

Субриманова задача на группе Энгеля

Андрей Ардентов

Институт программных систем,
Переславль-Залесский,

aaa@pereslavl.ru

Кафедра Общих Проблем Управления
мехмата МГУ им. М.В. Ломоносова

Геометрическая постановка задачи

Дано:

$$a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2,$$

$\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$, соединяющая a_1 с a_2 ,

$S \in \mathbb{R}$, прямая $L \subset \mathbb{R}^2$.

Найти:

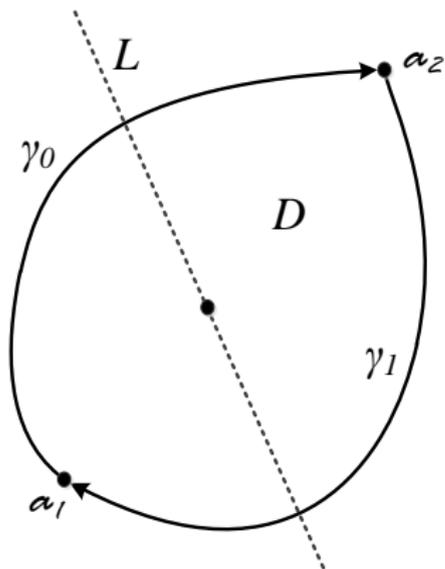
$\gamma_1 \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую a_2 с a_1 ,

т. ч. $\gamma_1 \cup \gamma_0 = \partial D$,

площадь(D) = S ,

центр масс $D \in L$,

длина(γ_1) $\rightarrow \min$.



Левоинвариантная субриманова задача

$$q = (x, y, z, v)^T \in M = \mathbf{R}^4, \quad (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2,$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{t_1} \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} dt \rightarrow \min.$$

Известные результаты по инвариантным субримановым задачам на группах Ли

- Трёхмерные группы Ли
 - Группа Гейзенберга (А.М. Вершик, В.Я. Гершкович 1986);
 - $SL(2)$, $SO(3)$, S^3 (У. Боскаин, Ф. Росси 2008);
 - $SE(2)$ (Ю.Л. Сачков 2010).
- Classification of all 4-dimensional sub-Riemannian homogeneous spaces of Engel Type (Almeida, 2013).
- 5-мерная нильпотентная субриманова задача с вектором роста (2, 3, 5) (Ю.Л. Сачков 2006).
- 6-мерная нильпотентная субриманова задача с вектором роста (3, 6) (О.М. Мясниченко 2002).

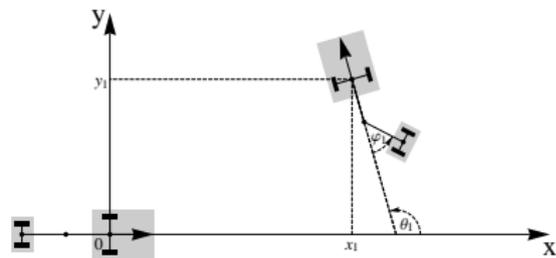
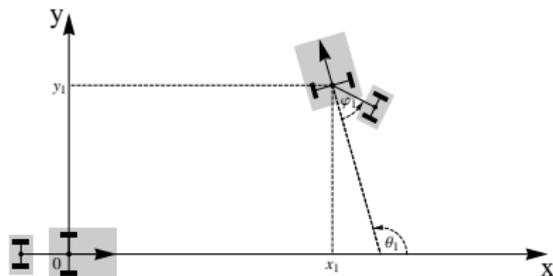
Схема исследования

- Построение экспоненциального отображения.
- Симметрии экспоненциального отображения и определение множеств Максвелла.
- Описание первого времени Максвелла и оценка первого сопряженного времени.
- Диффеоморфность сужения экспоненциального отображения на подобласти.
- Описание времени разреза и изучение множества разреза.

Нильпотентная аппроксимация неголономных систем

$$q = (x, y, \theta, \varphi)^T \in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1 \times S_\varphi^1,$$

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2.$$



$$X_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, -\sin \varphi)^T,$$

$$X_2 = (0, 0, 1, 1)^T.$$

$$X_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, -\sin \varphi)^T,$$

$$X_2 = (0, 0, 1, -1 - \cos \varphi)^T.$$

Нильпотентная алгебра Ли.

Управляемость и существование оптимальных кривых

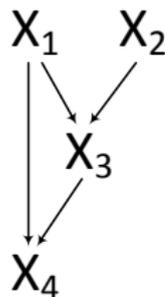
$$X_3 = [X_1, X_2] = (0, 0, 1, x)^T,$$

$$X_4 = [X_1, [X_1, X_2]] = (0, 0, 0, 1)^T,$$

$$[X_2, [X_1, X_2]] = 0,$$

$$[X_1, [X_1, [X_1, X_2]]] = 0,$$

$$[X_2, [X_1, [X_1, X_2]]] = 0.$$



Вектор роста (2, 3, 4).

$$\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$\dim \text{Lie}(X_1, X_2)(q) = 4 \implies \text{полная управляемость.}$$

Существование оптимальных решений следует из теоремы Филиппова.

Принцип максимума Понтрягина

$$\psi_0 \leq 0, \quad \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4),$$

$$\begin{aligned} H(\psi_0, \psi, q, u) &= \psi_0 \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \langle \psi, u_1 X_1 + u_2 X_2 \rangle = \\ &= \psi_0 \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \psi_3 \frac{xu_2 - yu_1}{2} + \psi_4 \frac{x^2 + y^2}{2} u_2. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \end{cases}$$

$$\max_{u \in \mathbb{R}^2} H(\psi(t), \hat{q}(t), u) = H(\psi(t), \hat{q}(t), \hat{u}(t)).$$

Принцип максимума Понтрягина:
Координаты в нормальном случае ($\psi_0 = -1$)

$$h_i = \langle \psi, X_i \rangle \implies H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2) = \frac{1}{2}.$$

$$h_1 = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$h_2 = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$h_3 = c,$$

$$h_4 = \alpha.$$

Принцип максимума Понтрягина: Нормальная Гамильтонова система и симметрии

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= c, & \theta &\in S^1, \\ \dot{c} &= -\alpha \sin \theta, & c &\in \mathbb{R}, \\ \dot{\alpha} &= 0, & \alpha &\in \mathbb{R}, \\ \dot{x} &= -\sin \theta, \\ \dot{y} &= \cos \theta, \\ \dot{z} &= \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{2}, \\ \dot{v} &= \cos \theta \frac{x^2 + y^2}{2}.\end{aligned}$$

$$(\theta, c, \alpha, x, y, z, v, t) \mapsto \left(\theta, \frac{c}{\mu}, \frac{\alpha}{\mu^2}, \mu x, \mu y, \mu^2 z, \mu^3 v, \mu t\right), \mu > 0.$$

$$(\theta, c, \alpha < 0, x, y, z, v, t) \mapsto (\theta - \pi, c, -\alpha > 0, -x, -y, z, -v, t).$$

Уравнение маятника и физический смысл параметра α

$$\ddot{\theta} = -\alpha \sin \theta, \quad \alpha = \frac{g}{L} = \text{const} \in \mathbb{R}$$

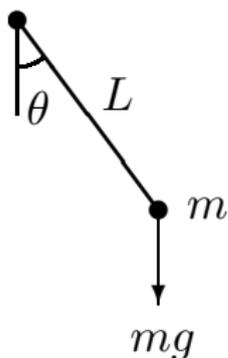


Рис.: Маятник при $\alpha > 0$

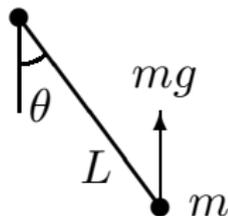


Рис.: Маятник при $\alpha < 0$

$$E = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos \theta \in [-|\alpha|, +\infty).$$

Разбиение фазового цилиндра маятника

$$C = T_{q_0}^* M \cap \{H = 1/2\} = \{\lambda = (\theta, c, \alpha) \mid \theta \in S^1, c, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$$C = \bigcup_{i=1}^7 C_i, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

$$C_i^+ = C_i \cap \{\alpha > 0\}, \quad C_i^- = C_i \cap \{\alpha < 0\}, \quad i \in \{1, \dots, 5\},$$

$$C_{i+}^\pm = C_i^\pm \cap \{c > 0\}, \quad C_{i-}^\pm = C_i^\pm \cap \{c < 0\}, \quad i \in \{2, 3\}.$$

