

А. А. Ардентов

Интерфейс для моделирования эластик Эйлера в программной среде Mathematica

Аннотация. В классическом вариационном вычислении и оптимальном управлении хорошо известна задача о стационарных профилях упругого стержня. Леонард Эйлер, рассмотревший эту задачу в 1744 году, описал все возможные стационарные профили (эйлеровы эластики). В программной среде Mathematica написаны модули вычисления уравнений всех типов эластик, а также модуль для их визуализации. Модули объединены в интерфейс, позволяющий получить изображение и параметризацию любой эластики через Web.

Ключевые слова и фразы: эластики Эйлера, Wolfram Mathematica, оптимальное управление, геометрия.

1. Введение

Задача Эйлера об эластиках имеет следующую геометрическую формулировку. Даны две точки $a_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i \in \{0, 1\}$, с закрепленными в них единичными векторами $v_i \in T_{a_i}\mathbb{R}^2, |v_i| = 1, i \in \{0, 1\}$. Требуется найти гладкую кривую $\gamma(t)$ фиксированной длины l , выходящую из точки a_0 с вектором скорости v_0 и попадающую в точку a_1 с вектором скорости v_1 (см. рис. 1). Кроме того, на кривую накладывается дополнительное условие — интеграл квадрата кривизны имеет наименьшее значение вдоль искомой кривой:

$$\int_0^{t_1} k^2(t) dt \rightarrow \min.$$

Задача имеет простой физический смысл: дан упругий стержень фиксированной длины с закрепленными концами и направлениями стержня в концах. Требуется определить форму стержня. Возможные формы, которые может принимать упругий стержень, открыл Эйлер [1], они называются эйлеровыми эластиками.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 12-01-00913-а.

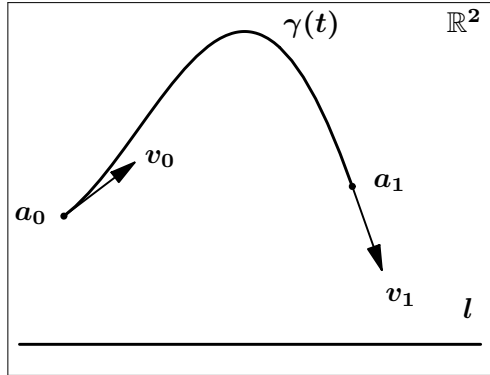


Рис. 1. Геометрическая постановка задачи

Первая параметризация эластик эллиптическими функциями была получена Л. Заалшютцем [2]. Вопрос об оптимальности эластик был поднят в диссертации Макса Борна [3]: будущий нобелевский лауреат доказал отсутствие сопряженных точек на эластике без точек перегиба, т. е. что все неинфлексионные эластики являются локально оптимальными. Ю. Л. Сачков получил оценки точек разреза [4], в которых эластики теряют глобальную оптимальность, и сопряженных точек [5], в которых теряется локальная оптимальность. Различные вопросы, связанные с оптимальностью эластик, рассматривались в работах [6–10].

В данной работе представлены формулы для вычисления эластик, а также описание демонстрации в среде Mathematica [11], с помощью которой можно через web-интерфейс построить эластику любого типа и формы, а также получить параметризацию элаستي.

2. Экстремальные траектории в задаче оптимального управления

Так как $|v_i| = 1$, то далее рассматриваются вместо векторов соответствующие углы θ_i такие, что $v_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$. Без ограничения общности начальная точка может быть выбрана в начале координат $((x_0, y_0) = (0, 0))$, а начальный угол θ_0 установлен равным 0 (т. е. касательная параллельна оси Ox). Этого можно достичь за счет выбора системы координат на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Описанная задача может быть также сформулирована как задача оптимального управления [12] в пространстве $M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}, \\ q(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q(t_1) = q_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \\ \int_0^{t_1} \frac{u^2(t)}{2} dt &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Заметим, что кривизна кривой $k(t) = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t)} = |\dot{\theta}(t)| = |u(t)|$.

Напомним основные результаты работы [13]. К рассматриваемой задаче оптимального управления был применен принцип максимума Понтрягина [14]. Полученная гамильтонова система для нормальных экстремалей сведена к уравнению математического маятника:

$$(1) \quad \dot{\beta} = c, \quad \dot{c} = -\sin \beta,$$

где β — угол отклонения от устойчивого положения равновесия маятника, а c — его линейная скорость.

Таким образом, экстремальные траектории задачи параметризуются точками фазового цилиндра маятника, задающего пространство сопряженных переменных $C = \mathbb{R}_c \times S_\beta^1$. Уравнение маятника (1) имеет следующий интеграл энергии:

$$E = \frac{c^2}{2} - \cos \beta \in [-1, +\infty).$$

Для различных уровней энергии маятника получены разные выражения для экстремальных траекторий $q(t)$ (см. [13]). Отсюда получена классификация эластик, см. рис. 2.

Более подробное описание каждого типа приведено в дальнейших пунктах 2.1, 2.2.

2.1. Невырожденные эластики

На рис. 3 показаны два основных семейства невырожденных эластик, выходящих из начала координат с нулевым начальным углом. Каждая траектория задается тройкой b_0, k, r — эллиптическими координатами в пространстве сопряженных переменных [15]. На рис. 3



Рис. 2. Классификация эластик

траектории имеют конечную длину, которую задает параметр времени t .

