#### Задача Эйлера об эластиках

Ю.Л. Сачков

Институт Программных Систем РАН Переславль-Залесский sachkov@sys.botik.ru

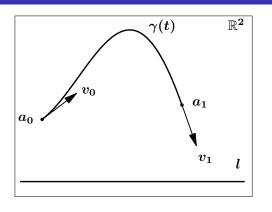
Институт Проблем Механики РАН семинар
Лаборатории механики управляемых систем

18 октября 2007 г.

### Обзор доклада

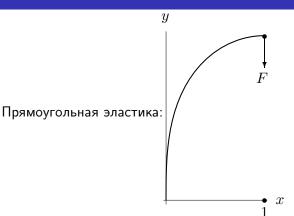
- Постановка и история задачи
- 2 Задача оптимального управления
- Экстремальные траектории
- 4 Оптимальность экстремальных траекторий
- Устойчивость эластик
- Отоги и планы

### Стационарные конфигурации упругого стержня



Дано: 
$$l>0$$
,  $a_0,a_1\in\mathbb{R}^2$ ,  $v_0\in T_{a_0}\mathbb{R}^2$ ,  $v_1\in T_{a_1}\mathbb{R}^2$ ,  $|v_0|=|v_1|=1$ . Найти:  $\gamma(t)$ ,  $t\in[0,t_1]$ :  $\gamma(0)=a_0,\,\gamma(t_1)=a_1,\,\dot{\gamma}(0)=v_0,\,\dot{\gamma}(t_1)=v_1$ .  $|\dot{\gamma}(t)|\equiv 1 \Rightarrow t_1=l$  Упругая энергия  $J=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}k^2\,dt \to \min$ ,  $k(t)$  — кривизна  $\gamma(t)$ .

#### 1691: Якоб Бернулли



$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^4}}, \qquad ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}, \qquad x \in [0, 1]$$

Интегрирование в рядах



#### 1742: Даниил Бернулли

• Упругая энергия

$$E = \operatorname{const} \cdot \int \frac{ds}{R^2},$$

*R* — радиус кривизны,

• Письмо Леонарду Эйлеру: предложение вариационной задачи

$$E \rightarrow \min$$
.

### 1744: Леонард Эйлер

- "Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле", Лозанна, Женева, 1744,
- Приложение «Об упругих кривых»,
- «Среди всех кривых одной и той же длины, которые не только проходят через A и B, но и касаются в этих точках прямых, заданных по положению, определить ту, для которой значение выражения  $\int_A^B \frac{ds}{R^2}$  будет наименьшим»

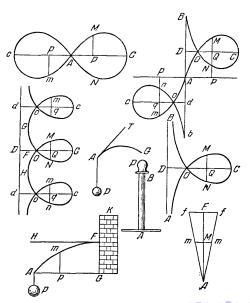
### 1744: Леонард Эйлер

- Задача вариационного исчисления,
- Уравнение Эйлера-Лагранжа,
- Сведение к квадратурам

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2) dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}}, \qquad ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}},$$

- Качественный анализ интегралов,
- Типы решений (эластики).

## Эскизы Эйлера



#### 1880: Л. Заалшютц

Первая явная параметризация эйлеровых эластик функциями Якоби:

L.Saalschütz, Der belastete Stab, Leipzig, 1880.

#### 1906: Макс Борн

- Диссертация «Устойчивость упругих кривых на плоскости и в пространстве», Геттинген, 1906 г.
- ullet Уравнения Эйлера-Лагранжа  $\Rightarrow$

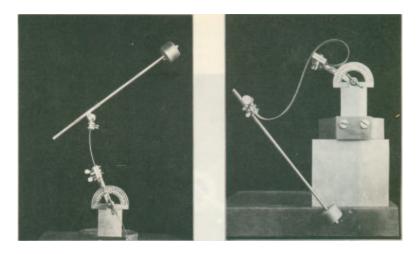
$$\dot{x} = \cos \theta, \qquad \dot{y} = \sin \theta,$$
  $A\ddot{\theta} + B \sin(\theta - \gamma) = 0, \qquad A, B, \gamma = \text{const},$ 

#### уравнение маятника,

- ullet эластика без точек перегиба  $\Rightarrow$  устойчивость,
- ullet эластика с точками перегиба  $\Rightarrow$  численное исследование,
- чертежи эластик на основе приближенных вычислений.

