

Математическая теория управления и ее приложения к механике, робототехнике, аэронавигации и обработке изображений

Д. ф.-м. н. Ю.Л. Сачков
Исследовательский центр процессов управления
ИПС имени А.К.Айламазяна РАН

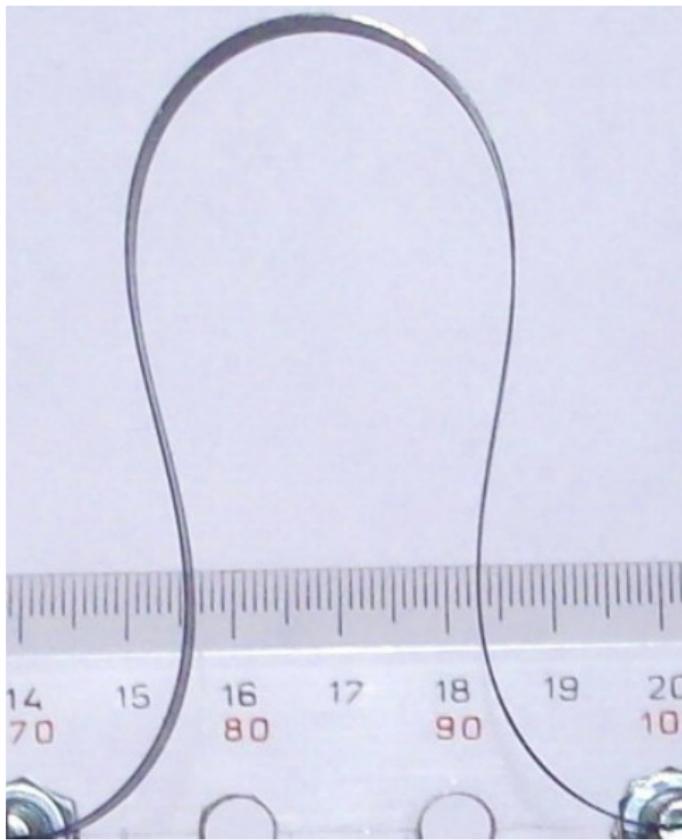
Университет города Переславля
имени А.К.Айламазяна

Актовая лекция
11 декабря 2012 г.

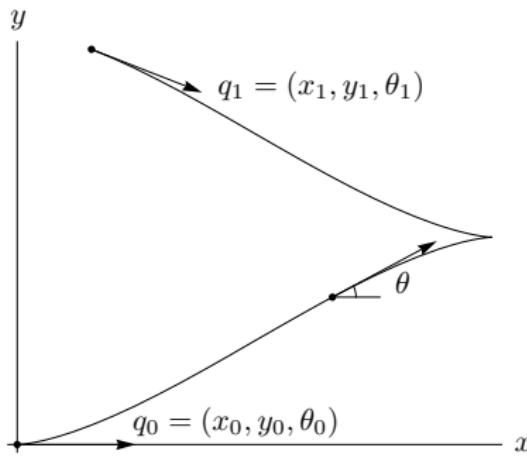
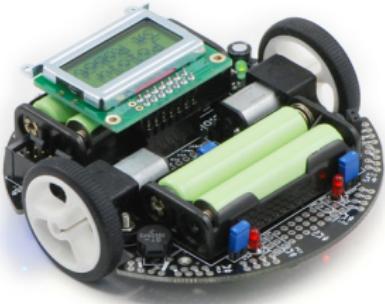
Обзор лекции

- Задачи математической теории управления
- Теория экстремальных задач
- Современная математическая теория управления
- Эластики Эйлера
- Движение мобильного робота с прицепами
- Качение сферы по плоскости
- Восстановление поврежденных изображений
- Аэронавигация

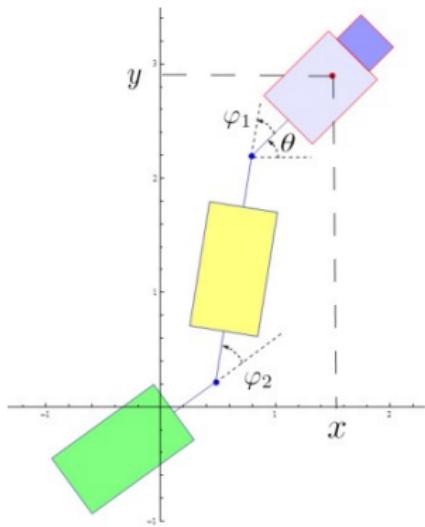
Эластики Эйлера



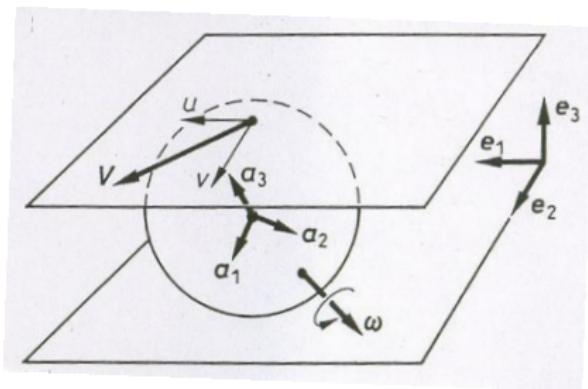
Движение мобильного робота



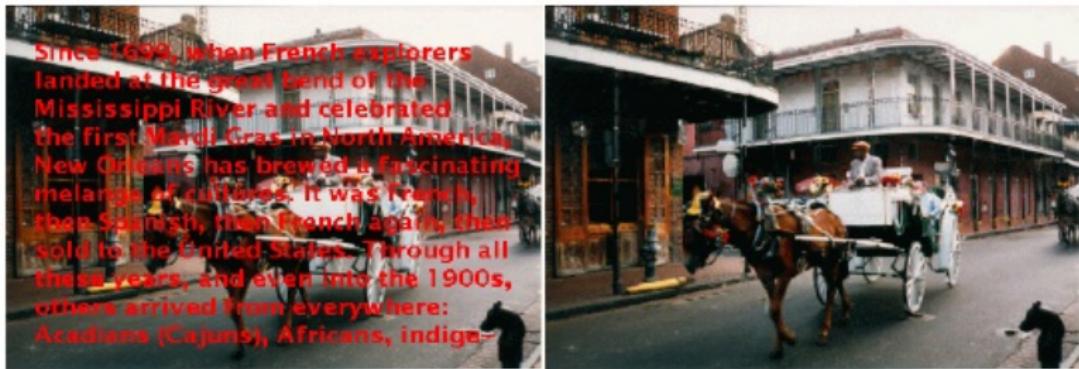
Мобильный робот с прицепами



Качение шара по плоскости



Восстановление поврежденных изображений



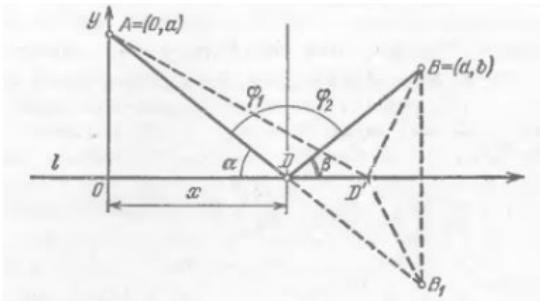
Аэронавигация



Экстремальные задачи (конечномерный случай)

$$f(x) \rightarrow \min(\max), \quad x \in D$$

- Задача Герона



$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \rightarrow \min, \quad D : x \in [0, d]$$

- Из всех прямоугольников заданного периметра найти прямоугольник максимальной площади

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \rightarrow \min, \quad D : x_1 + x_2 = P, \quad x_i \geq 0$$

Задача Диодоны (IX в. до н.э.)

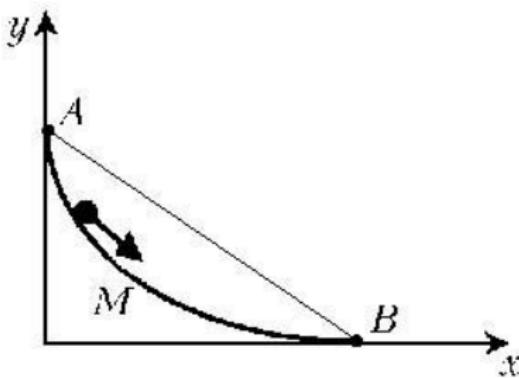
*Столько купили земли и дали ей имя Бирса,
Сколько смогли окружить бычьей шкурой.*

Вергилий «Энеида»

$$f[x] = \int_a^b x(t) dt \rightarrow \max, \quad D : \int_a^b \sqrt{1 + (x'(t))^2} dt = P.$$

Решение: $x(t)$ — дуга окружности

Задача о брахистохроне (1696)



В вертикальной плоскости даны точки А и В.

