

Восстановление изображений, нейрогеометрия зрения и субриманова геометрия

Ю.Л. Сачков

Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский

Семинар Кафедры нелинейных динамических систем и
процессов управления

ВМК МГУ, 26 ноября 2012 г.

План доклада

- Модель зрительной коры головного мозга (Ж.Петито, Дж.Читти, А.Сарти).
- Задачи субримановой геометрии (А.А.Аграчев, У.Боскаин, Ф.Росси)
- Решение задач субримановой геометрии (Ю.С.)
- Восстановление изображений с помощью субримановых геодезических (Ю.С., А.Ардентов, А.Маштаков).
- Восстановление кривых без точек возврата (У.Боскаин, Р.Дуитс, Ф.Росси, Ю.С.)
- Восстановление изображений с помощью анизотропной диффузии (Ж.-П.Готье, У.Боскаин, Ф.Росси).
- Инвариантные субримановы задачи на 3-мерных группах Ли.

Восстановление изображений

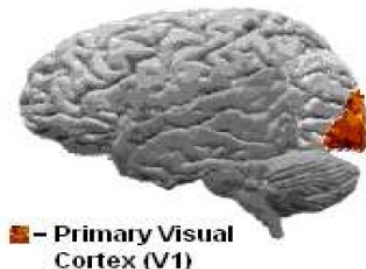


M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, C. Ballester

Восстановление изображений

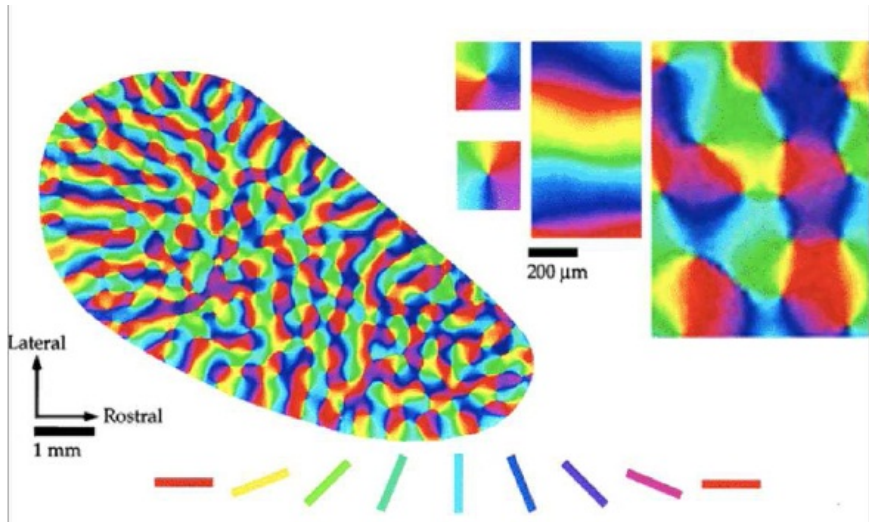


Нейрофизиология зрения



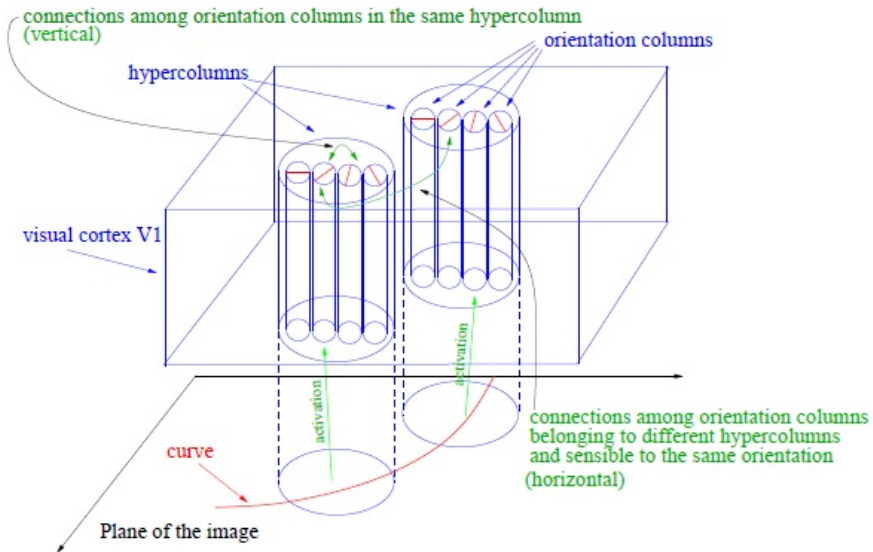
- A** Группы нейронов первичной зрительной коры головного мозга V1 чувствительны как к положению, так и к направлению. Поэтому V1 поднимает изображение с плоскости \mathbb{R}^2 на проективное касательное расслоение $PT\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times P^1$.
- B** При восстановлении изображения минимизируется энергия, необходимая для активации нейронов, не активированных изображением на $PT\mathbb{R}^2$.

A1. Д.Хубел и Т.Визел (Нобелевская премия 1981 г.):
Группы нейронов, чувствительные к направлению



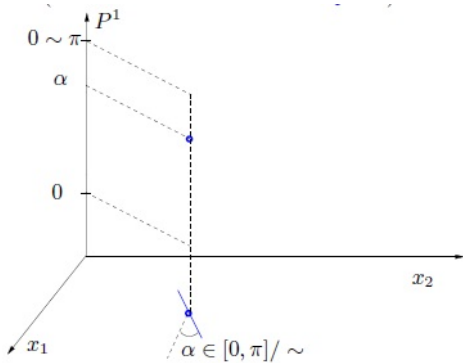
Модель первичной зрительной коры V1

«Колесная» модель (pinwheel model):



A2. Подъем на $P\mathbb{R}^2$

- Мозг хранит изображение как набор положений и направлений, т.е. он выполняет подъем изображения с плоскости \mathbb{R}^2 на $P\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times P^1$.

