

Исследование сопряженных точек в нильпотентной аппроксимации задачи о движении мобильного робота с прицепом

А.А. Ардентов

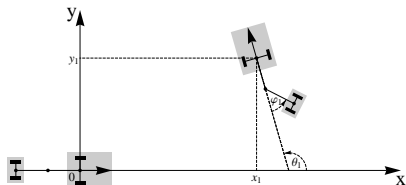
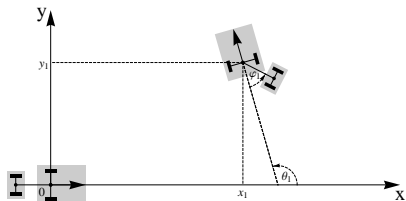
ИПС им. А. К. Айламазяна РАН
Переславль-Залесский

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Юрий Леонидович Сачков

Конференция «Управление в технических, эргатических,
организационных и сетевых системах»

10 октября 2012 г.

Задача о движении мобильного робота с прицепом



$$\dot{q} = X_1(q)u_1 + X_2(q)u_2, \quad q \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1 \times S_\varphi^1 \subset \mathbb{R}^4, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$X_1 = \left(1, 0, -\frac{y}{2}, 0\right)^T, \quad X_2 = \left(0, 1, \frac{x}{2}, \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^T.$$

$$\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$\dim \text{Lie}(X_1, X_2)(q) = 4,$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4,$$

$$[X_1, X_4] = [X_2, X_3] = [X_2, X_4] = 0.$$

Вектор роста (2, 3, 4).

Нильпотентная аппроксимация управляемых систем общего положения в 4-мерном пространстве с 2-мерным управлением
(например, система, описывающая поведение машины с прицепом)

Нильпотентная аппроксимация задачи

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$q = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0, 0)^T, \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1, v_1)^T,$$

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min \iff \int_0^{t_1} \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} dt \rightarrow \min.$$

Известные результаты для инвариантных субримановых задач на группах Ли

1 Трёхмерные группы Ли:

- группа Гейзенберга (А.М.Вершик, В.Я.Гершкович 1986),
- $SL(2)$, $SO(3)$, S^3 (У.Боскаин, Ф.Росси 2008),
- $SE(2)$ (Ю.Л.Сачков 2010).

2 5-мерная нильпотентная группа Ли с вектором роста $(2, 3, 5)$ (Ю.Л.Сачков 2006).

3 6-мерная нильпотентная группа Ли с вектором роста $(3, 6)$ (О.М. Мясниченко 2002).

Управляемость и существование оптимальных траекторий

- 1 $X_1(q), \dots, X_4(q)$ — линейно независимы
 $\forall q \in \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\text{теорема Рашевского-Чжоу}}$ система вполне управляема.
- 2 Существование оптимальных решений следует из теоремы Филлипова.

Уравнение маятника

$$\ddot{\theta} = -\alpha \sin \theta, \quad \alpha = \frac{g}{L} = \text{const} \in \mathbb{R}$$

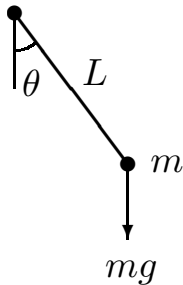


Рис.: Математический маятник при $\alpha > 0$

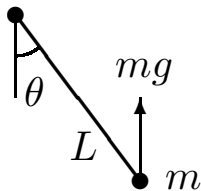


Рис.: Математический маятник при $\alpha < 0$

Стратификация фазового цилиндра маятника C

$$C = T_{q_0}^* M \cap \{H = 1/2\} = \{\lambda = (\theta, c, \alpha) \mid \theta \in S^1, c, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$$C = \bigcup_{i=1}^7 C_i, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

$$C_i^+ = C_i \cap \{\alpha > 0\}, \quad C_i^- = C_i \cap \{\alpha < 0\}, \quad i \in \{1, \dots, 5\},$$

$$C_{i+}^\pm = C_i^\pm \cap \{c > 0\}, \quad C_{i-}^\pm = C_i^\pm \cap \{c < 0\}, \quad i \in \{2, 3\}.$$