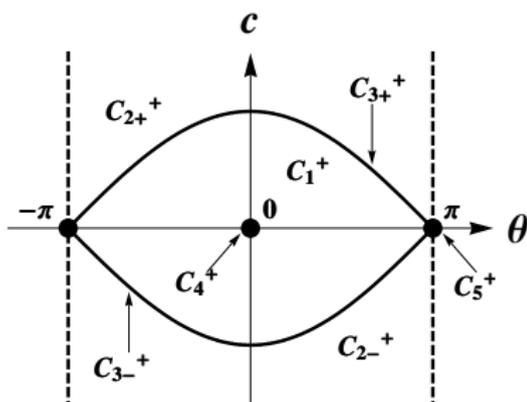


Рис.: Разбиение для $\alpha > 0$

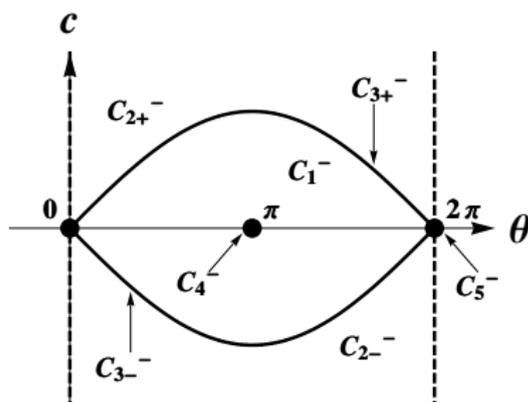
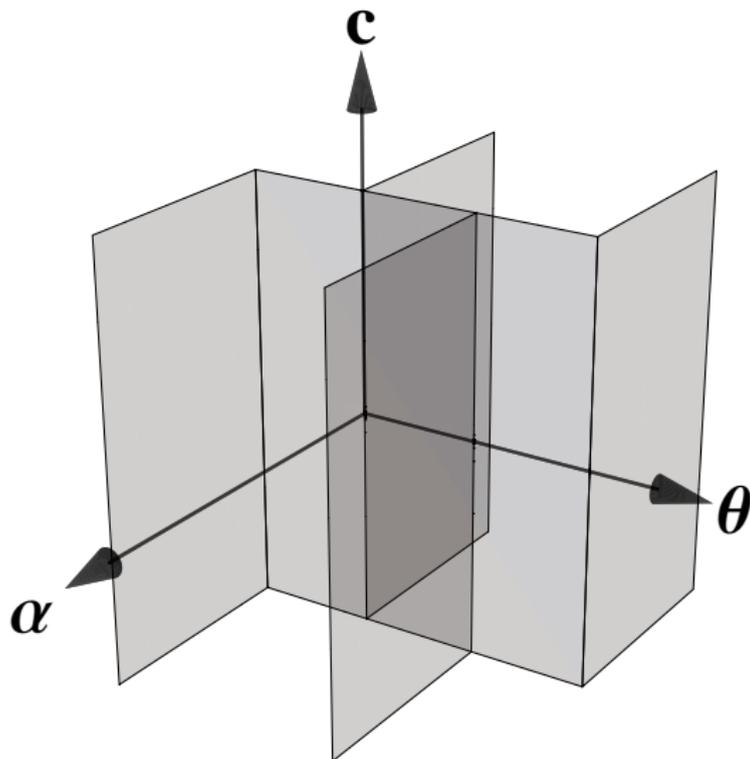
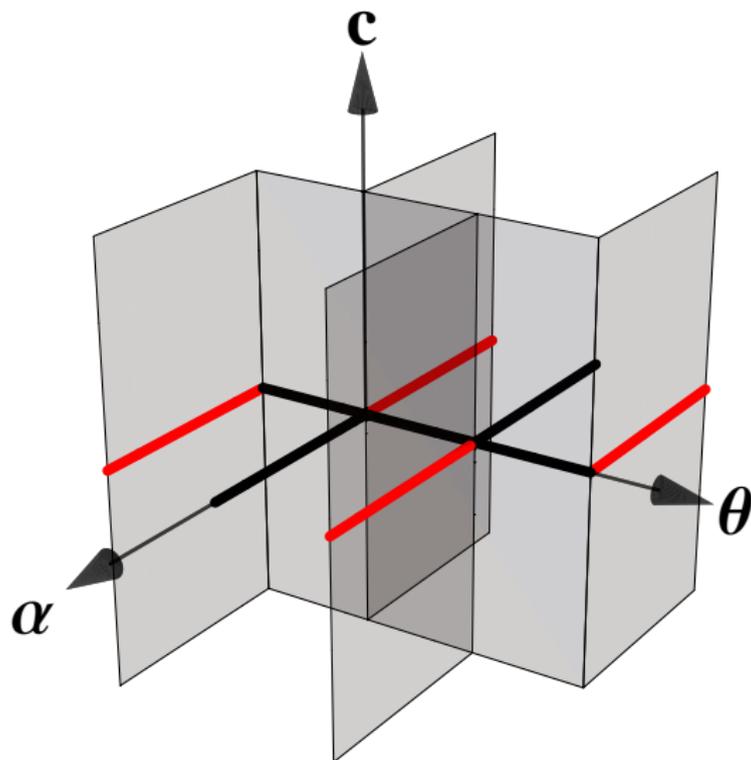