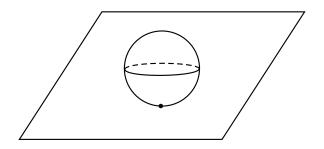
## 1906: Макс Борн

#### Эксперименты с упругими стержнями:

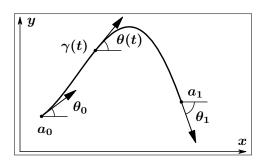


### 1993: Велимир Джарджевич

Эйлеровы эластики в задаче о качении сферы по плоскости



## Задача Эйлера: Координаты в $\mathbb{R}^2 imes S^1$



- $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in S^1$ ,
- $\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [0, t_1],$
- $a_0 = (x_0, y_0), \quad a_1 = (x_1, y_1),$
- $v_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0), \quad v_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1).$



### Задача оптимального управления

$$\dot{x} = \cos heta,$$
  $\dot{y} = \sin heta,$   $\dot{\theta} = u,$   $q = (x, y, heta) \in \mathbb{R}^2_{x,y} imes S^1_{ heta}, \qquad u \in \mathbb{R},$   $q(0) = q_0 = (x_0, y_0, heta_0), \ q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, heta_1), \ t_1$  фиксировано.

$$k^2 = \dot{\theta}^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min.$$

Допустимые управления  $u(t) \in L_2[0,t_1]$ , траектории  $q(t) \in AC[0,t_1]$ .

#### Левоинвариантная задача на группе движений плоскости

$$\mathsf{E}(2) = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathrm{SO}(2) = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \theta \in S^1 \right\}$$

$$\dot{q}=X_1(q)+uX_2(q), \qquad q\in \mathsf{E}(2), \quad u\in \mathbb{R}.$$
  $q(0)=q_0, \qquad q(t_1)=q_1, \qquad t_1$  фиксировано,  $J=rac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2dt o \mathsf{min},$ 

Левоинвариантный репер на Е(2):

$$X_1(q) = qE_{13}, \quad X_2(q) = q(E_{21} - E_{12}), \quad X_3(q) = -qE_{23}$$

## Непрерывные симметрии и нормализация условий задачи

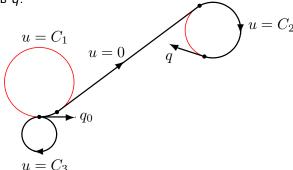
- ullet Левые сдвиги на  $\mathsf{E}(2)$   $\Rightarrow$   $q_0 = \mathsf{Id} \in \mathsf{E}(2)$ :
  - Параллельные переносы в  $\mathbb{R}^2$   $\Rightarrow$   $(x_0, y_0) = (0, 0)$
  - ullet Повороты в  $\mathbb{R}^2$   $\Rightarrow$   $heta_0=0$
- ullet Гомотетии в  $\mathbb{R}^2$   $\Rightarrow$   $t_1=1$

#### Множество достижимости

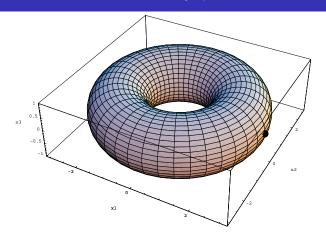
$$q_0 = (0,0,0), t_1 = 1$$

$$\mathcal{A}_{q_0}(1) = \{(x,y,\theta) \mid x^2 + y^2 < 1 \ \forall \, \theta \in S^1 \ \text{или} \ (x,y,\theta) = (1,0,0)\}.$$

Перевод  $q_0$  в q:



# Множество достижимости и существование оптимальных управлений



$$q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1) \quad \Rightarrow \quad \exists$$
 оптимальное  $\mathit{u}(t) \in \mathit{L}_{\infty}[0,t_1]$ 

## Принцип максимума Понтрягина в инвариантной форме

$$\dot{q} = X_1(q) + uX_2(q), \ \ q \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \ \ u \in \mathbb{R}, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\iota_1} u^2 \ dt \to \min$$

- $T_qM = \operatorname{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)), \quad X_3 = [X_1, X_2]$
- $T_q^*M = \{(h_1, h_2, h_3)\}, \quad h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \ \lambda \in T^*M$
- ullet Гамильтоновы векторные поля  $\vec{h}_i \in \mathrm{Vec}(T^*M)$
- $h_u^{\nu} = \langle \lambda, X_1 + uX_2 \rangle + \frac{\nu}{2}u^2 = h_1(\lambda) + uh_2(\lambda) + \frac{\nu}{2}u^2$

#### Теорема (Принцип максимума Понтрягина)

$$u(t)$$
 и  $q(t)$  оптимальны  $\Rightarrow$   $\exists \; \lambda_t \in \mathcal{T}^*_{q(t)} M$ ,  $u \leqslant 0$ :

$$\begin{split} \dot{\lambda}_t &= \vec{h}_{u(t)}^{\nu}(\lambda_t) = \vec{h}_1(\lambda_t) + u(t) \, \vec{h}_2(\lambda_t), \\ h_{u(t)}^{\nu}(\lambda_t) &= \max_{\nu \in \mathbb{R}} h_{\nu}^{\nu}(\lambda_t), \\ (\nu, \lambda_t) &\neq 0, \qquad t \in [0, t_1]. \end{split}$$

#### Анормальные экстремальные траектории

$$v = 0$$
  $\Rightarrow$   $u(t) \equiv 0$   $\Rightarrow$   $\theta \equiv 0$ ,  $x = t$ ,  $y \equiv 0$ 



$$J=0=\min$$
  $\Rightarrow$  анормальные экстремальные траектории оптимальны при  $t\in[0,t_1]$ 

Единственная траектория из  $q_0=(0,0,0)$  в  $(t_1,0,0)\in\partial\mathcal{A}_{q_0}(t_1).$ 

### Гамильтонова система для нормальных экстремалей

$$\nu = -1$$
  $\Rightarrow$  неединственность экстремальных траекторий

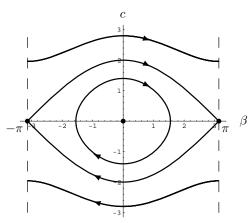
#### Гамильтонова система:

$$\dot{h}_1 = -h_2 h_3,$$
  $\dot{x} = \cos \theta$   
 $\dot{h}_2 = h_3,$   $\dot{y} = \sin \theta$   
 $\dot{h}_3 = h_1 h_2,$   $\dot{\theta} = h_2$ 

$$h_1^2 + h_3^2 = r^2 \equiv \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad h_1 = -r \cos \beta, \ h_3 = -r \sin \beta$$

#### Уравнение маятника

$$\ddot{\beta} = -r\sin\beta \iff \begin{cases} \dot{\beta} = c, \\ \dot{c} = -r\sin\beta \end{cases}$$



#### Нормальные экстремальные траектории

$$\ddot{\theta} = -r \sin(\theta - \gamma), \qquad r, \ \gamma = {\rm const},$$
  $\dot{x} = \cos \theta,$   $\dot{y} = \sin \theta.$ 

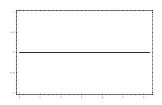
Система интегрируема в функциях Якоби.

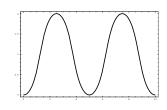
 $\theta(t), x(t), y(t)$  параметризованы функциями Якоби cn, sn, dn, E.

