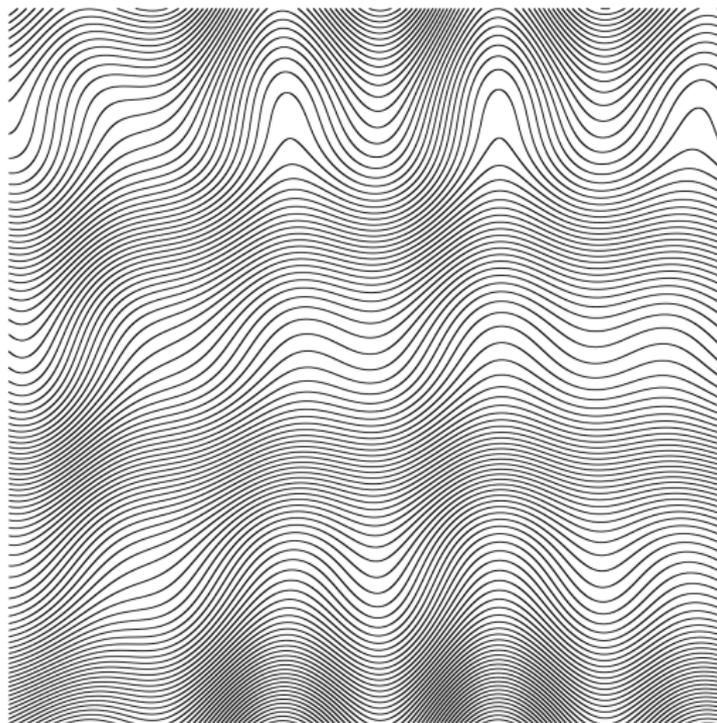


Восстановление поврежденных изображений на основе минимизации субримановой длины на группе движений плоскости

А.А. Ардентов, Ю.Л. Сачков

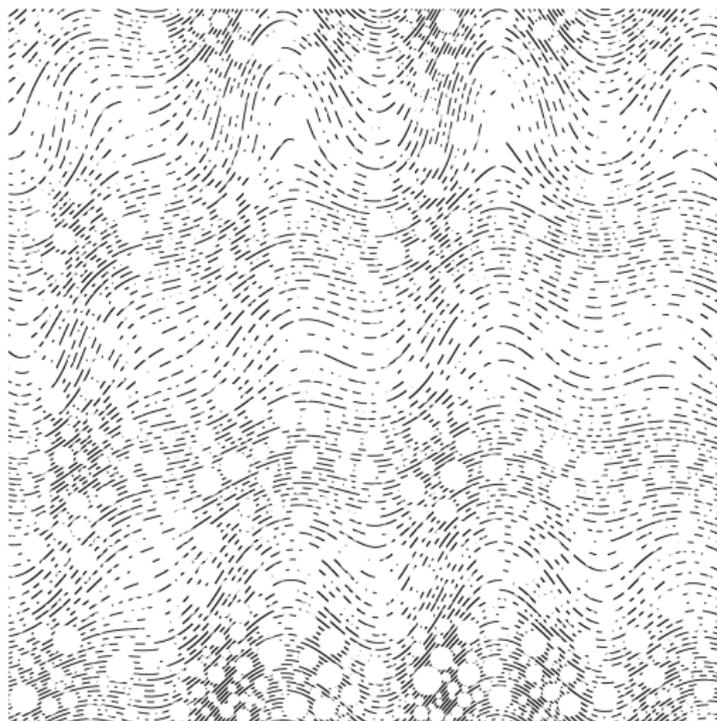
ИПС им. А.К. Айламазяна РАН
Переславль-Залесский

Международная конференция по математической теории
управления и механике
4 июля 2011 г.



Линии уровня $f : D \rightarrow [0, 1]$.

