

Оптимальность траекторий в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля

А.А. Ардентов

ИПС им. А. К. Айламазяна РАН

Переславль-Залесский

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Юрий Леонидович Сачков

Третья традиционная школа

«Управление, информация и оптимизация»

12–19 июня 2011 г.

Постановка задачи оптимального управления

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$q = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0, 0)^T, \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1, v_1)^T,$$

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min \iff \int_0^{t_1} \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} dt \rightarrow \min.$$

Обзор результатов работы

- Параметризация экстремальных кривых.
- Исследование симметрий экспоненциального отображения для построения соответствующих множеств Максвелла.
- Исследование оптимальности экстремальных кривых: определение глобальной верхней оценки времени разреза с помощью множеств Максвелла.
- Исследование первого сопряженного времени вдоль экстремалей.
- Алгоритм и программа численного решения задачи оптимального управления (начало реализации).

Известные результаты для инвариантных субримановых задач на группах Ли

1. Трехмерные группы Ли:

- группа Гейзенберга (А.М.Вершик, В.Я.Гершкович 1986),
- $SL(2)$, $SO(3)$, S^3 (У.Боскаин, Ф.Росси 2008),
- $SE(2)$ (Ю.Л.Сачков 2010).

2. 5-мерная нильпотентная группа Ли с вектором роста $(2, 3, 5)$ (Ю.Л.Сачков 2006).

3. 6-мерная нильпотентная группа Ли с вектором роста $(3, 6)$ (О.М. Мясниченко 2002).

Нильпотентная субриманова задача на группе Энгеля

$$X_1 = \left(1, 0, -\frac{y}{2}, 0\right)^T, \quad X_2 = \left(0, 1, \frac{x}{2}, \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^T.$$

$$\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$\dim \text{Lie}(X_1, X_2)(q) = 4,$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4,$$

$$[X_1, X_4] = [X_2, X_3] = [X_2, X_4] = 0.$$

Вектор роста (2, 3, 4).

Нильпотентная аппроксимация управляемых систем общего положения в 4-мерном пространстве с 2-мерным управлением (например, система, описывающая поведение машины с прицепом)

Управляемость и существование оптимальных траекторий

1. $X_1(q), \dots, X_4(q)$ — линейно независимы
 $\forall q \in \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\text{теорема Рашевского-Чжоу}}$ система вполне управляема.
2. Существование оптимальных решений следует из теоремы Филлипова.

Нормальная гамильтонова система

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= c, & \theta &\in S^1, \\ \dot{c} &= -\alpha \sin \theta, & c &\in \mathbb{R}, \\ \dot{\alpha} &= 0, & \alpha &\in \mathbb{R}, \\ \dot{x} &= -\sin \theta, \\ \dot{y} &= \cos \theta, \\ \dot{z} &= \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{2}, \\ \dot{v} &= \cos \theta \frac{x^2 + y^2}{2}.\end{aligned}$$

$$E = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos \theta \in [-|\alpha|, +\infty).$$

Уравнение маятника и физический смысл параметра α

$$\ddot{\theta} = -\alpha \sin \theta, \quad \alpha = \frac{g}{L} = \text{const} \in \mathbb{R}$$

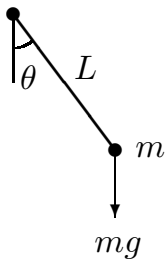


Рис.: Математический маятник при $\alpha > 0$

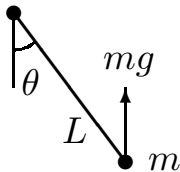


Рис.: Математический маятник при $\alpha < 0$

Стратификация фазового цилиндра маятника C

$$C = T_{q_0}^* M \cap \{H = 1/2\} = \{\lambda = (\theta, c, \alpha) \mid \theta \in S^1, c, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$$C = \bigcup_{i=1}^7 C_i, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

$$C_i^+ = C_i \cap \{\alpha > 0\}, \quad C_i^- = C_i \cap \{\alpha < 0\}, \quad i \in \{1, \dots, 5\},$$

$$C_{i+}^\pm = C_i^\pm \cap \{c > 0\}, \quad C_{i-}^\pm = C_i^\pm \cap \{c < 0\}, \quad i \in \{2, 3\}.$$