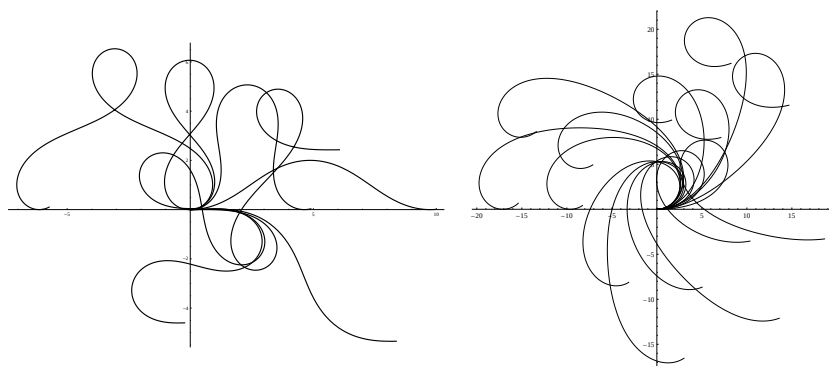


Рис. 3. Неинфлексионные и инфлексионные эластики

Эллиптические функции Якоби, используемые в формулах, определяются следующим образом [16]:

$$\begin{aligned}\psi = \operatorname{am} u &\Leftrightarrow u = F(\psi) = \int_0^\psi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \\ E(u) &= \int_0^{\psi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt, \\ \operatorname{sn} u &= \sin \operatorname{am} u, \quad \operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u, \\ \operatorname{dn} u &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}, \quad K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Инфлекссионными называют эластики, которые имеют на луче $t \in [0, +\infty)$ бесконечное количество точек перегиба (см. слева рис. 3). Уравнения этих кривых получены в работе [13]:

$$\begin{aligned}x(b_0, k, r, t) &= t(2k^2 \operatorname{sn}^2 b_0 - 1) - \frac{2}{r} \left((2k^2 \operatorname{sn}^2 b_0 - 1)(E(b_t) - E(b_0)) + \right. \\ &\quad \left. + 2k^2 \operatorname{dn} b_0 \operatorname{sn} b_0 (\operatorname{cn} b_t - \operatorname{cn} b_0) \right), \\ y(b_0, k, r, t) &= 2kt \operatorname{dn} b_0 \operatorname{sn} b_0 - \frac{2}{r} \left(2k \operatorname{dn} b_0 \operatorname{sn} b_0 (E(b_t) - E(b_0)) - \right. \\ &\quad \left. - k(2k^2 \operatorname{sn}^2 b_0 - 1)(\operatorname{cn} b_t - \operatorname{cn} b_0) \right),\end{aligned}$$

где $b_t = b_0 + rt$, $b_0 \in \mathbb{R}$, $k \in (0, 1)$, $r \in \mathbb{R}^+$.

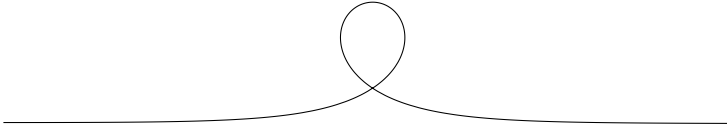


Рис. 4. Пример критической элаستي

Неинфлекссионными называются невырожденные эластики, которые на луче $t \in [0, +\infty)$ не имеют точек перегиба (см. справа рис. 3). Уравнения для этих кривых, как и для инфлекссионных, зависят от

времени t и параметров b_0, k, r — эллиптических координат в пространстве сопряженных переменных [15]:

$$\begin{aligned} x(b_0, k, r, t) &= -\frac{2}{kr} \left(2 \operatorname{cn} \frac{b_0}{k} \operatorname{sn} \frac{b_0}{k} \left(\operatorname{dn} \frac{b_t}{k} - \operatorname{dn} \frac{b_0}{k} \right) + \left(E \left(\frac{b_t}{k} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - E \left(\frac{b_0}{k} \right) \right) \left(2 \operatorname{sn}^2 \frac{b_0}{k} - 1 \right) \right) + \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \left(2 \operatorname{sn}^2 \frac{b_0}{k} - 1 \right) t, \\ y(b_0, k, r, t) &= -\frac{2}{kr} \left(2 \operatorname{cn} \frac{b_0}{k} \operatorname{sn} \frac{b_0}{k} \left(E \left(\frac{b_t}{k} \right) - E \left(\frac{b_0}{k} \right) \right) - \left(\operatorname{dn} \frac{b_t}{k} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{dn} \frac{b_0}{k} \right) \left(2 \operatorname{sn}^2 \frac{b_0}{k} - 1 \right) \right) + 2t \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \operatorname{cn} \frac{b_0}{k} \operatorname{sn} \frac{b_0}{k}, \end{aligned}$$

где $b_t = b_0 + rt$, $b_0 \in \mathbb{R}$, $k \in (0, 1)$, $r \in \mathbb{R}^+$.