Поврежденное изображение



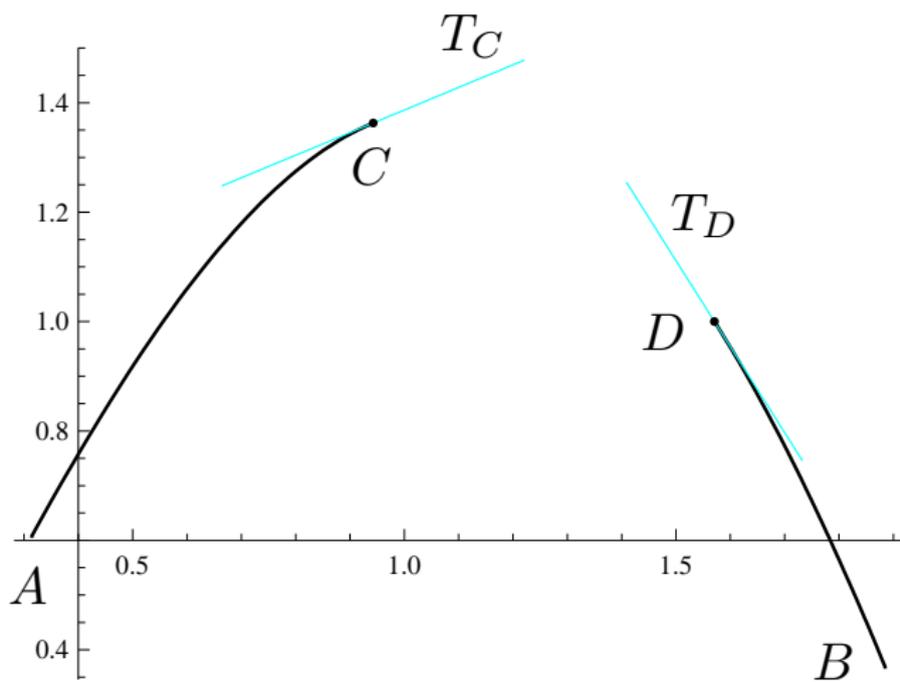
$O_1, \dots, O_N \subset D$ — области повреждения.

$$f : D \setminus (\bigcup_{i=1}^N O_i) \rightarrow [0, 1]$$

- f — гладкая функция.
- f не имеет особых точек в областях O_1, \dots, O_N .
- O_1, \dots, O_N — круги.
- Использование вариационного принципа:

$$\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min.$$

Граничные условия



$$\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \alpha^2 \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min, \quad \alpha > 0.$$

$$x = \alpha \tilde{x},$$

$$y = \alpha \tilde{y},$$

$$\theta = \tilde{\theta}.$$

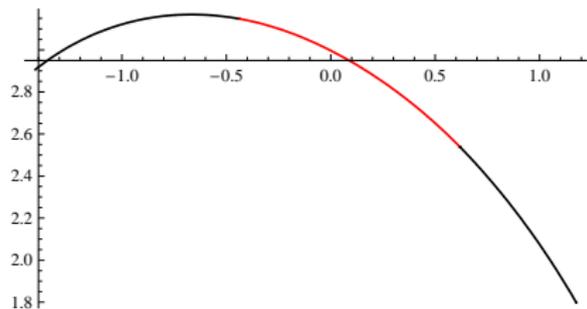


Рис.: Выпуклая изофота

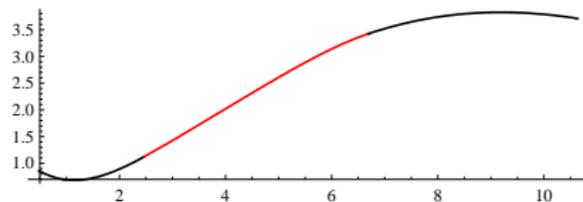
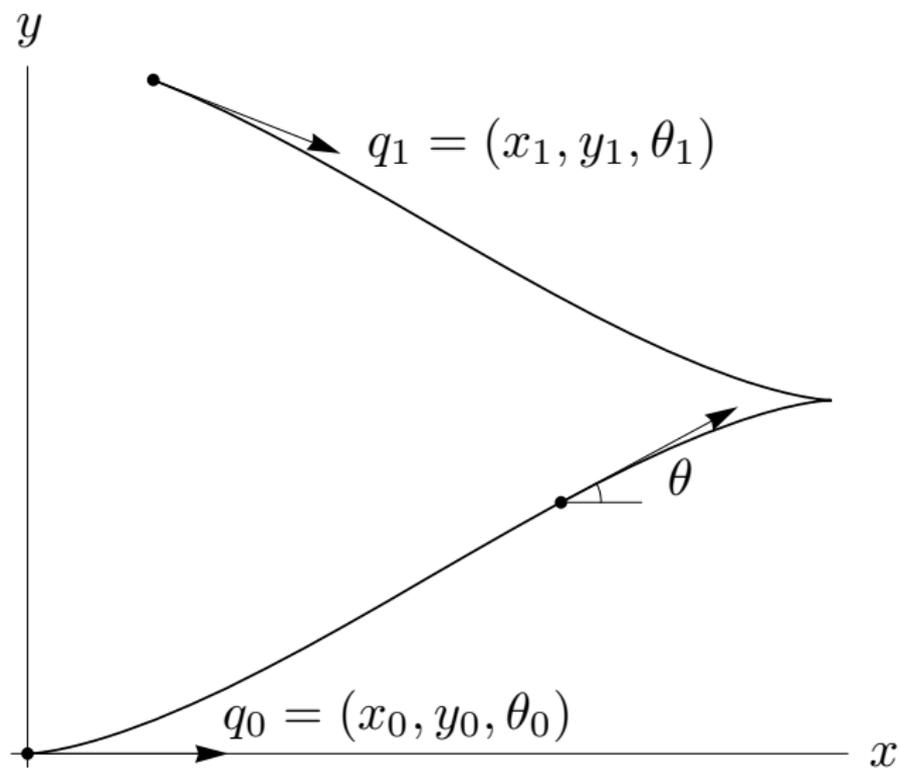