Рис.: Разбиение для $\alpha < 0$

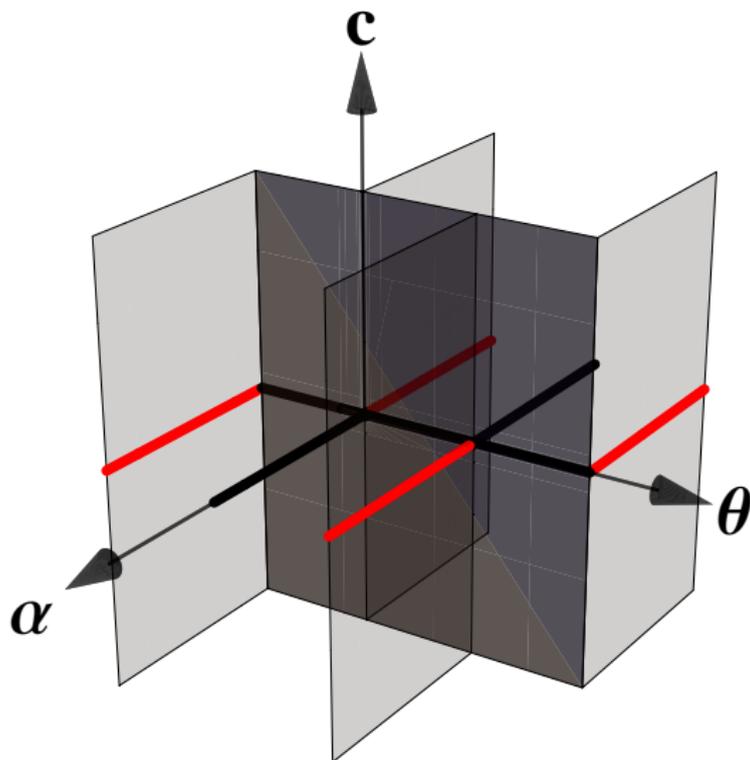
Фазовый цилиндр маятника



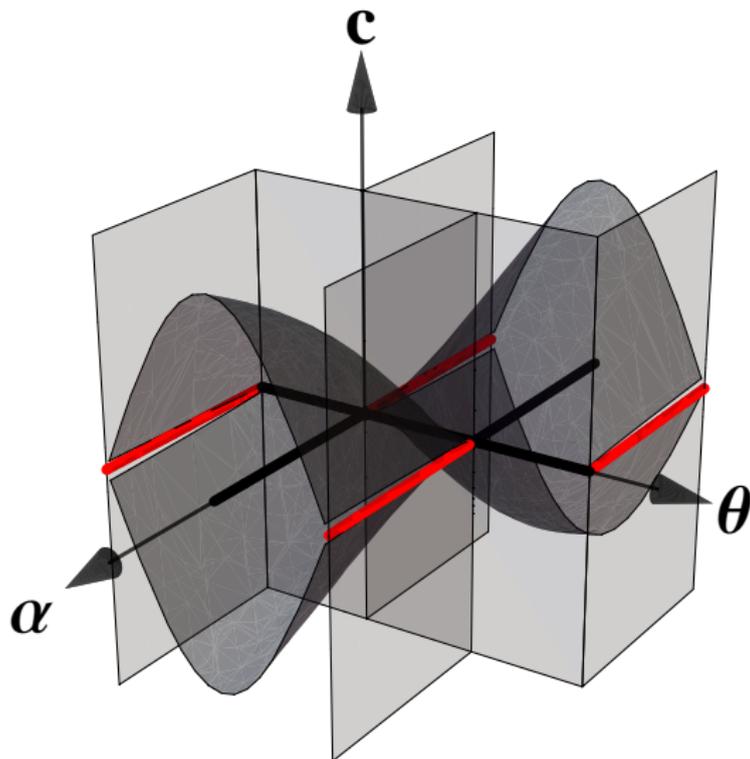
Проекции на XY: Прямые



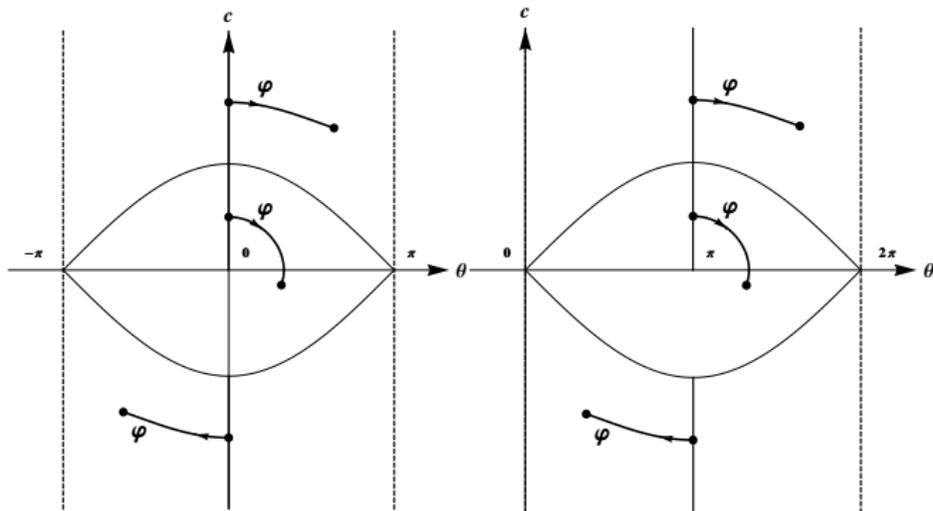
Проекции на XY: Окружности



Критические траектории



Эллиптические координаты (φ, k) в фазовом цилиндре маятника

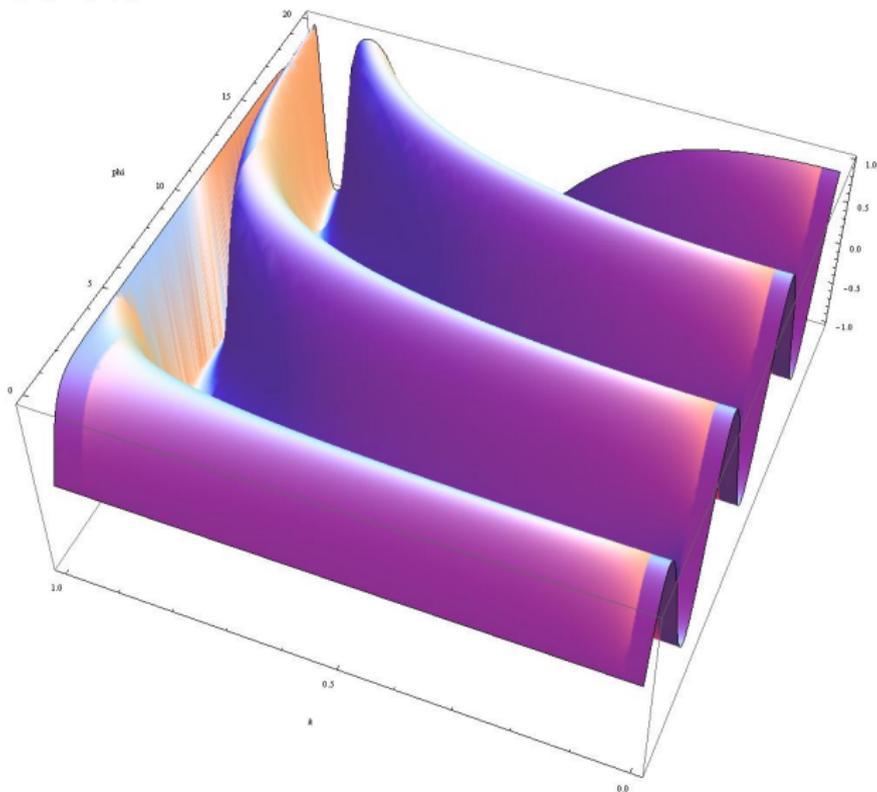


Уравнение маятника: $\dot{\varphi} = 1$, $\dot{k} = \dot{\alpha} = 0$.

sn, cn, dn — эллиптические функции Якоби;

F, E — эллиптические интегралы.

Эллиптические функции Якоби: $\text{sn}(\varphi) = \text{sn}(\varphi, k)$



Параметризация экстремальных кривых

колебания маятника:

$$\begin{aligned}x_t &= \frac{2k\sigma}{\alpha} \left(\operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{cn}(\sigma\varphi) \right), & y_t &= \frac{2\sigma}{\alpha} \left(E(\sigma\varphi_t) - E(\sigma\varphi) \right) - \operatorname{sgn} \alpha t, \\z_t &= \frac{2k}{|\alpha|} \left(\operatorname{sn}(\sigma\varphi_t) \operatorname{dn}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{sn}(\sigma\varphi) \operatorname{dn}(\sigma\varphi) - \frac{\sigma k y_t}{2\alpha} \left(\operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) + \operatorname{cn}(\sigma\varphi) \right) \right), \\v_t &= \frac{2k^2}{\sigma\alpha} \left(\frac{2}{3} \operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) \operatorname{dn}(\sigma\varphi_t) \operatorname{sn}(\sigma\varphi_t) - \frac{2}{3} \operatorname{cn}(\sigma\varphi) \operatorname{dn}(\sigma\varphi) \operatorname{sn}(\sigma\varphi) + \frac{1-k^2}{3k^2} \sigma t + \frac{2k^2-1}{3k^2} \left(E(\sigma\varphi_t) - \right. \right. \\&\quad \left. \left. - E(\sigma\varphi) \right) \right) + \frac{y_t^3}{6} + \frac{2k^2}{|\alpha|} \operatorname{cn}^2(\sigma\varphi) y_t - \frac{4k^2}{\sigma\alpha} \operatorname{cn}(\sigma\varphi) \left(\operatorname{sn}(\sigma\varphi_t) \operatorname{dn}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{sn}(\sigma\varphi) \operatorname{dn}(\sigma\varphi) \right).\end{aligned}$$

вращения маятника:

$$\begin{aligned}x_t &= \frac{2\sigma \operatorname{sgn} c}{\alpha k} \left(\operatorname{dn}(\sigma\psi_t) - \operatorname{dn}(\sigma\psi) \right), & y_t &= \frac{k^2-2}{k^2} \operatorname{sgn} \alpha t + \frac{2\sigma}{\alpha k} \left(E(\sigma\psi_t) - E(\sigma\psi) \right), \\z_t &= -\frac{x_t y_t}{2} - \frac{2\sigma \operatorname{sgn} c \operatorname{dn}(\sigma\psi)}{\alpha k} y_t + \frac{2 \operatorname{sgn} c}{|\alpha|} \left(\operatorname{cn}(\sigma\psi_t) \operatorname{sn}(\sigma\psi_t) - \operatorname{cn}(\sigma\psi) \operatorname{sn}(\sigma\psi) \right), \\v_t &= \frac{4}{\sigma\alpha k} \left(\frac{1}{3} \operatorname{cn}(\sigma\psi_t) \operatorname{dn}(\sigma\psi_t) \operatorname{sn}(\sigma\psi_t) - \frac{1}{3} \operatorname{cn}(\sigma\psi) \operatorname{dn}(\sigma\psi) \operatorname{sn}(\sigma\psi) - \frac{1-k^2}{3k^3} \sigma t - \frac{k^2-2}{6k^2} \left(E(\sigma\psi_t) - \right. \right. \\&\quad \left. \left. - E(\sigma\psi) \right) \right) - \frac{4}{\sigma\alpha k} \operatorname{dn}(\sigma\psi) \left(\operatorname{cn}(\sigma\psi_t) \operatorname{sn}(\sigma\psi_t) - \operatorname{cn}(\sigma\psi) \operatorname{sn}(\sigma\psi) \right) + \frac{y_t^3}{6} + \frac{2y_t}{|\alpha|k^2} \operatorname{dn}^2(\sigma\psi).\end{aligned}$$