Критические эластики представляют собой предельный случай инфлекссионных и неинфлекссионных эластик при $k \rightarrow 1$ (см. рис. 4). Их уравнения зависят от параметров b_0, r, t :

$$\begin{aligned} x(b_0, r, t) &= \operatorname{sh}^2 b_0 (\operatorname{sh}^2 b_0 - 1) t - \frac{2 \operatorname{sh} b_0}{r} \left(2 (\operatorname{sh} b_t - \operatorname{sh} b_0) \operatorname{th} b_0 + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} b_0 (\operatorname{sh}^2 b_0 - 1) (\operatorname{th} b_t - \operatorname{th} b_0) \right), \\ y(b_0, r, t) &= 2t \operatorname{sh} b_0 \operatorname{sh} b_0 - \frac{2 \operatorname{sh} b_0}{r} \left(2 \operatorname{th} b_0 (\operatorname{th} b_t - \operatorname{th} b_0) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sh} b_0 (\operatorname{sh} b_t - \operatorname{sh} b_0) (\operatorname{sh}^2 b_0 - 1) \right). \end{aligned}$$

где $b_t = b_0 + rt$, $b_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+$.

2.2. Вырожденные эластики

К вырожденным эластикам относят окружности:

$$x(R, t) = R \sin \frac{t}{R}, \quad y(R, t) = R \left(1 - \cos \frac{t}{R} \right),$$

где R — радиус окружности.

И наконец, прямые соответствуют самому простому и оптимальному случаю — стержень не деформирован, интеграл энергии равен 0, траектории глобально оптимальны до бесконечности:

$$x(t) = t, \quad y(t) = 0.$$

3. Интерфейс в среде Mathematica

Для более наглядного представления траекторий введем для каждого типа элаستيки более естественные параметры, которые используются в интерфейсе для эластик (см. рис. 5).

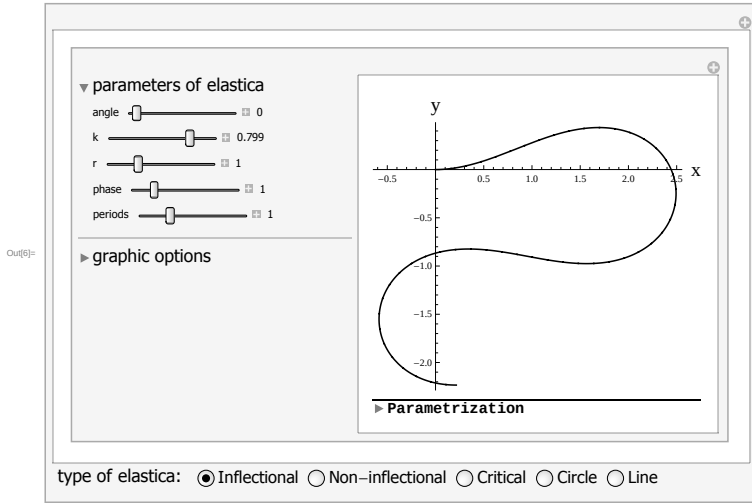


Рис. 5. Интерфейс в свернутом виде

3.1. Естественные параметры для эластик

Инфлекссионные и неинфлекссионные эластики являются наиболее общими типами эластик, которые параметризуются одинаковым вектором параметров (b_0, r, k, t) .

Введем новый параметр $Phase$, который задает фазу элаستي. Этот параметр соответствует параметру b_0 , отсюда формулы перехода: $Phase = \arcsin \frac{b_0}{r}$, $b_0 = r F(Phase)$.

Окружности, инфлекссионные и неинфлекссионные эластики являются периодическими. Введем параметр $Periods = \frac{t}{T}$, где T — период элаستي. Выражение периода элаستي зависит от типа элаستي:

- для инфлекссионной элаستي $T = \frac{4K(k)}{r}$;
- для неинфлекссионной $T = \frac{2kK(k)}{r}$;
- для окружности $T = 2\pi R$.

Для критических и прямолинейных эластик далее вместо параметра времени t будем использовать параметр длины $Length = t$.

3.2. Функции интерфейса

В среде Mathematica запрограммированы 5 модульных функций вычисления эластик по параметрам, которые описаны в подразделе 3.1. Для вычисления различных типов эластик использовались соответствующие формулы, описанные в подразделах 2.1, 2.2. На рис. 6 приведена одна из новых схем быстрого вычисления формул, задающих невырожденные эластики, разработанная при создании интерфейса.