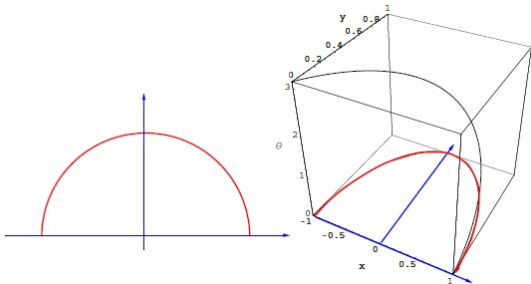


- $P\mathbb{R}^2$ — расслоение с базой \mathbb{R}^2 и слоем P^1 .

А3. Подъем (лифт) кривой

- $\mathbb{R}^2 \ni (x(t), y(t)) \mapsto (x(t), y(t), \theta(t)) \in P\mathbb{T}\mathbb{R}^2$,
 $\theta(t) = \operatorname{arctg}(\dot{y}(t)/\dot{x}(t)) \in P^1 = [0, \pi]/\sim$.

Пример: $(\cos t, \sin t)$:



- любая кривая в \mathbb{R}^2 без особых точек имеет лифт на $P\mathbb{T}\mathbb{R}^2$,
- не любая кривая в $P\mathbb{T}\mathbb{R}^2$ является лифтом некоторой кривой в \mathbb{R}^2 .

A4. Какие кривые в $PT\mathbb{R}^2$ являются лифтами плоских кривых?

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}(\dot{y}(t)/\dot{x}(t)) \iff$$

$$\dot{x} = u_1 \cos \theta, \quad \dot{y} = u_1 \sin \theta, \quad \dot{\theta} =: u_2,$$

$$q = (x, y, \theta) \in PT\mathbb{R}^2, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q),$$

$$X_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V1. Какой функционал минимизируется?

- мозг минимизирует функционал (внешний или внутренний для мозга),
- при движении предмета в руке мозг минимизирует компромисс между энергией и усилием мышц (внешний функционал),
- при восстановлении контура мозг минимизирует энергию, затрачиваемую на активацию нейронов (внутренний функционал),
- легко активирующиеся нейроны, близкие как по положению, так и ориентации (т.е. близкие в $PT\mathbb{R}^2$).
- $\int (u_1^2 + \alpha^2 u_2^2) dt \rightarrow \min \iff \int \sqrt{u_1^2 + \alpha^2 u_2^2} dt \rightarrow \min$
выбор масштаба $\Rightarrow \alpha = 1$

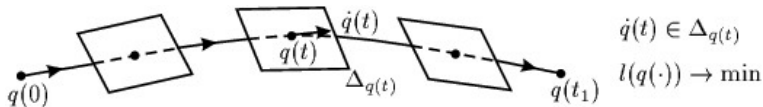
Субриманова задача

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt = \int_0^{t_1} \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle^{1/2} dt \rightarrow \min,$$

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$



Субриманова задача на $PT\mathbb{R}^2$

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q = (x, y, \theta) \in PT\mathbb{R}^2, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

$$\theta \in P^1 = \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z}) = [0, \pi]/\sim.$$

Субриманова задача на $SE(2)$

$$SE(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \theta \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), x, y \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^2 \times S^1.$$

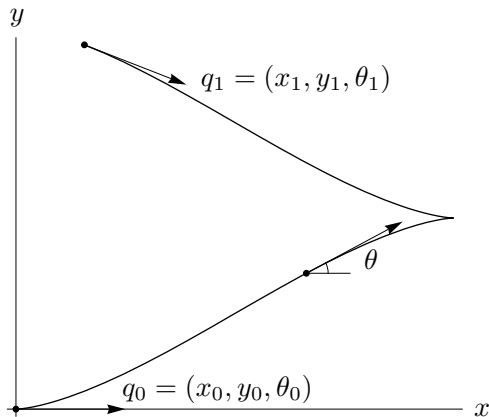
$$\theta \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) = [0, 2\pi]/\sim.$$

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q = (x, y, \theta) \in SE(2), \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$X_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

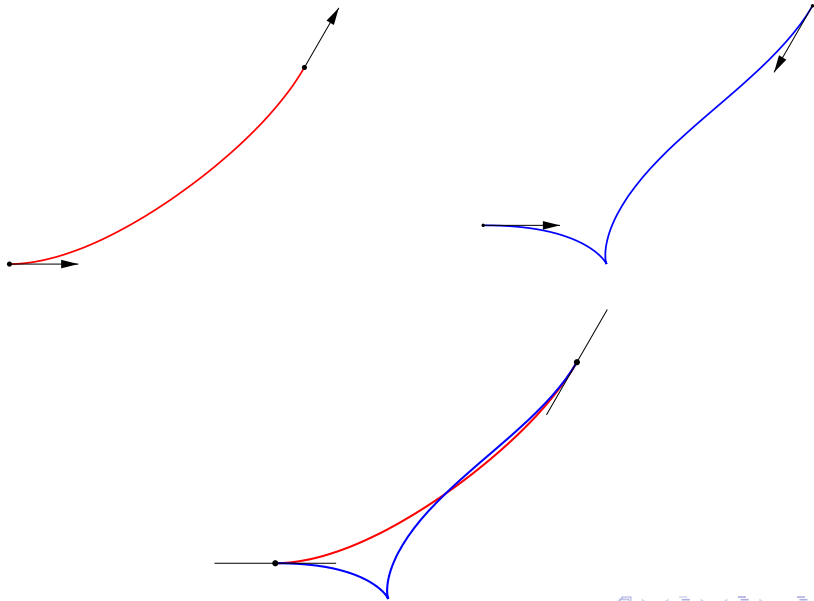
$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Переформулировка субримановой задачи на $SE(2)$:
Задача об оптимальном движении машины на плоскости



$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

Связь между оптимальными решениями в $SE(2)$ и $PTIR^2$



Результаты по субримановой задаче на $SE(2)$

- Существование оптимальных траекторий,
- Параметризация экстремальных траекторий (ПМП),
- Описание оптимальных траекторий:
 - Общие граничные условия \Rightarrow сведение к системам алгебраических уравнений,
 - Специальные граничные условия \Rightarrow явные решения,
- Структура оптимального синтеза и множества Максвелла,
- Субримановы сферы,
- Приложения: восстановление поврежденных изображений, Параллельный программный комплекс для восстановления изображений.