Эластики Эйлера

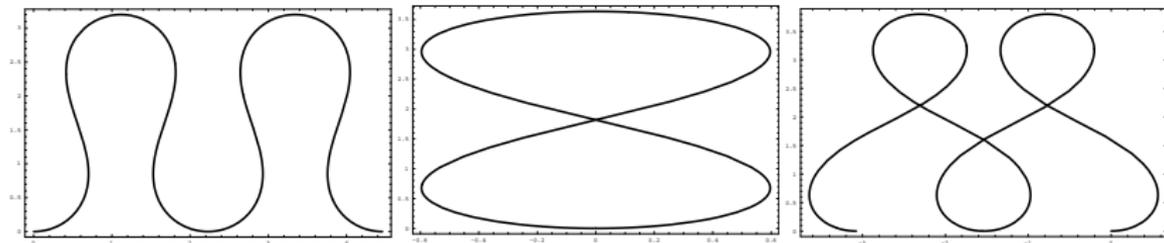


Рис.: Инфлекссионные эластики

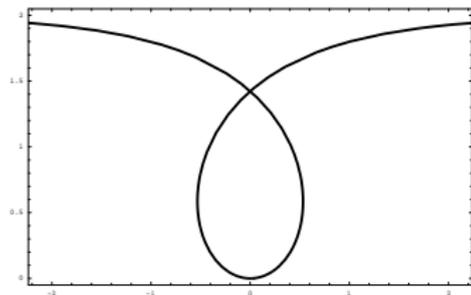


Рис.: Критическая эластика

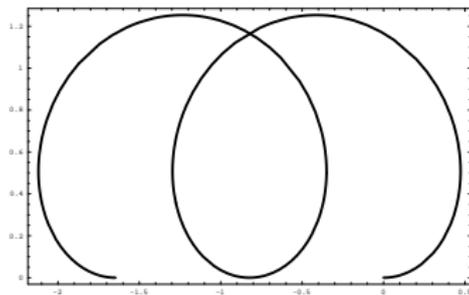


Рис.: Неинфлекссионная эластика

Экспоненциальное отображение, точки Максвелла, сопряженное время и время разреза

$$\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M = \mathbb{R}^4,$$

$$\text{Exp}(\lambda, t) = q_t,$$

$$\lambda = (\theta, c, \alpha) \in C, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad q_t \in M.$$

$$t_{cut}(\lambda) = \sup\{t > 0 \mid \text{Exp}(\lambda, s) \text{ глобально оптимальна при } s \in [0, t]\},$$

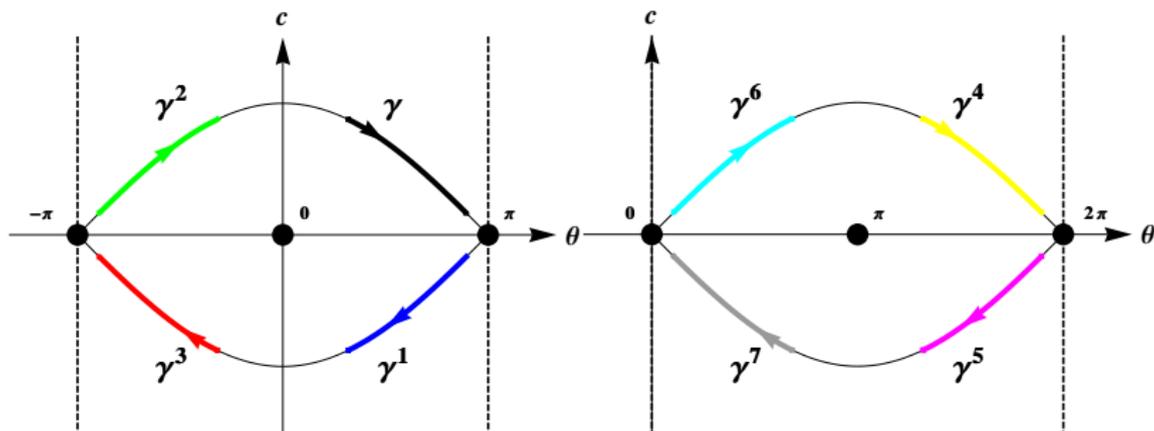
$$t_{conj}^1(\lambda) = \sup\{t > 0 \mid \text{Exp}(\lambda, s) \text{ локально оптимальна при } s \in [0, t]\},$$

$$\text{MAX} = \{(\lambda, t_{\text{MAX}}) \mid \exists \tilde{\lambda} \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda, t_{\text{MAX}}) = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t_{\text{MAX}})\},$$

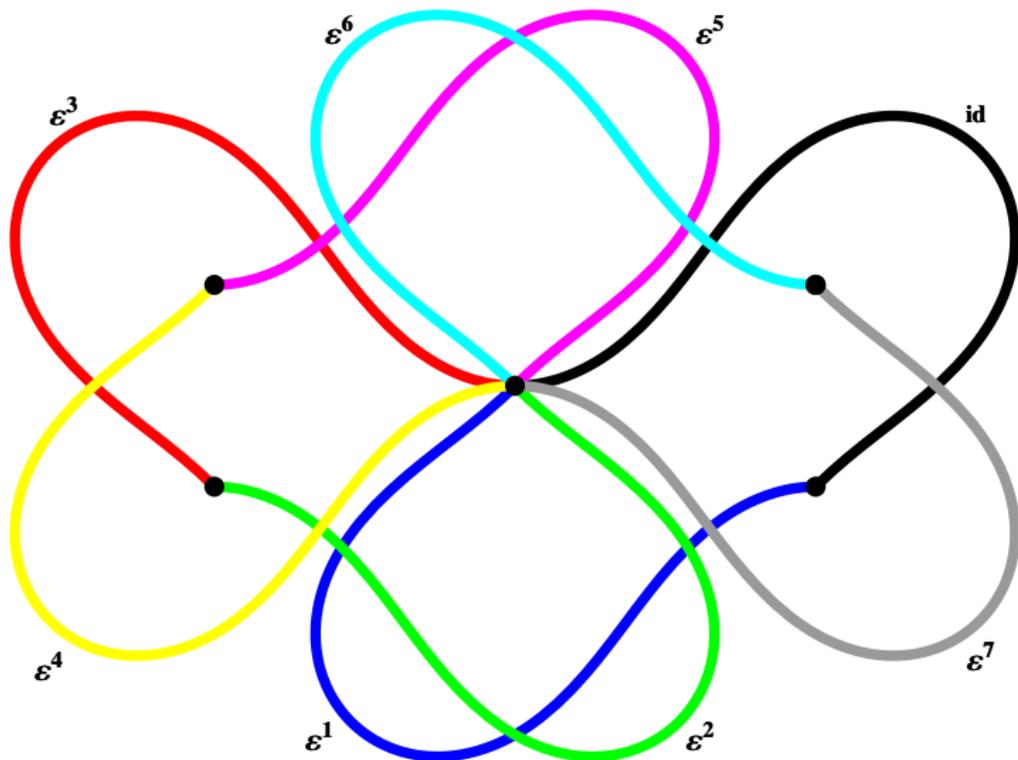
$$t_{cut}(\lambda) = \min(t_{\text{MAX}}(\lambda), t_{conj}^1(\lambda)), \quad \forall \lambda \in C$$

$$\Rightarrow \quad t_{cut}(\lambda) \leq t_{\text{MAX}}(\lambda), \quad t_{cut}(\lambda) \leq t_{conj}^1(\lambda).$$

Отражения траекторий маятника



Отражения эластик Эйлера



Отражения как симметрии Exp

Предложение

Отражение ε^i является симметрией экспоненциального отображения при любом $i = 1, \dots, 7$, т. е.,

$$\varepsilon^i \circ \text{Exp}(\theta, c, \alpha, t) = \text{Exp} \circ \varepsilon^i(\theta, c, \alpha, t), \\ (\theta, c, \alpha) \in C, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\text{MAX}^i = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid \lambda^i \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t)\}, \\ \lambda = (\theta, c, \alpha), \quad \lambda^i = (\theta^i, c^i, \alpha^i) = \varepsilon^i(\lambda).$$