Определить путь АМВ, спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело М, начав двигаться из точки А, достигнет точки В в кратчайшее время

И. Бернулли

Решение: циклоида

Теория бесконечномерных экстремальных задач

Вариационное исчисление

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \min$$

- Леонард Эйлер (1707–1783),
Жозеф Луи Лагранж (1736–1813)
Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} = 0$$

- Адриен Лежандр (1752–1833)
- Карл Якоби (1804–1851)
- Карл Вейерштрасс (1815–1897)

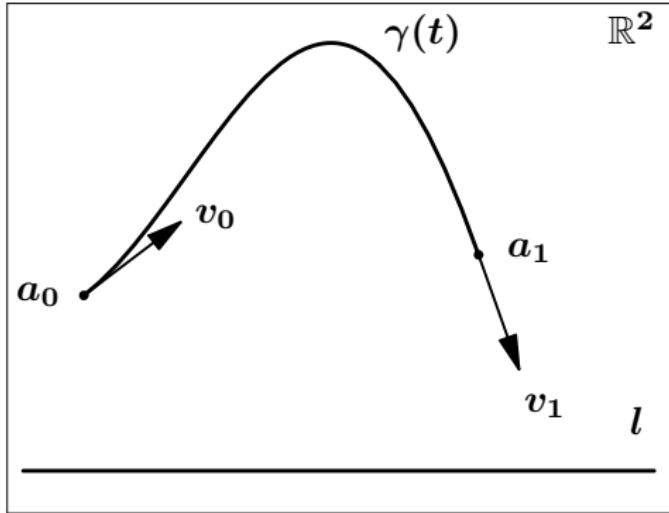
Теория бесконечномерных экстремальных задач

Оптимальное управление

$$\int_a^b L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad u \in U$$

- Л.С. Понtryгин, В.Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко:
Принцип максимума Понtryгина
- Ричард Беллман:
Метод динамического программирования
- Р. Брокетт, Х. Суссманн, В. Джарджевич, М.И.Зеликин, Ж.-П. Готье, А.А.Аграчев:
Геометрические методы в теории управления

Задача Эйлера об эластиках



Дано: $l > 0$, $a_i \in \mathbb{R}^2$, $v_i \in T_{a_i}\mathbb{R}^2$, $|v_i| = 1$, $i = 1, 2$.

Найти: $\gamma(t)$, $t \in [0, t_1]$:

$$\gamma(0) = a_0, \dot{\gamma}(0) = v_0, \gamma(t_1) = a_1, \dot{\gamma}(t_1) = v_1.$$

$$|\dot{\gamma}(t)| \equiv 1 \Rightarrow t_1 = l$$

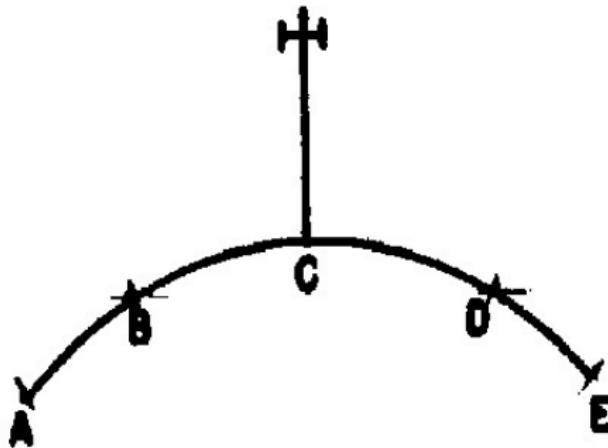
Упругая энергия $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} k^2 dt \rightarrow \min$, $k(t)$ — кривизна $\gamma(t)$.

XIII век: Жорданус де Неморе

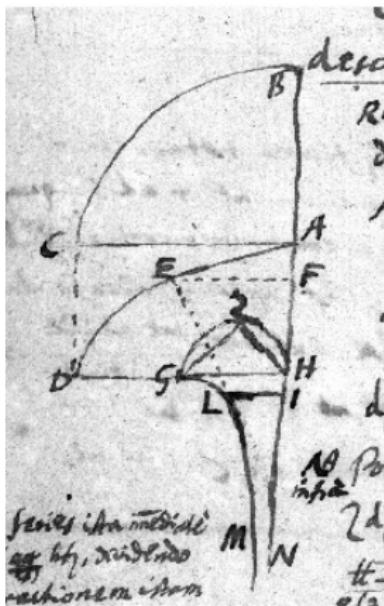
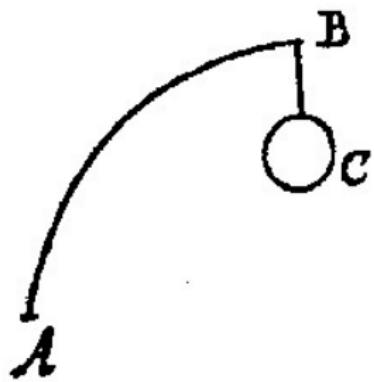
Jordanus de Nemore, *De Ratione Ponderis*,
Книга 4, Предложение 13:

Упругие кривые — окружности.

(Неверное решение).



1691: Якоб Бернулли, прямоугольная эластика



$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad x \in [0, 1]$$

1742: Даниил Бернулли

- Упругая энергия

$$E = \text{const} \cdot \int \frac{ds}{R^2},$$

R — радиус кривизны.

- Попытки решения вариационной задачи

$$E \rightarrow \min.$$

- Письмо Леонарду Эйлеру: предложение решить эту задачу.

1744: Леонард Эйлер

- “Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле”, Лозанна, Женева, 1744,
- Приложение «Об упругих кривых»:

«...в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.»
- *«Среди всех кривых одной и той же длины, которые не только проходят через A и B, но и касаются в этих точках прямых, заданных по положению, определить ту, для которой значение выражения $\int \frac{ds}{R^2}$ будет наименьшим.»*

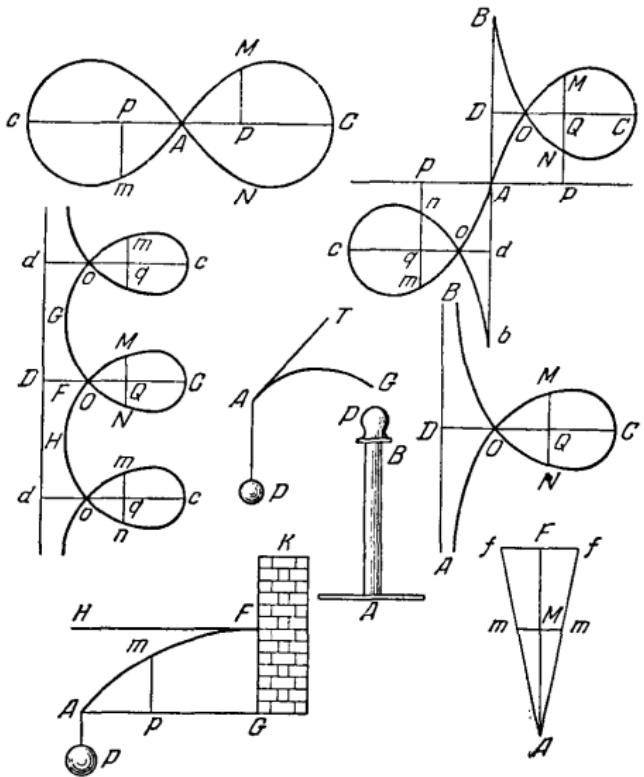
1744: Леонард Эйлер

- Задача вариационного исчисления,
- Уравнение Эйлера-Пуассона,
- Сведение к квадратурам

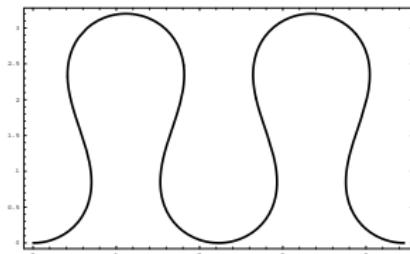
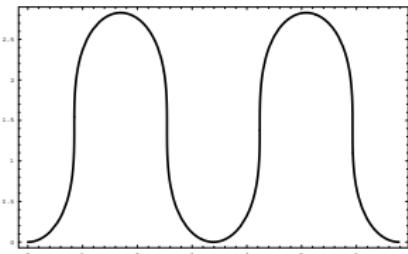
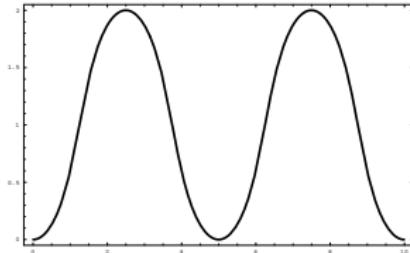
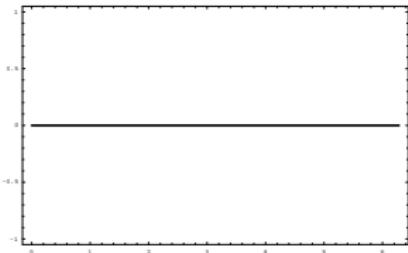
$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2) dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}}, \quad ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}},$$

- Качественный анализ интегралов,
- Типы решений (эластики).