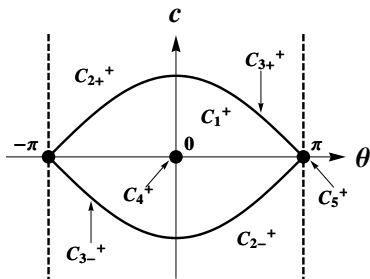


Рис.: Разбиение для $\alpha > 0$

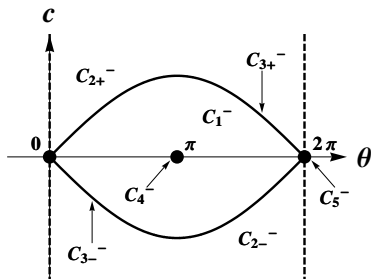
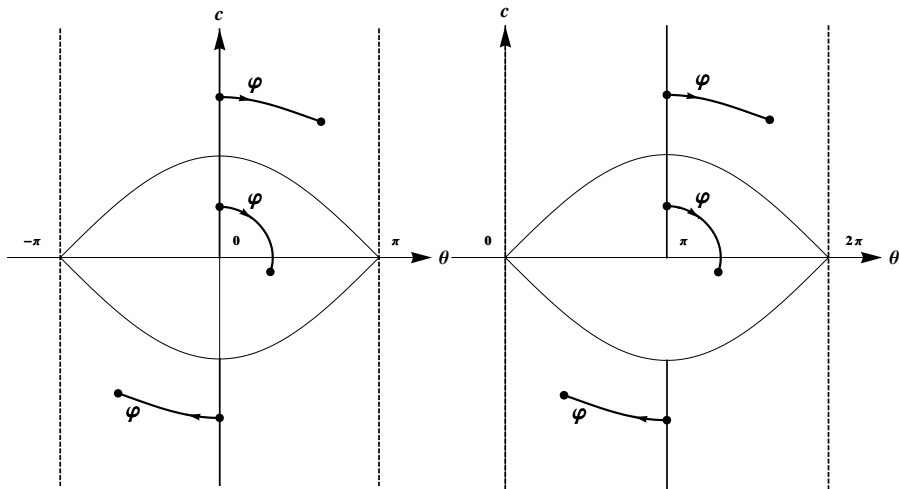


Рис.: Разбиение для $\alpha \leq 0$

Эллиптические координаты (φ, k) в фазовом цилиндре маятника



Параметризация экстремальных траекторий при $\lambda \in \cup_{i=1}^3 C_i^+$ в случае $\alpha = 1$

При $\lambda \in C_1^+$ (колебания маятника) \Rightarrow

$$x_t = 2k(\operatorname{cn} \varphi_t - \operatorname{cn} \varphi),$$

$$y_t = 2(E(\varphi_t) - E(\varphi)) - t,$$

$$z_t = 2k(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi - \frac{y_t}{2}(\operatorname{cn} \varphi_t + \operatorname{cn} \varphi)),$$

$$\begin{aligned} v_t = & \frac{y_t^3}{6} + 2k^2 \operatorname{cn}^2 \varphi y_t - 4k^2 \operatorname{cn} \varphi (\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) + \\ & + 2k^2 \left(\frac{2}{3} \operatorname{cn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t \operatorname{sn} \varphi_t - \frac{2}{3} \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi + \frac{1 - k^2}{3k^2} t + \right. \\ & \left. + \frac{2k^2 - 1}{3k^2} (E(\varphi_t) - E(\varphi)) \right). \end{aligned}$$

