Современная математика. Фундаментальные направления. Том 42 (2011). С. 199–203

УДК 517.97

ИНВАРИАНТНЫЙ ОБЪЕМ СУБРИМАНОВА ШАРА НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

© 2011 г. **Е. Ф. САЧКОВА**

Аннотация. Вычислена мера Поппа субриманова шара для левоинвариантной субримановой структуры на группе Гейзенберга.

1. Субриманова геометрия на группе Гейзенберга и мера Поппа

Инвариантная субриманова структура на группе Гейзенберга является краеугольным камнем субримановой геометрии, см., например, [1, 3, 4]. Цель этой заметки — вычисление объема субриманова шара для этой структуры в смысле инвариантной меры Поппа [4]. Оценки объема субримановых шаров важны, например, для описания свойств оператора Лапласа или других важных операторов на пространстве с заданной субримановой структурой.

Напомним определения этих понятий. Группа Гейзенберга есть группа верхнетреугольных матриц вида

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Это — трехмерная связная односвязная нильпотентная группа Ли. Алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на группе Ли H порождена полями

$$\begin{aligned} &X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}, \\ &[X, Y] = Z, \quad \operatorname{ad} Z = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Левоинвариантной субримановой структурой на группе H называется пара $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, состоящая из неинтегрируемого левоинвариантного векторного распределения Δ ранга 2 и левоинвариантного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в нем:

$$\Delta = \operatorname{span}(X_1,\ X_2) \subset TH, \qquad \langle X_i,\ X_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \tag{1.2}$$

Известно, что, с точностью до изоморфизма групп Ли, любая такая субриманова структура эквивалентна следующей модельной:

$$\Delta = \operatorname{span}(X,\ Y), \qquad \langle X, Y\rangle = 0, \quad \langle X, X\rangle = \langle Y, Y\rangle = 1. \tag{1.3}$$

Поэтому далее рассматривается именно эта модель.

Горизонтальной кривой для субримановой структуры (1.2) называется любая траектория управляемой системы

$$\dot q = u_1 X_1 + u_2 X_2, \qquad q \in H, \qquad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Субриманова длина горизонтальной кривой $q(t),\ t \in [0,\ t_1]$, равна

$$l(q) = \int_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot q, \dot q\rangle}\,dt = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,dt.$$

Субриманово расстояние между точками $q_0,\ q_1 \in H$ есть

$$d(q_0,\ q_1) = \inf\{l(q) \mid q(t),\ t \in [0, t_1], \text{— горизонтальная кривая}, \quad q(0) = q_0,\ q(t_1) = q_1\}.$$

Субримановой геодезической называется горизонтальная кривая, у которой малые дуги имеют субриманову длину, равную субриманову расстоянию между концами дуги. Если субриманова длина всей горизонтальной кривой равна субриманову расстоянию между ее концами, то она называется *субримановой кратчайшей*.

Субримановы сфера S_R и шар B_R радиуса $R > 0$ с центром $q_0 \in H$ определяются следующим образом:

$$S_R(q_0) = \{q \in H \mid d(q_0,\ q) = R\},$$
$$B_R(q_0) = \{q \in H \mid d(q_0,\ q) \leqslant R\}.$$

Для субримановой структуры (1.2) мера Поппа на группе H определяется следующим образом (см. [4, п. 10.6]).

Корепер $(\theta^1,\ \theta^2,\ \theta^3)$ дифференциальных 1-форм на H называется *адаптированным* для субримановой структуры (1.2), если

$$\theta^3|_\Delta = 0 \text{ и } (\theta^1|_\Delta,\ \theta^2|_\Delta) \text{ есть ортонормальный корепер.}$$

Тогда 3-форма $\theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3$ определена на H независимо от выбора репера X_1, X_2 в распределении Δ, и называется *мерой Поппа на H*.

Для модели (1.1), (1.3) можно выбрать левоинвариантный корепер

$$\theta^1 = dx, \quad \theta^2 = dy, \quad \theta^3 = (y/2)dx - (x/2)dy + dz,$$

поэтому мера Поппа равна форме объема $dx \wedge dy \wedge dz$. В данной работе вычисляется мера Поппа субриманова шара $B_R = B_R(\mathrm{Id})$ левоинвариантной субримановой структуры на группе Гейзенберга H в модели (1.1), (1.3):

$$V(B_R) = \int\limits_{B_R} \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 = \int\limits_{B_R} dx \wedge dy \wedge dz.$$

2. Субриманова сфера

Натуральная параметризация субримановых геодезических на группе Гейзенберга для модели (1.1), (1.3) хорошо известна [1,2,4]:

$$\begin{aligned}
&t \geqslant 0, \qquad \varphi \in [-\pi, \pi], \qquad c \neq 0 \qquad \Rightarrow\\
&x = \frac{2}{c}(\sin(ct + \varphi) - \sin\varphi) = \frac{2}{c}\sin\frac{ct}{2}\cos\left(\frac{ct}{2} + \varphi\right),\\
&y = \frac{2}{c}(\cos\varphi - \cos(ct + \varphi)) = \frac{2}{c}\sin\frac{ct}{2}\sin\left(\frac{ct}{2} + \varphi\right),\\
&z = \frac{(ct - \sin ct)}{2c^2},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
&t \geqslant 0, \qquad \varphi \in [-\pi, \pi], \qquad c = 0 \qquad \Rightarrow\\
&x = t\cos\varphi, \quad y = t\sin\varphi, \quad z = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Известно также, что геодезические (2.1) являются субримановыми кратчайшими при $t \in [0, 2\pi/|c|]$, а геодезические (2.2) — при $t \in [0, +\infty)$.

