nu \in N_1 \mid x_1 = 0, \operatorname{cn} \tau \neq 0\} = \{\nu \in N_1 \mid \operatorname{sn} p = 0\},$$

где $\nu = (\tau, p, E, \alpha)$.

$$t_{\text{MAX}^2}(\lambda) \leq t_{\text{MAX}^1}(\lambda)?$$

Исследование множеств Максвелла MAX¹, MAX² в случае $\lambda \in C_2$

$$x_1 = -\frac{2 \operatorname{sgn} \theta \sqrt{2} \sqrt{-\alpha - E} \operatorname{dn} \tau \operatorname{cn} p \operatorname{sn} p}{\alpha (\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 p \operatorname{dn}^2 \tau)},$$

$$y = \frac{2 \operatorname{sgn} \theta \sqrt{2} \sqrt{-\alpha - E} \operatorname{cn} \tau \operatorname{sn} \tau f_2(p)}{\alpha^2 \operatorname{ae}(\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 p \operatorname{dn}^2 \tau)},$$

$$f_2(p) = -Ep \operatorname{dn} p - \operatorname{ae}^2(2 \operatorname{dn} p E(p) - k^2 \operatorname{cn} p \operatorname{sn} p)$$

$$\begin{aligned} \text{MAX}^1 \cap N_2 &= \{\nu \in N_2 \mid y = 0, \operatorname{sn} \tau \neq 0, \tau \in (-K, K), p \in (0, K)\} \subset \\ &\subset \{\nu \in N_2 \mid f_2(p) = 0, p \in (0, K)\}, \end{aligned}$$

$$\text{MAX}^2 \cap N_2 = \{\nu \in N_2 \mid x_1 = 0, \tau \in (-K, K), p \in (0, K)\} = \emptyset,$$

где $\nu = (\tau, p, E, \alpha)$.

Исследование множеств Максвелла $\text{MAX}^1, \text{MAX}^2$ в случае $\lambda \in C_2$

Лемма

Функция $f_2(p) > 0$ при $p \in (0, K(k)), k \in (0, 1)$.

Доказательство.

$g(p) = \ln p$ — функция сравнения. □

Предложение

$\text{MAX}^1 \cap N_2 = \emptyset$

Исследование множеств Максвелла MAX¹, MAX² в случае $\lambda \in C_3$

$$x_1 = \frac{4 \operatorname{sgn} c \operatorname{sn} p \operatorname{sn} \tau}{\alpha(\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{dn}^2 \tau \operatorname{sn}^2 p)},$$

$$y = -\frac{4 \operatorname{sgn} c \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau f_3(p)}{\alpha^2(1 - k_2)^2(\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{dn}^2 \tau \operatorname{sn}^2 p)},$$

$$f_3(p) = \operatorname{cn} p \operatorname{dn} p ((1 - k_2)p - 2E(p)) + (1 + k_2) \operatorname{sn} p - 2k_2 \operatorname{sn}^3 p.$$

$$\begin{aligned} \text{MAX}^1 \cap N_3 &= \{\nu \in N_3 \mid y = 0, \tau \in (-K, K), p \in (0, K)\} \\ &= \{\nu \in N_3 \mid f_3(p) = 0, p \in (0, K)\}, \end{aligned}$$

$$\text{MAX}^2 \cap N_3 = \{\nu \in N_3 \mid x_1 = 0, \operatorname{sn} \tau \neq 0, \tau \in (-K, K), p \in (0, K)\} = \emptyset,$$

где $\nu = (\tau, p, E, \alpha)$.

Исследование множеств Максвелла $\text{MAX}^1, \text{MAX}^2$ в случае $\lambda \in C_3$

Lemma

Функция $f_3(p) > 0$ при $p \in (0, K)$.

Доказательство.

$g(p) = \operatorname{cn} p \operatorname{dn} p$ — функция сравнения.

□

Предложение

$\text{MAX}^1 \cap N_3 = \emptyset$

Верхняя оценка на время разреза

Теорема

$$\lambda \in C_1 \implies t_{\text{cut}}(\lambda) \leq 2 K(k).$$

$$\lambda \in C_2 \cup C_3 \implies t_{\text{cut}}(\lambda) \leq \frac{K(k) - \psi_0}{\alpha}.$$

Результаты

- Рассмотрены случаи времениподобных и пространственноподобных геодезических.
- Получена параметризация экспоненциального отображения.
- Исследованы симметрии экспоненциального отображения и соответствующие множества Максвелла.
- Найдена глобальная верхняя оценка на время разреза.