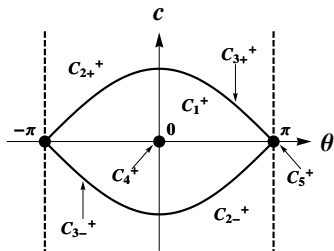


Рис.: Разбиение для $\alpha > 0$

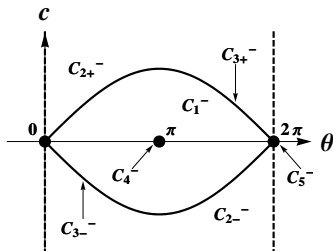
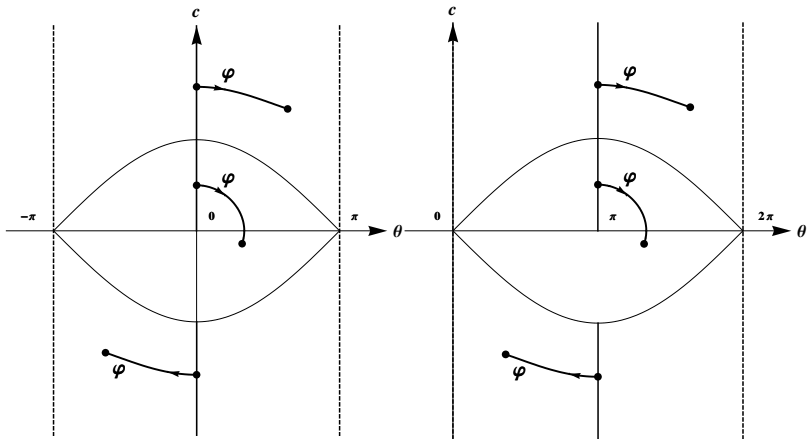


Рис.: Разбиение для $\alpha < 0$

Эллиптические координаты (φ, k) в фазовом цилиндре маятника



Параметризация экстремальных траекторий при $\lambda \in \cup_{i=1}^3 C_i^+$ в случае $\alpha = 1$

При $\lambda \in C_1^+$ (колебания маятника) \Rightarrow

$$x_t = 2k(\operatorname{cn} \varphi_t - \operatorname{cn} \varphi),$$

$$y_t = 2(E(\varphi_t) - E(\varphi)) - t,$$

$$z_t = 2k(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi - \frac{y_t}{2}(\operatorname{cn} \varphi_t + \operatorname{cn} \varphi)),$$

$$v_t = \frac{y_t^3}{6} + 2k^2 \operatorname{cn}^2 \varphi y_t - 4k^2 \operatorname{cn} \varphi (\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) + \\ + 2k^2 \left(\frac{2}{3} \operatorname{cn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t \operatorname{sn} \varphi_t - \frac{2}{3} \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi + \frac{1 - k^2}{3k^2} t + \right. \\ \left. + \frac{2k^2 - 1}{3k^2} (E(\varphi_t) - E(\varphi)) \right).$$

Симметрии гамильтоновой системы

Растяжение α :

$$(\theta, c, \alpha, x, y, z, v, t) \mapsto \left(\theta, \frac{c}{\sqrt{\alpha}}, 1, \sqrt{\alpha}x, \sqrt{\alpha}y, \alpha z, \alpha^{\frac{3}{2}}v, \sqrt{\alpha}t\right),$$

$$(\varphi, k, \alpha) \mapsto (\sqrt{\alpha}\varphi, k, 1).$$

Отражение α :

$$(\theta, c, \alpha, x, y, z, v, t) \mapsto (\theta - \pi, c, -\alpha, -x, -y, z, -v, t),$$

$$(\varphi, k, \alpha) \mapsto (\varphi, k, -\alpha).$$

Параметризация экстремальных траекторий при
 $\lambda \in \cup_{i=1}^3 C_i$ в общем случае

$$(x_t, y_t, z_t, v_t)(\varphi, k, \alpha) = \left(\frac{s_1}{\sigma} x_{\sigma t}, \frac{s_1}{\sigma} y_{\sigma t}, \frac{1}{\sigma^2} z_{\sigma t}, \frac{s_1}{\sigma^3} v_{\sigma t} \right) (\sigma \varphi, k, 1),$$

где $\sigma = \sqrt{|\alpha|}$, $s_1 = \operatorname{sgn} \alpha$.