Задача оптимального управления на SE(2)

$$\dot{x} = u_1 \cos \theta, \quad \dot{y} = u_1 \sin \theta, \quad \dot{\theta} = u_2,$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi \mathbb{Z}),$$

$$q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1,$$

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Субриманова задача на SE(2): Существование решений

- $\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q),$

$$\text{span}(X_1(q), X_2(q), [X_1, X_2](q)) = T_q M \quad \forall q \in M$$

\Rightarrow

система вполне управляема (теорема Рашевского-Чжоу)

- Теорема Филиппова

\Rightarrow существование оптимальных траекторий $q(t)$.

Принцип максимума Понтрягина

- Анормальные экстремальные траектории постоянны.
- Нормальные экстремали:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= c, & \dot{c} &= -\sin \gamma, & (\gamma, c) &\in C \cong (2S^1_\gamma) \times \mathbb{R}_c, \\ \dot{x} &= \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta, & \dot{y} &= \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta, & \dot{\theta} &= -\cos \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

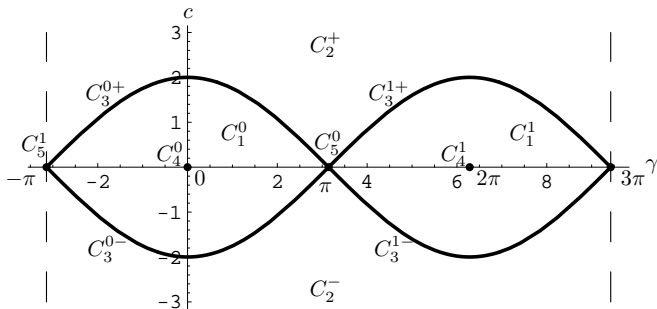
- Параметризация длиной дуги:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2 \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad l = t_1 \rightarrow \min$$

Стратификация фазового цилиндра маятника

$$\dot{\gamma} = c, \quad \dot{c} = -\sin \gamma: \quad C = \bigcup_{i=1}^5 C_i$$

- Интеграл энергии $E = c^2/2 - \cos \gamma \in [-1, +\infty)$
- $C_1 = \{\lambda \in C \mid E \in (-1, 1)\}$,
- $C_2 = \{\lambda \in C \mid E \in (1, +\infty)\}$,
- $C_3 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c \neq 0\}$,
- $C_4 = \{\lambda \in C \mid E = -1\}$,
- $C_5 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c = 0\}$.



Параметризация экстремальных траекторий

- $\lambda = (\gamma, c) \in C_1 \Rightarrow$

$$\theta_t = s_1(\operatorname{am} \varphi - \operatorname{am} \varphi_t) \pmod{2\pi},$$

$$x_t = (s_1/k)[\operatorname{cn} \varphi(\operatorname{dn} \varphi - \operatorname{dn} \varphi_t) + \operatorname{sn} \varphi(t + E(\varphi) - E(\varphi_t))],$$

$$y_t = (1/k)[\operatorname{sn} \varphi(\operatorname{dn} \varphi - \operatorname{dn} \varphi_t) - \operatorname{cn} \varphi(t + E(\varphi) - E(\varphi_t))].$$

- $\lambda = (\gamma, c) \in C_2 \Rightarrow$

$$\cos \theta_t = k^2 \operatorname{sn} \psi \operatorname{sn} \psi_t + \operatorname{dn} \psi \operatorname{dn} \psi_t,$$

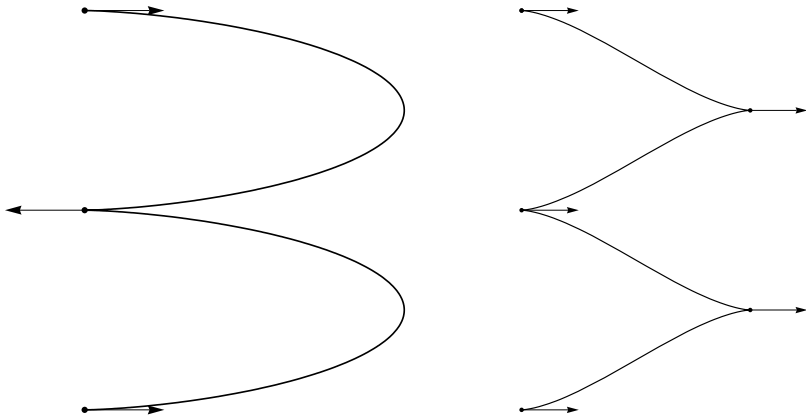
$$\sin \theta_t = k(\operatorname{sn} \psi \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{dn} \psi \operatorname{sn} \psi_t),$$

$$x_t = s_2 k[\operatorname{dn} \psi(\operatorname{cn} \psi - \operatorname{cn} \psi_t) + \operatorname{sn} \psi(t/k + E(\psi) - E(\psi_t))],$$

$$y_t = s_2[k^2 \operatorname{sn} \psi(\operatorname{cn} \psi - \operatorname{cn} \psi_t) - \operatorname{dn} \psi(t/k + E(\psi) - E(\psi_t))].$$

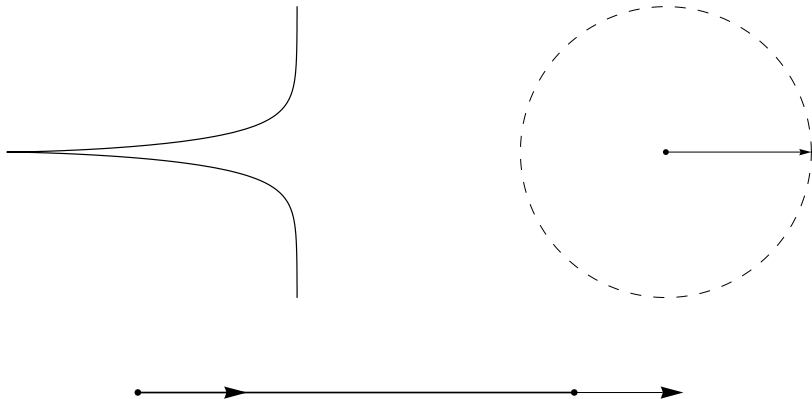
- $\lambda = (\gamma, c) \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 \Rightarrow$ гиперболические и линейные функции.

