

Задача Эйлера об эластиках и субриманова задача на группе движений плоскости

Ю.Л. Сачков

Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский
sachkov@sys.botik.ru

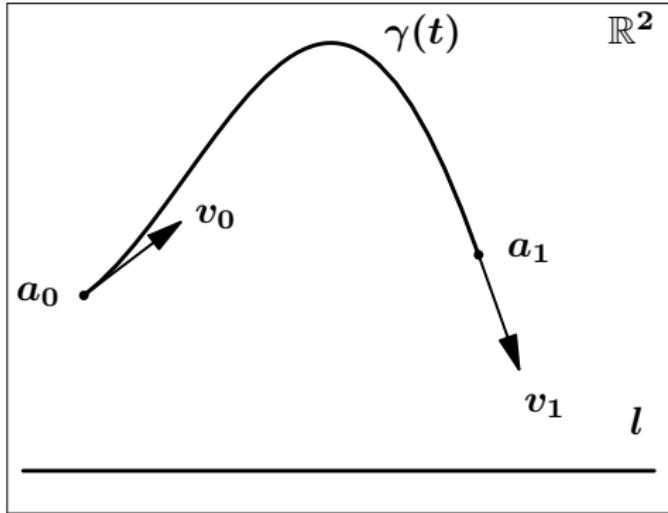
Московское Математическое Общество

28 октября 2008 г.

Обзор доклада

1. Задача Эйлера об эластиках:
 - 1.1 Постановка, история, приложения.
 - 1.2 Экстремальные траектории.
 - 1.3 Оптимальность экстремальных траекторий.
2. Субриманова задача на группе движений плоскости:
 - 2.1 Решение задачи оптимального управления.
 - 2.2 Субримановы сферы, каустика, множество разреза.

Задача Эйлера об эластиках



Дано: $l > 0$, $a_i \in \mathbb{R}^2$, $v_i \in T_{a_i}\mathbb{R}^2$, $|v_i| = 1$, $i = 1, 2$.

Найти: $\gamma(t)$, $t \in [0, t_1]$:

$$\gamma(0) = a_0, \dot{\gamma}(0) = v_0, \gamma(t_1) = a_1, \dot{\gamma}(t_1) = v_1.$$

$$|\dot{\gamma}(t)| \equiv 1 \Rightarrow t_1 = l$$

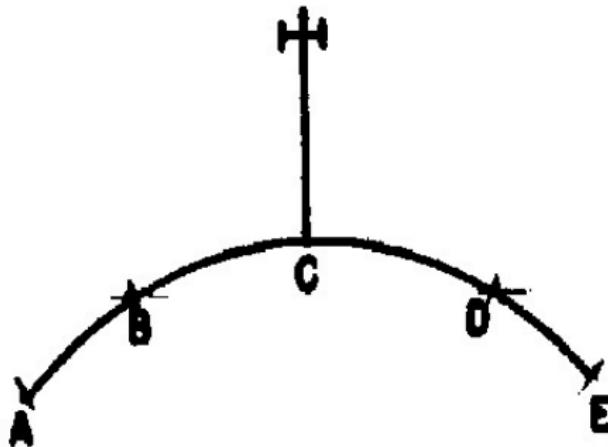
Упругая энергия $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} k^2 dt \rightarrow \min$, $k(t)$ — кривизна $\gamma(t)$.

XIII век: Жорданус де Неморе

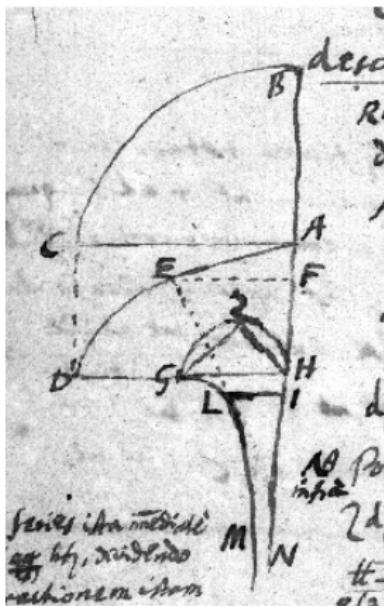
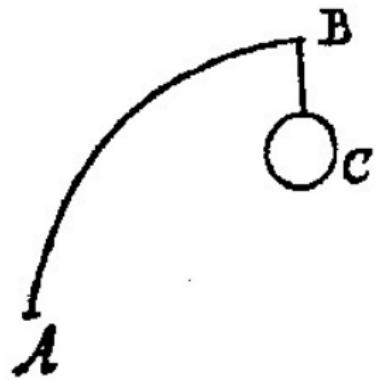
Jordanus de Nemore, *De Ratione Ponderis*,
Книга 4, Предложение 13:

Упругие кривые — окружности.

(Неверное решение).



1691: Якоб Бернулли, прямоугольная эластика



$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad x \in [0, 1]$$

1742: Даниил Бернулли

- Упругая энергия

$$E = \text{const} \cdot \int \frac{ds}{R^2},$$

R — радиус кривизны.

- Попытки решения вариационной задачи

$$E \rightarrow \min.$$

- Письмо Леонарду Эйлеру: предложение решить эту задачу.

1744: Леонард Эйлер

- “Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле”, Лозанна, Женева, 1744,
- Приложение «Об упругих кривых»:

«...в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.»
- *«Среди всех кривых одной и той же длины, которые не только проходят через A и B, но и касаются в этих точках прямых, заданных по положению, определить ту, для которой значение выражения $\int \frac{ds}{R^2}$ будет наименьшим.»*

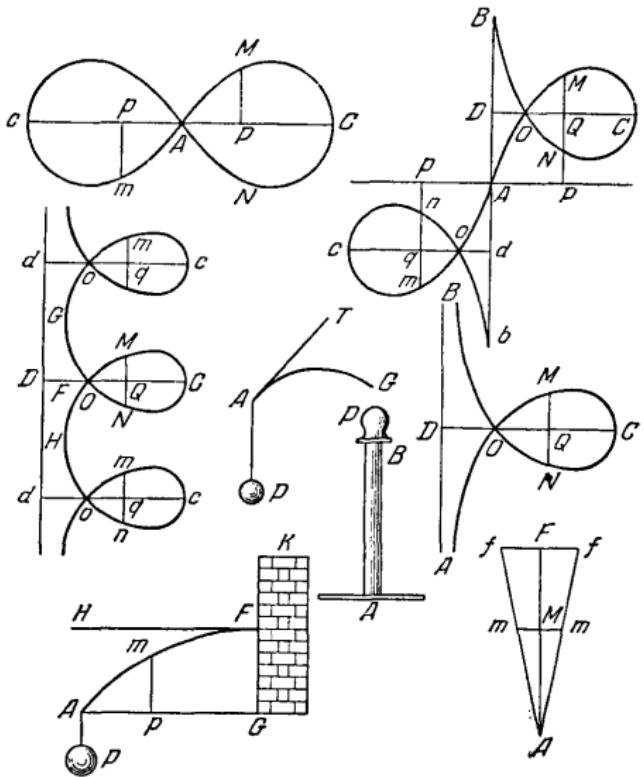
1744: Леонард Эйлер

- Задача вариационного исчисления,
- Уравнение Эйлера-Пуассона,
- Сведение к квадратурам

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2) dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}}, \quad ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}},$$

- Качественный анализ интегралов,
- Типы решений (эластики).

Эскизы Эйлера



1807: Пьер Симон Лаплас

Форма поверхности капилляра

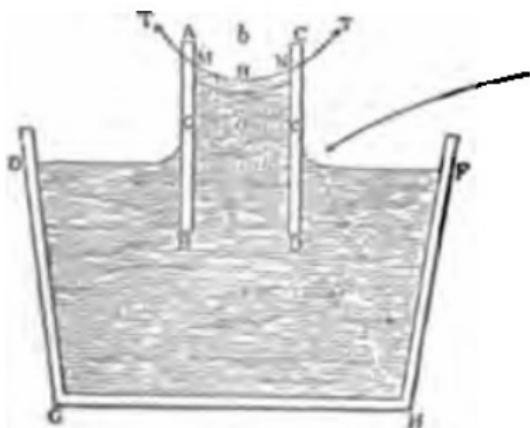


FIG. 6.

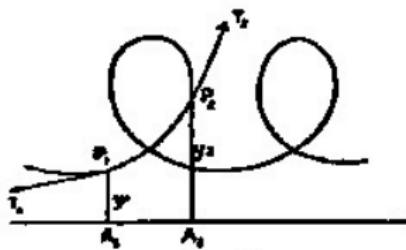
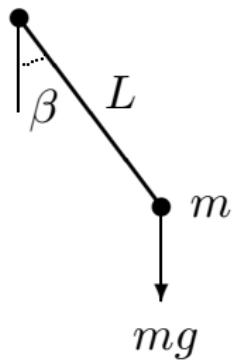


FIG. 8.

Рисунки Дж.Максвелла (Британская Энциклопедия, 1890 г.)

1859: Г.Р. Кирхгоф

Кинетический аналог: **математический маятник**



$$\ddot{\beta} = -r \sin \beta, \quad r = \frac{g}{L}$$

1880: Л. Заалшютц

Первая явная параметризация эйлеровых эластик функциями Якоби:

L.Saalschütz, *О стержне, нагруженном действием боковой силы*,
Лейпциг, 1880.