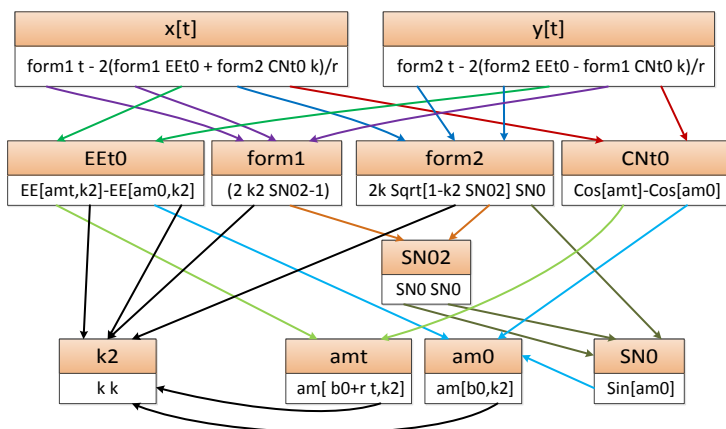
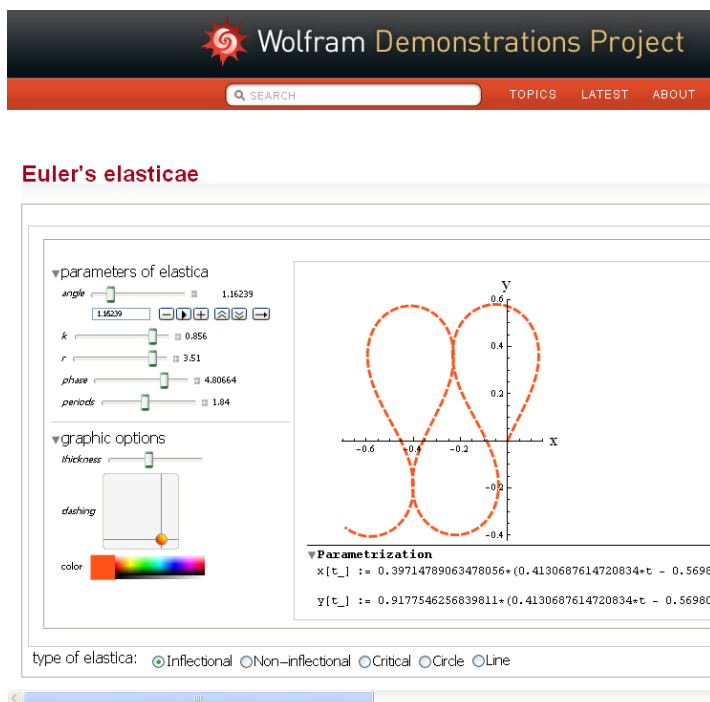


Рис. 6. Схема вычисления функций, задающих инфлекссионную эластичку

Головной модуль выполняет функции интерфейса. Основными элементами управления в интерфейсе являются ползунки (см. рис. 7). Например, с помощью ползунка **Angle** задается начальный угол поворота элаستيку $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ (определенный в начале раздела 2). Если нажать справа от ползунка на кнопку $+$, то появится меню для управления ползунком:

Рис. 7. Интерфейс на сайте <http://demonstrations.wolfram.com>

- В первом поле можно задать произвольное значение параметра в числовом (например, 124.7883), а также в символьном виде с помощью кода Mathematica (например, $(Pi + Sin[1])/5!$, для более подробной информации см. [11]).
- **Step Backward** смещает ползунок на некоторую величину влево и соответственно увеличивает значение выбранного параметра, если оно не является максимальным.
- **Play** запускает анимацию с изменением текущего параметра.
- **Step Forward** смещает ползунок на некоторую величину вправо и соответственно уменьшает значение выбранного параметра, если оно не является минимальным.
- **Faster** увеличивает скорость выполнения анимации.

- **Slower** замедляет скорость выполнения анимации.
- **Forward or Backward** меняет закон, задающий направление движения ползунка: **Forward** — ползунок двигается только вперед, в конце переходя на начало; **Backward** — ползунок двигается только назад, переходя из начала в конец; **Forward and Backward** — ползунок двигается вперед-назад, меняя направление в конце и в начале.

Описанным меню обладают все ползунки интерфейса.

Поле **Type of elastica** может принимать 5 значений:

- (1) **Inflectional** задает инфлекссионную эластику (см. подраздел 2.1);
- (2) **Non-inflectional** вычисляет неинфлекссионную эластику (см. подраздел 2.1);
- (3) **Critical** соответствует критической эластике (см. подраздел 2.1);
- (4) **Circle** отображает окружность (см. подраздел 2.2);
- (5) **Line** отображает прямые (см. подраздел 2.2).

Каждому типу эластик соответствуют свои параметры (см. рис. 7, блок **parameters of elastica**):

- (1) *Angle, k, r, Phase, Periods* для инфлекссионных эластик;
- (2) *Angle, k, r, Phase, Periods* для неинфлекссионных эластик;
- (3) *Angle, r, b_0 , Length* для критических;
- (4) *Angle, Radius, Periods* для окружностей;
- (5) *Angle, Length* для прямых.

После основных параметров располагаются графические опции (блок **graphic options** на рис. 7), общий для каждого типа эластики:

- **thickness** — параметр, задающий толщину линии;
- **dashing** задает пунктирный стиль кривой;
- **color** отвечает за цвет.

По заданным параметрам интерфейс выдает изображение дуги эластики длиной t и запись на языке Mathematica функций, задающих параметризацию (блок **Parametrization** на рис. 7). У пользователя интерфейса есть возможность скопировать построенные в векторном формате линии в буфер обмена. Для этого достаточно два раза нажать правой кнопкой мыши на кривую, после чего кривая и рамка вокруг нее выделится оранжевым цветом. Далее стандартным сочетанием клавиш скопировать выделенный объект в буфер, а

затем вставить его в произвольный документ, поддерживающий взаимодействие с векторной графикой (например, в документ Microsoft Word).

Для автозапуска анимации текущего типа эластик следует нажать на внутреннюю кнопку **Autorun** в правом верхнем углу интерфейса. В результате возникнет дополнительное меню **Autorun**, имеющее те же кнопки, что и расширенное меню ползунка.

4. Заключение

Описанный в статье интерфейс размещен на сайте Wolfram [17].

Интерфейс имеет формат вычисляемого документа (CDF), который ставит в центр легкую в создании интерактивность, предоставляя пользователям возможность управлять содержимым и генерировать результаты в режиме реального времени.