Растяжение α :

$$(\theta, c, \alpha, x, y, z, v, t) \mapsto \left(\theta, \frac{c}{\sqrt{\alpha}}, 1, \sqrt{\alpha}x, \sqrt{\alpha}y, \alpha z, \alpha^{\frac{3}{2}}v, \sqrt{\alpha}t\right),$$

$$(\varphi, k, \alpha) \mapsto (\sqrt{\alpha}\varphi, k, 1).$$

Отражение α :

$$(\theta, c, \alpha, x, y, z, v, t) \mapsto (\theta - \pi, c, -\alpha, -x, -y, z, -v, t),$$

$$(\varphi, k, \alpha) \mapsto (\varphi, k, -\alpha).$$

Параметризация экстремальных траекторий при $\lambda \in \cup_{i=1}^3 C_i$ в общем случае

$$(x_t, y_t, z_t, v_t)(\varphi, k, \alpha) = \left(\frac{s_1}{\sigma} x_{\sigma t}, \frac{s_1}{\sigma} y_{\sigma t}, \frac{1}{\sigma^2} z_{\sigma t}, \frac{s_1}{\sigma^3} v_{\sigma t} \right) (\sigma \varphi, k, 1),$$

где $\sigma = \sqrt{|\alpha|}$, $s_1 = \operatorname{sgn} \alpha$.

$$\lambda \in C_1 \Rightarrow$$

$$x_t = \frac{2k\sigma}{\alpha} (\text{cn}(\sigma\varphi_t) - \text{cn}(\sigma\varphi)),$$

$$y_t = \frac{2\sigma}{\alpha} (E(\sigma\varphi_t) - E(\sigma\varphi)) - \text{sgn } \alpha t,$$

$$z_t = \frac{2k}{|\alpha|} (\text{sn}(\sigma\varphi_t) \text{dn}(\sigma\varphi_t) - \text{sn}(\sigma\varphi) \text{dn}(\sigma\varphi) - \\ - \frac{\sigma k y_t}{2\alpha} (\text{cn}(\sigma\varphi_t) + \text{cn}(\sigma\varphi))),$$

$$v_t = \dots$$

Параметризация экстремальных траекторий для C_4, C_5, C_6, C_7

$$\lambda \in C_4 \Rightarrow x_t = 0, \quad y_t = t \operatorname{sgn} \alpha, \quad z_t = 0, \quad v_t = \frac{t^3}{6} \operatorname{sgn} \alpha.$$

$$\lambda \in C_5 \Rightarrow x_t = 0, \quad y_t = -t \operatorname{sgn} \alpha, \quad z_t = 0, \quad v_t = -\frac{t^3}{6} \operatorname{sgn} \alpha.$$

$$\lambda \in C_6 \Rightarrow$$

$$x_t = \frac{\cos(ct + \theta) - \cos \theta}{c}, \quad y_t = \frac{\sin(ct + \theta) - \sin \theta}{c},$$
$$z_t = \frac{ct - \sin(ct)}{2c^2}, \quad v_t = -\frac{2c \cos \theta t - 4 \sin(ct + \theta) + \sin(2ct + \theta)}{4c^3}.$$

$$\lambda \in C_7 \Rightarrow x_t = -t \sin \theta, \quad y_t = t \cos \theta, \quad z_t = 0, \quad v_t = \frac{\cos \theta}{6} t^3.$$

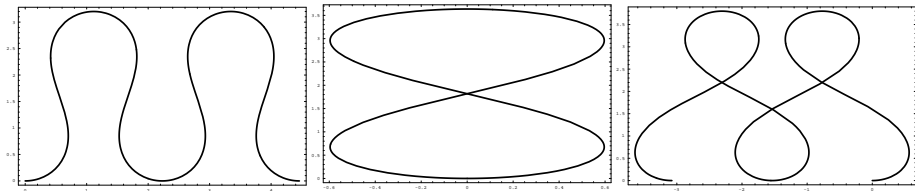


Рис.: Инфлекссионные эластики

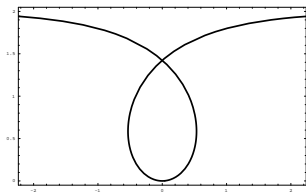


Рис.: Критическая эластика

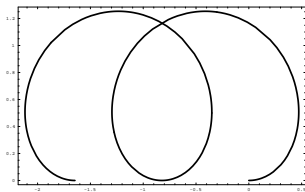


Рис.: Неинфлекссионная эластика

Экспоненциальное отображение, точки Максвелла и время разреза

$$\text{Exp} : \mathcal{C} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M = \mathbb{R}^4,$$

$$\text{Exp}(\lambda, t) = q_t,$$

$$\lambda = (\theta, c, \alpha) \in \mathcal{C}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad q_t \in M.$$

$$\text{MAX} = \{(\lambda, t) \mid \exists \tilde{\lambda} \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t)\},$$