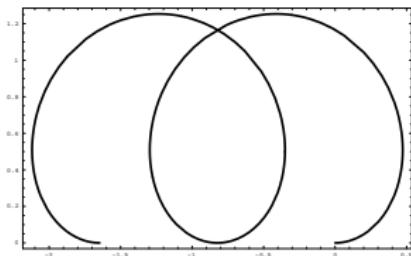
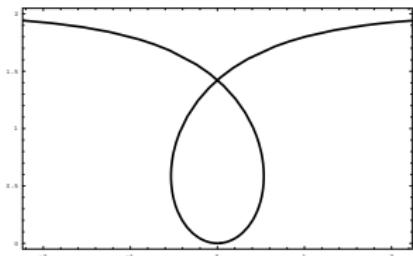
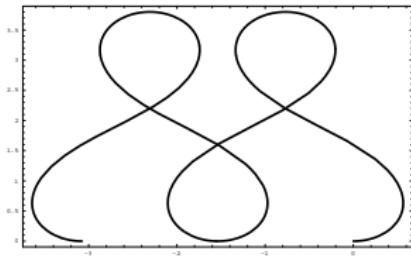
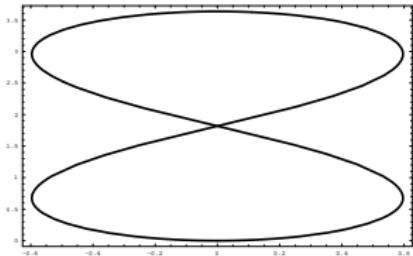
Эскизы Эйлера



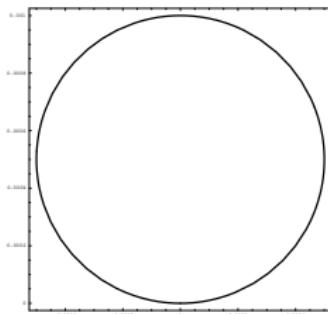
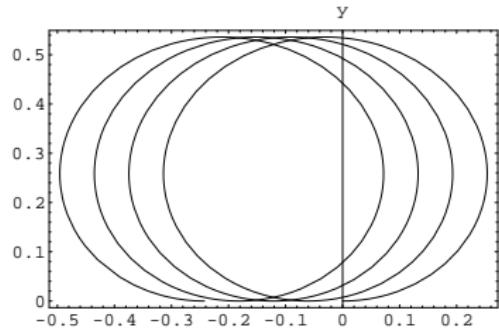
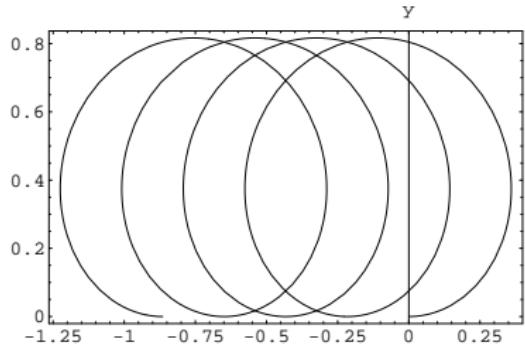
Эйлеровы эластики



Эйлеровы эластики



Эйлеровы эластики



1807: Пьер Симон Лаплас

Форма поверхности капилляра
между вертикальными плоскостями

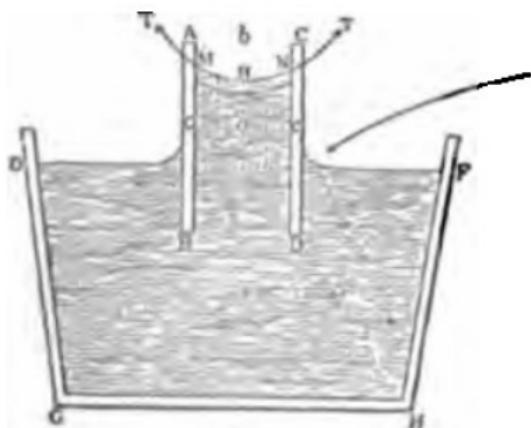


FIG. 6.

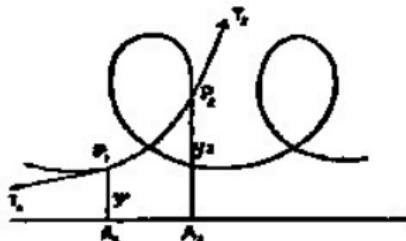
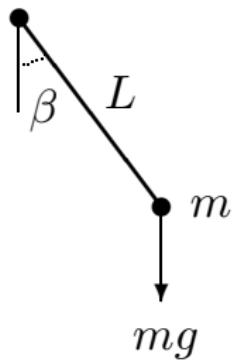


FIG. 8.

Рисунки Дж.Максвелла (Британская Энциклопедия, 1890 г.)

1859: Г.Р. Кирхгоф

Кинетический аналог: **математический маятник**



$$\ddot{\beta} = -r \sin \beta, \quad r = \frac{g}{L}$$

1880: Л. Заалшютц

Первая явная параметризация эйлеровых эластик функциями Якоби:

L.Saalschütz, *О стержне, нагруженном действием боковой силы*,
Лейпциг, 1880.

1906: Макс Борн

- Диссертация «Устойчивость упругих кривых на плоскости и в пространстве», Геттинген, 1906 г.
- Уравнения Эйлера-Лагранжа \Rightarrow

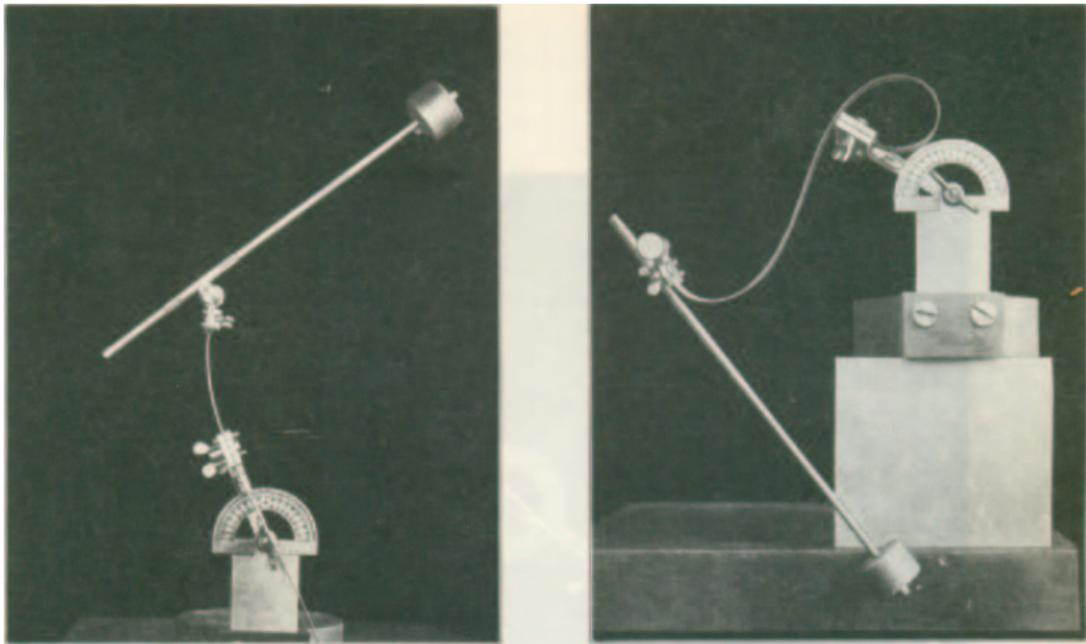
$$\dot{x} = \cos \theta, \quad \dot{y} = \sin \theta,$$

$$A\ddot{\theta} + B \sin(\theta - \gamma) = 0, \quad A, B, \gamma = \text{const},$$

- эластика без точек перегиба \Rightarrow устойчивость,
- эластика с точками перегиба \Rightarrow численное исследование сопряженных точек,
- чертежи эластик на основе приближенных вычислений.