Рис.: Изофота с точкой перегиба

Постановка задачи оптимального управления



Задача оптимального управления

$$\dot{x} = u_1 \cos \theta,$$

$$\dot{y} = u_1 \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = u_2,$$

$$q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1),$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + \alpha^2 u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Математический маятник и разбиение фазового цилиндра

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= c, \\ \dot{c} &= -\sin \gamma.\end{aligned}$$

$$C = \bigcup_{i=1}^5 C_i,$$

$$C_1 = \{\lambda \in C \mid E \in (-1, 1)\},$$

$$C_2 = \{\lambda \in C \mid E \in (1, +\infty)\},$$

$$C_3 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c \neq 0\},$$

$$C_4 = \{\lambda \in C \mid E = -1\} = \{(\gamma, c) \in C \mid \gamma = 2\pi n, c = 0\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$C_5 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c = 0\} = \{(\gamma, c) \in C \mid \gamma = \pi + 2\pi n, c = 0\}.$$

$$\text{Exp} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{M},$$

$$\tilde{M} = \cup_{i=1}^8 M_i, \quad M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i \neq j,$$

$$\tilde{N} = \cup_{i=1}^8 D_i, \quad D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i \neq j,$$

$\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ являются диффеоморфизмами

Численно решает систему из трех алгебраических уравнений в указанной подобласти $D_i \cap C_j$:

$$\text{Exp}(\nu) = q_1, \quad q_1 \in M_i, \quad \nu \in D_i \cap C_j, \quad j \in \{1, 2\}$$

`maxiteration, maxiterrnd` $\in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$

Численно находит параметры, определяющие поврежденную изофоту $(x(t), y(t))$ по граничному условию $q_1 = (x_1, y_1, \theta_1)$.

Найденная восстанавливающая кривая может иметь **точки возврата**.

Подбирает $\alpha > 0$, что соответствующая $(x(t), y(t))$ не имеет точек возврата (т. е. $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0$).

$$\alpha_{\text{init}} = 0.6 \frac{\pi - |\theta_1 - \pi| + 0.7 \frac{|y_1|}{|x_1 + 0.2|}}{0.05 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + 0.2.$$

Восстанавливает все изофоты в подобласти O_k , $k = 1, \dots, N$.