Для работы интерфейса необходимо лишь скачать и установить бесплатный CDF-Player (свободен для скачивания в интернете по адресу <http://www.wolfram.com/cdf-player/>). Этот плеер позволяет смотреть через интернет приложения Wolfram Demonstration Project, не устанавливая систему Wolfram Mathematica.

Представленный интерфейс является примером использования программных средств Wolfram Mathematica для решения актуальной задачи теории упругости, теории управления и компьютерной графики. Он может использоваться исследователями, а также преподавателями, аспирантами и студентами при изучении данных областей.

Список литературы

- [1] Эйлер Л. *Об упругих стержнях* // Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. — М.–Л. : Гостехтеориздат, 1934, с. 447–572, Приложение I ↑1
- [2] Saalschutz L. *Der Belastete Stab Unter Einwirkung Einer Seitlichen Kraft: Auf Grundlage Des Strengen Ausdrucks Fur Den Krümmungsradius*. Leipzig, 1880. ↑1
- [3] Born M. *Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum, unter verschiedenen Grenzbedingungen*. Göttingen : Dieterich, 1906. ↑1
- [4] Sachkov Yu. L. *Maxwell strata in the Euler elastic problem* // Journal of Dynamical and Control Systems, 2008. Vol. 14, no. 2, p. 169–234 ↑1
- [5] Sachkov Yu. L. *Conjugate points in the Euler elastic problem* // Journal of Dynamical and Control Systems, 2008. Vol. 14, no. 3, p. 409–439 ↑1

- [6] Levyakov S. , Kuznetsov V.V. *Stability analysis of planar equilibrium configurations of elastic rods subjected to end loads* // Acta Mechanica, 2010. **Vol. 211**, p. 73–87 ↑**1**
- [7] Maddocks J. H. *Stability of nonlinearly elastic rods* // Arch. Rat. Mech. Anal., 1984. **Vol. 85**, p. 311–354 ↑
- [8] Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М. : Наука, 1986. ↑
- [9] Jin M. , Bao Z.B. *Sufficient conditions for stability of Euler elasticae* // Mechanics Research Communications, 2007. **Vol. 35**, p. 193–200 ↑
- [10] Ляв А. Математическая теория упругости. М.–Л. : ОНТИ, 1935. ↑**1**
- [11] Wolfram S. Mathematica: A system for doing mathematics by computer. Reading (MA) : Addison-Wesley, 1991. ↑**1**, **3.2**
- [12] Аграчев А. А. , Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М. : Физматлит, 2004. ↑**2**
- [13] Ардентов А. *Экстремальные кривые в задаче Эйлера об эластиках* // Труды международной конференции «Программные системы: теория и приложения», ИПС РАН, г. Переславль-Залесский, октябрь 2006 // Программные системы: теория и приложения. — М. : Физматлит, 2006 Т. **2**, с. 23–38, В двух томах ↑**2**, **2**, **2.1**
- [14] Понтрягин Л. С. , Болтянский В. Г. , Гамкредидзе Р. В. , Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1961. ↑**2**
- [15] Сачков Ю. Л. *Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны* // Математический сборник, 2003. Т. **194**, № 9, с. 63–90 ↑**2.1**, **2.1**
- [16] Уиттекер Э. Т. , Ватсон Д. Курс современного анализа. М. : УРСС, 2002. ↑**2.1**
- [17] <http://demonstrations.wolfram.com/preview.html?draft/47941/000045/EulersElasticae>. ↑**4**

Приложение: код интерфейса

Исходный код на языке Mathematica демонстрирует удобство использования документов формата CDF при разработке человеко-машинных интерфейсов.

```

1 getInfl[\[Psi]_, Periods_, Angle_, Color_, thickness_,
   dashing_] :=
   Quiet[Module[{Time, EE, EF, am, a2p, Rotation, (* functions
   *)
3     k, Phase, k2, b0, r, am0, amt, SN0, SN02, EEt0, CNt0,
       form1,
       form2, fun},
5     EE[p_, k_] := EllipticE[p, k];
     EF[p_, k_] := EllipticF[p, k];
7     am[p_, k_] := JacobiAmplitude[p, k];
     a2p := {Cos[Angle], Sin[Angle]};
9     Rotation[{x_, y_}] := {Total[{x, -y} a2p], Total[{y, x}
       a2p]};
     {r, Phase, k} = \[Psi];
11    k2 = Evaluate[k k];
     Time = Evaluate[4 Periods EllipticK[k2]/r];
13    b0 = Evaluate[EF[Phase, k2] r];
     am0 = Evaluate[am[b0, k2]]; amt = Evaluate[am[b0 + r t,
       k2]];
15    SN0 = Evaluate[Sin[am0]]; SN02 = Evaluate[SN0 SN0];
     EEt0 = Evaluate[EE[amt, k2] - EE[am0, k2]];
17    CNt0 = Evaluate[Cos[amt] - Cos[am0]];
     form2 = Evaluate[2 k Sqrt[1 - k2 SN02] SN0];
19    form1 = Evaluate[(2 k2 SN02 - 1)];
     fun = Evaluate[Rotation[{form1 t - 2 (form1 EEt0 + form2
       CNt0 k)/r,
21       form2 t - 2 (form2 EEt0 - form1 CNt0 k)/r}]];
   Column[{ParametricPlot[fun,
23     {t, 0, Time}, PlotPoints -> 10,
       AxesLabel -> {Style["x", 18], Style["y", 18]},
       MaxRecursion -> 5, ImageSize -> {300, 280},
       PlotStyle -> {Color, Thickness[thickness]},
25     Dashing[If[dashing == 0, {}, dashing]],
       OpenerView[{Style["Parametrization", Bold, 14],
27     Column[{x[t_] := " <> ToString[InputForm[fun[[1]]],
       "\n",
       "y[t_] := " <> ToString[InputForm[fun[[2]]]]}],
29     Dividers -> Center]
   ]];
33 getNonInfl[\[Psi]_, Periods_, Angle_, Color_, thickness_,
   dashing_] :=
   Quiet[Module[{Time, EE, EF, am, a2p, Rotation, (*
       functions *)
35     k, Phase, k2, b0, r, am0, amt, SN0, SN02, EEt0, CNt0,
       Dnt0,
       form1, form2, fun, pp, mr},