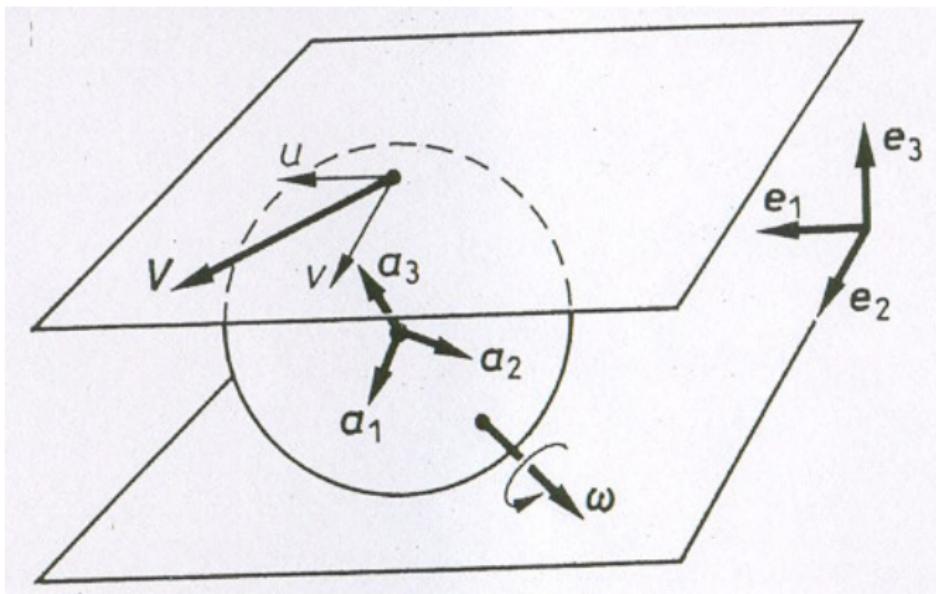
1906: Макс Борн

Эксперименты с упругими стержнями:



1993: В. Джарджевич

Эйлеровы эластики в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания



Приложения эйлеровых эластик

- теория упругости и сопротивление материалов (моделирование колонн, балок, упругих стержней),
- размер и форма в биологии (максимальная высота дерева, изгиб пальм под действием ветра, кривизна позвоночника, механика крыльев насекомых),
- аналоги сплайнов в теории аппроксимации (Г.Биркхоф, К.Р. де Бур, 1964),
- восстановление скрытых изображений в компьютерном видении (Д.Мамфорд, 1994),
- моделирование тонких оптических волокон и гибких соединений в микроэлектронике (В.Джеирезбхой, 2008),
- динамика оси вихря и кубическое уравнение Шредингера (Х.Хасимото, 1971),
- моделирование молекул ДНК (Р.С.Маннинг, 1996), ...

Локальная и глобальная оптимальность эйлеровых эластик

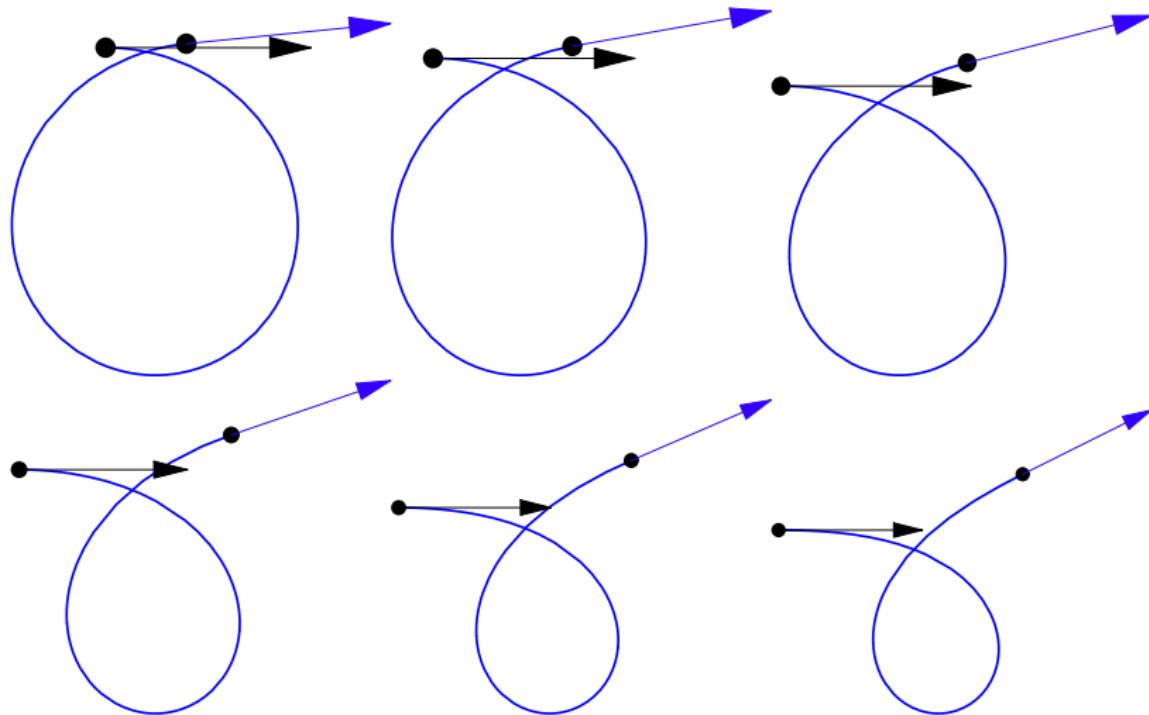
1. Является ли устойчивой данная дуга эластики?
2. Из всех кривых фиксированной длины с заданными концами и касательными на концах найти кривую минимальной упругой энергии.

Решение (2006–2008 гг.):

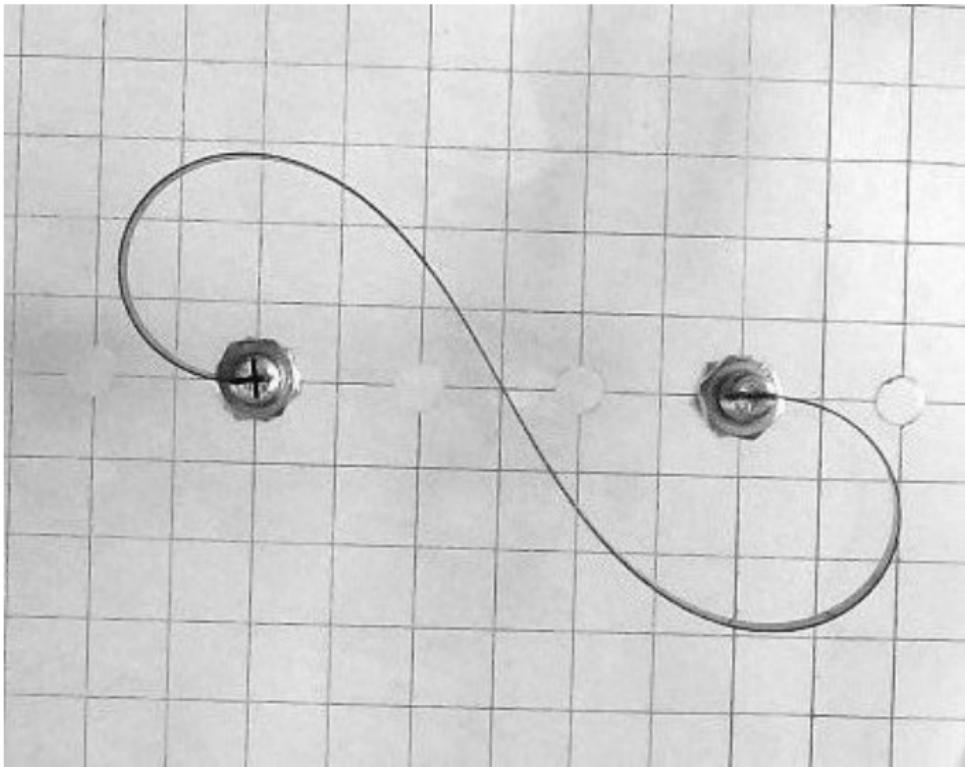
1. Необходимые и достаточные условия устойчивости эластик.
2. Задача сведена к решению систем алгебраических уравнений.

Решение систем уравнений: программа в Wolfram Mathematica.