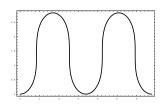
#### Энергия маятника

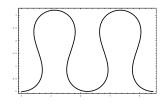
$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - r\cos(\theta - \gamma) \equiv \text{const} \in [-r, +\infty)$$

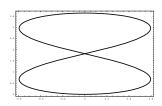
- ullet  $E=-r
  eq 0 \Rightarrow$  прямые
- ullet  $E\in (-r,r)$ , r
  eq 0  $\Rightarrow$  инфлексионные эластики
- E=r 
  eq 0,  $\theta-\gamma=\pi$   $\Rightarrow$  прямые
- ullet E=r
  eq 0,  $heta-\gamma
  eq \pi$   $\Rightarrow$  критические эластики
- $E>r\neq 0$   $\Rightarrow$  неинфлексионные эластики
- r = 0  $\Rightarrow$  прямые и окружности

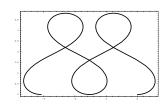


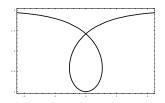


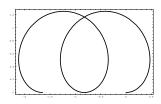


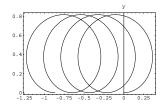


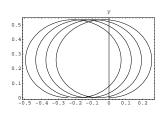


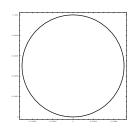












#### Оптимальность нормальных экстремальных траекторий

q(t) локально оптимальна:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \widetilde{q}: \quad \|\widetilde{q} - q\|_{\mathcal{C}} < \varepsilon, \ q(0) = \widetilde{q}(0), \ q(t_1) = \widetilde{q}(t_1) \quad \Rightarrow \quad J(q) \leqslant J(\widetilde{q})$$

Устойчивая эластика (x(t), y(t))

q(t) глобально оптимальна:

$$\forall \widetilde{q}: \quad q(0) = \widetilde{q}(0), \ q(t_1) = \widetilde{q}(t_1) \quad \Rightarrow \quad J(q) \leqslant J(\widetilde{q})$$

Эластика (x(t),y(t)) минимальной упругой энергии



#### Потеря оптимальности

#### Теорема (Усиленное условие Лежандра)

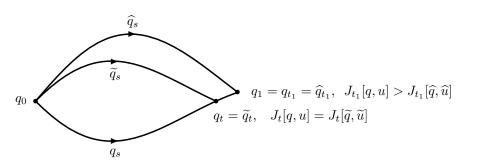
$$rac{\partial^2 h_u^{-1}}{\partial u^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad$$
 малые дуги  $q(t)$  локально оптимальны.

#### Время разреза:

$$t_{\mathrm{cut}}(q) = \sup\{t>0 \mid q(s), \ s\in [0,t], \ \mathsf{on}$$
тимальна  $\}.$ 

## Причины потери оптимальности: Точка Максвелла

Точка Максвелла  $q_t$ :  $\exists \widetilde{q}_s \not\equiv q_s$ :  $q_t = \widetilde{q}_t, \ J_t[q,u] = J_t[\widetilde{q},\widetilde{u}]$ 



### Время Максвелла и время разреза

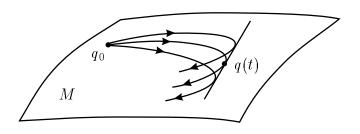
#### Теорема

Если для нормальной экстремальной траектории  $q_s$ ,  $s \in [0, t_1]$ , существует время Максвелла  $t_{\mathsf{Max}}(q_\cdot) \in (0, t_1)$ , то траектория  $q_s$  неоптимальна на отрезке  $[0, t_1]$ :

$$t_{\mathsf{cut}}(q_{\cdot}) \leqslant t_{\mathsf{Max}}(q_{\cdot}).$$

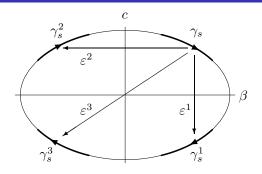
## Причины потери оптимальности: Сопряженная точка