Субриманова задача на $SE(2)$: экстремальные траектории общего положения



Параметризация функциями Якоби cn , sn , dn , E .

Субриманова задача на $SE(2)$: экстремальные траектории специального вида



Параметризация элементарными функциями.

Оптимальность экстремальных траекторий

$q(t)$ **локально** оптимальна:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \text{ траектории } \tilde{q} : \quad & \|\tilde{q} - q\|_C < \varepsilon, \\ & q(0) = \tilde{q}(0), \quad q(t_1) = \tilde{q}(\tilde{t}_1) \quad \Rightarrow \quad t_1 \leq \tilde{t}_1 \end{aligned}$$

$q(t)$ **глобально** оптимальна:

$$\forall \text{ траектории } \tilde{q} : \quad q(0) = \tilde{q}(0), \quad q(t_1) = \tilde{q}(\tilde{t}_1) \quad \Rightarrow \quad t_1 \leq \tilde{t}_1$$

Потеря оптимальности

- Усиленное условие Лежандра:

$$\frac{\partial^2 h_u^{-1}}{\partial u^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{малые дуги траектории } q(t) \text{ оптимальны.}$$

- Время разреза:

$$t_{\text{cut}}(q) = \sup\{t > 0 \mid q(s) \text{ оптимальна при } s \in [0, t]\}.$$

Причины потери оптимальности:

(1) Точка Максвелла

Точка Максвелла q_t :

\exists экстремальная траектория $\tilde{q}_s \neq \hat{q}_s$: $q_0 = \tilde{q}_0$, $q_t = \tilde{q}_t$

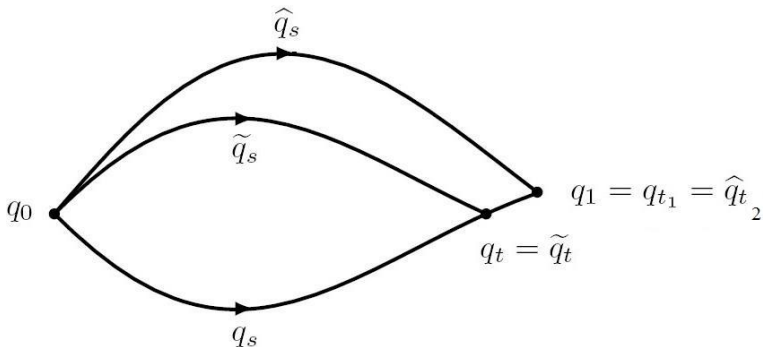
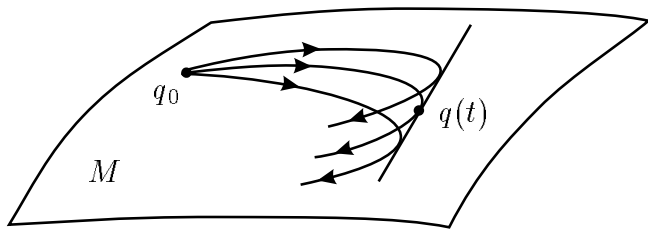


Рис.: $t_2 < t_1$

Причины потери оптимальности:
(2) Сопряженная точка

$q_t \in$ огибающей семейства экстремальных траекторий



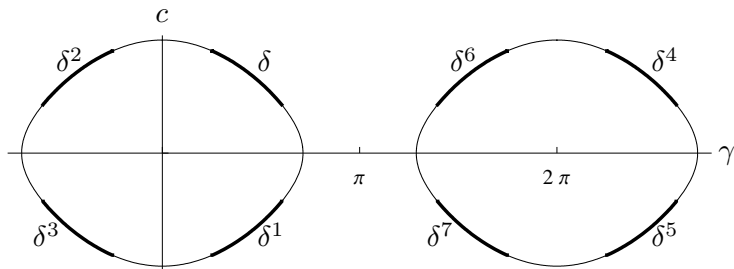
$$t_{\text{cut}} \leq \min(t_{\text{Max}}, t_{\text{conj}})$$

Отражения ε^i в фазовом цилиндре маятника $\ddot{\gamma} = -\sin \gamma$

- Группа симметрий параллелепипеда

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

- Действие отражений $\varepsilon^i : \delta \mapsto \delta^i$ на траектории маятника



Действие отражений ε^i на кривые (x_t, y_t)

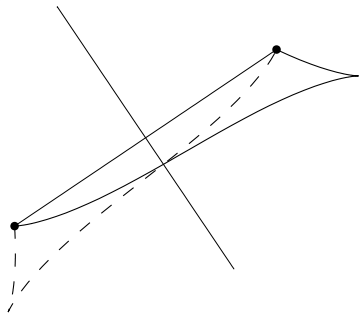


Рис.: $\varepsilon^1, \varepsilon^2$

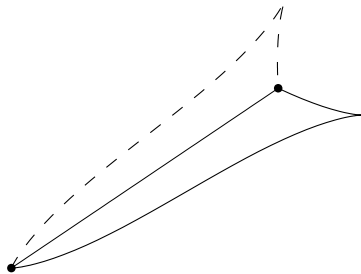


Рис.: $\varepsilon^4, \varepsilon^7$

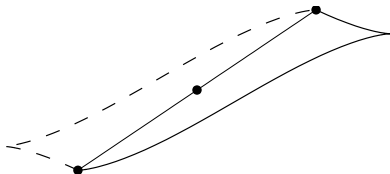


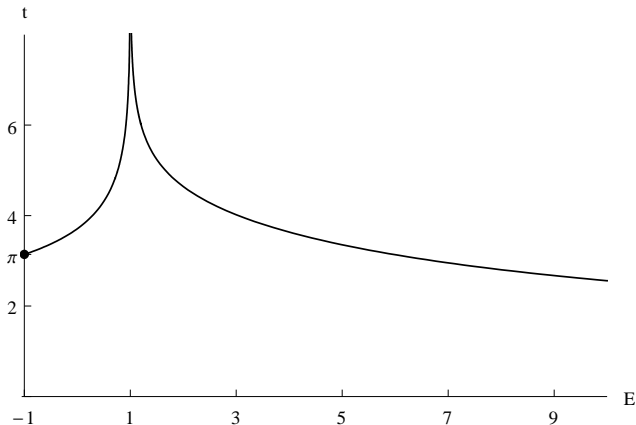
Рис.: $\varepsilon^5, \varepsilon^6$

Точки Максвелла, соответствующие отражениям

- Неподвижные точки отражений ε^i :

$$t = t_{\varepsilon_i}^n, \quad i = 1, 2, \dots, 7, \quad n = 1, 2, \dots$$

- Верхняя оценка времени разреза: $t_{\text{cut}} \leq \mathbf{t} := \min(t_{\varepsilon_i}^1)$.
- График функции $\mathbf{t} = \mathbf{t}(E)$:



Экспоненциальное отображение и сопряженные точки

- Экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : (\lambda, t) = (\gamma, c, t) \mapsto q(t),$$

$$\text{Exp} : N = C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M$$

- q — сопряженная точка $\iff q$ — критическое значение отображения Exp
- $\text{Exp}(\gamma, c, t) = (x, y, \theta)$
- $\frac{\partial(x, y, \theta)}{\partial(\gamma, c, t)} = 0$

Оценки сопряженного времени

- Траектории без точек перегиба:

$$\lambda \in C_1 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{conj}}^1(\lambda) = +\infty.$$

- Траектории с точками перегиба:

$$\lambda \in C_2 \quad \Rightarrow \quad t_{\varepsilon^6}^1(\lambda) \geq t_{\text{conj}}^1(\lambda) \geq t_{\varepsilon^2}^1(\lambda) = \mathbf{t}(\lambda).$$

Время разреза и точки разреза

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = \mathbf{t}(\lambda) = \begin{cases} t_{\varepsilon^5}^1 = 2K(k) = T/2, & \lambda \in C_1, \\ t_{\varepsilon^2}^1 = 2kp_1^1(k) \in (T, 2T), & \lambda \in C_2, \\ +\infty, & \lambda \in C_3 \cup C_5, \\ t_{\varepsilon^5}^1 = \pi = T/2, & \lambda \in C_4 \end{cases}$$

$$p = p_1^1(k) : \quad \text{cn}(p, k)(E(p, k) - p) - \text{dn}(p, k) \text{sn}(p, k) = 0$$

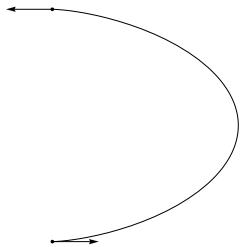


Рис.: $\lambda \in C_1$

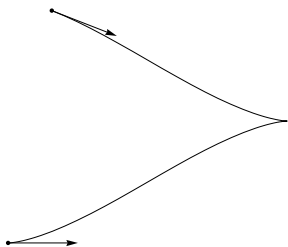


Рис.: $\lambda \in C_2$

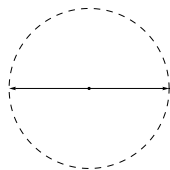
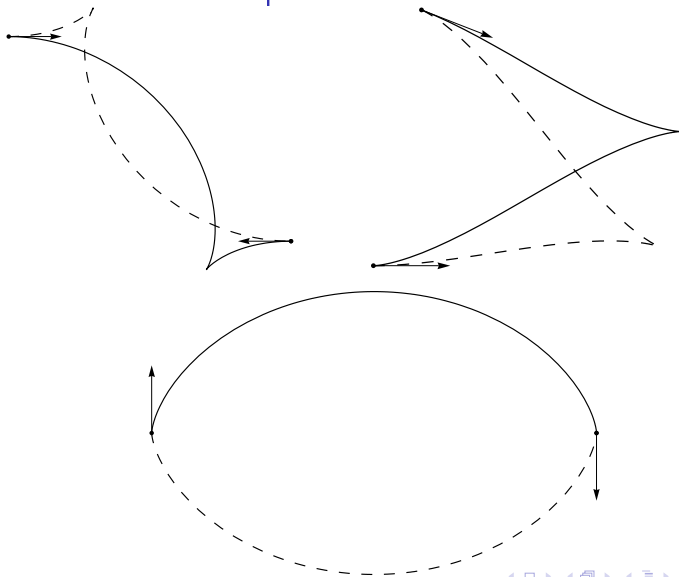


Рис.: $\lambda \in C_4$

Точки Максвелла на экстремальных траекториях: потеря оптимальности

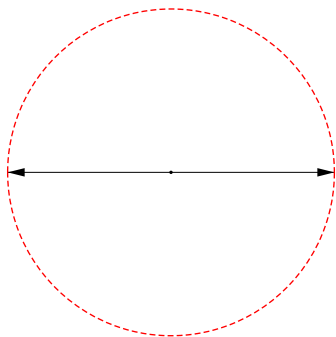


Оптимальные траектории

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = 0$$

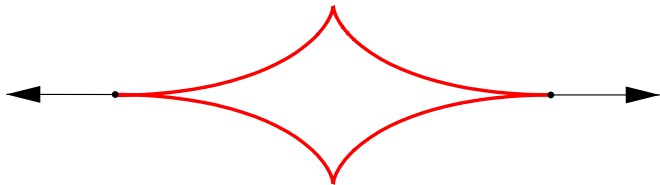


$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 \neq 0$$



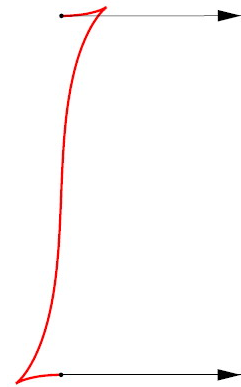
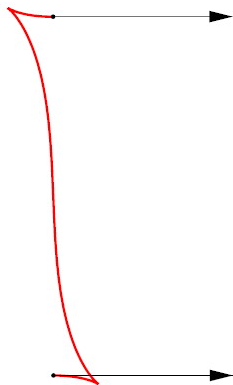
Оптимальные траектории