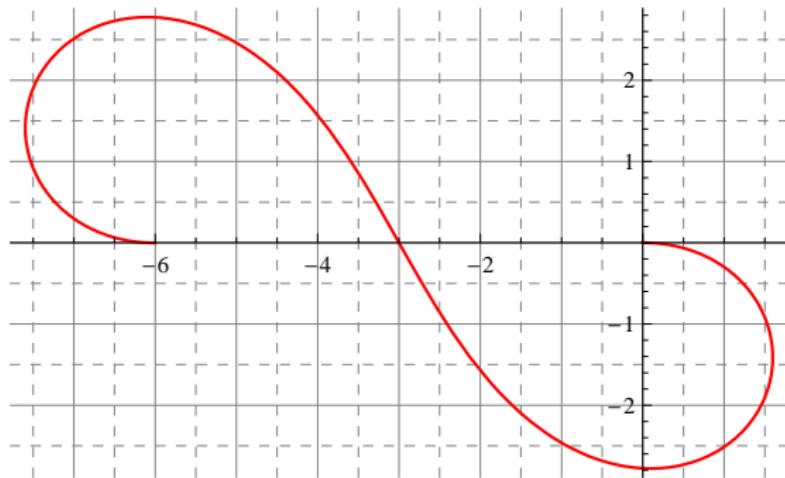
Квазистатическая деформация оптимальных эластик



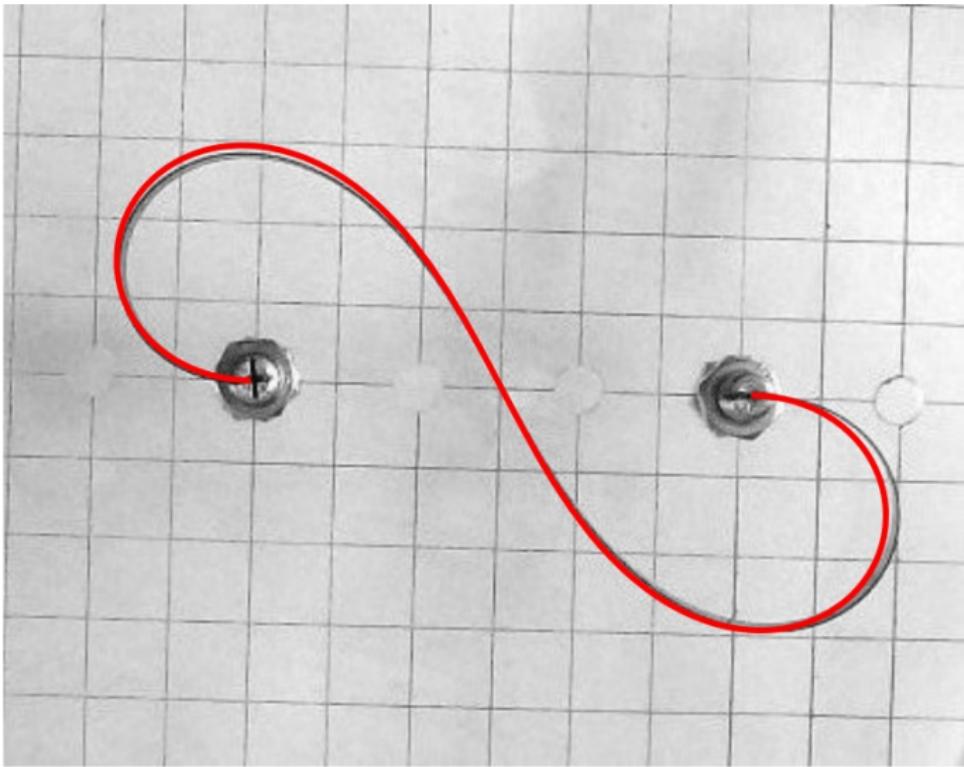
Эксперименты с эластиками



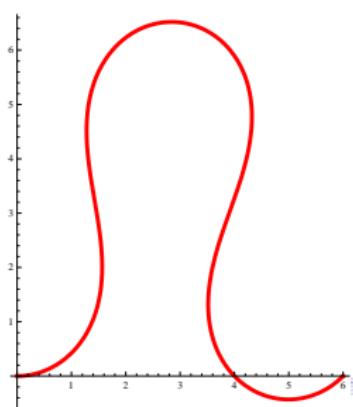
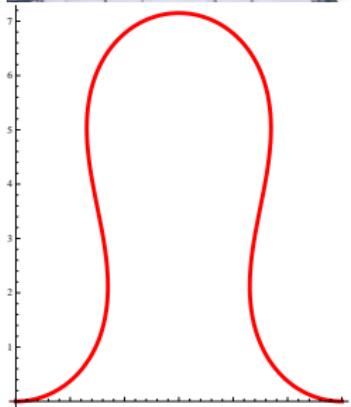
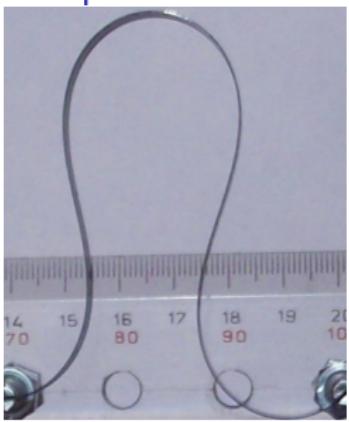
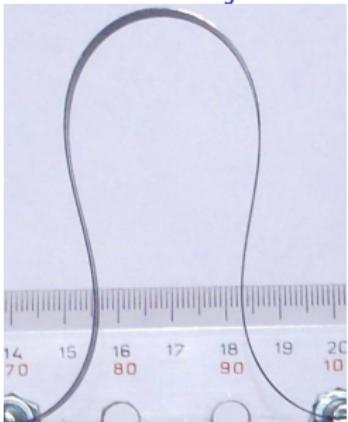
Чертеж эластики (Mathematica)



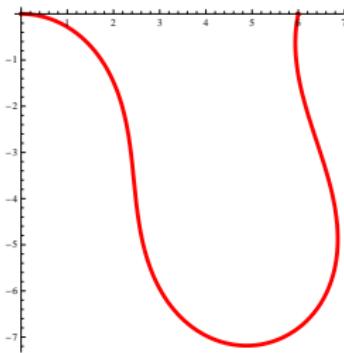
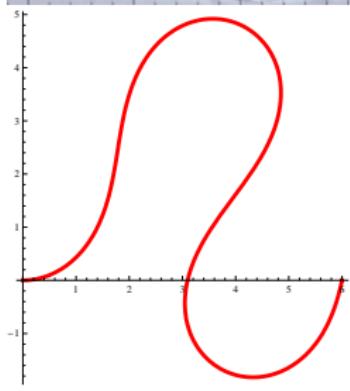
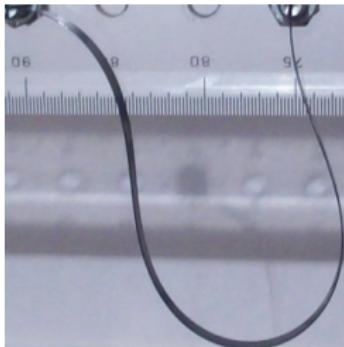
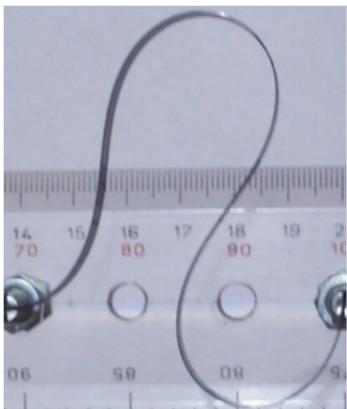
Сравнение физической и математической эластик



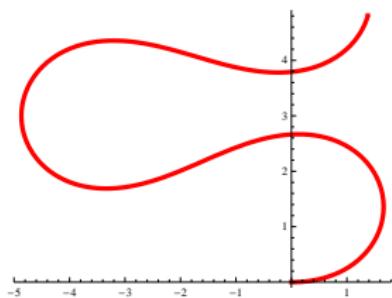
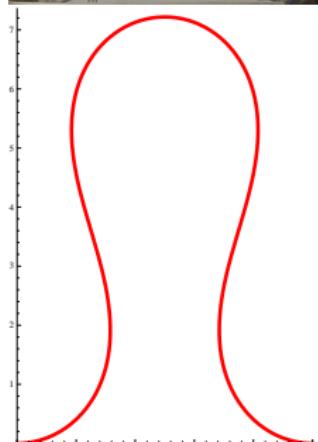
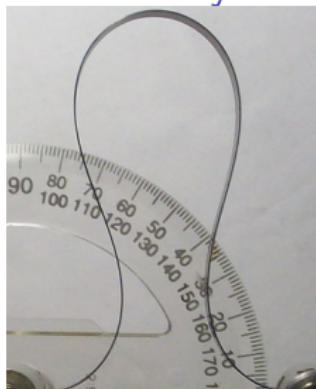
Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия А