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = \sup\{t > 0 \mid \text{Exp}(\lambda, s) \text{ оптимальна при } s \in [0, t]\},$$

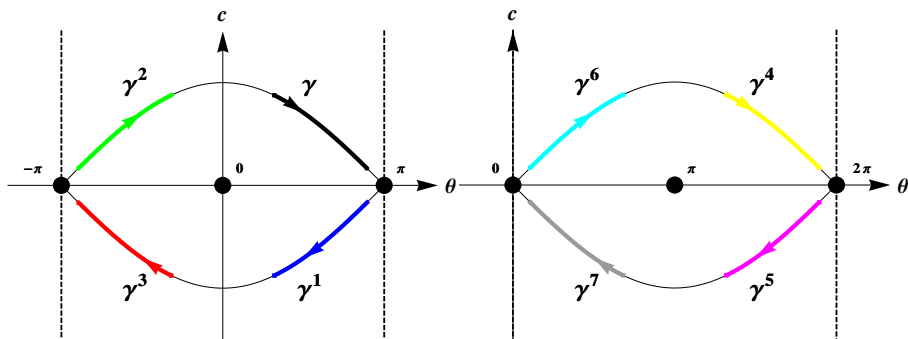
$$t_{\text{cut}}(\lambda) \leq t \text{ при } (\lambda, t) \in \text{MAX}.$$

Группа симметрий экспоненциального отображения

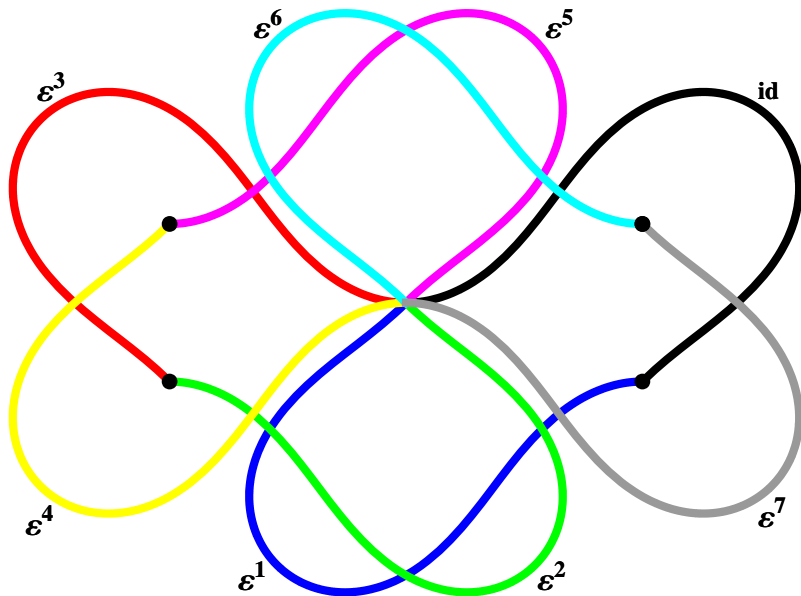
G	ε^1	ε^2	ε^3	ε^4	ε^5	ε^6	ε^7
ε^1	ld	ε^3	ε^2	ε^5	ε^4	ε^7	ε^6
ε^2		ld	ε^1	ε^6	ε^7	ε^4	ε^5
ε^3			ld	ε^7	ε^6	ε^5	ε^4
ε^4				ld	ε^1	ε^2	ε^3
ε^5					ld	ε^3	ε^2
ε^6						ld	ε^1
ε^7							ld

Таблица: Правила умножения в группе $G = \{\text{ld}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6, \varepsilon^7\}$

Отражения траекторий маятника



Отражения эластик Эйлера



$$\lambda \in C_1 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = \min(2p_z^1, 4K)\sigma,$$

$$\lambda \in C_2 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = 2Kk\sigma,$$

$$\lambda \in C_6 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = \frac{2\pi}{|c|},$$

$$\lambda \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_7 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = +\infty.$$