Общий случай $\alpha \neq 0$

$$\lambda \in C_1 \Rightarrow$$

$$x_t = \frac{2k\sigma}{\alpha}(\operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{cn}(\sigma\varphi)),$$

$$y_t = \frac{2\sigma}{\alpha}(\mathbb{E}(\sigma\varphi_t) - \mathbb{E}(\sigma\varphi)) - \operatorname{sgn} \alpha t,$$

$$z_t = \frac{2k}{|\alpha|}(\operatorname{sn}(\sigma\varphi_t) \operatorname{dn}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{sn}(\sigma\varphi) \operatorname{dn}(\sigma\varphi) - \\ - \frac{\sigma ky_t}{2\alpha}(\operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) + \operatorname{cn}(\sigma\varphi))),$$

$$v_t = \dots$$

Параметризация экстремальных траекторий для C_4, C_5, C_6, C_7

$$\lambda \in C_4 \Rightarrow x_t = 0, \quad y_t = t \operatorname{sgn} \alpha, \quad z_t = 0, \quad v_t = \frac{t^3}{6} \operatorname{sgn} \alpha.$$

$$\lambda \in C_5 \Rightarrow x_t = 0, \quad y_t = -t \operatorname{sgn} \alpha, \quad z_t = 0, \quad v_t = -\frac{t^3}{6} \operatorname{sgn} \alpha.$$

$$\lambda \in C_6 \Rightarrow$$

$$x_t = \frac{\cos(ct + \theta) - \cos \theta}{c}, \quad y_t = \frac{\sin(ct + \theta) - \sin \theta}{c},$$

$$z_t = \frac{ct - \sin(ct)}{2c^2}, \quad v_t = -\frac{2c \cos \theta t - 4 \sin(ct + \theta) + \sin(2ct + \theta)}{4c^3}.$$

$$\lambda \in C_7 \Rightarrow x_t = -t \sin \theta, \quad y_t = t \cos \theta, \quad z_t = 0, \quad v_t = \frac{\cos \theta}{6} t^3.$$

Эйлеровы эластики

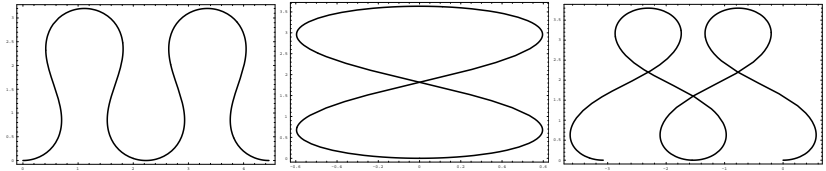


Рис.: Инфлекссионные эластики

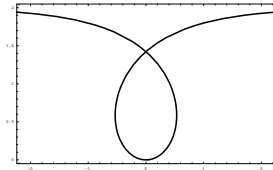


Рис.: Критическая эластика

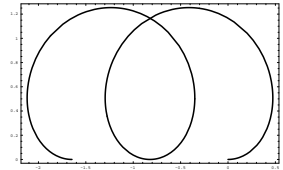


Рис.: Неинфлекссионная эластика

Экспоненциальное отображение, точки Максвелла и время разреза

$$\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M = \mathbb{R}^4,$$

$$\text{Exp}(\lambda, t) = q_t,$$

$$\lambda = (\theta, c, \alpha) \in C, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad q_t \in M.$$

$$\text{MAX} = \{(\lambda, t) \mid \exists \tilde{\lambda} \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t)\},$$

$$t_{cut}(\lambda) = \sup\{t > 0 \mid \text{Exp}(\lambda, s) \text{ оптимальна при } s \in [0, t]\},$$

