

Экстремальные траектории в субримановой задаче на группе Энгеля

А.А. Ардентов, Ю.Л. Сачков

Исследовательский Центр Процессов Управления
Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский

Международная конференция
по дифференциальным уравнениям
и динамическим системам

6 июля 2010 г.

Постановка задачи оптимального управления

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$q \in \mathbb{R}^4, \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0, 0)^T, \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1, v_1)^T,$$

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min \iff \int_0^{t_1} \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} dt \rightarrow \min.$$

Обзор результатов работы

- Параметризация экстремальные кривых.
- Исследование симметрий экспоненциального отображения для построения соответствующих множеств Максвелла.
- Исследование оптимальности экстремальных кривых: определение глобальной верхней оценки времени разреза с помощью множеств Максвелла.

Нильпотентная субриманова задача на группе Энгеля

$$X_1 = (1, 0, -\frac{y}{2}, 0)^T, \quad X_2 = (0, 1, \frac{x}{2}, \frac{x^2 + y^2}{2})^T.$$

$$\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4,$$

$$[X_1, X_4] = [X_2, X_3] = [X_2, X_4] = 0.$$

Нильпотентная аппроксимация управляемых систем общего положения в 4-мерном пространстве с 2-мерным управлением

Управляемость и существование оптимальных траекторий

1. $\forall q \in \mathbb{R}^4. X_1(q), \dots, X_4(q)$ — линейно независимы
теорема Рашевского-Чжоу \rightarrow система вполне управляема.
2. Существование оптимальных решений следует из теоремы Филлипова.

Аномальный случай принципа максимума Понтрягина

$$x = 0, \quad y = \pm t, \quad z = 0, \quad v = \pm \frac{t^3}{6}.$$

Нормальная гамильтонова система

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= c, & \theta &\in S^1, \\ \dot{c} &= -\alpha \sin \theta, & c &\in \mathbb{R}, \\ \dot{\alpha} &= 0, & \alpha &\in \mathbb{R}, \\ \dot{x} &= -\sin \theta, \\ \dot{y} &= \cos \theta, \\ \dot{z} &= \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{2}, \\ \dot{v} &= \cos \theta \frac{x^2 + y^2}{2}.\end{aligned}$$

$$E = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos \theta \in [-|\alpha|, +\infty).$$

Разбиение начального цилиндра \mathcal{C}

$$\mathcal{C} = T_{q_0}^* M \cap \{H = 1/2\} = \{\lambda = (\theta, c, \alpha) \mid \theta \in S^1, c, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^7 C_i, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

$$C_i^+ = C_i \cap \{\alpha > 0\}, \quad C_i^- = C_i \cap \{\alpha < 0\}, \quad i \in \{1, \dots, 5\},$$

$$C_{i+}^\pm = C_i^\pm \cap \{c > 0\}, \quad C_{i-}^\pm = C_i^\pm \cap \{c < 0\}, \quad i \in \{2, 3\}.$$

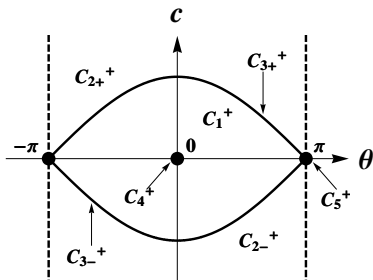


Рис.: Разбиение для $\alpha > 0$

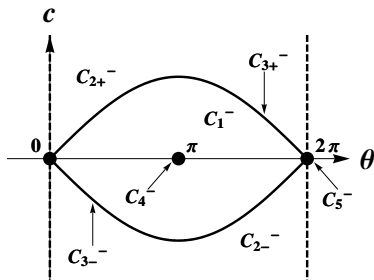


Рис.: Разбиение для $\alpha < 0$

Эллиптические координаты в C^+

$$\lambda \in C_1^+,$$

$$k = \sqrt{\frac{E + \alpha}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{c^2}{4\alpha} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \in (0, 1),$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha}\varphi),$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{dn}(\sqrt{\alpha}\varphi),$$

$$\frac{c}{2} = k\sqrt{\alpha} \operatorname{cn}(\sqrt{\alpha}\varphi),$$

$$\varphi \in [0, 4K],$$

где sn , cn , dn , E — эллиптические функции Якоби.