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = \pi$$



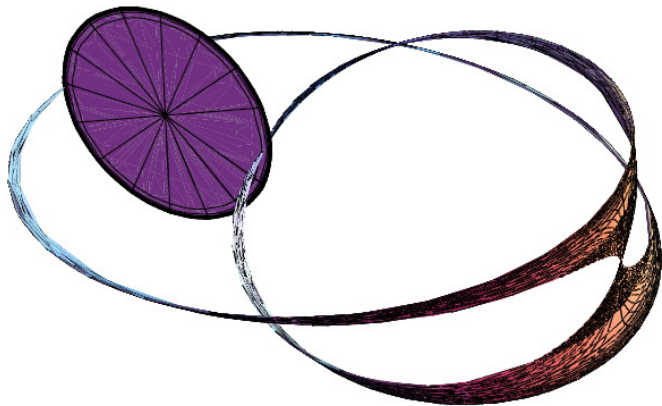
Оптимальные траектории

$$x_1 = 0, \quad y_1 \neq 0, \quad \theta_1 = 0$$



Множество Максвелла

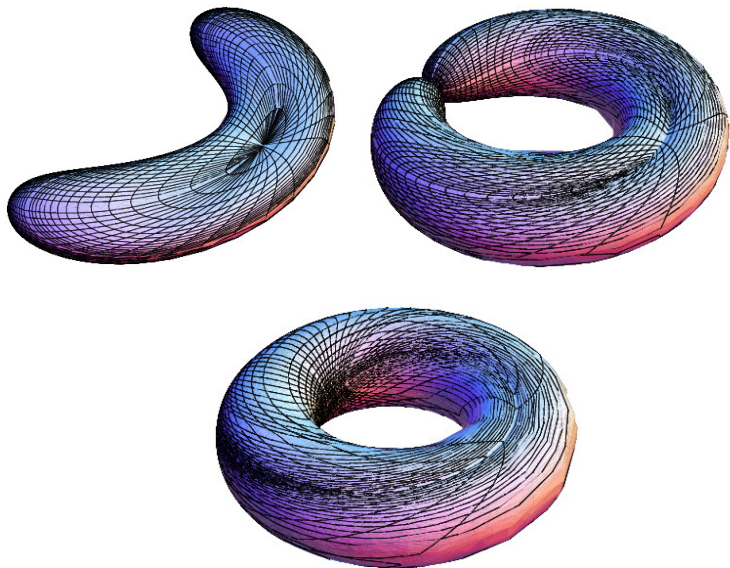
$\text{Max} = \{q_1 \in G \mid \exists > 1 \text{ оптимальной траектории } q(\cdot) : q(t_1) = q_1\}$



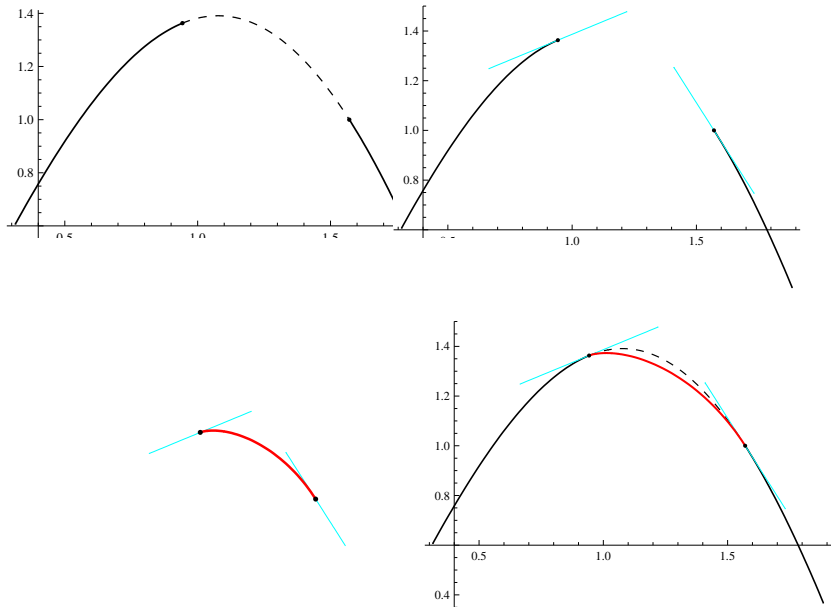
Субриманова метрика и сферы

- $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\}$
- $S_R = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}$
- $R = 0 \Rightarrow S_R = \{q_0\}$
- $R \in (0, \pi) \Rightarrow S_R \cong S^2$
- $R = \pi \Rightarrow S_R \cong S^2 / \{N = S\}$
- $R > \pi \Rightarrow S_R \cong \mathbb{T}^2$

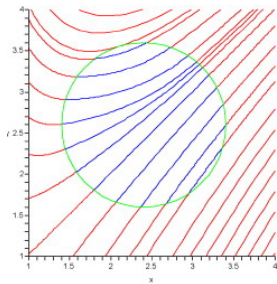
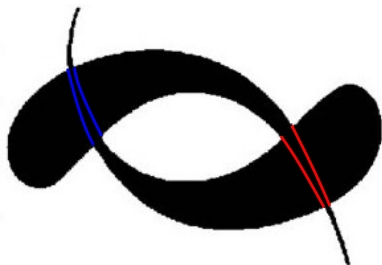
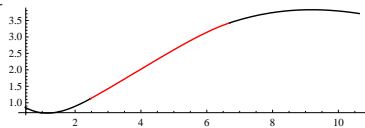
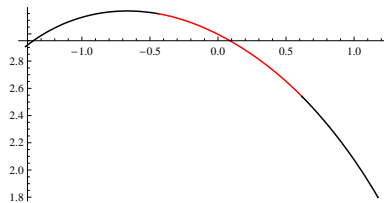
Глобальная структура субримановых сфер в $SE(2)$