1906: Макс Борн

- Диссертация «Устойчивость упругих кривых на плоскости и в пространстве», Геттинген, 1906 г.
- Уравнения Эйлера-Лагранжа \Rightarrow

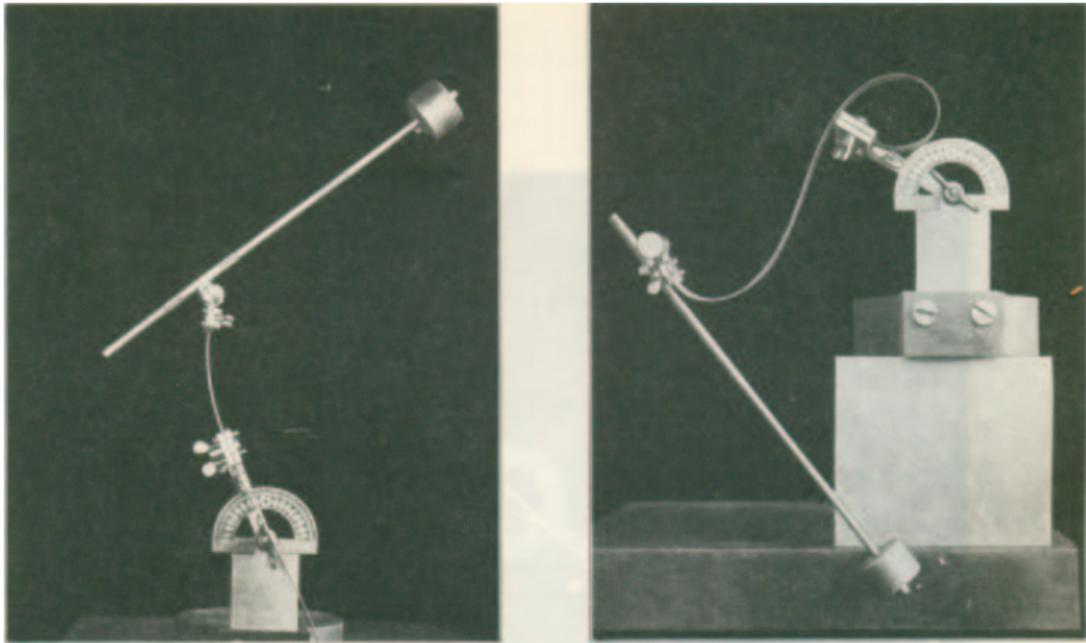
$$\dot{x} = \cos \theta, \quad \dot{y} = \sin \theta,$$

$$A\ddot{\theta} + B \sin(\theta - \gamma) = 0, \quad A, B, \gamma = \text{const},$$

- эластика без точек перегиба \Rightarrow устойчивость,
- эластика с точками перегиба \Rightarrow численное исследование сопряженных точек,
- чертежи эластик на основе приближенных вычислений.

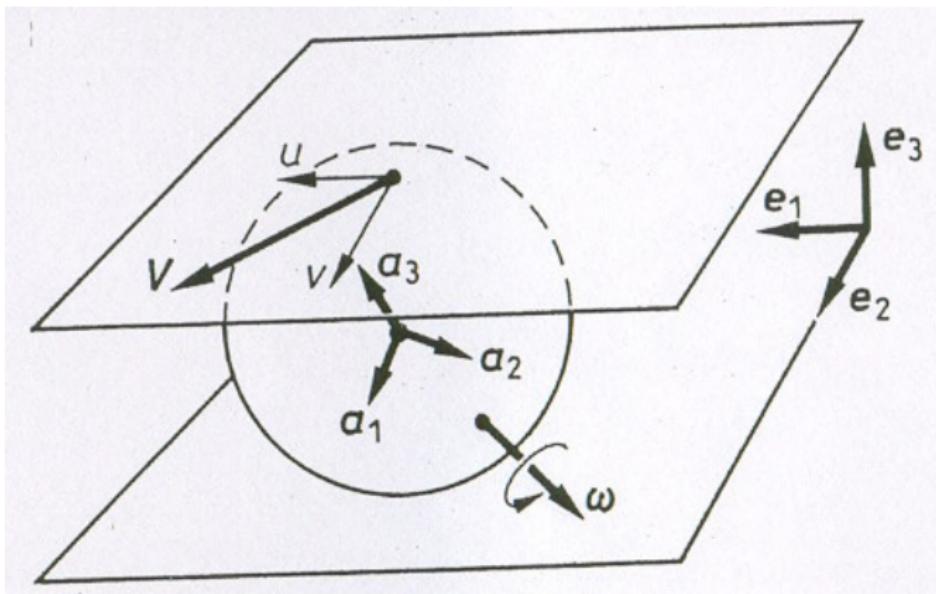
1906: Макс Борн

Эксперименты с упругими стержнями:



1993: В. Джарджевич

Эйлеровы эластики в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания



1993: Р. Брокетт и Л. Даи

Эйлеровы эластики в нильпотентной субримановой задаче с
вектором роста (2,3,5):

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in \mathbb{R}^5, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

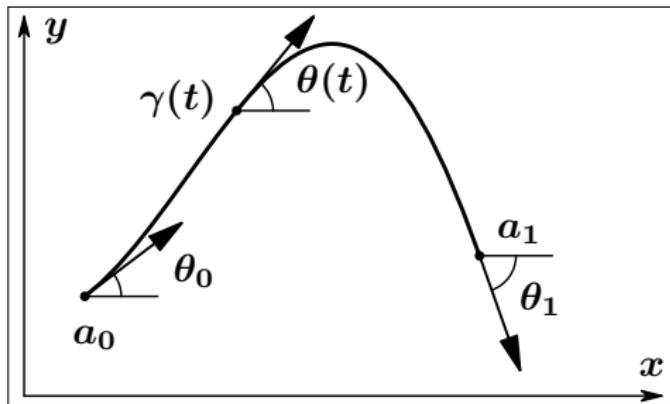
$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min,$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5.$$

Приложения эйлеровых эластик

- теория упругости и сопротивление материалов (моделирование колонн, балок, упругих стержней),
- размер и форма в биологии (максимальная высота дерева, изгиб пальм под действием ветра, кривизна позвоночника, механика крыльев насекомых),
- нелинейные сплайны в теории аппроксимации (Г.Биркхоф, К.Р. де Бур, 1964),
- восстановление скрытых изображений в компьютерном видении (Д.Мамфорд, 1994),
- моделирование тонких оптических волокон и гибких соединений в микроэлектронике (В.Джеирезбхой, 2008),
- динамика оси вихря и кубическое уравнение Шредингера (Х.Хасимото, 1971),
- моделирование молекул ДНК (Р.С.Маннинг, 1996), ...

Задача Эйлера: Координаты в $\mathbb{R}^2 \times S^1$



- $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in S^1,$
- $\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [0, t_1],$
- $a_0 = (x_0, y_0), \quad a_1 = (x_1, y_1),$
- $v_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0), \quad v_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1).$

Задача оптимального управления

$$\dot{x} = \cos \theta,$$

$$\dot{y} = \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = u,$$

$$q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1, \quad u \in \mathbb{R},$$

$q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \theta_0)$, $q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1)$, t_1 фиксировано.

$$k^2 = \dot{\theta}^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min .$$

Допустимые управление $u(t) \in L_2[0, t_1]$,
траектории $q(t) \in AC[0, t_1]$.

Левоинвариантная задача на группе движений плоскости

$$\text{SE}(2) = \mathbb{R}^2 \ltimes \text{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1 \right\}$$

$$\dot{q} = X_1(q) + uX_2(q), \quad q \in \text{SE}(2), \quad u \in \mathbb{R}.$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad t_1 \text{ фиксировано},$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min,$$

Левоинвариантный репер на $\text{SE}(2)$:

$$X_1(q) = qE_{13}, \quad X_2(q) = q(E_{21} - E_{12}), \quad X_3(q) = [X_1, X_2](q) = -qE_{23}.$$

Непрерывные симметрии и нормализация условий задачи

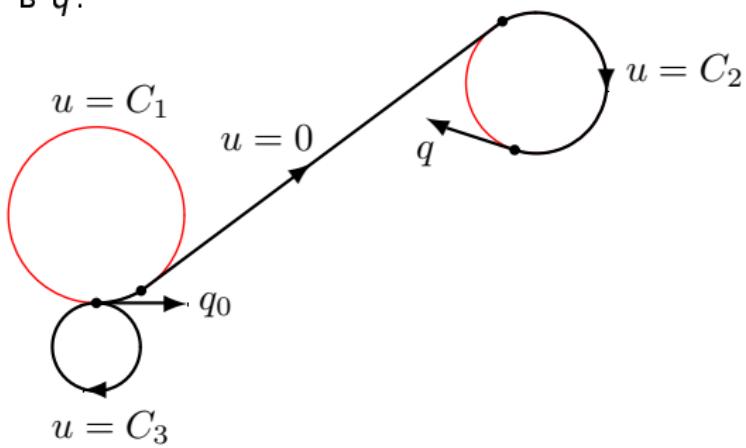
- Левые сдвиги на $SE(2)$ \Rightarrow $q_0 = \text{Id} \in SE(2)$:
 - Параллельные переносы в \mathbb{R}^2 \Rightarrow $(x_0, y_0) = (0, 0)$
 - Повороты в \mathbb{R}^2 \Rightarrow $\theta_0 = 0$
- Гомотетии в \mathbb{R}^2 \Rightarrow $t_1 = 1$