Теорема 1 (А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков)

Для любого $\lambda \in C$

$$t_{\text{cut}}(\lambda) \leq t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$$

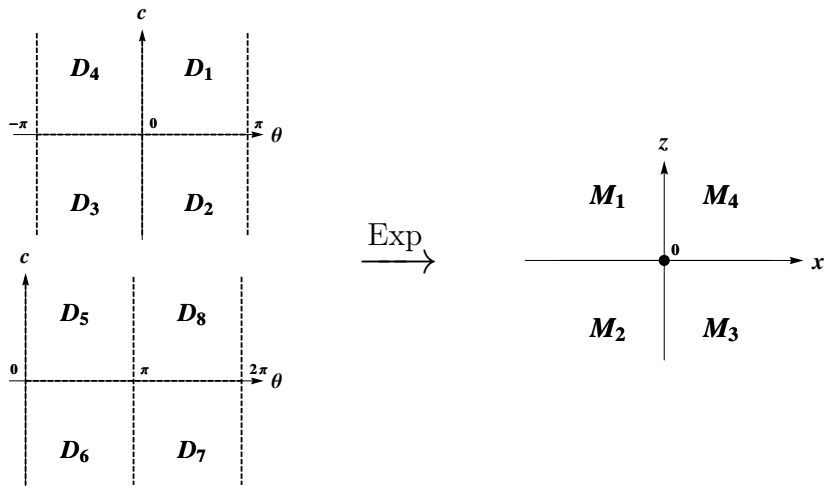
Численное решение задачи оптимального управления: Сведение к решению системы уравнений

$Y = \frac{y_t}{x_t}, Z = \frac{z_t}{x_t^2}, V = \frac{v_t}{x_t^3}$ не зависят от α .

$$Y_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad z_1 = \frac{z_1}{x_1^2}, \quad V_1 = \frac{v_1}{x_1^3}.$$

$$\begin{cases} Y(\tau, p, k) = Y_1, \\ Z(\tau, p, k) = Z_1, \\ V(\tau, p, k) = V_1. \end{cases}$$

Соответствие между областями в образе и прообразе экспоненциального отображения



Гипотеза: $\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ и $\text{Exp} : D_{i+4} \rightarrow M_i$ — диффеоморфизмы.

$d_\nu \text{Exp} : T_\nu N \rightarrow T_{q_t} M$ вырождено,

$$\frac{\partial(x, y, z, v)}{\partial(\theta, c, \alpha, t)}(\nu) = 0.$$

Теорема 2 (А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков)

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$t_{\text{MAX}}^1(\lambda) \leq t_{\text{conj}}^1(\lambda).$$

- Рассмотрена нильпотентная субриманова задача на группе Энгеля.
- Вычислены экстремальные траектории для этой задачи.
- Описаны симметрии экспоненциального отображения и соответствующие точки Максвелла.
- Получена глобальная верхняя оценка времени разреза вдоль экстремальных траекторий, на основе которой построено разбиение образа и прообраза экспоненциального отображения.
- Исследовано первое сопряженное время вдоль экстремалей. Доказано, что функция дающая верхнюю оценку времени разреза, доставляет нижнюю оценку первого сопряженного времени.
- Решение задачи сведено к решению системы из трех алгебраических уравнений.
- Разработана программы численного решения задачи.

- Ардентов А.А. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля (случай докритических колебаний маятника) // Современная математика. Фундаментальные направления, No. 42, 2011, с. 29-34.
- Ардентов А.А., Сачков Ю.Л. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Математический сборник, Т. 202, No. 11, 2011, с. 31-54.
- Ардентов А.А. Интерфейс для моделирования эластик Эйлера в программной среде Mathematica // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2012. Т. 3, № 1(10), с. 31–50.
- Ardentov A.A., Sachkov Yu.L. Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group // Journal of Mathematical Sciences (accepted), 2013, <http://arxiv.org/abs/1209.2865>