Уравнение маятника: $\dot{\varphi} = 1$, $\dot{k} = \dot{\alpha} = 0$.

Эллиптические координаты в C^-

Координаты на множествах C_1^- , C_2^- , C_3^- :

$$\varphi(\theta, c, \alpha) = \varphi(\theta - \pi, c, -\alpha),$$

$$k(\theta, c, \alpha) = k(\theta - \pi, c, -\alpha).$$

Параметризация экстремальных траекторий при $\lambda \in \cup_{i=1}^3 C_i^+$ в случае $\alpha = 1$

При $\lambda \in C_1^+$

$$x_t = 2k(\operatorname{cn} \varphi_t - \operatorname{cn} \varphi),$$

$$y_t = 2(E(\varphi_t) - E(\varphi)) - t,$$

$$z_t = 2k(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi - \frac{y_t}{2}(\operatorname{cn} \varphi_t + \operatorname{cn} \varphi)),$$

$$v_t = \frac{y_t^3}{6} + 2k^2 \operatorname{cn}^2 \varphi y_t - 4k^2 \operatorname{cn} \varphi (\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) + \\ + 2k^2 \left(\frac{2}{3} \operatorname{cn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t \operatorname{sn} \varphi_t - \frac{2}{3} \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi + \frac{1 - k^2}{3k^2} t + \right. \\ \left. \frac{2k^2 - 1}{3k^2} (E(\varphi_t) - E(\varphi)) \right).$$

Симметрии гамильтоновой системы

$$(\theta, c, \alpha, x, y, z, v, t) \mapsto \left(\theta, \frac{c}{\sqrt{\alpha}}, 1, \sqrt{\alpha}x, \sqrt{\alpha}y, \alpha z, \alpha^{\frac{3}{2}}v, \sqrt{\alpha}t\right),$$

$$(\varphi, k, \alpha) \mapsto (\sqrt{\alpha}\varphi, k, 1) \text{ — растяжение } \alpha.$$

$$(\theta, c, \alpha, x, y, z, v, t) \mapsto (\theta - \pi, c, -\alpha, -x, -y, z, -v, t),$$

$$(\varphi, k, \alpha) \mapsto (\varphi, k, -\alpha) \text{ — отражение } \alpha.$$

Параметризация экстремальных траекторий при
 $\lambda \in \cup_{i=1}^3 C_i$ в общем случае

$$(x_t, y_t, z_t, v_t)(\varphi, k, \alpha) = \left(\frac{s_1}{\sigma} x_{\sigma t}, \frac{s_1}{\sigma} y_{\sigma t}, \frac{1}{\sigma^2} z_{\sigma t}, \frac{s_1}{\sigma^3} v_{\sigma t} \right) (\sigma \varphi, k, 1),$$

где $\sigma = \sqrt{|\alpha|}$, $s_1 = \operatorname{sgn} \alpha$.

Общий случай $\alpha \neq 0$

$$\lambda \in C_1,$$

$$x_t = \frac{2k\sigma}{\alpha} (\operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{cn}(\sigma\varphi)),$$

$$y_t = \frac{2\sigma}{\alpha} (E(\sigma\varphi_t) - E(\sigma\varphi)) - \operatorname{sgn} \alpha t,$$

$$z_t = \frac{2k}{|\alpha|} (\operatorname{sn}(\sigma\varphi_t) \operatorname{dn}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{sn}(\sigma\varphi) \operatorname{dn}(\sigma\varphi) - \\ - \frac{\sigma ky_t}{2\alpha} (\operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) + \operatorname{cn}(\sigma\varphi))).$$