```

```

37 EE[p_, k_] := EllipticE[p, k];
EF[p_, k_] := EllipticF[p, k];
39 am[p_, k_] := JacobiAmplitude[p, k];
a2p := {Cos[Angle], Sin[Angle]};
41 Rotation[{x_, y_}] := {Total[{x, -y} a2p], Total[{y, x}
a2p]};
{r, Phase, k} = \[Psi];
43 If[k < 0.2,
pp = 12; mr = 7;,
45 pp = 10; mr = 5;
];
47 k2 = Evaluate[k k];
Time = Evaluate[2 Periods EllipticK[k2] k/r];
49 b0 = Evaluate[EF[Phase, k2] r];
am0 = Evaluate[am[b0/k, k2]]; amt = Evaluate[am[(b0 + r t
)/k, k2]];
51 SN0 = Evaluate[Sin[am0]]; SN02 = Evaluate[SN0 SN0];
EEt0 = Evaluate[EE[amt, k2] - EE[am0, k2]];
53 DNT0 = Evaluate[Sqrt[1 - k2 Sin[amt]^2] - Sqrt[1 - k2
SN02]];
form2 = Evaluate[2 Cos[am0] SN0]; form1 = Evaluate[2 SN02
- 1];
55 fun =
Evaluate[
57 Rotation[{(2/k2 - 1) form1 t - 2 (form1 EEt0 + form2
DNT0)/(k r),
(2/k2 - 1) form2 t - 2 (form2 EEt0 - form1 DNT0
)/(k r)}]];
59 Column[{ParametricPlot[fun,
{t, 0, Time}, PlotPoints -> pp,
61 AxesLabel -> {Style["x", 18], Style["y", 18]},
MaxRecursion -> mr, ImageSize -> {300, 280},
63 PlotStyle -> {Color, Thickness[thickness],
Dashing[If[dashing == 0, {}, dashing]]}, ImageSize
-> Large],
65 OpenerView[{Style["Parametrization", Bold, 14],
Column[{ "x[t_] := " <> ToString[InputForm[fun[[1]]],
"\n",
67 "y[t_] := " <> ToString[InputForm[fun[[2]]]]}],
Dividers -> Center]
69 ]];
getCritical[\[Psi]_, Length_, Angle_, Color_, thickness_,
dashing_] :=
71 Quiet[Module[{Rotation, fun, (* functions *)
b0, r, Sh0, Ch0, Sh2, Ch2, Sht, Cht, a2p},
73 a2p := {Cos[Angle], Sin[Angle]};

```

```

Rotation[{x_, y_}] := {Total[{x, -y} a2p], Total[{y, x}
a2p]};
75 {r, b0} = \[Psi];
Sh0 = Evaluate[Sinh[b0]]; Ch0 = Evaluate[Cosh[b0]];
77 Sh2 = Evaluate[Sh0 Sh0]; Ch2 = Evaluate[Ch0 Ch0];
Sht = Evaluate[Sinh[b0 + r t]] ; Cht = Evaluate[Cosh[b0 +
r t]];
79 fun =
Evaluate[
81 Rotation[{(Sh2 - 1) t/Ch2 -
2 (Sh2 - 1)/(r Ch2) (Sht/Cht - Sh0/Ch0) -
83 4 Sh0 (1/Cht - 1/Ch0)/(r Ch2),
2 Sh0 t/Ch2 - 4 Sh0 (Sht/Cht - Sh0/Ch0)/(r Ch2) +
85 2 (Sh2 - 1) (1/Cht - 1/Ch0)/(r Ch2)}]];
Column[{ParametricPlot[fun,
87 {t, 0, Length}, PlotPoints -> 15, PlotRange -> All,
AxesLabel -> {Style["x", 18], Style["y", 18]},
89 MaxRecursion -> 7,
PlotStyle -> {Color, Thickness[thickness]},
91 Dashing[If[dashing == 0, {}, dashing]],
ImageSize -> {300, 280}],
93 OpenerView[{Style["Parametrization", Bold, 14],
Column[{ "x[t_] := " <> ToString[InputForm[fun[[1]]],
"\n",
95 "y[t_] := " <> ToString[InputForm[fun
[[2]]]]}],
Dividers -> Center]
97 ]];
getCirc[Radius_, Periods_, Angle_, Color_, thickness_,
dashing_] :=
99 Quiet[Module[{a2p, getPoint, getArrow},
a2p[angle_] := {Cos[angle], Sin[angle]};
101 getPoint[point_] := {Color, PointSize[Large], Point[point
]};
getArrow[point_, length_, angle_] :=
103 {Thickness[thickness], Color, Arrowheads[Large],
Arrow[{point, point + length a2p[angle]}}];
105 If[Radius == 0 || Periods == 0,
Graphics[{Dashing[If[dashing == 0, {}, dashing]],
107 Thickness[thickness], Color, PointSize[Large], Point
[{0, 0}]],
ImageSize -> 300],
109 Graphics[{Dashing[If[dashing == 0, {}, dashing]],
Thickness[thickness], Color,
111 Circle[a2p[Angle + Pi/2] Radius, Radius,
Angle - Pi/2 + {0, 2 Pi Periods}]],
113 getArrow[(a2p[Angle + Pi/2] +