Неподвижные точки ε^i в образе экспоненциального отображения

$$\text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t) \iff \varepsilon^i(q_t) = q_t.$$

Лемма

1. $\varepsilon^1(q) = q \iff z = 0,$
2. $\varepsilon^2(q) = q \iff x = 0,$
3. $\varepsilon^3(q) = q \iff x^2 + z^2 = 0,$
4. $\varepsilon^4(q) = q \iff x^2 + y^2 + v^2 = 0,$
5. $\varepsilon^5(q) = q \iff x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 0,$
6. $\varepsilon^6(q) = q \iff y^2 + (2v - xz)^2 = 0,$
7. $\varepsilon^7(q) = q \iff y^2 + z^2 + v^2 = 0.$

Неподвижные точки ε^i в прообразе экспоненциального отображения

Предложение

Если $(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+$, $\varepsilon^i(\lambda, t) = (\lambda^i, t)$, то:

$$1. \lambda^1 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{cn} \tau = 0, \text{ если } \lambda \in C_1 \\ \text{невозможно, если } \lambda \in C_2 \cup C_3 \cup C_6 \end{cases}$$

$$2. \lambda^2 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{sn} \tau = 0, \text{ если } \lambda \in C_1 \\ \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0, \text{ если } \lambda \in C_2 \\ \tau = 0, \text{ если } \lambda \in C_3 \\ 2\theta + ct = 2\pi n, \text{ если } \lambda \in C_6 \end{cases}$$

$$(\lambda, t) \in C_1 \cup C_3 \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad \tau = \sigma \frac{\varphi + \varphi_t}{2},$$

$$(\lambda, t) \in C_2 \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad \tau = \sigma \frac{\varphi + \varphi_t}{2k}.$$

Оценка времени разреза

$$\lambda \in C_1 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = \min(2p_z^1, 4K)\sigma,$$

$$\lambda \in C_2 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = 2Kk\sigma,$$

$$\lambda \in C_6 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = \frac{2\pi}{|c|},$$

$$\lambda \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_7 \Rightarrow t_{\text{MAX}}^1 = +\infty,$$

$p_z^1 > 0$ — 1-ый корень $\text{dn}(p) \text{sn}(p) + (p - 2E(p)) \text{cn}(p) = 0$.

Теорема (А. А., Ю. Л. Сачков)

Для любого $\lambda \in C$

$$t_{\text{cut}}(\lambda) \leq t_{\text{MAX}}^1(\lambda).$$

Разбиение прообраза и образа экспоненциального отображения

$$D_1 = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid \theta_{\frac{t}{2}}(\lambda) \in (0, \pi), c_{\frac{t}{2}}(\lambda) > 0, t \in (0, t_{\text{MAX}}^1(\lambda))\},$$

$$D_2 = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid \theta_{\frac{t}{2}}(\lambda) \in (0, \pi), c_{\frac{t}{2}}(\lambda) < 0, t \in (0, t_{\text{MAX}}^1(\lambda))\},$$

$$D_3 = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid \theta_{\frac{t}{2}}(\lambda) \in (-\pi, 0), c_{\frac{t}{2}}(\lambda) < 0, t \in (0, t_{\text{MAX}}^1(\lambda))\},$$

$$D_4 = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid \theta_{\frac{t}{2}}(\lambda) \in (-\pi, 0), c_{\frac{t}{2}}(\lambda) > 0, t \in (0, t_{\text{MAX}}^1(\lambda))\}.$$

$$M_1 = \{q = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 \mid x < 0, z > 0\},$$

$$M_2 = \{q = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 \mid x < 0, z < 0\},$$

$$M_3 = \{q = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 \mid x > 0, z < 0\},$$

$$M_4 = \{q = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 \mid x > 0, z > 0\}.$$

Первое сопряженное время

Теорема (А. А., Ю. Л. Сачков)

Для любого $\lambda \in C^1$

$$t_{\text{MAX}}^1(\lambda) \leq t_{\text{conj}}^1(\lambda).$$

¹А. А., Ю. Л. Sachkov, Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 195, No. 3, December, 2013.

Теорема Адамара о глобальном диффеоморфизме

D_i, M_i — гладкие многообразия.

$\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ является гладким отображением.

1. $\dim M_i = \dim D_i = 4$.
2. D_i связное, M_i связное.
3. M_i односвязное.
4. $\text{Exp} : L_i \rightarrow M_i$ невырожденное.
5. $\text{Exp} : L_i \rightarrow M_i$ является собственным (образ компакта есть компакт).

$\implies \text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ — диффеоморфизм.

Собственность экспоненциального отображения

$$D_1 = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid \theta_{\frac{t}{2}}(\lambda) \in (0, \pi), c_{\frac{t}{2}}(\lambda) > 0, t \in (0, t_{\text{MAX}}^1(\lambda))\},$$

$$M_1 = \{q = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 \mid x < 0, z > 0\},$$

Лемма

Пусть $\{\nu_n\} \subset D_1$. Тогда $\nu_n \rightarrow \partial D_1 \Leftrightarrow$ справедливо одно из следующих условий для $\{\nu_n\}$:

1. $\theta_{t/2} \rightarrow 0$,
2. $\theta_{t/2} \rightarrow \pi$,
3. $c_{t/2} \rightarrow 0$,
4. $c_{t/2} \rightarrow +\infty$,
5. $t \rightarrow 0$,
6. $t_{\text{MAX}}^1(\lambda) - t \rightarrow 0$,
7. $\alpha \rightarrow \pm\infty$.

Собственность экспоненциального отображения

Лемма

Если $\{\nu_n\} \subset D_1 \cap N_{3+}^+$, $\nu_n \rightarrow \partial D_1$, $\text{Exp}(\nu_n) \rightarrow M_1 \setminus \partial M_1$, то $\sigma \rightarrow 0$ или $p \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \bar{\sigma} \neq 0$.

Лемма

Пусть $\nu_n \in D_1 \cap N_{3+}^+$. Если $p \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow \bar{\sigma} \neq 0$, то $y \rightarrow \infty$.

Лемма

Пусть $\nu_n \in D_1 \cap N_{3+}^+$. Если $\sigma \rightarrow 0$, то одна из функций x, y, z, v стремится к ∞ , иначе x или z стремится к 0.

Собственность экспоненциального отображения

Лемма

Если $\{\nu_n\} \subset D_1 \cap N_{6+}$, $\nu_n \rightarrow \partial D_1$, $\text{Exp}(\nu_n) \rightarrow M_1 \setminus \partial M_1$, то $c \rightarrow 0$.

Лемма

Пусть $\nu_n \in D_1 \cap N_{6+}$. Если $c \rightarrow 0$, то $x \rightarrow 0$ либо одна из функций x, y, z стремится к ∞ :

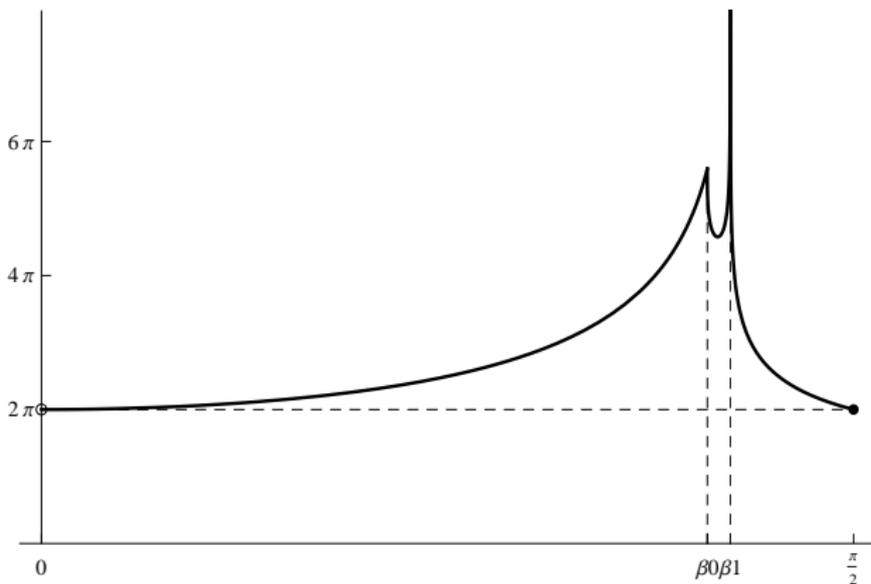
Лемма

Если $\{\nu_n\} \subset D_1 \cap N_1^+$, $\nu_n \rightarrow \partial D_1$, $\text{Exp}(\nu_n) \rightarrow M_1 \setminus \partial M_1$, то $\Delta \rightarrow 0$ или $\sigma \rightarrow 0$.