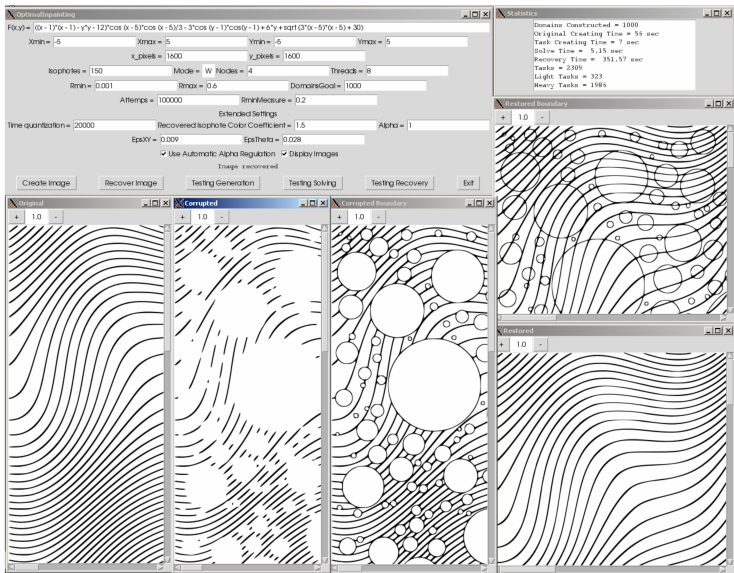
Приложение: Восстановление скрытого контура



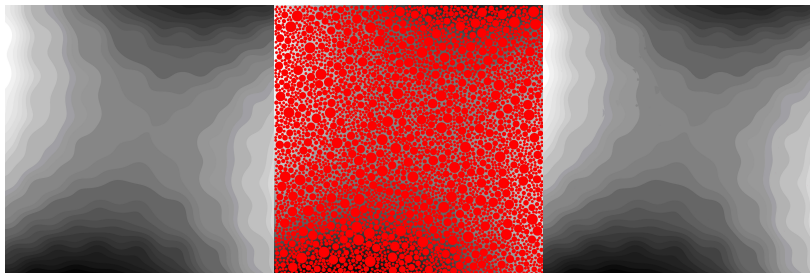
Восстановление скрытого контура



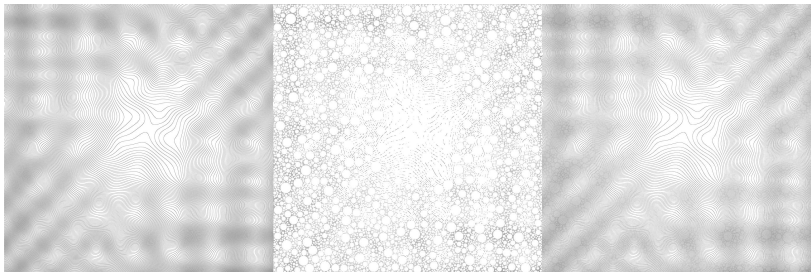
Параллельный ПК OptimalInpainting для восстановления поврежденных изображений



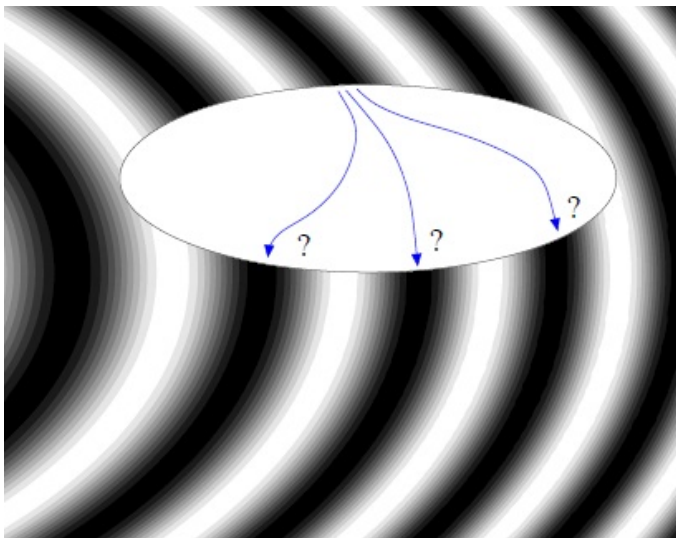
Исходное, поврежденное и восстановленное полутонное изображение



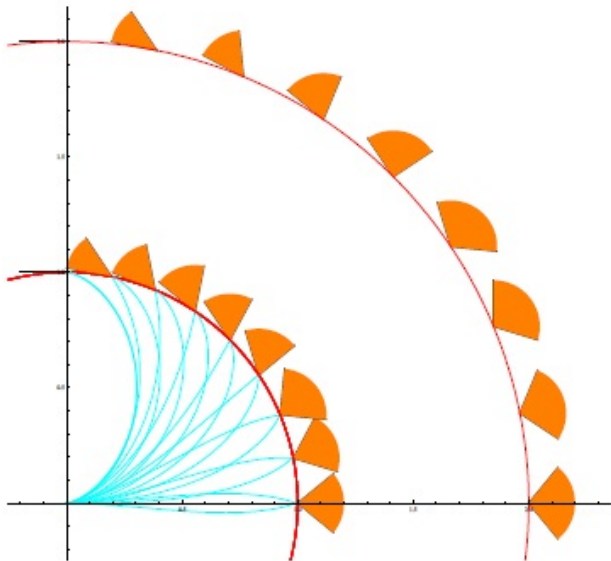
Исходное, поврежденное и восстановленное бинарное изображение



Проблема 1: неединственность линий уровня



Проблема 2: точки возврата



Проблема 3: Извлечение изофот (линий уровня яркости)
из полутоновых изображений

Проблема 4: Критические точки функции яркости

Восстановление изображений с помощью анизотропной диффузии на $PT\mathbb{R}^2$

Поврежденное изображение $I : D \setminus \Omega \rightarrow [0, +\infty)$

1. Сглаживание $f = I * G_\sigma$:

$$f(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} I(\tilde{x}, \tilde{y}) G_\sigma(x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y},$$

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right).$$

2. Подъем $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ до $\bar{f} : PT\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\bar{f}(x, y, \theta) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } \theta \text{ — угол наклона } \{f = \text{const}\}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

3. Анизотропная диффузия

$$\partial_t \Phi(q, t) = (X_1^2 + X_2^2) \Phi(q, t),$$

$$\Phi(q, 0) = \bar{f}(q)$$

4. Проекция на \mathbb{R}^2 :

$$\tilde{f}(x, y) = \max_{\theta \in P^1} \Phi(x, y, \theta, T).$$

Изотропная диффузия в \mathbb{R}^3

- Уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned}\partial_t \Phi(x, y, z, t) &= (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \Phi(x, y, z, t), \\ \Phi(x, y, z, 0) &= \varphi(x, y, z).\end{aligned}$$