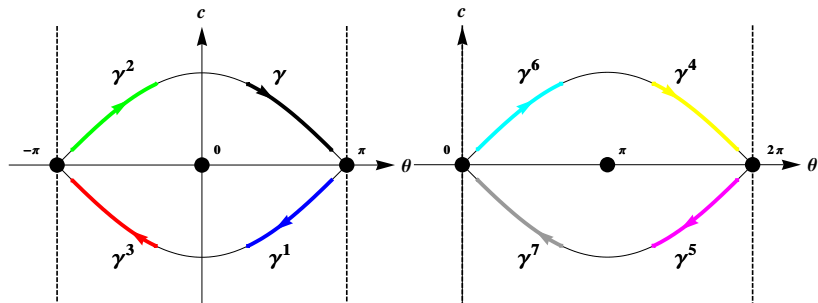
$$t_{cut}(\lambda) \leq t \text{ при } (\lambda, t) \in \text{MAX}.$$

Группа симметрий экспоненциального отображения

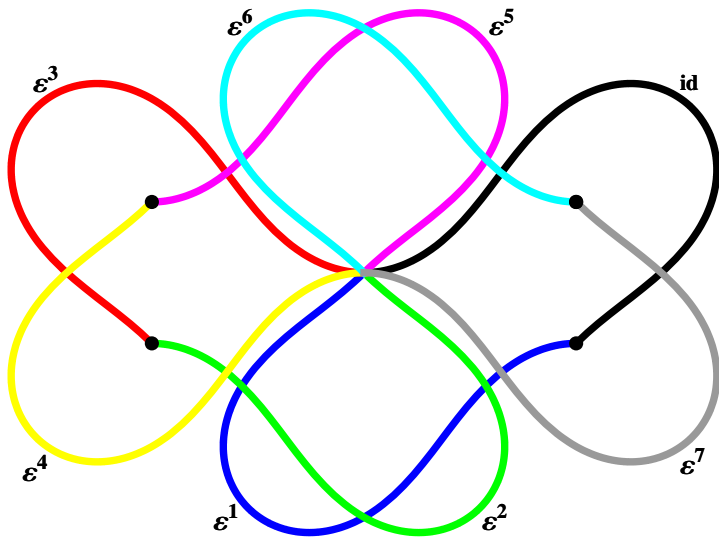
G	ε^1	ε^2	ε^3	ε^4	ε^5	ε^6	ε^7
ε^1	ld	ε^3	ε^2	ε^5	ε^4	ε^7	ε^6
ε^2		ld	ε^1	ε^6	ε^7	ε^4	ε^5
ε^3			ld	ε^7	ε^6	ε^5	ε^4
ε^4				ld	ε^1	ε^2	ε^3
ε^5					ld	ε^3	ε^2
ε^6						ld	ε^1
ε^7							ld

Таблица: Правила умножения в группе $G = \{\text{ld}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6, \varepsilon^7\}$

Отражения траекторий маятника



Отражения эластик Эйлера



Отражения как симметрии Exp

Предложение

Отражение ε^i есть симметрия экспоненциального отображения для любого $i = 1, \dots, 7$, т. е.

$$\varepsilon^i \circ \text{Exp}(\theta, c, \alpha, t) = \text{Exp} \circ \varepsilon^i(\theta, c, \alpha, t), \\ (\theta, c, \alpha) \in C, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\text{MAX}^i = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid \lambda^i \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t)\}, \\ \lambda = (\theta, c, \alpha), \quad \lambda^i = (\theta^i, c^i, \alpha^i) = \varepsilon^i(\lambda).$$

Неподвижные точки отражений ε^i в образе экспоненциального отображения

$$\text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t) \iff \varepsilon^i(q_t) = q_t.$$

Лемма

1. $\varepsilon^1(q) = q \iff z = 0,$
2. $\varepsilon^2(q) = q \iff x = 0,$
3. $\varepsilon^3(q) = q \iff x^2 + z^2 = 0,$
4. $\varepsilon^4(q) = q \iff x^2 + y^2 + v^2 = 0,$
5. $\varepsilon^5(q) = q \iff x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 0,$
6. $\varepsilon^6(q) = q \iff y^2 + (2v - xz)^2 = 0,$
7. $\varepsilon^7(q) = q \iff y^2 + z^2 + v^2 = 0.$