Множество достижимости

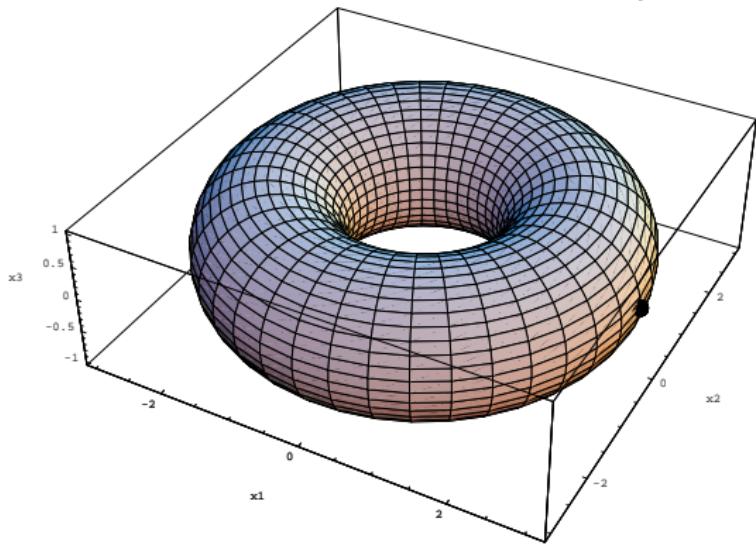
$$q_0 = (0, 0, 0), t_1 = 1$$

$$\mathcal{A}_{q_0}(1) = \{(x, y, \theta) \mid x^2 + y^2 < 1 \ \forall \theta \in S^1 \text{ или } (x, y, \theta) = (1, 0, 0)\}.$$

Перевод q_0 в q :



Множество достижимости и существование оптимальных траекторий



$q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1) \Rightarrow \exists$ оптимальная траектория $q(t) \in \text{Lip}[0, t_1]$

Принцип максимума Понtryгина в инвариантной форме

$$\dot{q} = X_1(q) + uX_2(q), \quad q \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min$$

- $T_q M = \text{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)), \quad X_3 = [X_1, X_2]$
- $T_q^* M = \{(h_1, h_2, h_3)\}, \quad h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \quad \lambda \in T^* M$
- Гамильтоновы векторные поля $\vec{h}_i \in \text{Vec}(T^* M)$
- $h_u^\nu = \langle \lambda, X_1 + uX_2 \rangle + \frac{\nu}{2} u^2 = h_1(\lambda) + uh_2(\lambda) + \frac{\nu}{2} u^2$

Теорема (Принцип максимума Понtryгина)

$u(t)$ и $q(t)$ оптимальны $\Rightarrow \exists \lambda_t \in T_{q(t)}^* M, \nu \in \{-1, 0\}$:

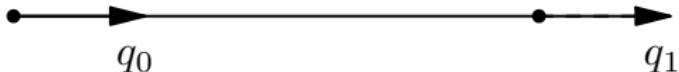
$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \vec{h}_1(\lambda_t) + u(t) \vec{h}_2(\lambda_t),$$

$$h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \max_{v \in \mathbb{R}} h_v^\nu(\lambda_t),$$

$$(\nu, \lambda_t) \neq 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Аномальные экстремальные траектории

$$\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \equiv 0, \quad x = t, \quad y \equiv 0$$



$$J = 0 = \min \quad \Rightarrow$$

\Rightarrow аномальные экстремальные траектории

оптимальны при $t \in [0, t_1]$ $\forall t_1 > 0$.

Единственная траектория из $q_0 = (0, 0, 0)$ в $(t_1, 0, 0) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$.

Гамильтонова система для нормальных экстремалей

$\nu = -1 \Rightarrow$ неединственность экстремальных траекторий

Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина:

$$\dot{h}_1 = -h_2 h_3, \quad \dot{x} = \cos \theta$$

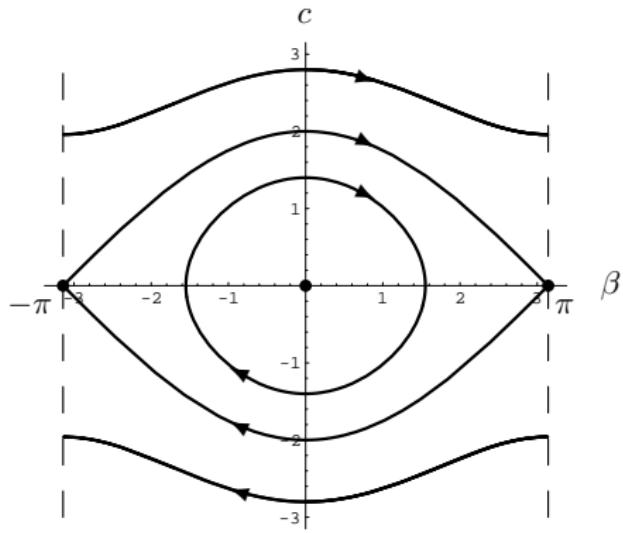
$$\dot{h}_2 = h_3, \quad \dot{y} = \sin \theta$$

$$\dot{h}_3 = h_1 h_2, \quad \dot{\theta} = h_2$$

$$h_1^2 + h_3^2 = r^2 \equiv \text{const} \Rightarrow h_1 = -r \cos \beta, \quad h_3 = -r \sin \beta$$

Уравнение маятника

$$\ddot{\beta} = -r \sin \beta \iff \begin{cases} \dot{\beta} = c, \\ \dot{c} = -r \sin \beta \end{cases}$$



Нормальные экстремальные траектории

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= -r \sin(\theta - \gamma), & r, \gamma &= \text{const}, \\ \dot{x} &= \cos \theta, \\ \dot{y} &= \sin \theta.\end{aligned}$$

Система интегрируема в **функциях Якоби**.

$\theta(t)$, $x(t)$, $y(t)$ параметризованы функциями Якоби sn , sn , dn , E .

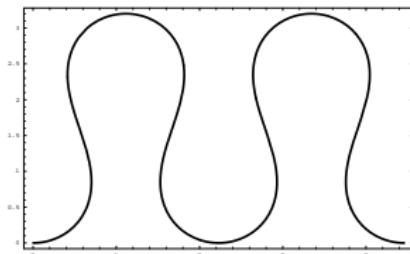
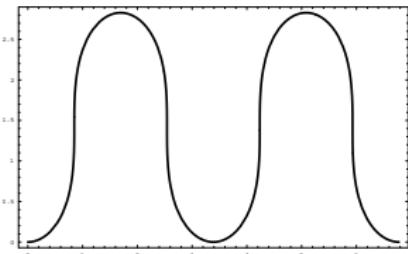
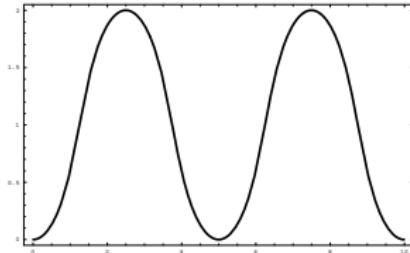
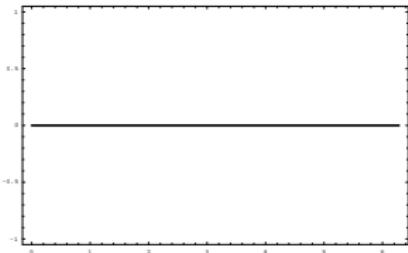
Эйлеровы эластики

Энергия маятника

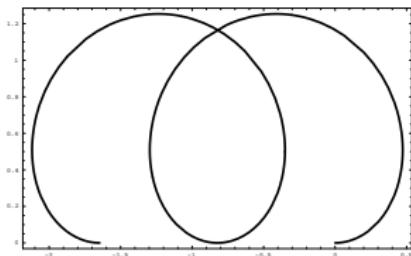
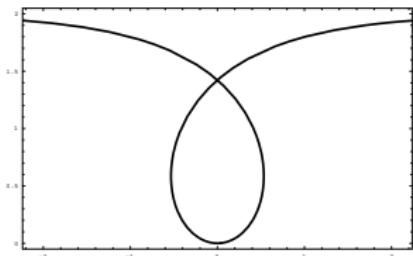
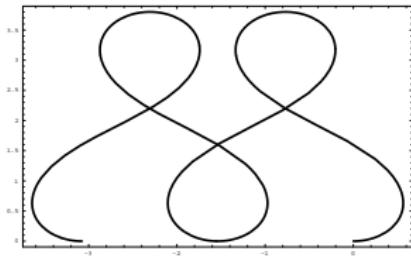
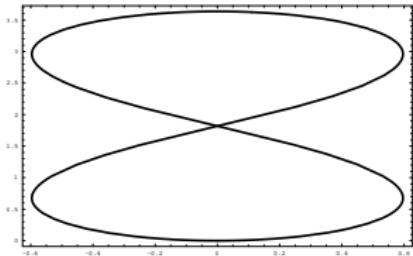
$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - r \cos(\theta - \gamma) \equiv \text{const} \in [-r, +\infty)$$

- $E = -r \neq 0 \Rightarrow$ прямые,
- $E \in (-r, r), r \neq 0 \Rightarrow$ инфлексионные эластики,
- $E = r \neq 0, \theta - \gamma = \pi \Rightarrow$ прямые,
- $E = r \neq 0, \theta - \gamma \neq \pi \Rightarrow$ критические эластики,
- $E > r \neq 0 \Rightarrow$ неинфлексионные эластики,
- $r = 0 \Rightarrow$ окружности и прямые.