Лемма

Если $\{\nu_n\} \subset D_1 \cap N_{2+}^+$, $\nu_n \rightarrow \partial D_1$, $\text{Exp}(\nu_n) \rightarrow M_1 \setminus \partial M_1$, то $\Delta \rightarrow 0$ или $\frac{\sigma}{k} \rightarrow 0$.

Время разреза

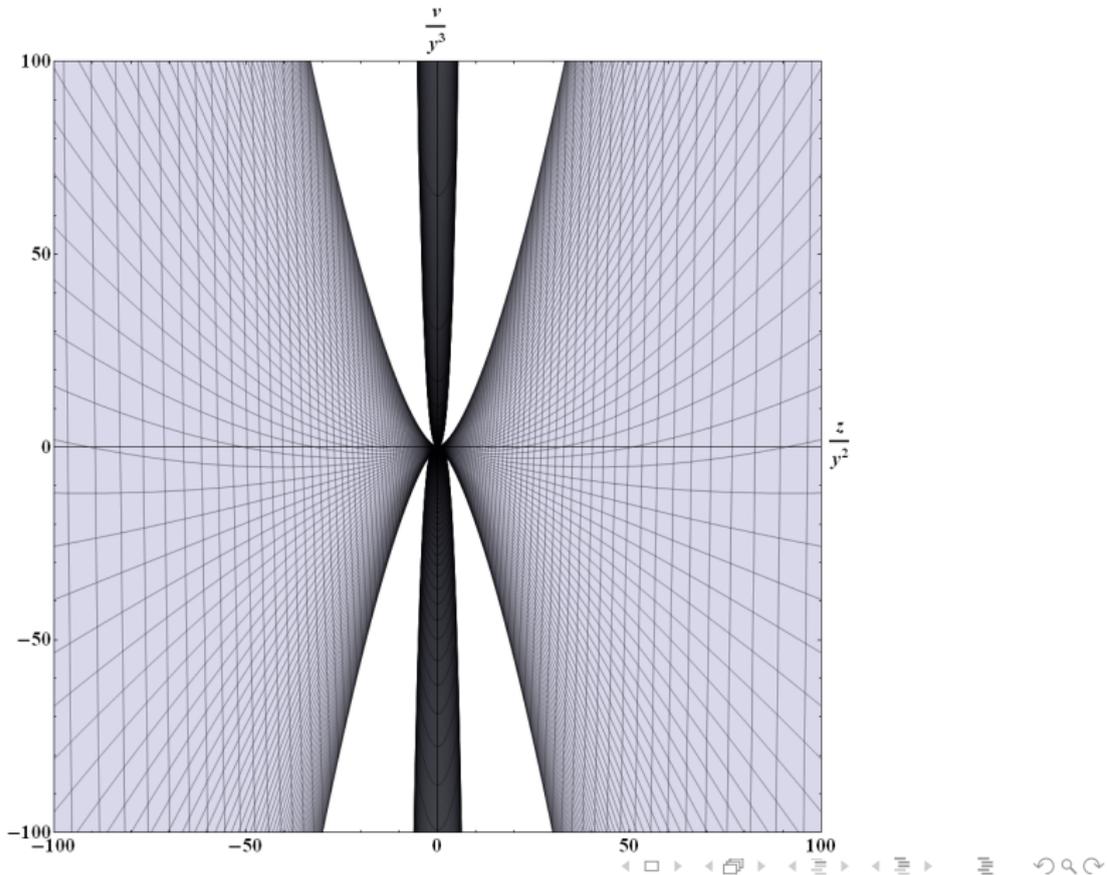


Теорема (А. А., Ю. Л. Сачков)