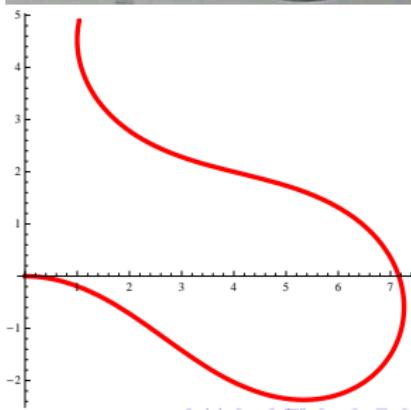
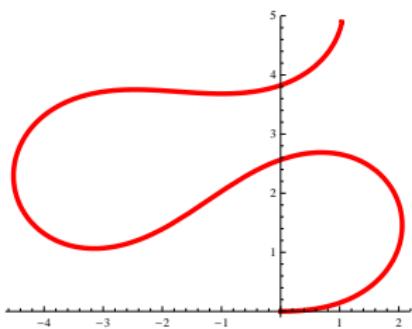
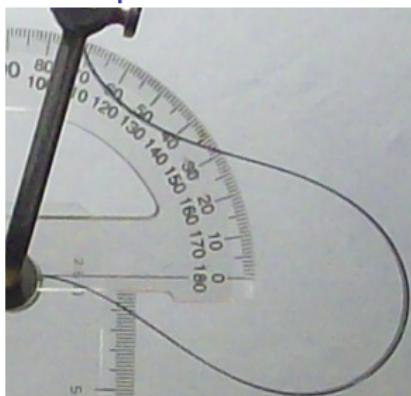
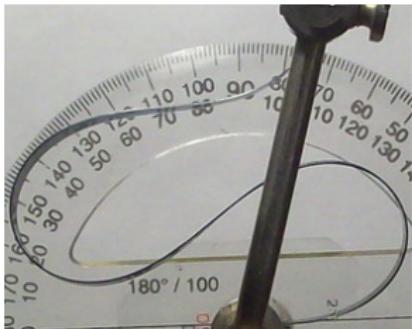
Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия А



Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия В

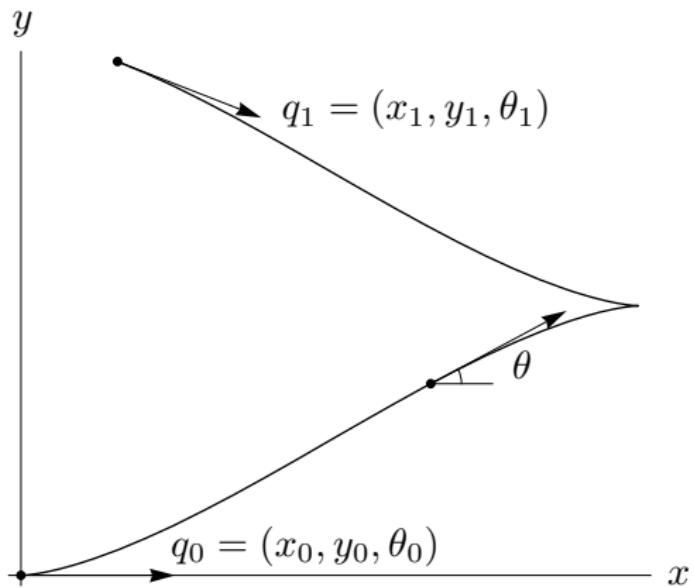


Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия В



Анимации с оптимальными эластиками...

Задача об оптимальном движении машины на плоскости

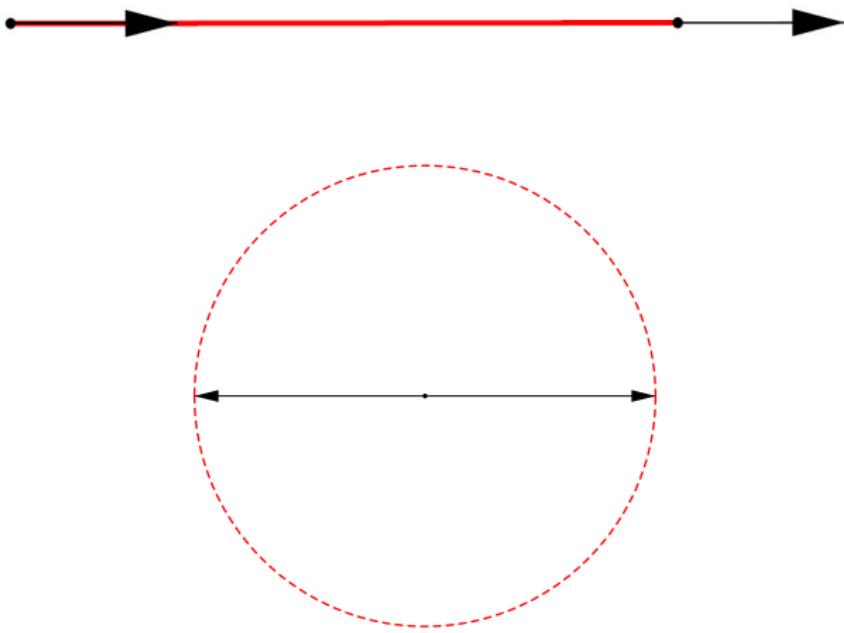


$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

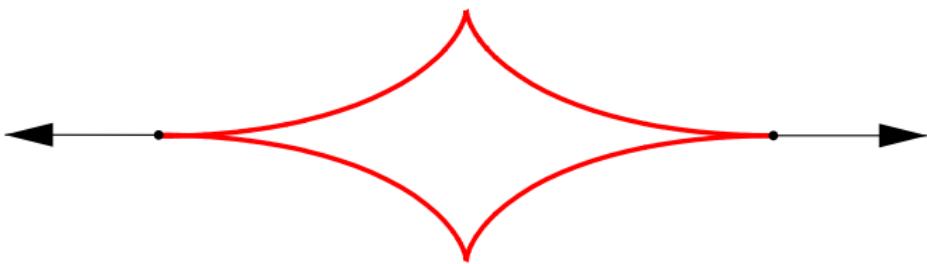
Результаты по задаче об оптимальном движении машины по плоскости

- Существование оптимальных траекторий,
- Параметризация экстремальных траекторий,
- Описание оптимальных траекторий:
 - Общие граничные условия \Rightarrow сведение к системам алгебраических уравнений,
 - Специальные граничные условия \Rightarrow явные решения,
- Субримановы сферы,
- Программа для вычисления оптимальных траекторий,
- Приложения: восстановление скрытых изображений.

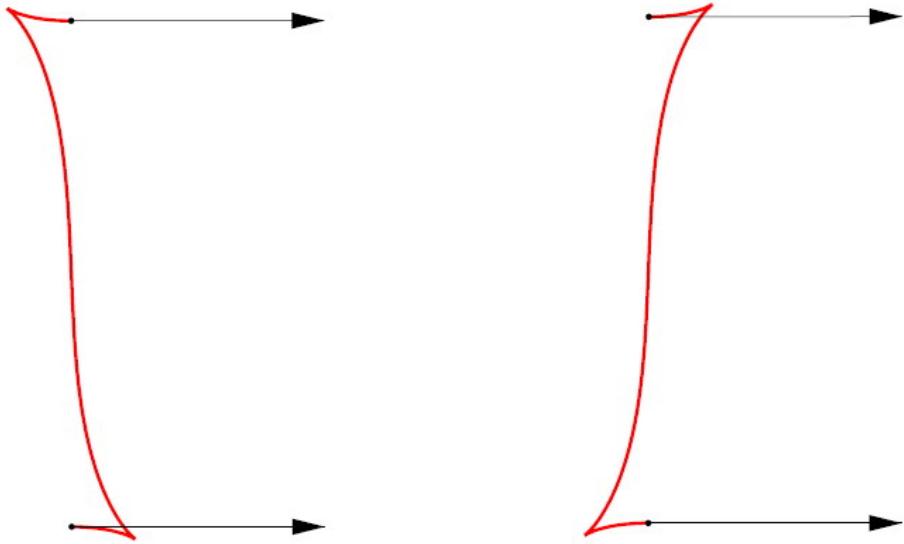
Оптимальные траектории



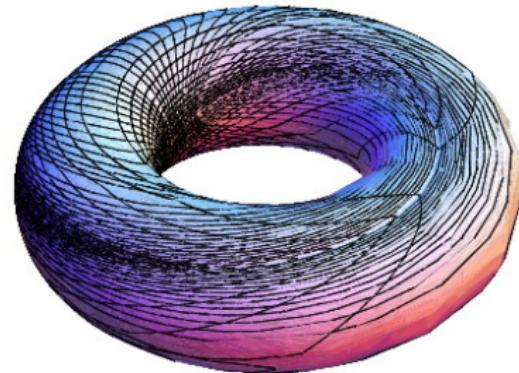
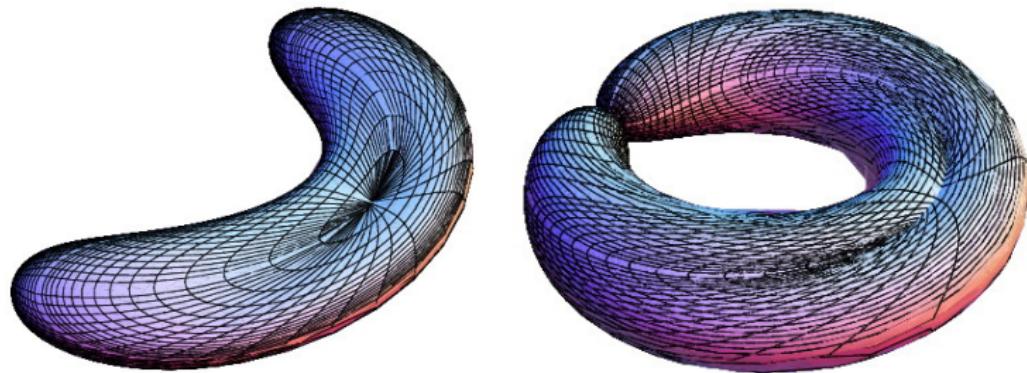
Оптимальные траектории