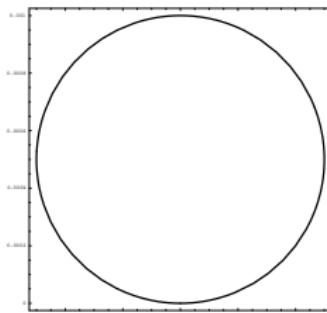
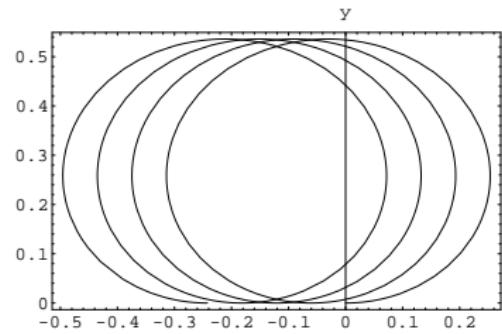
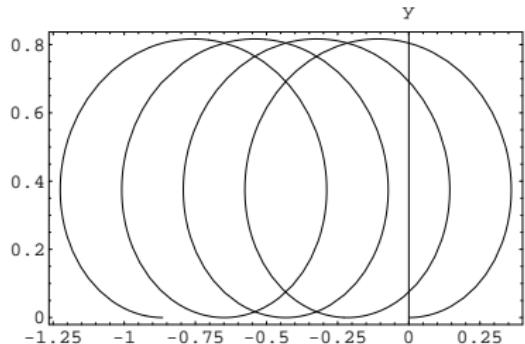
Эйлеровы эластики



Эйлеровы эластики



Эйлеровы эластики



Оптимальность нормальных экстремальных траекторий

$q(t)$ локально оптимальна:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \tilde{q} : \quad \|\tilde{q} - q\|_C < \varepsilon, \quad q(0) = \tilde{q}(0), \quad q(t_1) = \tilde{q}(t_1) \quad \Rightarrow \quad J(q) \leq J(\tilde{q})$$

Устойчивая эластика $(x(t), y(t))$

$q(t)$ глобально оптимальна:

$$\forall \tilde{q} : \quad q(0) = \tilde{q}(0), \quad q(t_1) = \tilde{q}(t_1) \quad \Rightarrow \quad J(q) \leq J(\tilde{q})$$

Эластика $(x(t), y(t))$ минимальной упругой энергии

Потеря оптимальности

Теорема (Усиленное условие Лежандра)

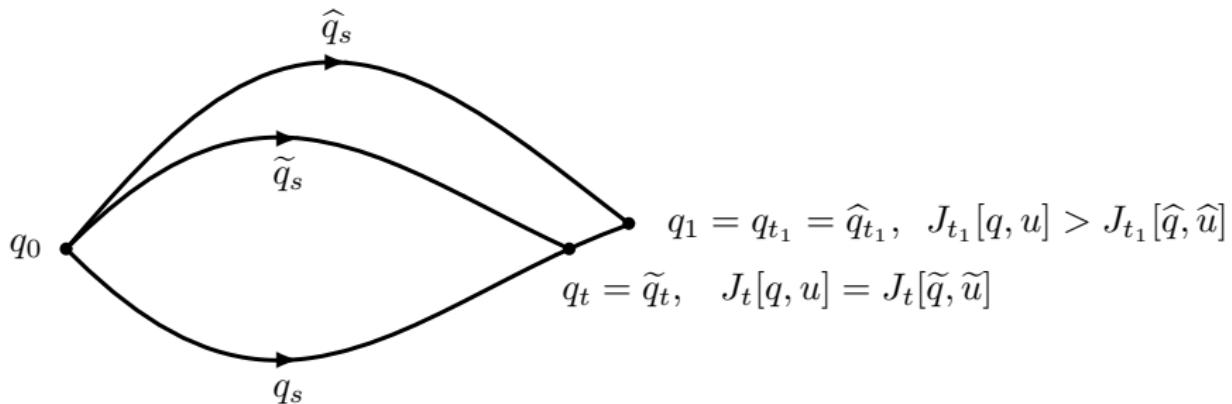
$$\frac{\partial^2 h_u^{-1}}{\partial u^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{малые дуги } q(t) \text{ оптимальны.}$$

Время разреза:

$$t_{\text{cut}}(q) = \sup\{t > 0 \mid q(s), s \in [0, t], \text{ оптимальна}\}.$$

Причины потери оптимальности: Точка Максвелла

Точка Максвелла q_t : $\exists \tilde{q}_s \neq q_s : q_t = \tilde{q}_t, J_t[q, u] = J_t[\tilde{q}, \tilde{u}]$



Время Максвелла и время разреза

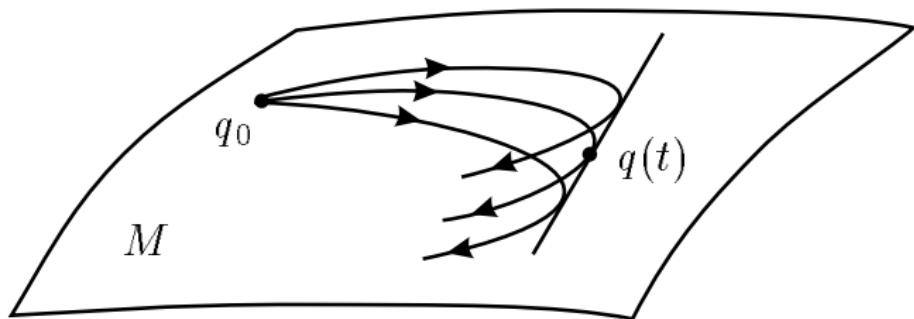
Теорема

Если для нормальной экстремальной траектории q_s , $s \in [0, t_1]$, существует время Максвелла $t_{\text{Max}}(q_s) \in (0, t_1)$, то траектория q_s неоптимальна на отрезке $[0, t_1]$:

$$t_{\text{cut}}(q_s) \leq t_{\text{Max}}(q_s).$$

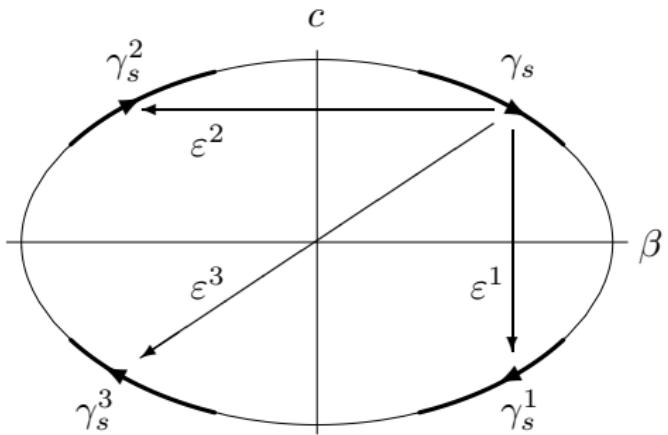
Причины потери оптимальности: Сопряженная точка

$q(t) \in$ огибающей семейства экстремалей



$$t_{\text{cut}} \leq \min(t_{\text{Max}}, t_{\text{conj}})$$

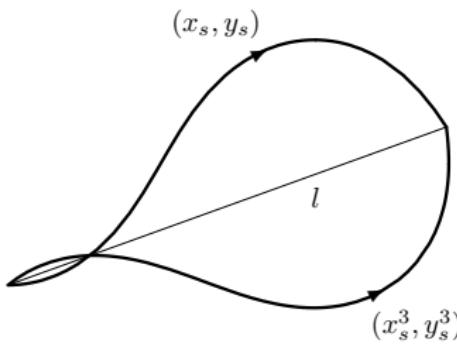
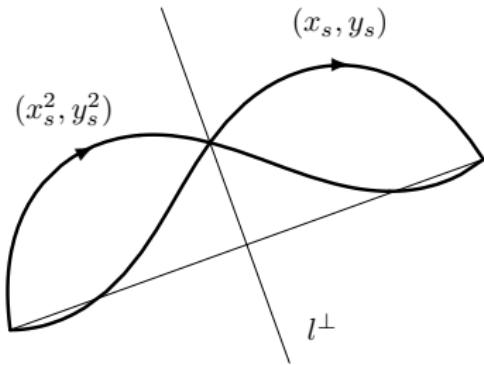
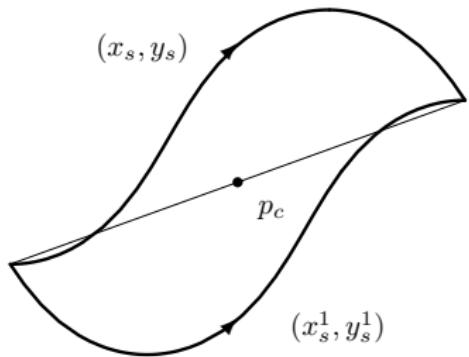
Отражения в фазовом цилиндре маятника $\ddot{\beta} = -r \sin \beta$