Поэтому субриманова сфера $S_R = S_R(\mathrm{Id})$ имеет следующую параметризацию:

$$\begin{aligned}
&\varphi \in [-\pi, \pi], \qquad 0 < |c|R \leqslant 2\pi \qquad \Rightarrow\\
&x = \frac{2}{c}\sin\frac{cR}{2}\cos\left(\frac{cR}{2} + \varphi\right),\\
&y = \frac{2}{c}\sin\frac{cR}{2}\sin\left(\frac{cR}{2} + \varphi\right),\\
&z = \frac{cR - \sin cR}{2c^2},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi \in [-\pi, \pi], \qquad c = 0 \qquad \Rightarrow\\
&x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi, \qquad z = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Переходя к параметру $a = cR$, получим следующую параметризацию субримановой сферы S_R:

$$\begin{aligned} &\varphi \in [-\pi, \pi], \qquad 0 < |a| \leqslant 2\pi \qquad \Rightarrow \\ &x = \frac{2R}{a} \sin \frac{a}{2} \cos \left(\frac{a}{2} + \varphi \right), \\ &y = \frac{2R}{a} \sin \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \varphi \right), \\ &z = R^2 \frac{a - \sin a}{2a^2}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &\varphi \in [-\pi, \pi], \qquad |a| = 0 \qquad \Rightarrow \\ &x = R \cos \varphi, \qquad y = R \sin \varphi, \qquad z = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Сфера S_R гомеоморфна стандартной сфере S^2 и имеет две особые конические точки: $(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ \pm R^2/(4\pi))$. Сфера S_R является поверхностью вращения следующей кривой γ вокруг оси z:

$$\begin{aligned} &0 < |a| \leqslant 2\pi \Rightarrow \\ &x = \frac{2R}{a} \sin \frac{a}{2}, \qquad y = 0, \qquad z = R^2 \frac{a - \sin a}{2a^2}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$|a| = 0 \ \Rightarrow \qquad x = R, \qquad y = 0, \qquad z = 0. \tag{2.8}$$

Субриманова сфера S_R изображена (с разрезом, открывающим конические точки), на рис. 1, а профиль γ — на рис. 2.

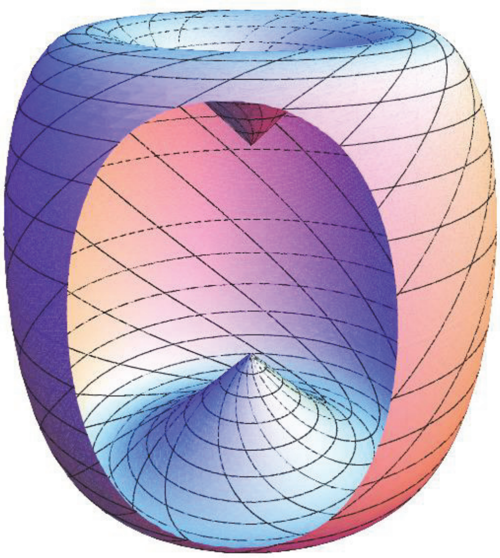

Рис. 1. Субриманова сфера на группе Гейзенберга

Сфера S_R получается из сферы S_1 при дилатациях

$$(x,\ y,\ z) \mapsto (Rx,\ Ry,\ R^2 z). \tag{2.9}$$

3. Объем субриманова шара

Шар B_R есть компактная часть пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченная сферой S_R. При дилатациях (2.9) шар B_1 переходит в шар B_R, поэтому

$$V(B_R) = R^4 \cdot V(B_1).$$

Для вычисления объема шара B_1 найдем объем полушара $B_1^+ = B_1 \cap \{z > 0\}$. Полушар B_1^+ ограничен полусферой S_1^+, являющейся поверхностью вращения вокруг оси z профиля

$$\gamma^+ = \{(x,\ y,\ z) = (x(a),\ 0,\ z(a)) = (2/a \sin(a/2),\ 0,\ (a - \sin a)/(2a^2)) | a \in (0,\ 2\pi]\},$$

и частью плоскости $z = 0$.