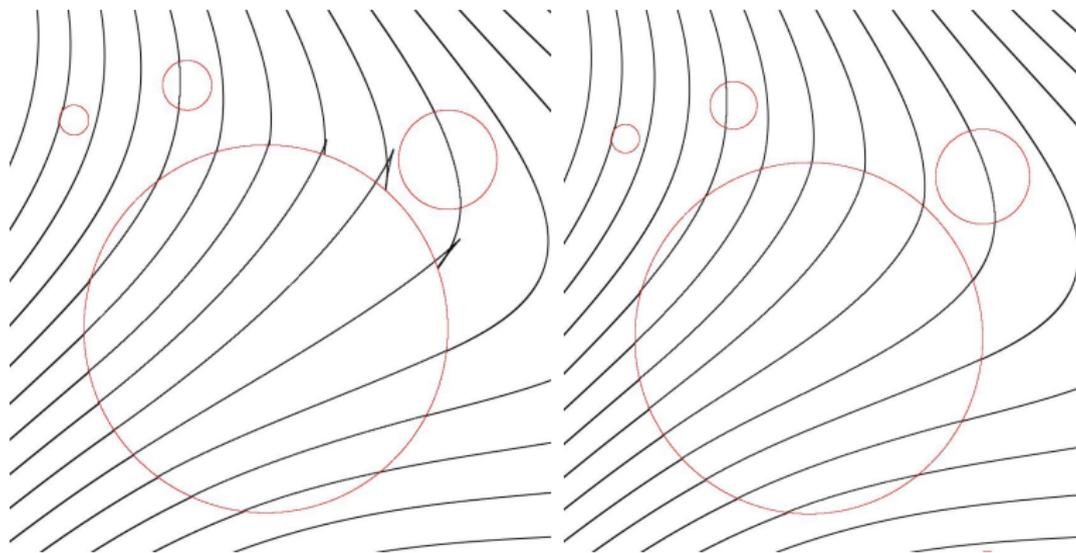
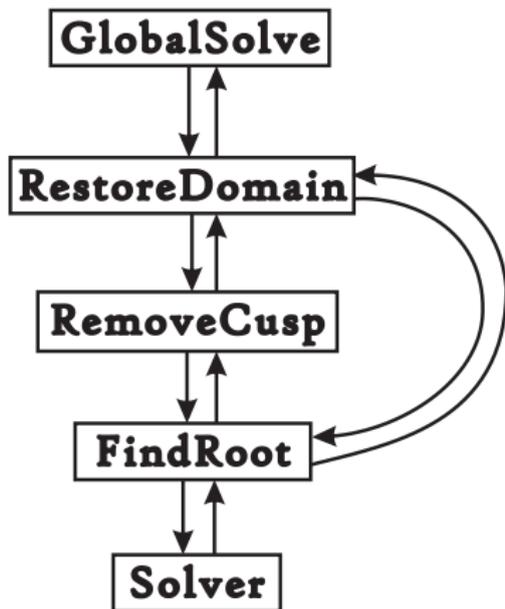