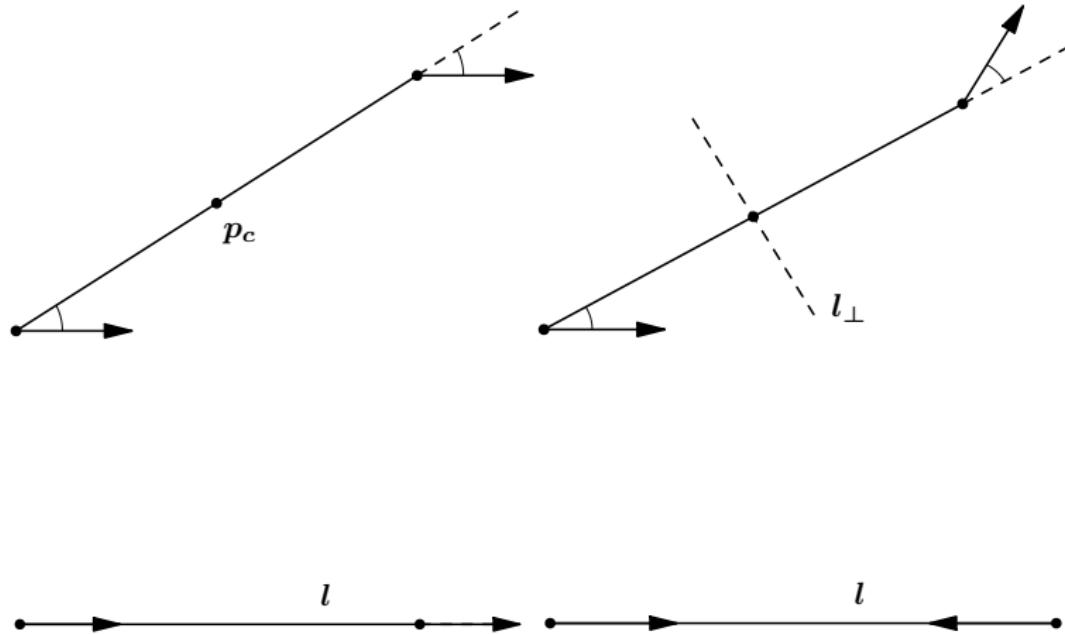
Группа симметрий прямоугольника

$$D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Действие отражений ε^1 , ε^2 , ε^3 на эластики



Неподвижные точки отражений $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$



Точки Максвелла, соответствующие отражениям

Неподвижные точки отражений ε^i :

$$t = t_{\varepsilon^i}^n, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

T = период колебаний маятника \Rightarrow

$$t_{\varepsilon^1}^n = nT, \quad \left(n - \frac{1}{2}\right)T < t_{\varepsilon^2}^n < \left(n + \frac{1}{2}\right)T.$$

Верхняя оценка времени разреза:

$$t_{\text{cut}} \leq \min(t_{\varepsilon^1}^1, t_{\varepsilon^2}^1) \leq T$$

Сопряженные точки

Экспоненциальное отображение

$$\text{Exp}_t : T_{q_0}^* M \rightarrow M, \quad \lambda_0 \mapsto q(t) = \pi \circ e^{t\vec{h}}(\lambda_0)$$

$q(t)$ — сопряженная точка $\iff q(t)$ — критическое значение
 Exp_t

$$\text{Exp}_t(h_1, h_2, h_3) = (x, y, \theta)$$

$$\frac{\partial(x, y, \theta)}{\partial(h_1, h_2, h_3)} = 0$$

Локальная оптимальность нормальных экстремальных траекторий

Теорема (Условие Якоби)

Нормальные экстремальные траектории теряют локальную оптимальность в первой сопряженной точке.

Первое сопряженное время $t_{\text{conj}}^1 \in (0, +\infty]$.

- Нет точек перегиба $\Rightarrow t_{\text{conj}}^1 = +\infty$,
- Инфлексионный случай $\Rightarrow t_{\text{conj}}^1 \in [t_{\varepsilon^1}^1, t_{\varepsilon^2}^1]$.

Устойчивость инфлексионных эластик

- $t_1 \leq \frac{1}{2} T \Rightarrow$ устойчивость
- $t_1 \geq \frac{3}{2} T \Rightarrow$ неустойчивость

В частности:

- нет точек перегиба \Rightarrow устойчивость (М. Борн),
- 1 или 2 точки перегиба \Rightarrow устойчивость или неустойчивость,
- 3 точки перегиба \Rightarrow неустойчивость.

Глобальная оптимальность эластик

$$q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1), \quad \text{оптимальная } q_t = ?$$

$q_t = \text{Exp}_t(\lambda)$ оптимальна при $t \in [0, t_1] \Rightarrow t_1 \leq \min(t_{\varepsilon_1}^1(\lambda), t_{\varepsilon_2}^1(\lambda))$

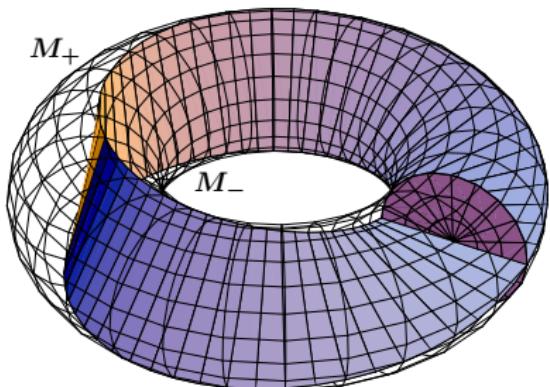
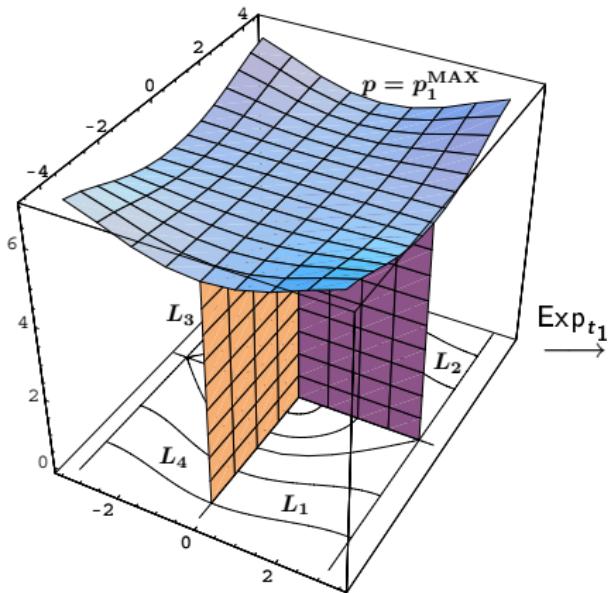
$$N' = \{\lambda \in T_{q_0}^* M \mid t_1 \leq \min(t_{\varepsilon_1}^1(\lambda), t_{\varepsilon_2}^1(\lambda))\}$$

$\text{Exp}_{t_1} : N' \rightarrow \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ сюръективно, невырождено, неинъективно

\exists открытые всюду плотные $\tilde{N} \subset N'$, $\tilde{M} \subset \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ такие, что

$\text{Exp}_{t_1} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{M}$ прямая сумма **диффеоморфизмов**

Глобальная структура экспоненциального отображения



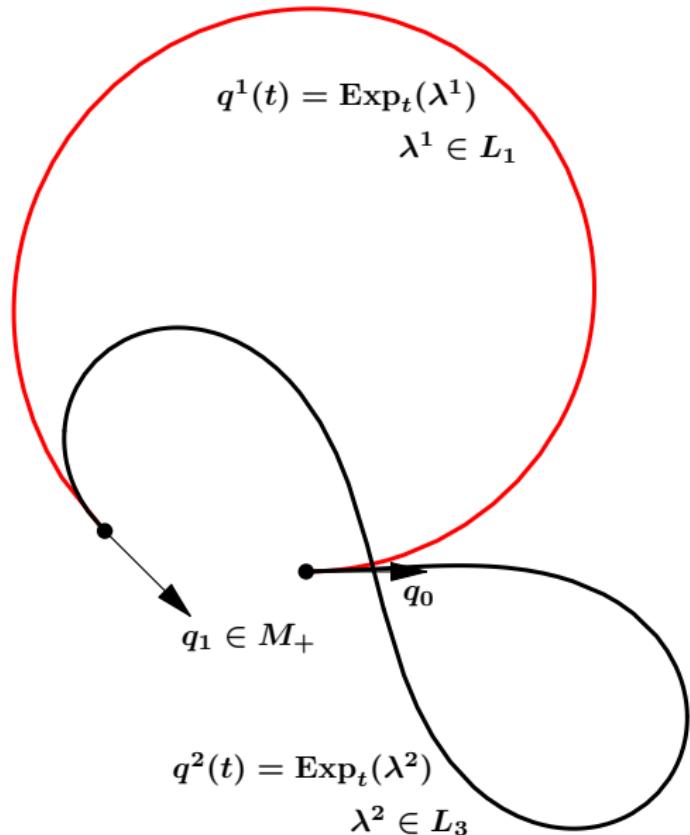
$$\text{Рис.: } \tilde{M} = M_+ \cup M_-$$