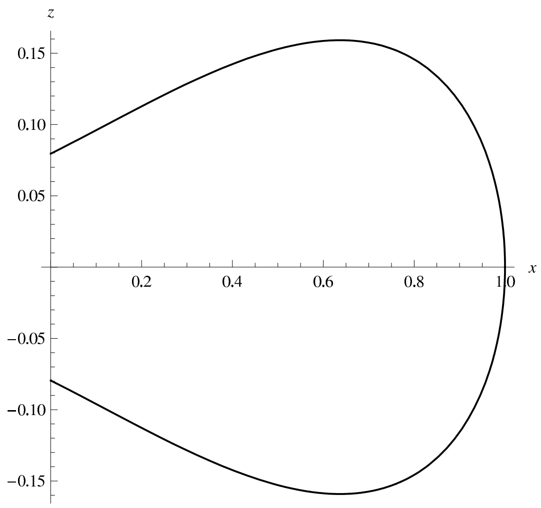

Рис. 2. Профиль сечения субримановой сферы

Далее, $\gamma^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \{(x,\ y,\ z) = (x(a),\ 0,\ z(a)) \mid a \in (0,\ \pi]\},$$
$$\gamma_2 = \{(x,\ y,\ z) = (x(a),\ 0,\ z(a)) \mid a \in [\pi,\ 2\pi]\}.$$

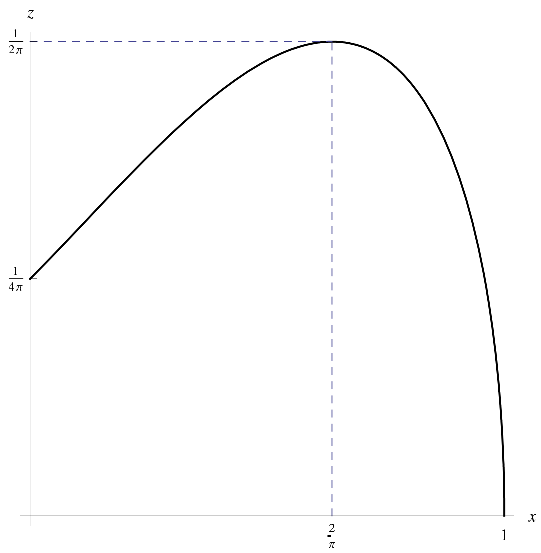

Рис. 3. Профиль сечения γ^+

Из равенств

$$\frac{dx}{da} = \frac{\cos b(b - \operatorname{tg} b)}{2b^2}, \qquad \frac{dz}{da} = \frac{\cos^2 b(\operatorname{tg} b - b)}{4b^3}, \qquad b = a/2,$$

следует, что кривая γ^+ есть график гладкой функции $z(x)$, имеющей максимум $z = \dfrac{1}{2\pi}$ при $x = \dfrac{2}{\pi}$, возрастающей при $x \in (0,\ 2/\pi]$ и убывающей при $x \in [2/\pi, 1]$, см. рис. 3. Поэтому кривые γ_1, γ_2 допускают гладкую параметризацию вида

$$\gamma_1 = \{(x,\ 0,\ z) = (x_1(z),\ 0,\ z) \mid z \in (0,\ 1/(2\pi)]\},$$
$$\gamma_2 = \{(x,\ 0,\ z) = (x_2(z),\ 0,\ z) \mid z \in [1/(4\pi),\ 1/(2\pi)]\}.$$

Следовательно, объем, ограниченный поверхностью вращения S_1^+ и плоскостью $\{z=0\}$, равен

$$V(B_1^+) = \pi \int\limits_0^{1/(2\pi)} (x_1(z))^2 dz - \pi \int\limits_{1/(4\pi)}^{1/(2\pi)} (x_2(z))^2 dz = \pi \int\limits_0^{\pi} x^2(a) z'(a) da - \pi \int\limits_{2\pi}^{\pi} x^2(a) z'(a) da =$$

$$= \pi \int\limits_0^{2\pi} x^2(a) z'(a) da = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 a(\operatorname{tg}(a/2) - a/2)}{a^5} da = (1 + 2\pi \operatorname{Si}(2\pi))/24, \quad (3.1)$$

где $\operatorname{Si}(a) = \int\limits_0^a \frac{\sin t}{t} dt$ есть интегральный синус.

Поэтому

$$V(B_1) = 2V(B_1^+) = (1 + 2\pi \operatorname{Si}(2\pi))/12 = 0.825\ 875\ 762\ \ldots,$$

$$V(B_R) = R^4 V(B_1) = R^4 (1 + 2\pi \operatorname{Si}(2\pi))/12.$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 09-01-00246-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы и геометрия распределений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы. — 7, 8. — М.: ВИНИТИ, 1986.
2. *Сачкова Е. Ф.* Решение задачи управления для нильпотентной системы // Дифференц. ур-ния. — 2008. — *44*, № 12. — С. 1704–1707.
3. *Bellaiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Progr. Math. — 1996. — *144*. — С. 1–78.
4. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesies and applications. — Providence: American Mathematical Society, 2002.

Е. Ф. Сачкова
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН
E-mail: elena.sachkova@gmail.com