```

```

a2p[Angle - Pi/2 + 2 Pi Periods - Periods/1000])
      Radius,
115   Periods/1000, Angle + 2 Pi Periods]],
      AspectRatio -> Automatic,
117   AxesLabel -> {Style["x", 18], Style["y", 18]},
      PlotRange -> All,
      Axes -> True, ImageSize -> {300, 300}]
119 ]
    ];
121 getLine[Length_, Angle_, Color_, thickness_, dashing_] :=
    Quiet[
123   If[Length == 0,
      Graphics[{Dashing[If[dashing == 0, {}, dashing]],
        Thickness[thickness], Color, PointSize[Large], Point
125         [{0, 0}]}],
      ImageSize -> 300],
127   Graphics[{Dashing[If[dashing == 0, {}, dashing]],
      Thickness[thickness], Color,
129     Arrowheads[Large, Thickness[thickness]],
      Arrow[{0, 0}, {Cos[Angle], Sin[Angle]} Length]}],
      AxesLabel -> {Style["x", 18], Style["y", 18]},
131     AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All, Axes -> True
      ,
      ImageSize -> {300, 300}]
133   ]
    ];
135 Manipulate[Switch[Type,
  1,
137 Manipulate[
  getInfl[{r, phase, k}, periods, angle, color,
139   thickness, {dashing[[1]], dashing[[1]] dashing[[2]]}],
  OpenerView[{Style["parameters of elastica", 16],
141   Column[{Control[{angle, 0, Style["angle", Italic]}, 0,
      2 Pi,
      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}],
143   Control[{k, 0.799, Style["k", Italic]}, 0, 0.99999,
      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}],
145   Control[{r, 1, Style["r", Italic]}, 0.00001, 4,
      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}],
147   Control[{phase, 1, Style["phase", Italic]}, 0, 2 Pi,
      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}],
149   Control[{periods, 1, Style["periods", Italic]},
      0.00001, 4,
      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}]]],
      True,
151   ImageSize -> 250], Delimiter,
  OpenerView[{Style["graphic options", 16],

```



```

153     Column[{{Control[{{thickness, 0.005, Style["thickness",
        Italic}},
        0.002, 0.03, ControlType -> Slider, ImageSize ->
155         Small}},
        Control[{{dashing, {0.05, 0.001}},
        Style["dashing", Italic}}, {0.01, 0.001}, {0.05,
        4}}]},
157     Control[{color, Black, ImageSize -> Small,
        ControlType -> ColorSlider}]]], ImageSize -> 250],
159     ControlPlacement -> {Left}, ImageMargins -> Tiny,
        AutorunSequencing -> {{5, 50}, {2, 50}, {3, 50}}],
161 2,
Manipulate[
163     getNonInfl[{r, phase, k}, periods, angle, color,
        thickness, {dashing[[1]], dashing[[1]] dashing[[2]]}],
165     OpenerView[{Style["parameters of elastica", 16],
        Column[{{Control[{{angle, 0, Style["angle", Italic}}, 0,
        2 Pi,
167         ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}]},
        Control[{{k, 0.799, Style["k", Italic}}, 0.001,
        0.99999,
169         ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}]},
        Control[{{r, 1, Style["r", Italic}}, 0.00001, 4,
171         ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}]},
        Control[{{phase, 1, Style["phase", Italic}}, 0, 2 Pi,
173         ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}]},
        Control[{{periods, 2.3, Style["periods", Italic}},
        0.00001, 4,
175         ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}]]],
        True,
        ImageSize -> 250], Delimiter,
177     OpenerView[{Style["graphic options", 16],
        Column[{{Control[{{thickness, 0.005, Style["thickness",
        Italic}},
179         0.002, 0.03, ControlType -> Slider, ImageSize ->
        Small}},
        Control[{{dashing, {0.05, 0.001}},
        Style["dashing", Italic}}, {0.01, 0.001}, {0.05,
        4}}]},
181         Control[{color, Black, ImageSize -> Small,
        ControlType -> ColorSlider}]]], ImageSize -> 250],
        ControlPlacement -> {Left}, ImageMargins -> Tiny,
183         AutorunSequencing -> {{5, 50}, {3, 50}, {4, 30}, {3,
        30}}],
185 3,
Manipulate[
187     getCritical[{r, b0}, Length, angle, color,