Параметризация экстремальных траекторий для C_4, C_5, C_6, C_7

$$\lambda \in C_4 \Rightarrow x_t = 0, \quad y_t = t \operatorname{sgn} \alpha, \quad z_t = 0, \quad v_t = \frac{t^3}{6} \operatorname{sgn} \alpha.$$

$$\lambda \in C_5 \Rightarrow x_t = 0, \quad y_t = -\operatorname{sgn} \alpha, \quad z_t = 0, \quad v_t = -\frac{t^3}{6} \operatorname{sgn} \alpha.$$

$$\lambda \in C_6 \Rightarrow$$

$$x_t = \frac{\cos(ct + \theta) - \cos \theta}{c}, \quad y_t = \frac{\sin(ct + \theta) - \sin \theta}{c},$$

$$z_t = \frac{ct - \sin(ct)}{2c^2}, \quad v_t = -\frac{2c \cos \theta t - 4 \sin(ct + \theta) + \sin(2ct + \theta)}{4c^3}.$$

$$\lambda \in C_7 \Rightarrow x_t = -t \sin \theta, \quad y_t = t \cos \theta, \quad z_t = 0, \quad v_t = \frac{\cos \theta}{2} t^2.$$

Экспоненциальное отображение, точки Максвелла и время разреза

$$\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M,$$

$$\text{Exp}(\lambda, t) = q_t,$$

$$\lambda = (\theta, c, \alpha) \in C, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad q_t \in M.$$

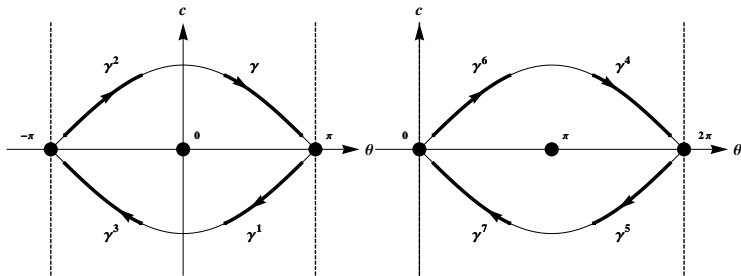
$$\text{MAX} = \{(\lambda, t) \mid \exists \tilde{\lambda} \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t)\},$$

$$t_{cut}(\lambda) = \sup\{t > 0 \mid \text{Exp}(\lambda, s) \text{ оптимальна при } s \in [0, t]\},$$

$$t_{cut}(\lambda) \leq t \text{ при } (\lambda, t) \in \text{MAX}.$$

Отражение траекторий маятника

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6, \varepsilon^7\}.$$



Отражение траекторий маятника

$$\varepsilon^1 : \gamma \mapsto \gamma^1 = \{(\theta_s^1, c_s^1, \alpha^1)\} = \{(\theta_{t-s}, -c_{t-s}, \alpha) \mid s \in [0, t]\},$$

$$\varepsilon^2 : \gamma \mapsto \gamma^2 = \{(\theta_s^2, c_s^2, \alpha^2)\} = \{(-\theta_{t-s}, c_{t-s}, \alpha) \mid s \in [0, t]\},$$

$$\varepsilon^3 : \gamma \mapsto \gamma^3 = \{(\theta_s^3, c_s^3, \alpha^3)\} = \{(-\theta_s, -c_s, \alpha) \mid s \in [0, t]\},$$

$$\varepsilon^4 : \gamma \mapsto \gamma^4 = \{(\theta_s^4, c_s^4, \alpha^4)\} = \{(\theta_s + \pi, c_s, -\alpha) \mid s \in [0, t]\},$$

$$\varepsilon^5 : \gamma \mapsto \gamma^5 = \{(\theta_s^5, c_s^5, \alpha^5)\} = \{(\theta_{t-s} + \pi, -c_{t-s}, -\alpha) \mid s \in [0, t]\},$$

$$\varepsilon^6 : \gamma \mapsto \gamma^6 = \{(\theta_s^6, c_s^6, \alpha^6)\} = \{(-\theta_{t-s} + \pi, c_{t-s}, -\alpha) \mid s \in [0, t]\},$$

$$\varepsilon^7 : \gamma \mapsto \gamma^7 = \{(\theta_s^7, c_s^7, \alpha^7)\} = \{(-\theta_s + \pi, -c_s, -\alpha) \mid s \in [0, t]\},$$

где $\gamma = \{(\theta_s, c_s, \alpha) \mid s \in [0, t]\}$.