$$\text{Рис.: } \tilde{N} = \cup_{i=1}^4 L_i$$

$\text{Exp}_{t_1} : L_1, L_3 \rightarrow M_+$ **диффео**,

$\text{Exp}_{t_1} : L_2, L_4 \rightarrow M_-$ **диффео**

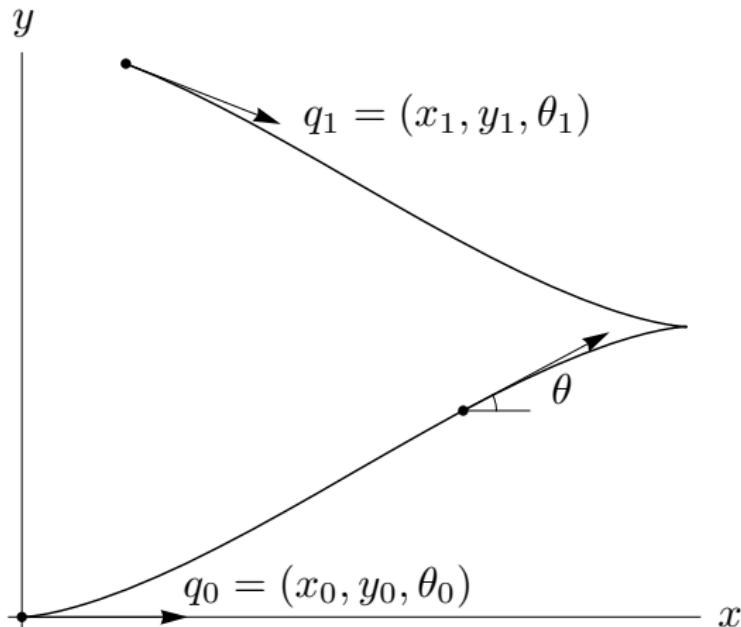
Конкурирующие эластики



$$? : J[q^1] \leq J[q^2]$$

Анимации . . .

Субриманова задача на группе движений плоскости, или Задача об оптимальном движении робота на плоскости



$$I = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

Задача оптимального управления

$$\dot{x} = u \cos \theta,$$

$$\dot{y} = u \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = v,$$

$$q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1,$$

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2} \, dt \rightarrow \min.$$

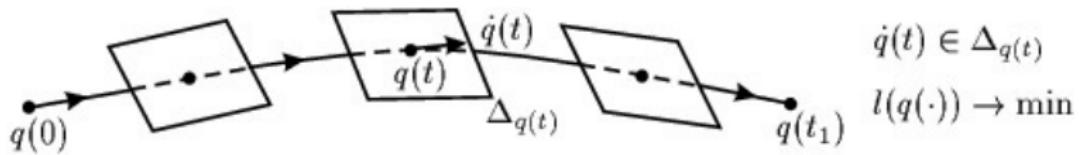
Левоинвариантная субриманова задача на группе движений плоскости

$$\dot{q} = uX_1(q) + vX_2(q), \quad q \in \text{SE}(2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle^{1/2} dt \rightarrow \min,$$

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$



Существование решений

- $\dot{q} = uX_1(q) + vX_2(q),$

$\text{span}(X_1(q), X_2(q), [X_1, X_2](q)) = T_q M \quad \forall q \in M$

\Rightarrow полная управляемость

- Теорема Филиппова

\Rightarrow существование оптимальных траекторий $q(t)$.

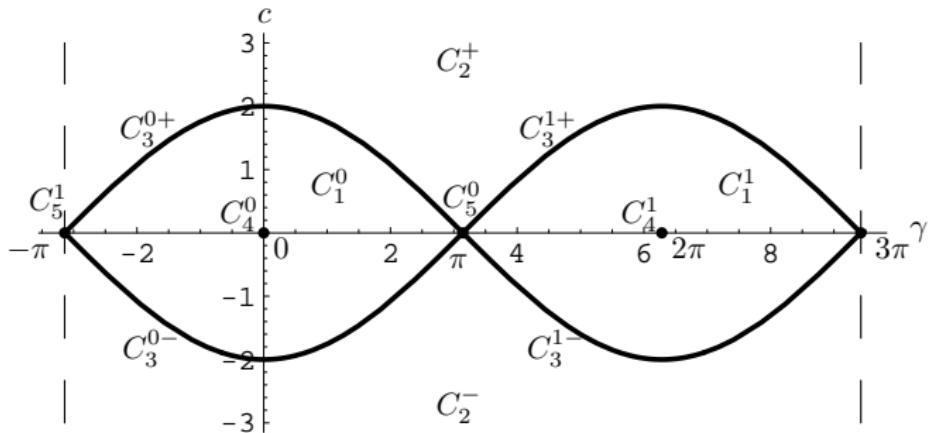
Принцип максимума Понtryгина

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2 \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad l = t_1 \rightarrow \min$$

$$\dot{\gamma} = c, \quad \dot{c} = -\sin \gamma, \quad (\gamma, c) \in C \cong (2S_\gamma^1) \times \mathbb{R}_c,$$

$$\dot{x} = \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta, \quad \dot{y} = \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta, \quad \dot{\theta} = -\cos \frac{\gamma}{2}.$$

Разбиение фазового цилиндра маятника $C \cong (2S_\gamma^1) \times \mathbb{R}_c$:



Нетривиальные экстремальные траектории (x_t, y_t)

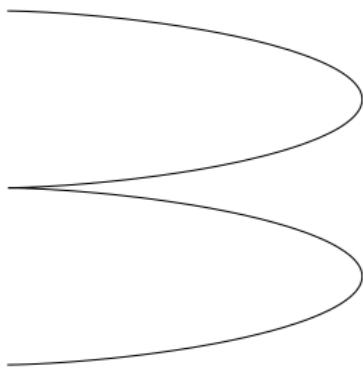


Рис.: $\lambda \in C_1$

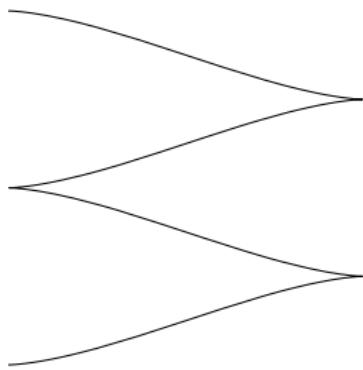


Рис.: $\lambda \in C_2$

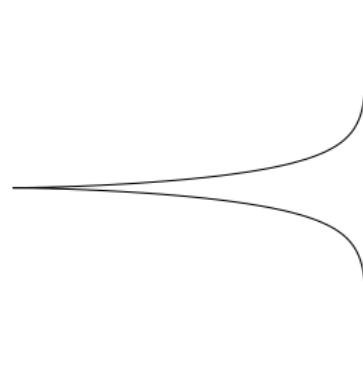


Рис.: $\lambda \in C_3$

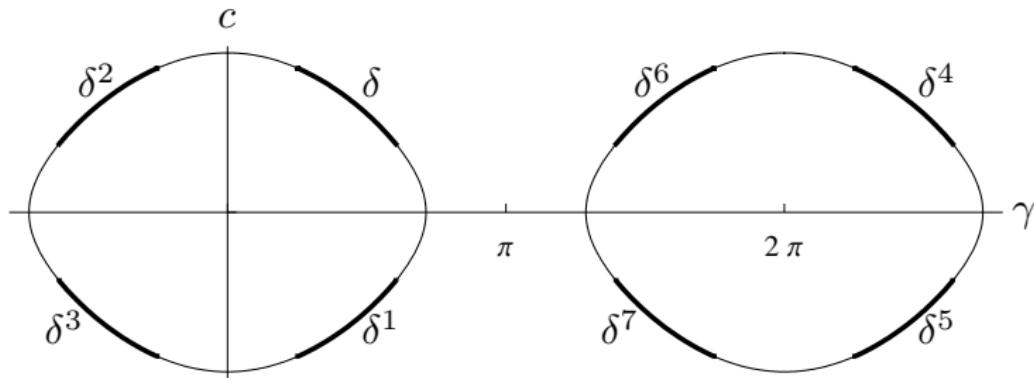
Параметризация функциями Якоби sn , cn , dn , E .