- Фундаментальное решение (ядро теплопроводности)

$$\partial_t \mathcal{E}(x, y, z, t) - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \mathcal{E}(x, y, z, t) = \delta(x, y, z, t),$$

$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = \frac{\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^3} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right),$$

$$\Phi = \varphi * \mathcal{E}.$$

- Распространение диффузии по римановым геодезическим

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 \partial_x + u_2 \partial_y + u_3 \partial_z,$$

$$\int \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} dt \rightarrow \min.$$

Анизотропная диффузия в $PT\mathbb{R}^2$

- Уравнение анизотропной диффузии

$$\partial_t \Phi(q, t) = (X_1^2 + X_2^2) \Phi(q, t),$$

$$\Phi(q, 0) = \varphi(q), \quad q = (x, y, \theta) \in PT\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times P^1.$$

- Фундаментальное решение (ядро анизотропной диффузии)

$$\partial_t \mathcal{E}(q, t) - (X_1^2 + X_2^2) \mathcal{E}(q, t) = \delta(q, t),$$

$$\mathcal{E}(q, t) = \dots,$$

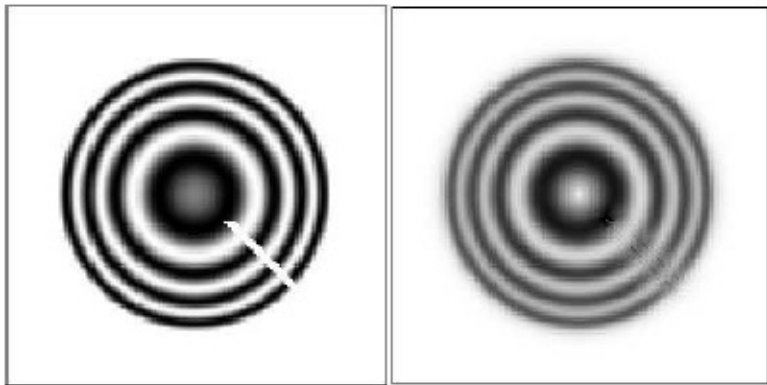
$$\Phi = \varphi * \mathcal{E}.$$

- Распространение диффузии по субримановым геодезическим

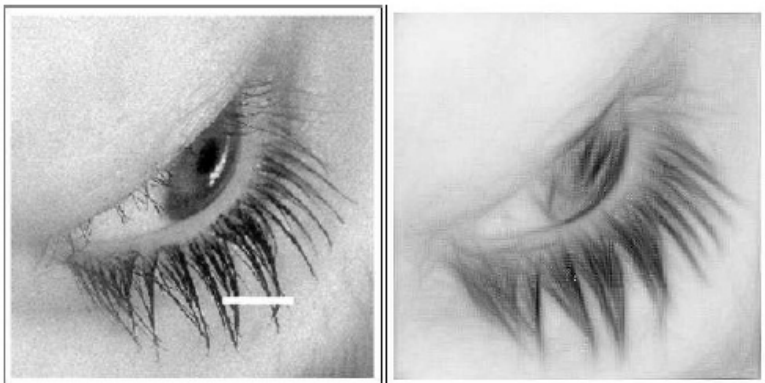
$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q),$$

$$\int \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

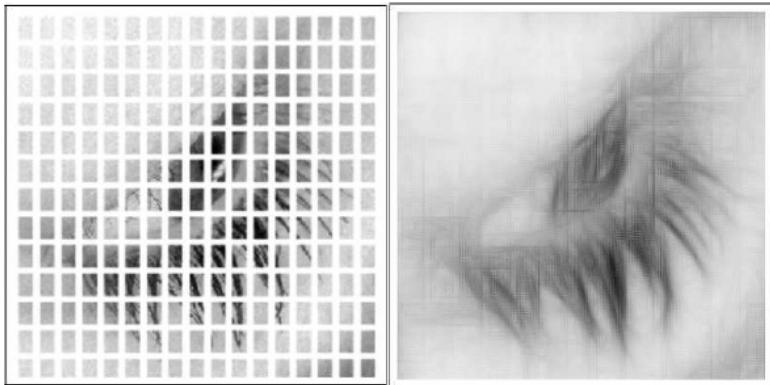
Анизотропная диффузия: результаты



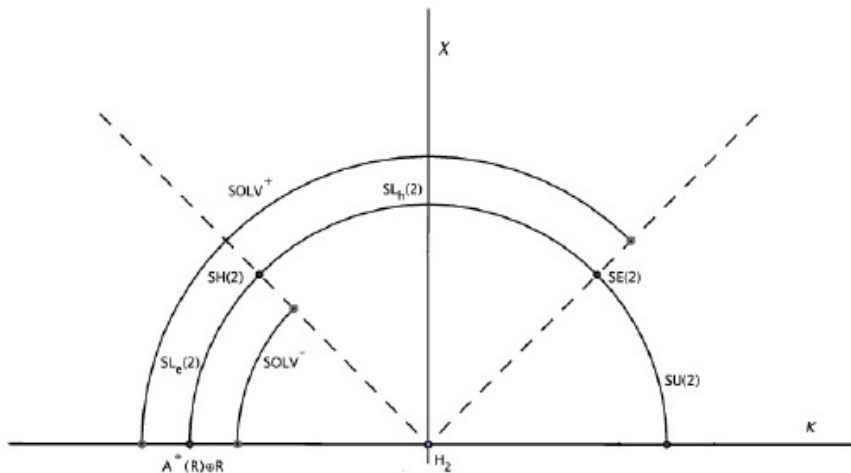
Анизотропная диффузия: результаты



Анизотропная диффузия: результаты



Инвариантные субримановы задачи
на 3-мерных группах Ли
(классификация А.А.Аграчева)



Резюме доклада

- Модель первичной зрительной коры головного мозга
- Задачи субримановой геометрии на $PT\mathbb{R}^2$ и $SE(2)$
- Решение субримановой задачи на $SE(2)$
- Восстановление изображений с помощью субримановых геодезических
- Восстановление изображений с помощью анизотропной диффузии
- Инвариантные субримановы задачи на 3-мерных группах Ли