 $q(t)\in$  огибающей семейства экстремалей



$$t_{\mathsf{cut}} \leqslant \mathsf{min}(t_{\mathsf{Max}}, t_{\mathsf{conj}})$$

## Отражения в фазовом цилиндре маятника $\ddot{eta} = -r \sin eta$

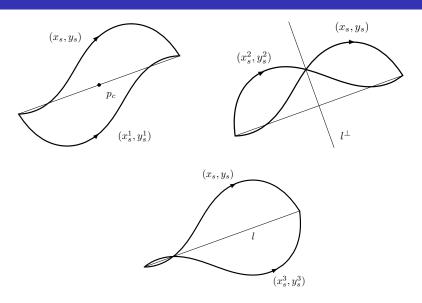


Группа симметрий прямоугольника  $D_2 = \{\operatorname{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ 

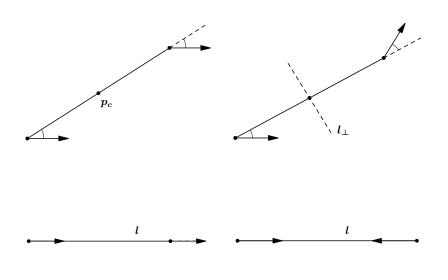
	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$
$\varepsilon^{1}$	Id	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2$
$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	Id	$\varepsilon^1$
$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^1$	Id



## Действие отражений $\varepsilon^1$ , $\varepsilon^2$ , $\varepsilon^3$ на эластики



## Неподвижные точки отражений $arepsilon^1$ , $arepsilon^2$ , $arepsilon^3$



#### Точки Максвелла, соответствующие отражениям

Неподвижные точки отражений  $\varepsilon^i$ :

$$t=t_{\varepsilon^i}^n, \qquad i=1,2, \quad n=1,2,\ldots$$

T= период колебаний маятника  $\Rightarrow$ 

$$t_{\varepsilon^1}^n = nT,$$
  $\left(n - \frac{1}{2}\right)T < t_{\varepsilon^2}^n < \left(n + \frac{1}{2}\right)T.$ 

Верхняя оценка времени разреза:

$$t_{\mathrm{cut}}\leqslant \min(t_{\varepsilon^1}^1,t_{\varepsilon^2}^1)\leqslant \mathcal{T}$$

#### Сопряженные точки

#### Экспоненциальное отображение

$$\mathsf{Exp}_t : T_{q_0}^* M o M, \qquad \lambda_0 \mapsto q(t) = \pi \circ e^{t \vec{h}}(\lambda_0)$$

q(t) — сопряженная точка  $\iff q(t)$  — критическое значение  $\mathsf{Exp}_t$ 

$$\mathsf{Exp}_t(h_1,h_2,h_3) = (x,y,\theta)$$

$$\frac{\partial(x,y,\theta)}{\partial(h_1,h_2,h_3)}=0$$



## Локальная оптимальность нормальных траекторий

q(t) = (x(t), y(t), heta(t)) нормальная экстремальная траектория

#### Теорема (Условие Якоби)

- ullet  $(0,t_1]$  не содержит сопряженных точек  $\Rightarrow$  q(t) локально оптимальна;
- $(0, t_1)$  содержит сопряженные точки  $\Rightarrow$  q(t) не является локально оптимальной.

- Нет точек перегиба ⇒ нет сопряженных точек
- ullet Инфлексионный случай  $\Rightarrow$  первая сопряженная точка  $t^1_{\mathsf{conj}} \in [t^1_{arepsilon 1}, t^1_{arepsilon^2}]$



#### Устойчивость эйлеровых эластик

Первое сопряженное время  $t_{ ext{conj}}^1 \in (0,+\infty]$ 

- ullet  $t_1 < t_{\mathsf{conj}}^1 \quad \Rightarrow \quad$  устойчивость
- ullet  $t_1 > t_{\mathsf{conj}}^1 \quad \Rightarrow \quad$  неустойчивость
- прямые, окружности, неинфлексионные эластики устойчивы

#### Устойчивость инфлексионных эластик

#### Потеря устойчивости в первой сопряженной точке

- $t_1 \leqslant \frac{1}{2}T$   $\Rightarrow$  устойчивость
- $t_1\geqslant \frac{3}{2}T$   $\Rightarrow$  неустойчивость