Неподвижные точки отражений ε^i в прообразе экспоненциального отображения

Предложение

Пусть $(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+$, $\varepsilon^i(\lambda, t) = (\lambda^i, t)$. Тогда:

$$1. \lambda^1 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{cn} \tau = 0 \text{ при } \lambda \in C_1 \\ \text{невозможно при } \lambda \in C_2 \cup C_3 \cup C_6 \end{cases}$$

$$2. \lambda^2 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{sn} \tau = 0 \text{ при } \lambda \in C_1 \\ \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0 \text{ при } \lambda \in C_2 \\ \tau = 0 \text{ при } \lambda \in C_3 \\ 2\theta + ct = 2\pi n \text{ при } \lambda \in C_6 \end{cases}$$

$$(\lambda, t) \in C_1 \cup C_3 \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad \tau = \sigma \frac{\varphi + \varphi_t}{2},$$

$$(\lambda, t) \in C_2 \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad \tau = \sigma \frac{\varphi + \varphi_t}{2k}.$$

Полное описание множеств Максвелла для $\varepsilon^1, \varepsilon^2$

Теорема

1. $\text{MAX}^1 \cap N_1 = \{(\lambda, t) \in N_1 \mid p = p_z^n(k), n \in \mathbb{N}, \text{cn}(\tau) \neq 0\}$,
2. $\text{MAX}^1 \cap N_2 = \text{MAX}^1 \cap N_3 = \text{MAX}^1 \cap N_6 = \emptyset$,
3. $\text{MAX}^2 \cap N_1 = \{(\lambda, t) \in N_1 \mid p = 2Kn, n \in \mathbb{N}, \text{sn}(\tau) \neq 0\}$,
4. $\text{MAX}^2 \cap N_2 = \{(\lambda, t) \in N_2 \mid p = Kn, n \in \mathbb{N}, \text{sn}(\tau) \text{cn}(\tau) \neq 0\}$,
5. $\text{MAX}^2 \cap N_3 = \emptyset$,
6. $\text{MAX}^2 \cap N_6 = \{(\lambda, t) \in N_6 \mid tc = 2\pi n, \theta \neq \pi k, n, k \in \mathbb{Z}\}$

$$(\lambda, t) \in C_1 \cup C_3 \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\sigma t}{2},$$

$$(\lambda, t) \in C_2 \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\sigma t}{2k}.$$

$p_z^n(k) > 0$ — n -ый корень $\text{dn}(p) \text{sn}(p) + (p - 2E(p)) \text{cn}(p) = 0$.

Оценка времени разреза

$$\lambda \in C_1 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = \min(2p_z^1, 4K)\sigma,$$

$$\lambda \in C_2 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = 2Kk\sigma,$$

$$\lambda \in C_6 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = \frac{2\pi}{|c|},$$

$$\lambda \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_7 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = +\infty.$$

Теорема 1 (А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков)

Для любого $\lambda \in C$

$$t_{\text{cut}}(\lambda) \leq t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$$

Численное решение задачи оптимального управления: Сведение к решению системы уравнений

$$Y = \frac{y_t}{x_t}, Z = \frac{z_t}{x_t^2}, V = \frac{v_t}{x_t^3} \quad \text{не зависят от } \alpha.$$

$$Y_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad z_1 = \frac{z_1}{x_1^2}, \quad V_1 = \frac{v_1}{x_1^3}.$$

$$\begin{cases} Y(\tau, p, k) = Y_1, \\ Z(\tau, p, k) = Z_1, \\ V(\tau, p, k) = V_1. \end{cases}$$