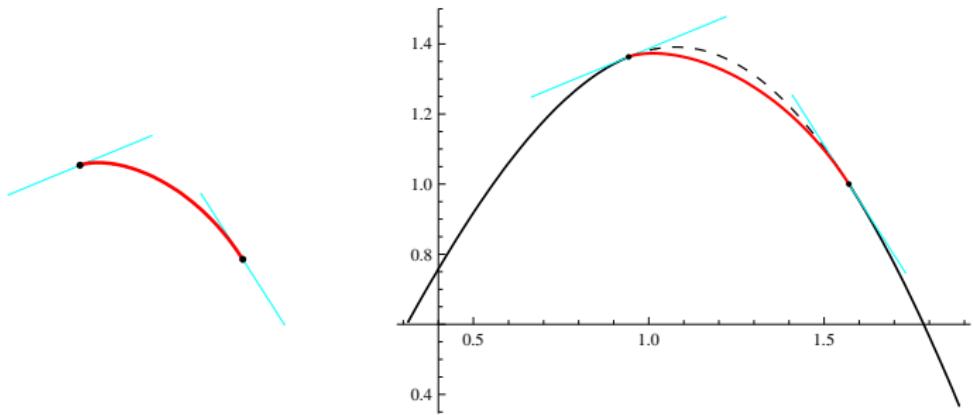
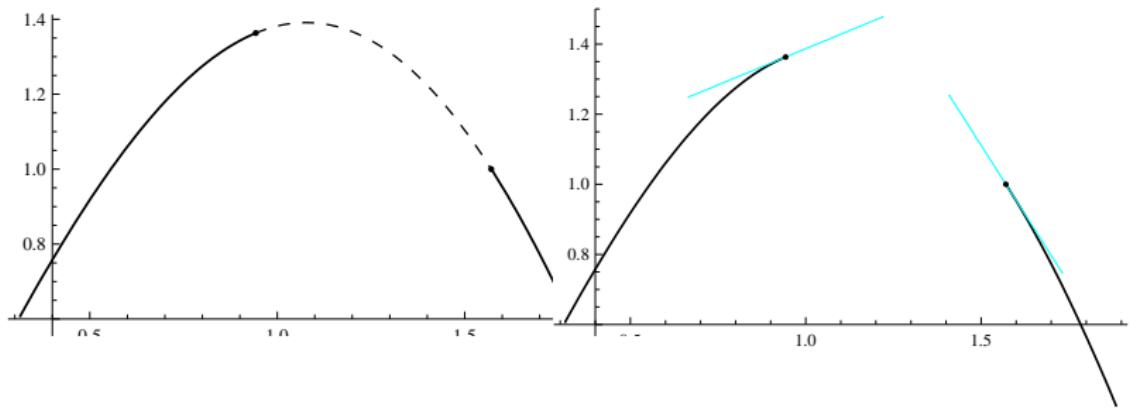
Оптимальные траектории



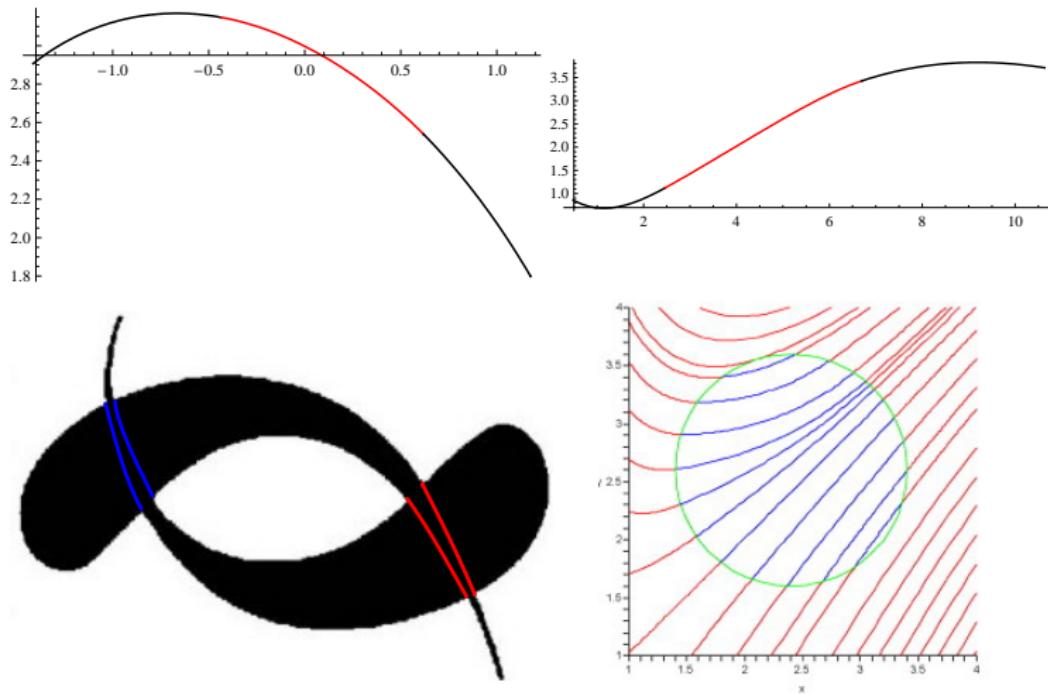
Глобальная структура субримановых сфер



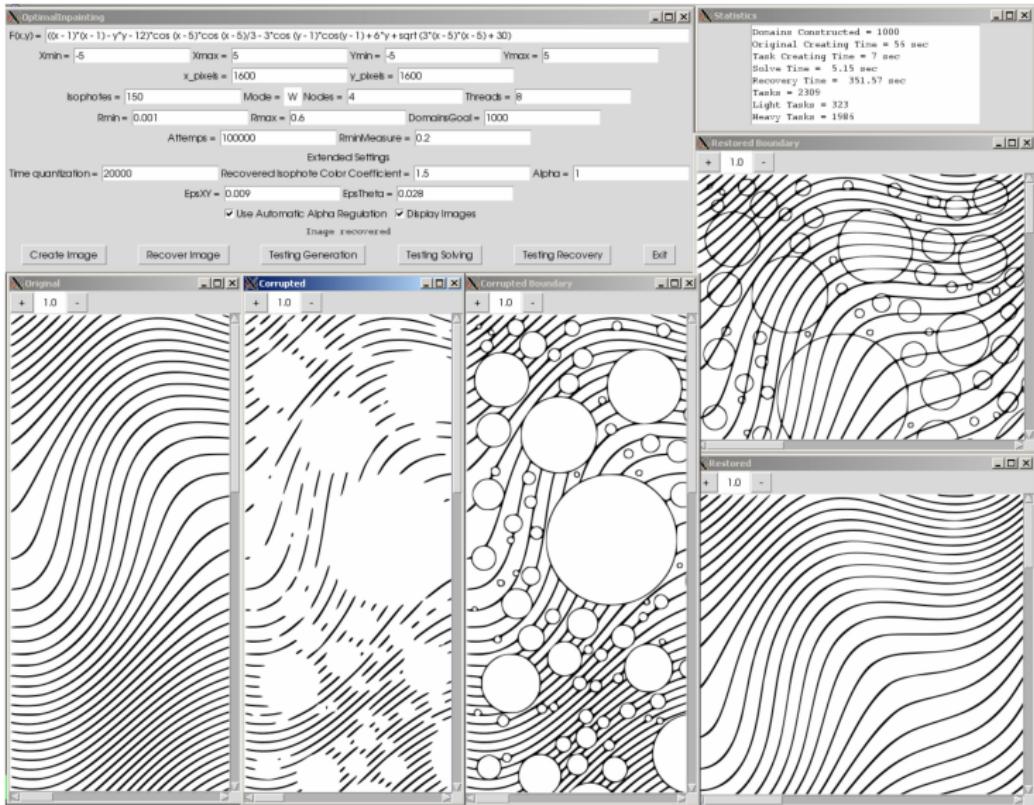
Приложение: Восстановление скрытого контура