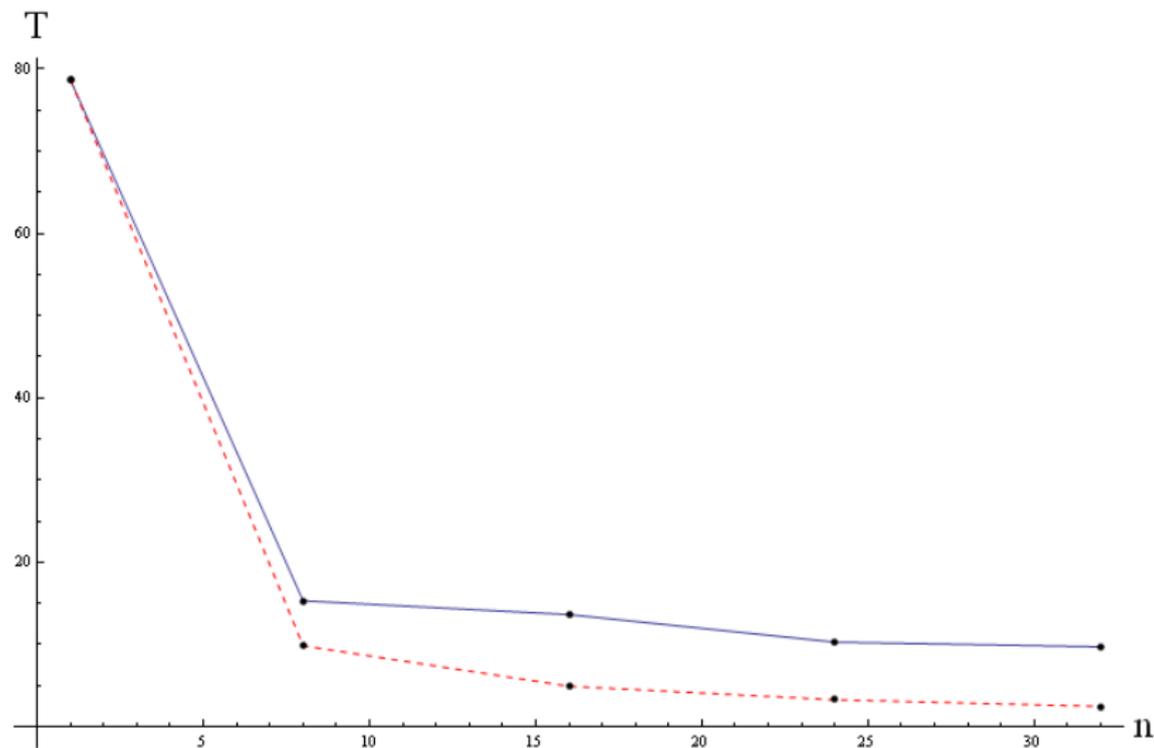
Рис.: Изображение с точками возврата

Рис.: Изображение без точек возврата

Общая структура алгоритма восстановления изображения



Параллельный алгоритм



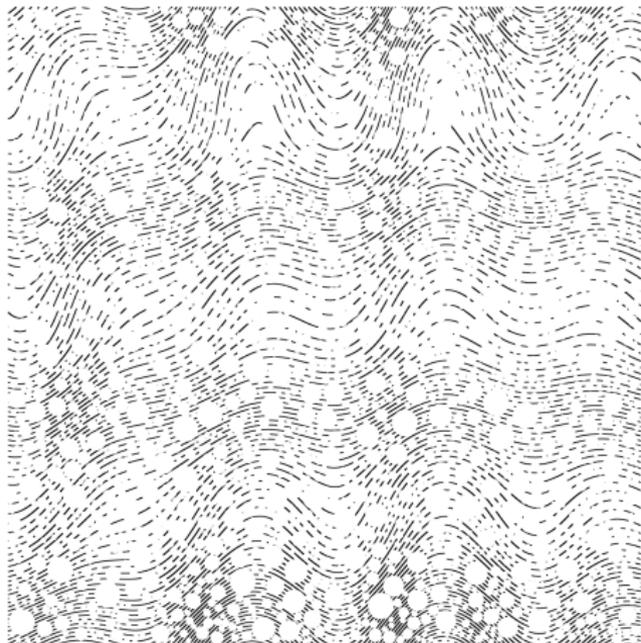


Рис.: Поврежденное изображение

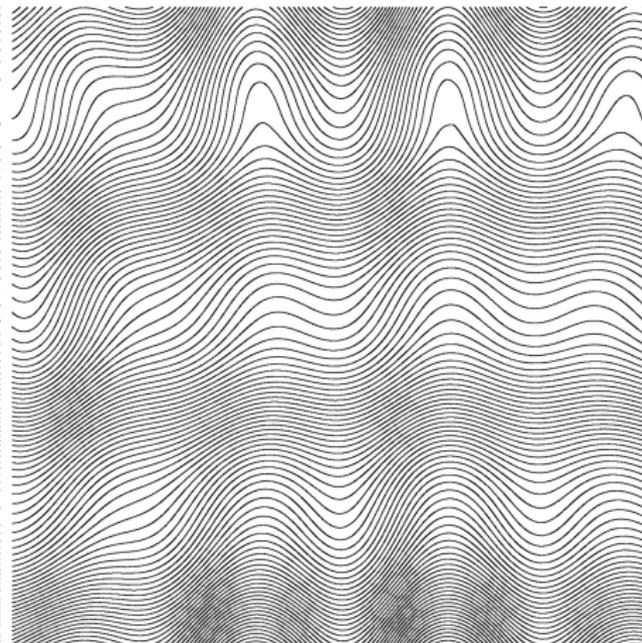


Рис.: Восстановленное изображение

Научно-техническая программа Союзного государства «Разработка и использование программно-аппаратных средств Грид-технологий перспективных высокопроизводительных (суперкомпьютерных) вычислительных систем семейства «СКИФ» (шифр «СКИФ-ГРИД»):

Проект «Система восстановления поврежденных изображений в среде TSim и gridMathematica», 2008-2010 г.

Программный комплекс для восстановления поврежденных изображений «OptimalInpainting».