```

```

189      thickness, {dashing[[1]], dashing[[1]] dashing[[2]]}],
OpenerView[{Style["parameters of elastica", 16],
191      Column[{Control[{{angle, 0, Style["angle", Italic]}, 0,
2 Pi,
      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}],
193      Control[{{r, 1, Style["r", Italic]}, 0.0001, 4,
      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}],
195      Control[{{b0, -3,
      Style["\\!(\\*SubscriptBox\\(b\\), \\(0\\))\\)", Italic
      ]}, -10,
197      10, ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}],
      Control[{{Length, 5, Style["length", Italic]}, ,
      0.0001, 6,
199      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}]]],
      True,
      ImageSize -> 250],
201  Delimiter,
OpenerView[{Style["graphic options", 16],
203      Column[{Control[{{thickness, 0.005, Style["thickness",
      Italic]}, ,
      0.002, 0.03, ControlType -> Slider, ImageSize ->
      Small}],
205      Control[{{dashing, {0.05, 0.001},
      Style["dashing", Italic]}, {0.01, 0.001}, {0.05,
      4}}],
207      Control[{color, Black, ImageSize -> Small,
      ControlType -> ColorSlider}]]], ImageSize -> 250],
209      ControlPlacement -> {Left}, ImageMargins -> Tiny,
      AutorunSequencing -> {{4, 20}, {3, 70}, {2, 40}}],
211  4,
Manipulate[
213      getCirc[radius, periods, angle, color,
      thickness, {dashing[[1]], dashing[[1]] dashing[[2]]}],
215      OpenerView[{Style["parameters of elastica", 16],
      Column[{Control[{{angle, 0, Style["angle", Italic]}, 0,
2 Pi,
      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}],
217      Control[{{radius, 1, Style["radius", Italic]}, 0, 1,
      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}],
219      Control[{{periods, 0.7, Style["periods", Italic]}, 0,
      2,
221      ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}]]],
      True,
      ImageSize -> 250],
223      Delimiter,
OpenerView[{Style["graphic options", 16],

```

```

225     Column[{{Control[{{thickness, 0.005, Style["thickness",
        Italic}},
        0.002, 0.03, ControlType -> Slider, ImageSize ->
        Small}},
227     Control[{{dashing, {0.05, 0.001}},
        Style["dashing", Italic]}, {0.01, 0.001}, {0.05,
        4}}],
229     Control[{color, Black, ImageSize -> Small,
        ControlType -> ColorSlider}]]], ImageSize -> 250],
231     ControlPlacement -> {Left}, ImageMargins -> Tiny],
5,
233 Manipulate[
    getLine[length, angle, color,
235     thickness, {dashing[[1]], dashing[[1]] dashing[[2]]}],
    OpenerView[{{Style["parameters of elastica", 16],
237     Column[{{Control[{{angle, 0.3, Style["angle", Italic]},
        0, 2 Pi,
        ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}],
239     Control[{{length, 1, Style["length", Italic]}, 0, 1,
        ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}]]}],
        True,
241     ImageSize -> 250],
    Delimiter,
243     OpenerView[{{Style["graphic options", 16],
        Column[{{Control[{{thickness, 0.005, Style["thickness",
            Italic}},
245            0.002, 0.03, ControlType -> Slider, ImageSize ->
            Small}},
            Control[{{dashing, {0.05, 0.001}},
247            Style["dashing", Italic]}, {0.01, 0.001}, {0.05,
            4}}],
            Control[{color, Black, ImageSize -> Small,
249            ControlType -> ColorSlider}]]], ImageSize -> 250],
            ControlPlacement -> Left, ImageMargins -> Tiny]
251 ],
    {{Type, 1,
253     Style["type of elastica: ", 16]}, {1 -> Style["
        Inflectional", 15],
        2 -> Style["Non-inflectional", 15], 3 -> Style["Critical",
        15],
255     4 -> Style["Circle", 15], 5 -> Style["Line", 15]}],
        ControlType -> RadioButtonBar},
257     ControlPlacement -> {Bottom}]

```

Об авторе:



Андрей Андреевич Ардентов

Окончил в 2009 г. УГП имени А.К. Айламазяна, участник семинара «**Nonlinear control and singularities**», завершает обучение в аспирантуре ИПС РАН им. А.К. Айламазяна под руководством д.ф.-м.н. Ю. Л. Сачкова

e-mail:

aaa@pereslavl.ru

Образец ссылки на эту публикацию:

А. А. Ардентов. *Интерфейс для моделирования эластик Эйлера в программной среде Mathematica* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2012. Т. 3, № 1(10), с. 31–50.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2012_1_31-50.pdf

А. А. Ardentov. *Euler's elasticae interface in Mathematica*.

ABSTRACT. The elastica can be understood from a number of different aspects, including as a mechanical equilibrium, a problem of the calculus of variations, and the solution to elliptic integrals. In addition, it has a number of analogies with physical systems, including a sheet holding a volume of water, the surface of a capillary, and the motion of a simple pendulum. It is also the mathematical model of the mechanical spline, used for shipbuilding and similar applications, and directly inspired the modern theory of mathematical splines. More recently, the major focus has been on efficient numerical techniques for computing the elastica and fitting it to spline problems. A beautiful family of curves based on beautiful mathematics has constructed by elliptic functions and interfaced by Wolfram Mathematica program.

Key Words and Phrases: Euler's elasticae, optimal control, geometry, modeling, Wolfram Mathematica.