Отражения эластик Эйлера

$$x_s^1 = x_t - x_{t-s},$$

$$x_s^2 = x_{t-s} - x_t,$$

$$x_s^3 = -x_s,$$

$$x_s^4 = -x_s,$$

$$x_s^5 = x_{t-s} - x_t,$$

$$x_s^6 = x_t - x_{t-s},$$

$$x_s^7 = x_s,$$

$$y_s^1 = y_t - y_{t-s},$$

$$y_s^2 = y_t - y_{t-s},$$

$$y_s^3 = y_s,$$

$$y_s^4 = -y_s,$$

$$y_s^5 = y_{t-s} - y_t,$$

$$y_s^6 = y_{t-s} - y_t,$$

$$y_s^7 = -y_s.$$

Отражения ε^i в прообразе экспоненциального отображения

$$\varepsilon^i : C \times \mathbb{R} \rightarrow C \times \mathbb{R},$$

$$(\theta^1, c^1, \alpha^1) = (\theta_t, -c_t, \alpha),$$

$$(\theta^3, c^3, \alpha^3) = (-\theta_t, -c_t, \alpha),$$

$$(\theta^5, c^5, \alpha^5) = (\theta_t + \pi, -c_t, -\alpha),$$

$$(\theta^7, c^7, \alpha^7) = (-\theta_t + \pi, -c_t, -\alpha).$$

$$\varepsilon^i(\theta, c, \alpha, t) = (\theta^i, c^i, \alpha^i, t),$$

$$(\theta^2, c^2, \alpha^2) = (-\theta_t, c_t, \alpha),$$

$$(\theta^4, c^4, \alpha^4) = (\theta_t + \pi, c_t, -\alpha),$$

$$(\theta^6, c^6, \alpha^6) = (-\theta_t + \pi, c_t, -\alpha),$$

Отражения ε^i в образе экспоненциального отображения

$$\varepsilon^i : M \rightarrow M, \quad \varepsilon^i(q) = \varepsilon^i(x, y, z, v) = q^i = (x^i, y^i, z^i, v^i),$$

$$(x^1, y^1, z^1, v^1) = (x, y, -z, v - xz),$$

$$(x^2, y^2, z^2, v^2) = (-x, y, z, v - xz),$$

$$(x^3, y^3, z^3, v^3) = (-x, y, -z, v),$$

$$(x^4, y^4, z^4, v^4) = (-x, y, -z, -v),$$

$$(x^5, y^5, z^5, v^5) = (-x, -y, -z, -v + xz),$$

$$(x^6, y^6, z^6, v^6) = (x, -y, z, -v + xz),$$

$$(x^7, y^7, z^7, v^7) = (x, -y, -z, -v).$$

Отражения как симметрии Exp

Предложение

Для любого $i = 1, \dots, 7$, отражение ε^i есть симметрия экспоненциального отображения, т. е.

$$\varepsilon^i \circ \text{Exp}(\theta, c, \alpha, t) = \text{Exp} \circ \varepsilon^i(\theta, c, \alpha, t),$$
$$(\theta, c, \alpha) \in C, t \in \mathbb{R}_+.$$

Неподвижные точки отражений ε^i в образе экспоненциального отображения

$$\text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t) \iff \varepsilon^i(q_t) = q_t.$$

Лемма

1. $\varepsilon^1(q) = q \iff z = 0,$
2. $\varepsilon^2(q) = q \iff x = 0,$
3. $\varepsilon^3(q) = q \iff x^2 + z^2 = 0,$
4. $\varepsilon^4(q) = q \iff x^2 + y^2 + v^2 = 0,$
5. $\varepsilon^5(q) = q \iff x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 0,$
6. $\varepsilon^6(q) = q \iff y^2 + (2v - xz)^2 = 0,$
7. $\varepsilon^7(q) = q \iff y^2 + z^2 + v^2 = 0.$