#### В частности:

- ullet нет точек перегиба  $\Rightarrow$  устойчивость
- ullet 1 или 2 точки перегиба  $\Rightarrow$  устойчивость или неустойчивость
- 3 точки перегиба  $\Rightarrow$  неустойчивость

#### Глобальная оптимальность эластик

$$q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1),$$
 оптимальная  $q_t = ?$ 

$$q_t = \mathsf{Exp}_t(\lambda)$$
 оптимальна при  $t \in [0,t_1] \quad \Rightarrow \quad t_1 \leqslant \min(t^1_{arepsilon_1}(\lambda),t^1_{arepsilon_2}(\lambda))$ 

$$N' = \{\lambda \in T_{q_0}^* M \mid t_1 \leqslant \min(t_{\varepsilon_1}^1(\lambda), t_{\varepsilon_2}^1(\lambda))\}$$

 $\mathsf{Exp}_{t_1} \,:\, {\it N}' o \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$  сюръективно, невырождено, с кратными точками

 $\exists$  открытые всюду плотные  $\widetilde{\mathit{N}} \subset \mathit{N}'$ ,  $\widetilde{\mathit{M}} \subset \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$  такие, что

 $\mathsf{Exp}_{t_1} \; : \; \widetilde{\mathit{N}} o \widetilde{\mathit{M}}$  двойное накрытие



### Глобальная структура экспоненциального отображения

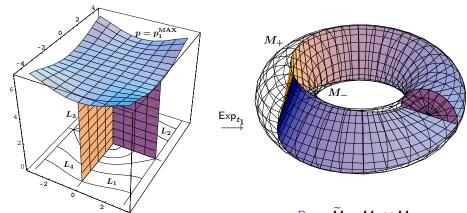


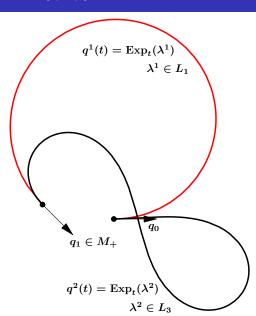
Рис.: 
$$\widetilde{N} = \bigcup_{i=1}^4 L_i$$

Рис.:  $\widetilde{M} = M_+ \cup M_-$ 

 $Exp_{t_1} : L_1, L_3 \to M_+$  диффео,

 $\mathsf{Exp}_{t_1} \; : \; \mathit{L}_2, \; \mathit{L}_4 \to \mathit{M}_- \; \mathsf{диффео}$ 

#### Конкурирующие эластики



? : 
$$J[q_{\cdot}^{1}] \leq J[q_{\cdot}^{2}]$$

Анимации ....

#### Вопросы и перспективы

- Время разреза  $t_{\text{cut}} = ?$
- Оптимальный синтез в задаче Эйлера об эластиках
- Эластики в трехмерном пространстве и на поверхностях
- Задача о качении сферы по плоскости
- Нильпотентная (2, 3, 5) субриманова задача
- Субриманова задача на группе движений плоскости E(2)
- Приложения результатов о задаче Эйлера:
  - теория упругости,
  - инженерия,
  - компьютерная графика,
  - моделирование
  - ???

#### Задача Эйлера об эластиках

- Задача оптимального управления
- Экстремальные траектории
- Локальная и глобальная оптимальность экстремальных траекторий
- Устойчивость эйлеровых эластик

## Публикации http://www.botik.ru/PSI/CPRC/sachkov/

- [1] Сачков Ю.Л. Оптимальность эйлеровых эластик, Доклады Академии Наук, 2007, т. 417, N 1, C. 23–25.
- [2] Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in Euler's elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems* (принята к публикации), arXiv:0705.0614 [math.OC], 3 May 2007.
- [3] Yu. L. Sachkov, Conjugate points in Euler's elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems* (принята к публикации), arXiv:0705.1003 [math.OC], 7 May 2007.
- [4] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. —М.: Физматлит, 2005, 391 с.