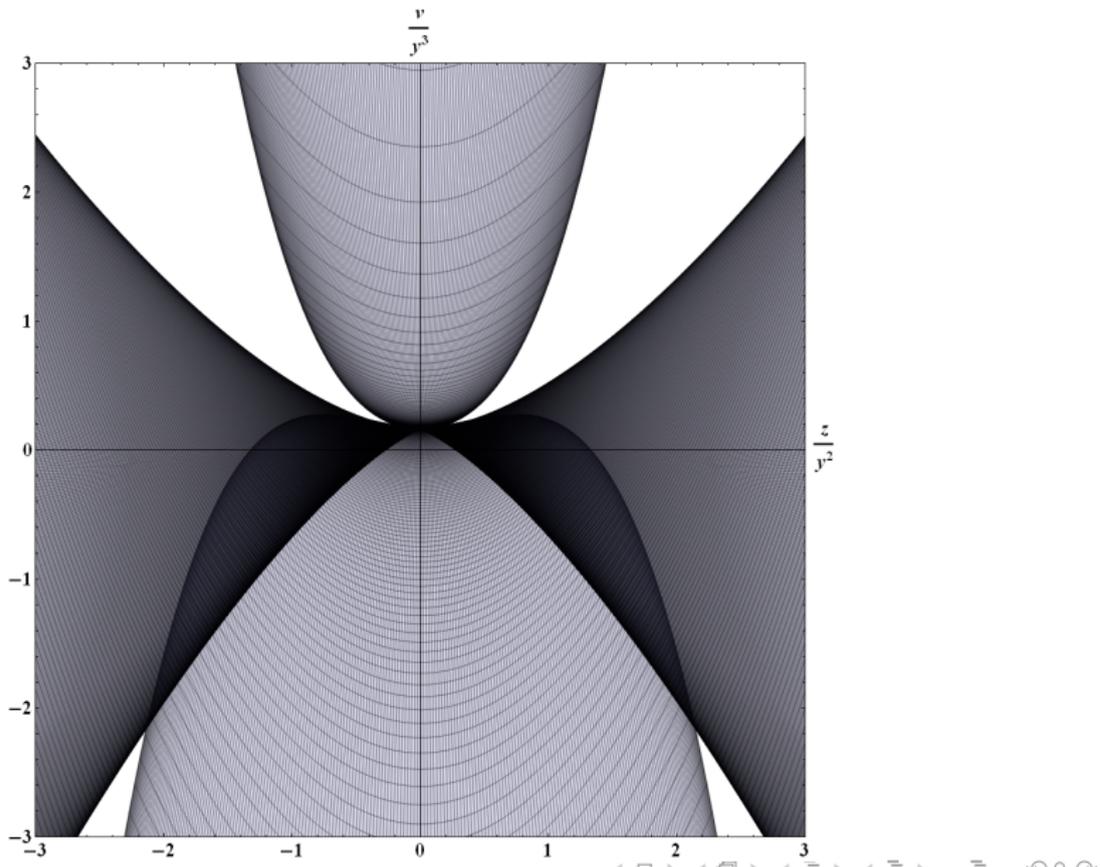
Для любого $\lambda \in \mathcal{C}$

$$t_{cut}(\lambda) = t_{\text{MAX}}^1(\lambda).$$

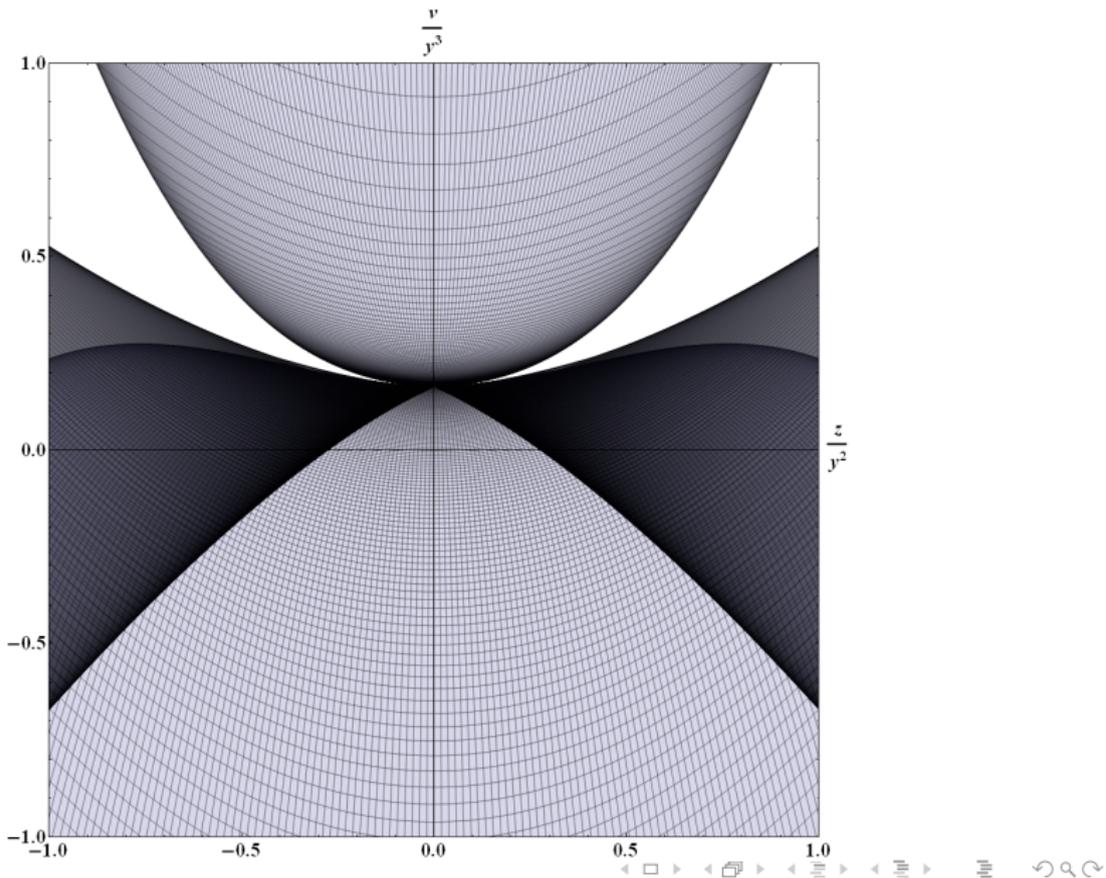
Множество разреза на плоскости при $x = 0$



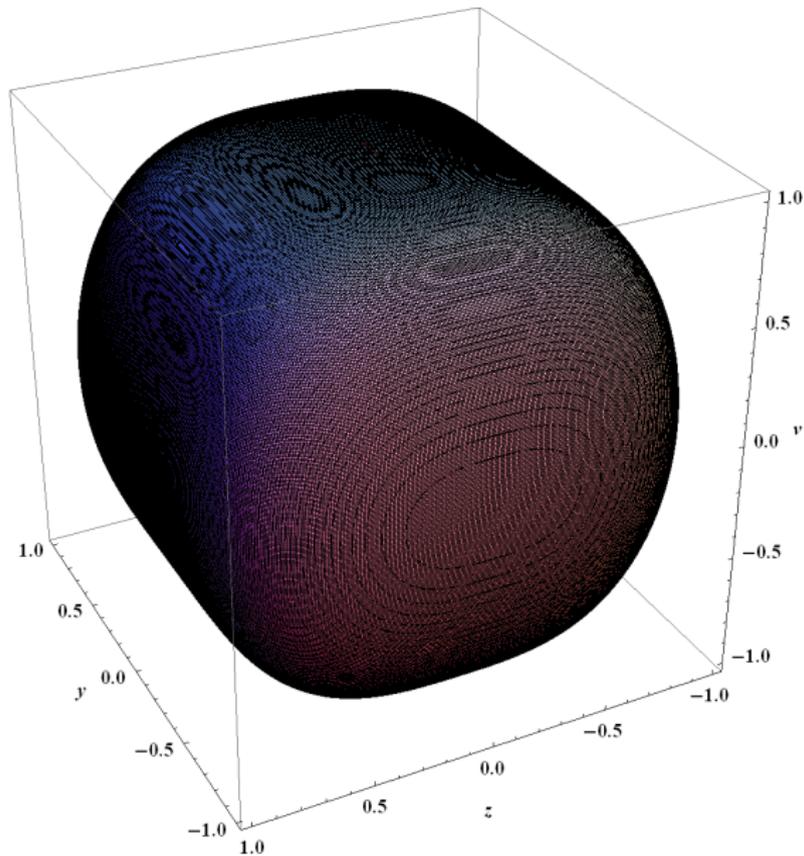
Множество разреза на плоскости при $x = 0$



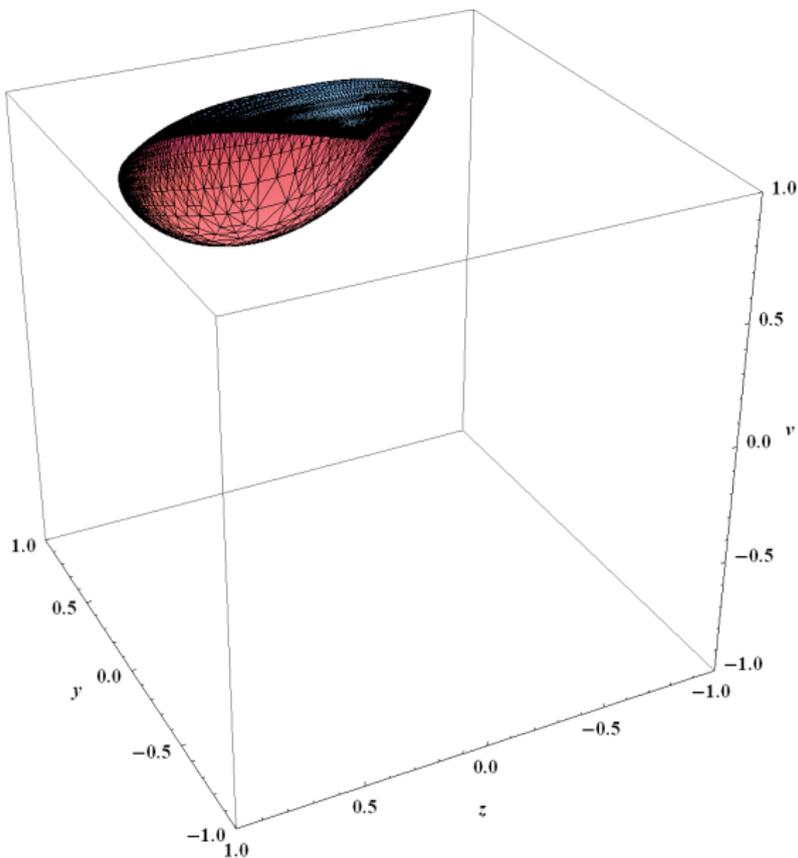
Множество разреза на плоскости при $x = 0$