Разбиение прообраза экспоненциального отображения

$$C = \cup_{i=1}^4 D_i,$$

$$D_1 \cap C_1 = \{\tau \in (0, K), p \in (0, p_{min}^1), k \in (0, 1)\},$$

$$D_1 \cap C_2 = \{\tau \in (0, K), p \in (0, K), k \in (0, 1), \text{sgn } c = 1\},$$

$$D_2 \cap C_1 = \{\tau \in (K, 2K), p \in (0, p_{min}^1), k \in (0, 1)\},$$

$$D_2 \cap C_2 = \{\tau \in (-K, 0), p \in (0, K), k \in (0, 1), \text{sgn } c = 1\},$$

$$D_3 \cap C_1 = \{\tau \in (2K, 3K), p \in (0, p_{min}^1), k \in (0, 1)\},$$

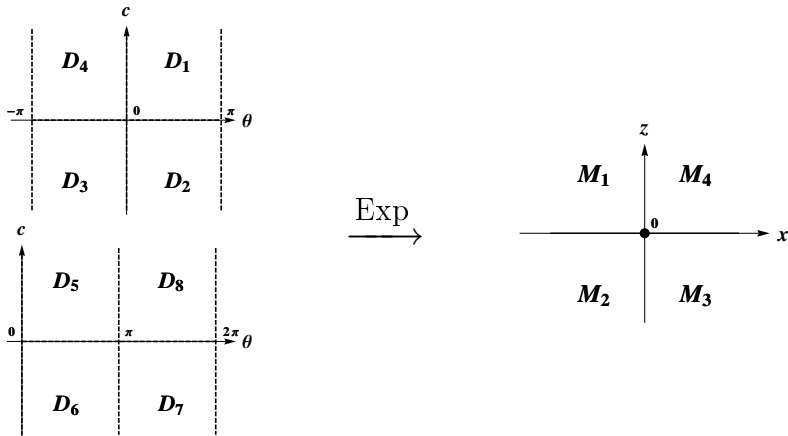
$$D_3 \cap C_2 = \{\tau \in (0, K), p \in (0, K), k \in (0, 1), \text{sgn } c = 1\},$$

$$D_4 \cap C_1 = \{\tau \in (3K, 4K), p \in (0, p_{min}^1), k \in (0, 1)\},$$

$$D_4 \cap C_2 = \{\tau \in (-K, 0), p \in (0, K), k \in (0, 1), \text{sgn } c = 1\},$$

где $p_{min}^1 = \min(p_z^1, 2K)$.

Соответствие между областями в образе и прообразе экспоненциального отображения



Гипотеза: $\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ и $\text{Exp} : D_{i+4} \rightarrow M_i$ — диффеоморфизмы.

Сопряженные точки

$d_\nu \text{Exp} : T_\nu N \rightarrow T_{q_t} M$ вырождено,

$$\frac{\partial(x, y, z, v)}{\partial(\theta, c, \alpha, t)}(\nu) = 0.$$

Теорема 2 (А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков)

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$t_{\text{MAX}}^1(\lambda) \leq t_{\text{conj}}^1(\lambda).$$

Результаты

- Рассмотрена нильпотентная субриманова задача на группе Энгеля.
- Вычислены экстремальные траектории для этой задачи.
- Вычислены симметрии экспоненциального отображения и соответствующие точки Максвелла.
- Получена глобальная верхняя оценка времени разреза вдоль экстремальных траекторий, на основе которой построено разбиение образа и прообраза экспоненциального отображения.
- Исследовано первое сопряженное время вдоль экстремалей. Доказано, что функция дающая верхнюю оценку времени разреза, доставляет нижнюю оценку первого сопряженного времени.
- Решение задачи сведено к решению системы из трех алгебраических уравнений.
- Начата разработка программы численного решения задачи.

Перспективы и публикации

- Исследование оптимальности всех экстремальных траекторий и написание программы для вычисления оптимальных траекторий для субримановой задачи на группе Энгеля.
 - Применение результатов к решению задачи управления для систем в 4-мерном пространстве с 2-мерным управлением на основе метода нильпотентной аппроксимации.
1. А.А. Ардентов, Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля (случай докритических колебаний маятника) // Современная математика. Фундаментальные направления, 2010 (принята к публикации).
 2. А. А. Ардентов, Ю.Л. Сачков, Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Математический сборник, 2010 (принята к публикации).