Отражения ε^i в фазовом цилиндре маятника $\ddot{\gamma} = -\sin \gamma$

- Группа симметрий параллелепипеда

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

- Действие отражений ε^i : $\delta \mapsto \delta^i$:



Точки Максвелла, соответствующие отражениям

- Неподвижные точки отражений ε^i :

$$t = t_{\varepsilon^i}^n, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

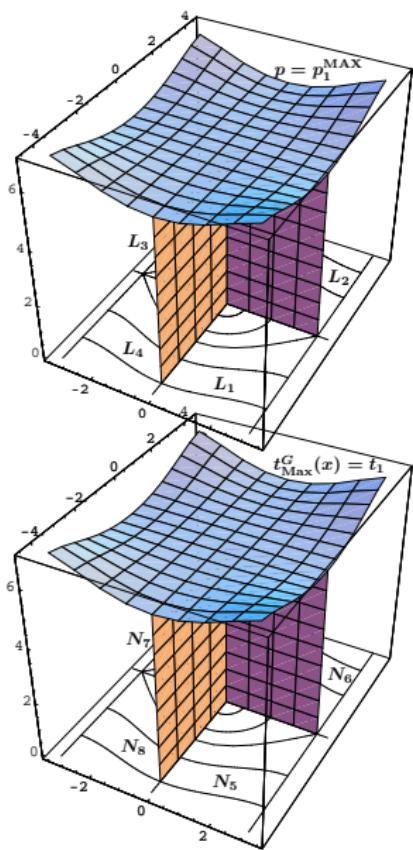
- Верхняя оценка времени разреза: $t_{\text{cut}} \leq \min(t_{\varepsilon^1}^1, t_{\varepsilon^2}^1)$.

Оценки сопряженного времени

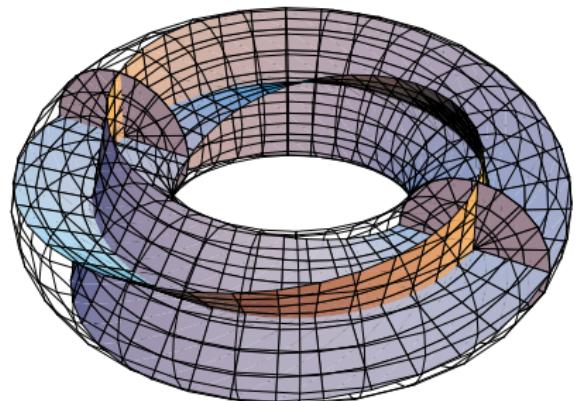
- Неинфлексионные траектории $\Rightarrow t_{\text{conj}}^1 = +\infty$.
- Инфлексионные траектории $\Rightarrow t_{\text{conj}}^1 \in [t_{\varepsilon^2}^1, t_{\varepsilon^1}^1]$.

Структура экспоненциального отображения

$\text{Exp} : N_i \rightarrow M_i$ диффеоморфизмы,
 $i = 1, \dots, 8.$



$\xrightarrow{\text{Exp}}$

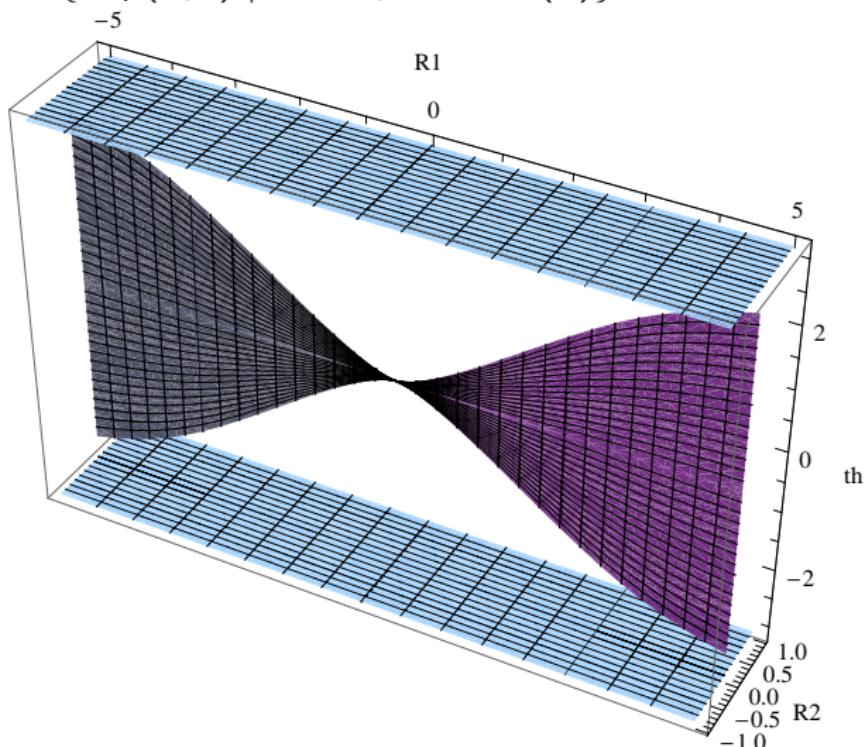


Страты Максвелла

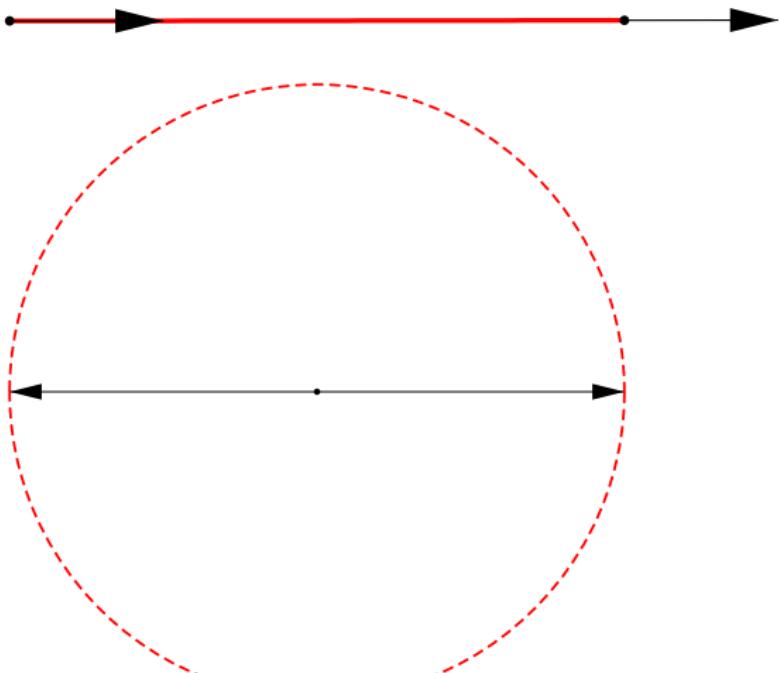
- $\text{Max}_1 = \{(x, y, \theta) \in M \mid \theta = \pi\}$
- $\text{Max}_2 = \{(x, y, \theta) \in M \mid R_2 = 0, \theta \in [-\theta_1(R_1), \theta_1(R_1)]\},$
 $R_1 = y \cos \frac{\theta}{2} - x \sin \frac{\theta}{2}, R_2 = x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2}.$
- $q_1 \in \text{Max}_1 \cup \text{Max}_2 \Rightarrow 2$ оптимальные траектории,
- $q_1 \in M \setminus (\text{Max}_1 \cup \text{Max}_2) \Rightarrow 1$ оптимальная траектория.

Время разреза и множество разреза

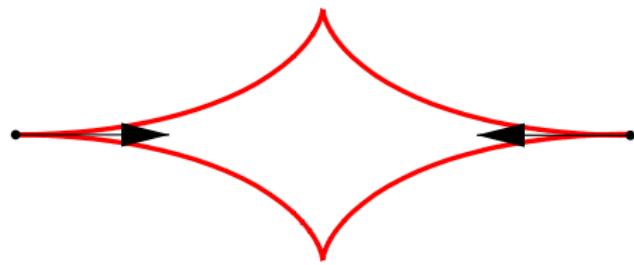
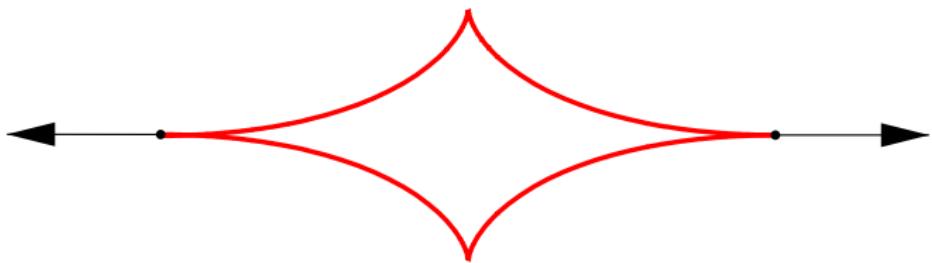
- $t_{\text{cut}} = \min(t_{\varepsilon^1}^1, t_{\varepsilon^2}^1)$.
- $\text{Cut} = \{\text{Exp}(\lambda, t) \mid \lambda \in N, t = t_{\text{cut}}(\lambda)\} = \text{Max}_1 \cup \text{Max}_2$:



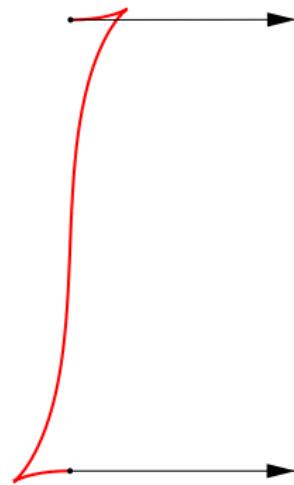
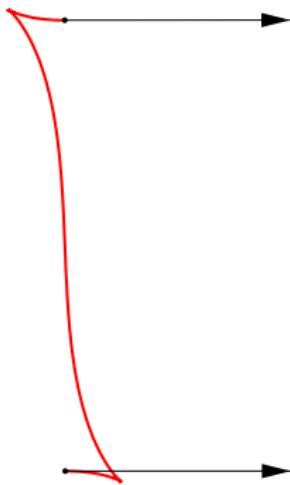
Оптимальные решения