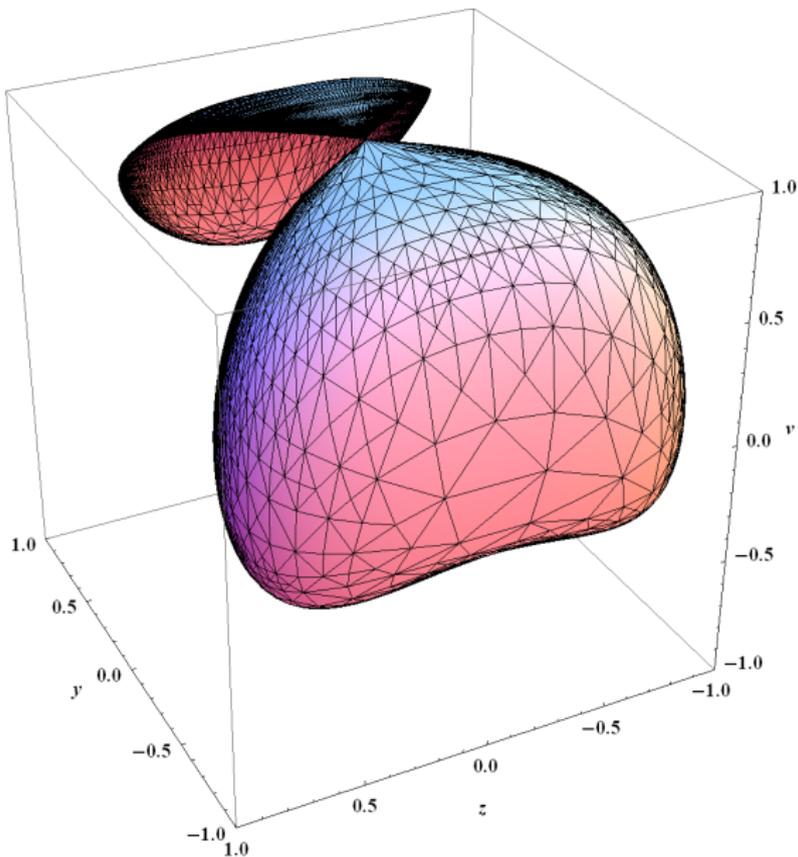
Сфера $y^6 + |z|^3 + v^2 = 1$



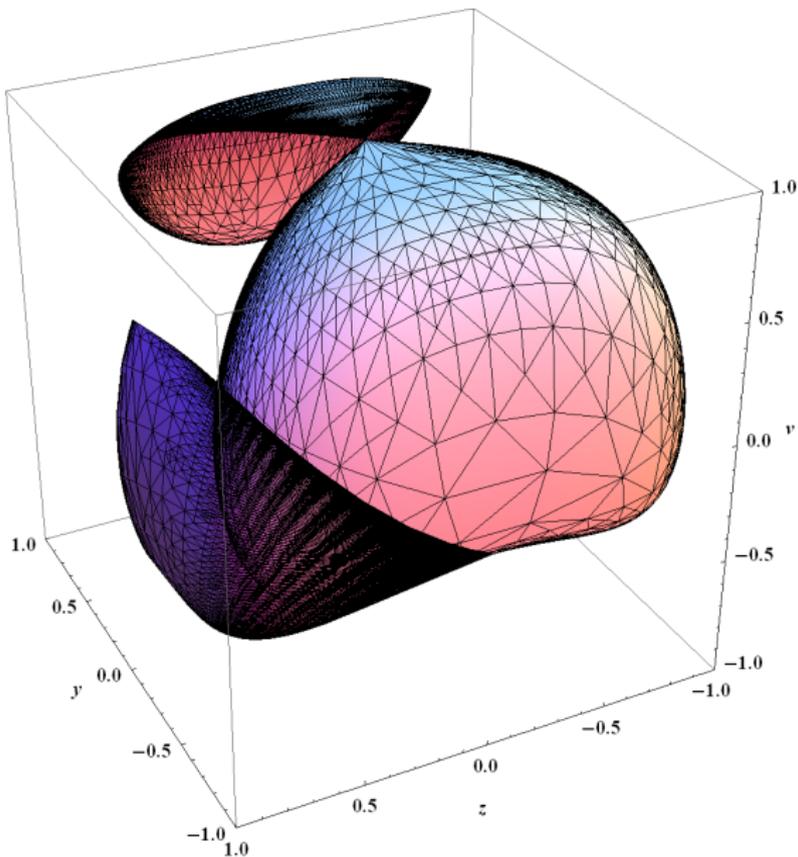
Множество разреза на сфере при $x = 0$



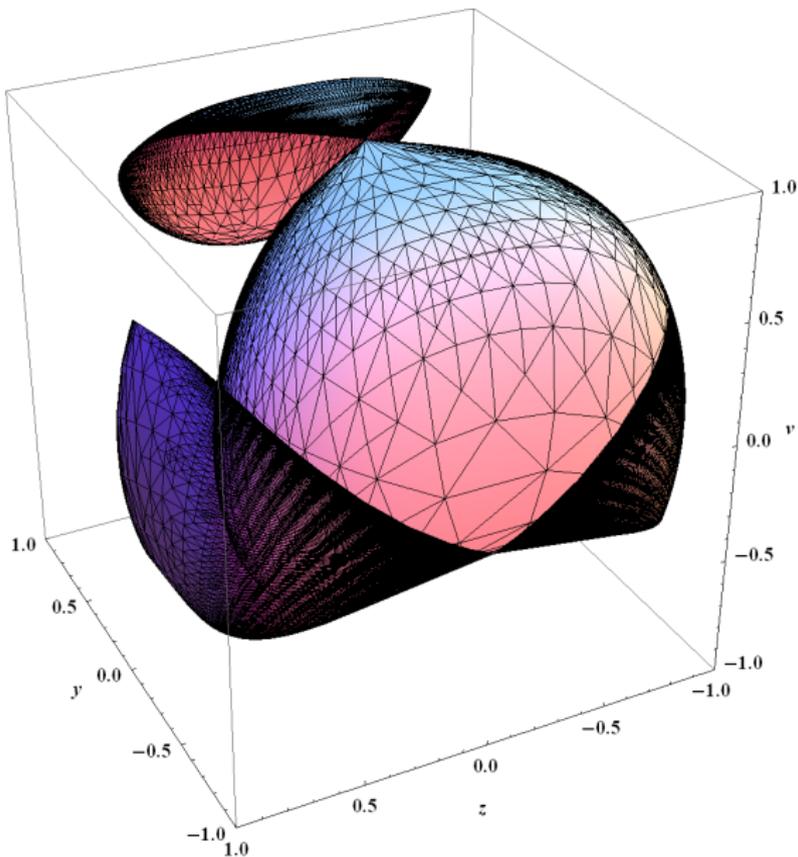
Множество разреза на сфере при $x = 0$



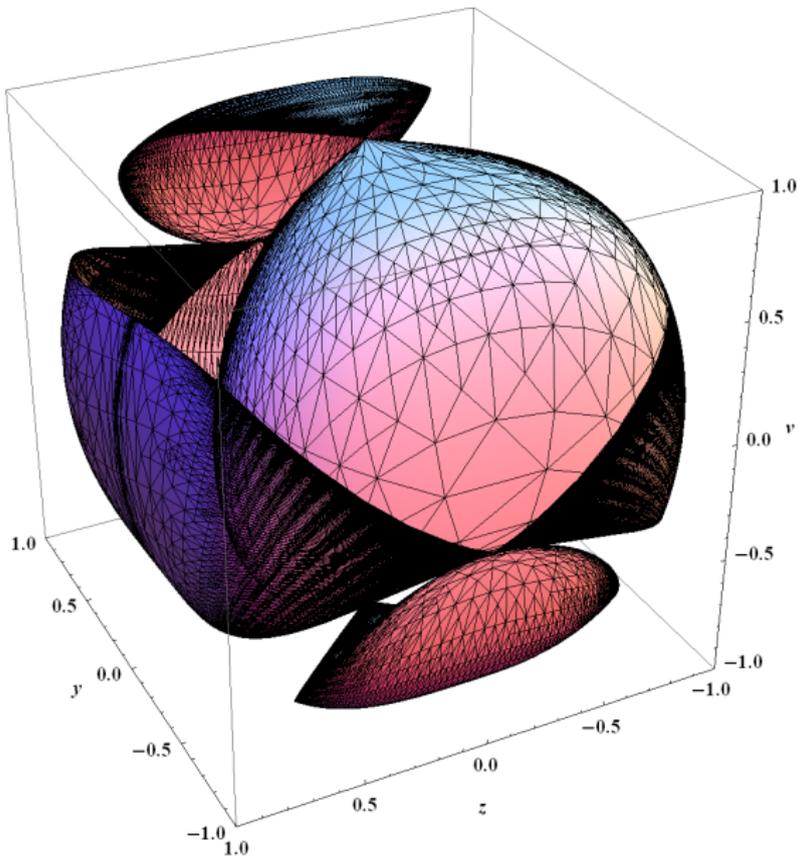
Множество разреза на сфере при $x = 0$



Множество разреза на сфере при $x = 0$



Множество разреза на сфере при $x = 0$



Результаты

- Субримановы геодезические.
- Симметрии экспоненциального отображения и соответствующие множества Максвелла.
- Первое время Максвелла. Показано, что оно совпадает с временем разреза.
- Поиск оптимальных траекторий сведен к решению систем алгебраических уравнений, зависящих от эллиптических функций Якоби и эллиптических интегралов.
- Начата разработка программы вычисления оптимальных траекторий для произвольных начальных условий.
- Построение множества разреза в случае $x = 0$.

Планы на будущее

- Глобальная структура множества разреза.
- Субримановы сферы и их особенности.
- Программа для построения всех оптимальных решения.
- Нильпотентная аппроксимация систем, моделирующих движение колёсного робота с прицепом.

Спасибо за внимание!