Неподвижные точки отражений ε^i в прообразе экспоненциального отображения

Предложение

Пусть $(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+$, $\varepsilon^i(\lambda, t) = (\lambda^i, t)$. Тогда:

- $\lambda^1 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{sn} \tau = 0 \text{ при } \lambda \in C_1 \\ \text{невозможно при } \lambda \in C_2 \cup C_3 \cup C_6 \end{cases}$
- $\lambda^2 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{sn} \tau = 0 \text{ при } \lambda \in C_1 \\ \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0 \text{ при } \lambda \in C_2 \\ \tau = 0 \text{ при } \lambda \in C_3 \\ 2\theta + ct = 2\pi n \text{ при } \lambda \in C_6 \end{cases}$

$$(\lambda, t) \in C_1 \cup C_3 \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad \tau = \sigma \frac{\varphi + \varphi_t}{2},$$

$$(\lambda, t) \in C_2 \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad \tau = \sigma \frac{\varphi + \varphi_t}{2k}.$$

Полное описание множеств Максвелла для $\varepsilon^1, \varepsilon^2$

Теорема

1. $\text{MAX}^1 \cap N_1 = \{(\lambda, t) \in N_1 \mid p = p_z^n(k), n \in \mathbb{N}, \text{cn}(\tau) \neq 0\}$,
2. $\text{MAX}^1 \cap N_2 = \text{MAX}^1 \cap N_3 = \text{MAX}^1 \cap N_6 = \emptyset$,
3. $\text{MAX}^2 \cap N_1 = \{(\lambda, t) \in N_1 \mid p = 2Kn, n \in \mathbb{N}, \text{sn}(\tau) \neq 0\}$,
4. $\text{MAX}^2 \cap N_2 = \{(\lambda, t) \in N_2 \mid p = Kn, n \in \mathbb{N}, \text{sn}(\tau) \text{cn}(\tau) \neq 0\}$,
5. $\text{MAX}^2 \cap N_3 = \emptyset$,
6. $\text{MAX}^2 \cap N_6 = \{(\lambda, t) \in N_6 \mid tc = 2\pi n, \theta \neq \pi k, n, k \in \mathbb{Z}\}$

$$(\lambda, t) \in C_1 \cup C_3 \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\sigma t}{2},$$

$$(\lambda, t) \in C_2 \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\sigma t}{2k}.$$

$p_z^n(k) > 0$ — n -ый корень $f_z(p) = \text{dn}(p) \text{sn}(p) + (p - 2E(p)) \text{cn}(p)$.

Оценка времени разреза

$$\lambda \in C_1 \Rightarrow \mathbf{t} = \min(2p_z^1, 4K)\sigma,$$

$$\lambda \in C_2 \Rightarrow \mathbf{t} = 2Kk\sigma,$$

$$\lambda \in C_6 \Rightarrow \mathbf{t} = \frac{2\pi}{|c|},$$

$$\lambda \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_7 \Rightarrow \mathbf{t} = +\infty.$$

Теорема

Для любого $\lambda \in C$

$$t_{cut}(\lambda) \leq \mathbf{t}(\lambda)$$

Заключение

- Рассмотрена нильпотентная субриманова задача на группе Энгеля.
- Вычислены экстремальные траектории для этой задачи.
- Вычислены симметрии экспоненциального отображения и соответствующие точки Максвелла.
- Получена глобальная верхняя оценка времени разреза вдоль экстремальных траекторий.
- В дальнейшем планируется исследование оптимальности всех экстремальных траекторий и написание программы для вычисления оптимальных траекторий для субримановой задачи на группе Энгеля, а также применение результатов к решению задачи управления для систем в 4-мерном пространстве с 2-мерным управлением на основе метода нильпотентной аппроксимации.