Оптимальные решения



Оптимальные решения



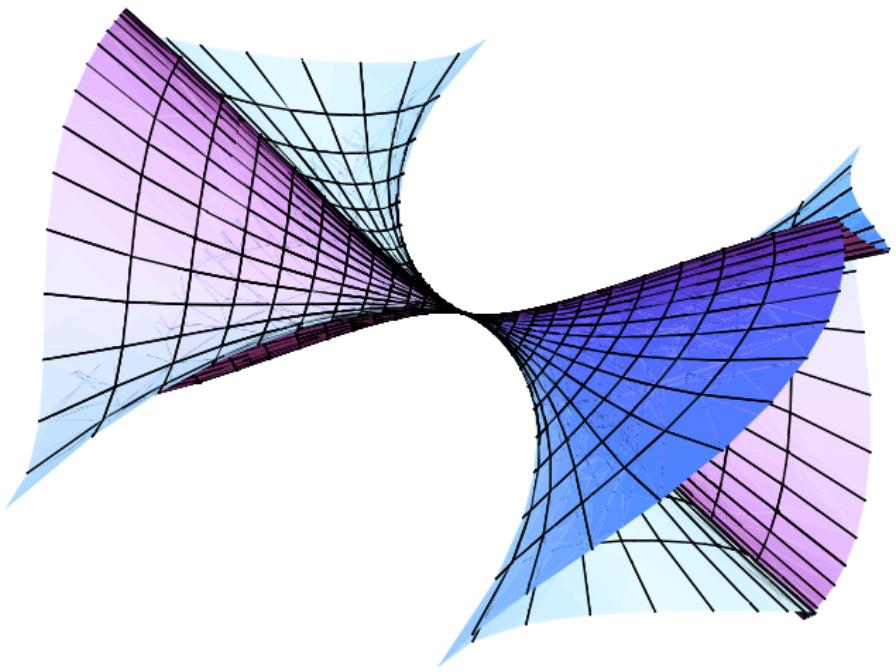
Оптимальные решения

Общий случай:

системы уравнений в функциях Якоби \Rightarrow

\Rightarrow компьютерная программа.

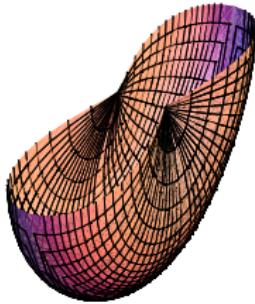
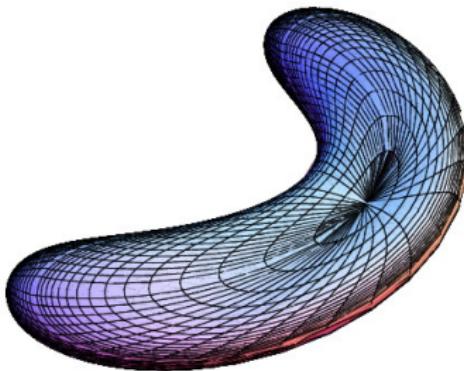
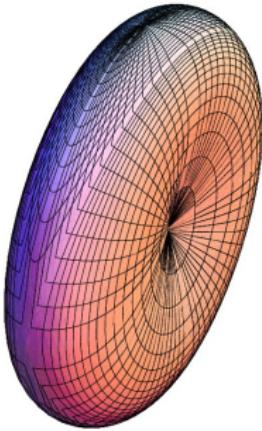
Субриманова каустика $\{\text{Exp}(\lambda, t) \mid \lambda \in N, t = t_{\text{conj}}^1(\lambda)\}$



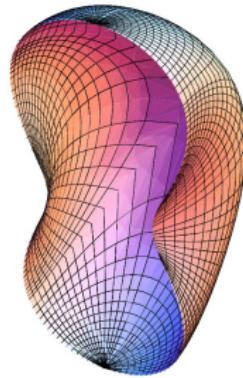
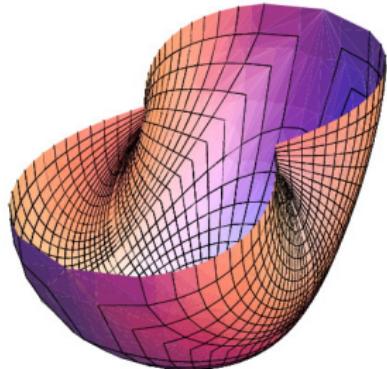
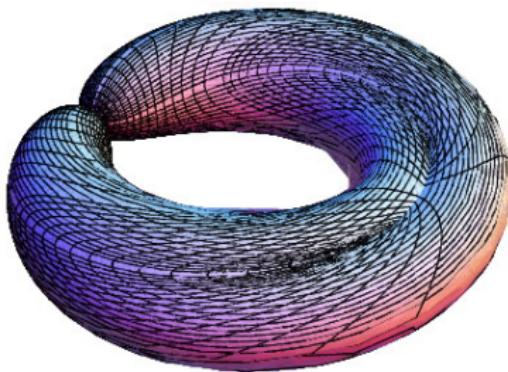
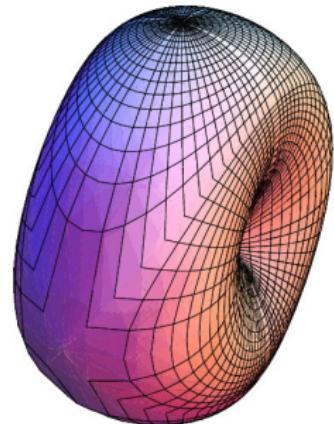
Субримановы сферы

- $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\},$
- $S_R = \{q \in M \mid d(q_0, q) = R\},$
- $R = 0 \Rightarrow S_R = \{q_0\},$
- $R \in (0, \pi) \Rightarrow S_R \cong S^2,$
- $R = \pi \Rightarrow S_R \cong S^2 / \{N = S\},$
- $R > \pi \Rightarrow S_R \cong T^2.$

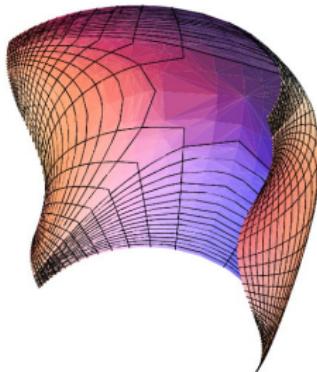
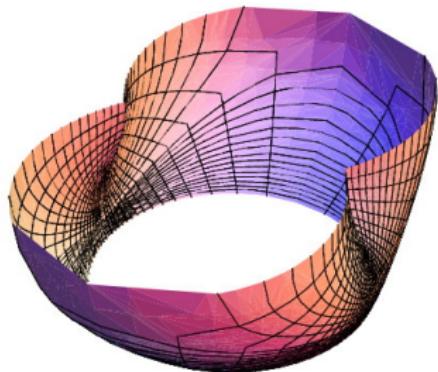
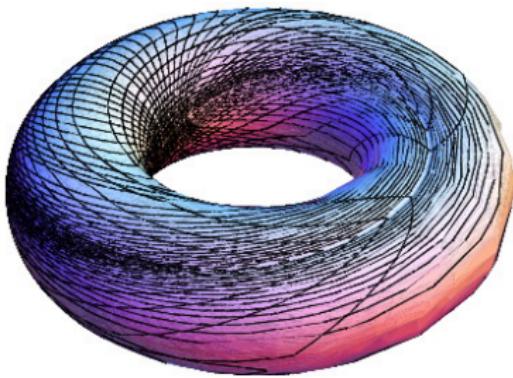
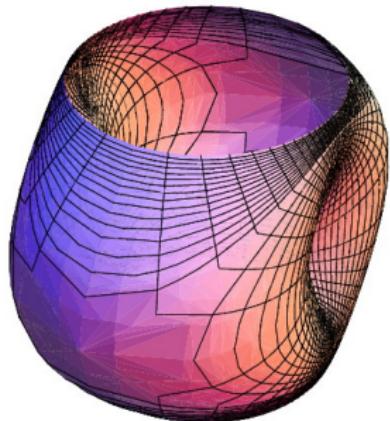
Субриманова сфера радиуса $\pi/2$



Субриманова сфера радиуса π



Субриманова сфера радиуса $3\pi/2$



Публикации

<http://www.botik.ru/PSI/CPRC/sachkov/>

- [1] Сачков Ю.Л. Оптимальность эйлеровых эластик, Доклады Академии Наук, 2007, т. 417, N 1, С. 23–25.
- [2] Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in Euler's elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 14 (2008), No. 2 (April), 169–234, arXiv:0705.0614 [math.OC].
- [3] Yu. L. Sachkov, Conjugate points in Euler's elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2008 Vol. 14 (2008), No. 3 (July), 409–439, arXiv:0705.1003 [math.OC].
- [4] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *направлена для публикации*, arXiv:0807.4731 [math.OC].
- [5] А.А.Ардентов, Ю.Л.Сачков. Решение задачи Эйлера об эластиках. Автоматика и Телемеханика (*принята к публикации*).