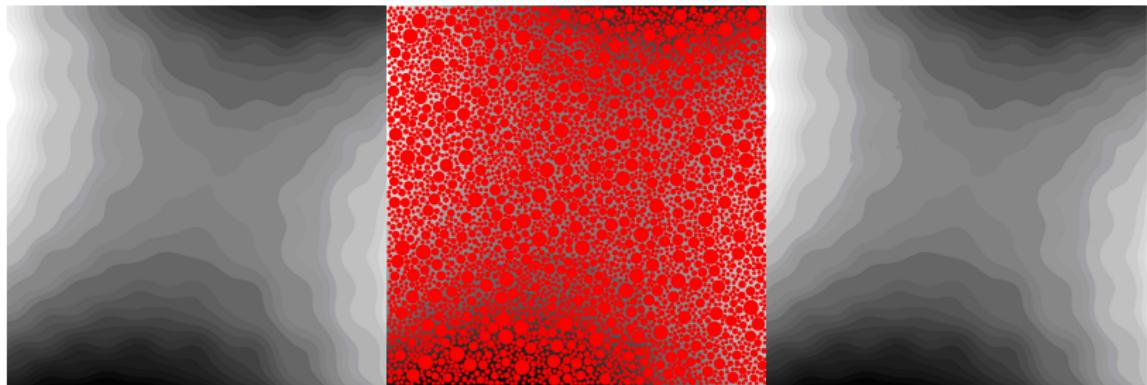
Восстановление скрытого контура



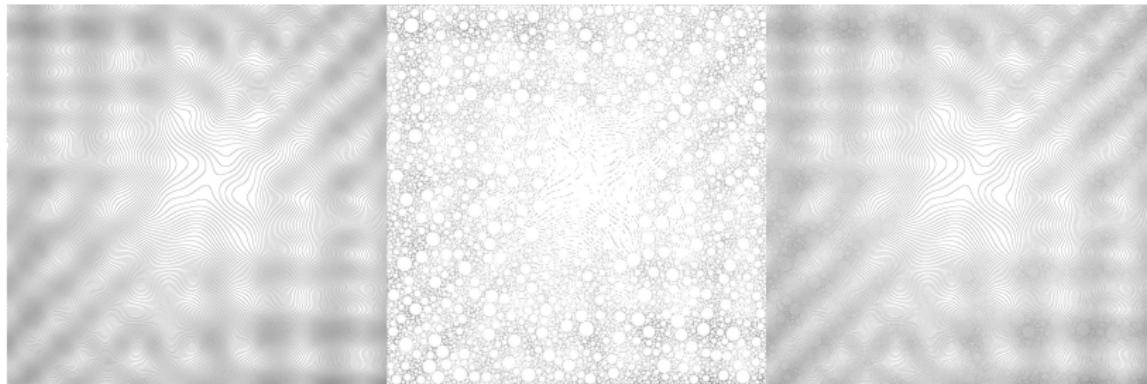
Параллельный ПК Optimallnpainting для восстановления поврежденных изображений



Исходное, поврежденное и восстановленное полутоновое изображение



Исходное, поврежденное и восстановленное бинарное изображение



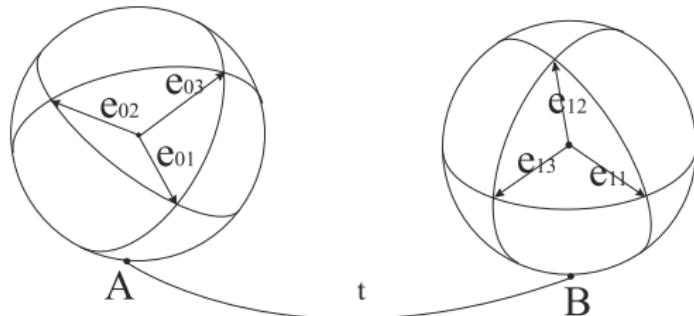
Задача об оптимальном качении сферы по плоскости без проскальзывания и прокручивания

Дано: $A, B \in \mathbb{R}^2$, реперы (e_{01}, e_{02}, e_{03}) , (e_{11}, e_{12}, e_{13}) в \mathbb{R}^3 .

Найти: $\gamma(t)$, $t \in [0, t_1]$, — кратчайшую кривую т.ч.:

$$\gamma(0) = A, \quad \gamma(t_1) = B,$$

при качении сферы по кривой $\gamma(t)$ ориентация сферы
переходит из (e_{01}, e_{02}, e_{03}) в (e_{11}, e_{12}, e_{13}) .



Анимация ...

История задачи

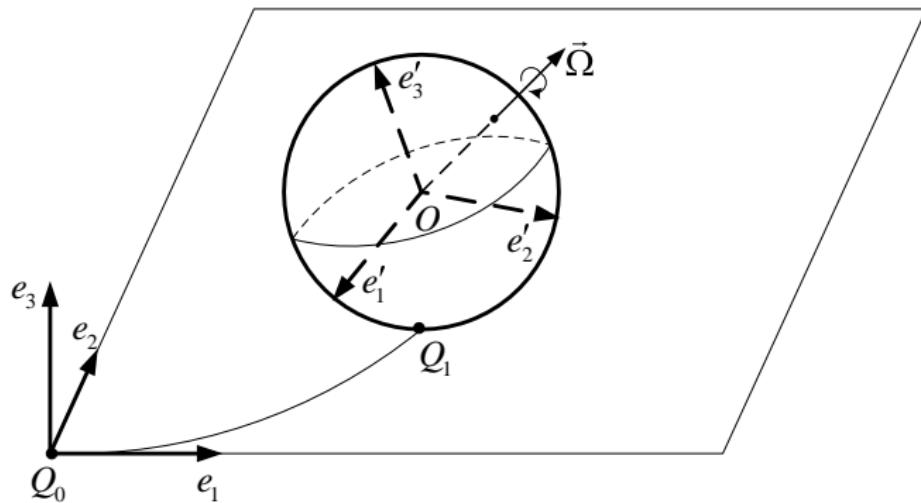
- 1894 Г. Герц: катящаяся сфера как неголономная механическая система.
- 1983 Дж. Хаммерсли: постановка задачи о качении сферы.
- 1986 А.Артур, Дж. Уолш: интегрируемость уравнений для оптимальных траекторий.
- 1990 З. Ли, Э. Кэнни: полная управляемость системы.
- 1993 В.Джарджевич:
- кривые $(x(t), y(t))$ — эластики Эйлера,
 - описание качественных типов оптимальных траекторий.

Новые результаты (2006–2011)

- Непрерывные и дискретные симметрии
- Неподвижные точки симметрий
- Необходимые условия оптимальности
- Асимптотика экстремальных траекторий и неподвижных точек симметрий при качении сферы по синусоидам малой амплитуды.

Анимация ...

Задача об оптимальном качении сферы по плоскости без проскальзывания, с прокручиванием



Качение по прямой с прокручиванием

Качение по синусоиде с прокручиванием

Оптимальное возвращение сферы в исходное положение с заданной ориентацией

Задача сведена к решению системы алгебраических уравнений.

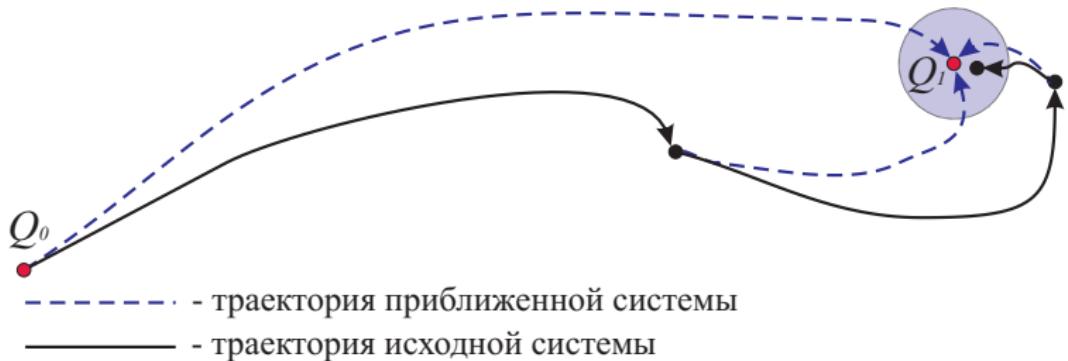


Алгоритмы и программы для приближенного решения задачи управления с приложением к задачам робототехники

- Состояние Q пятимерно, управление двумерно
- Управляемая система:
линейная по управлениям
- Границные условия
 $Q(0) = Q_0, \quad \text{dist}(Q(t_1), Q_1) < \varepsilon$
- Приложения:
 1. качение твердых тел
 2. движение мобильного робота с двумя прицепами

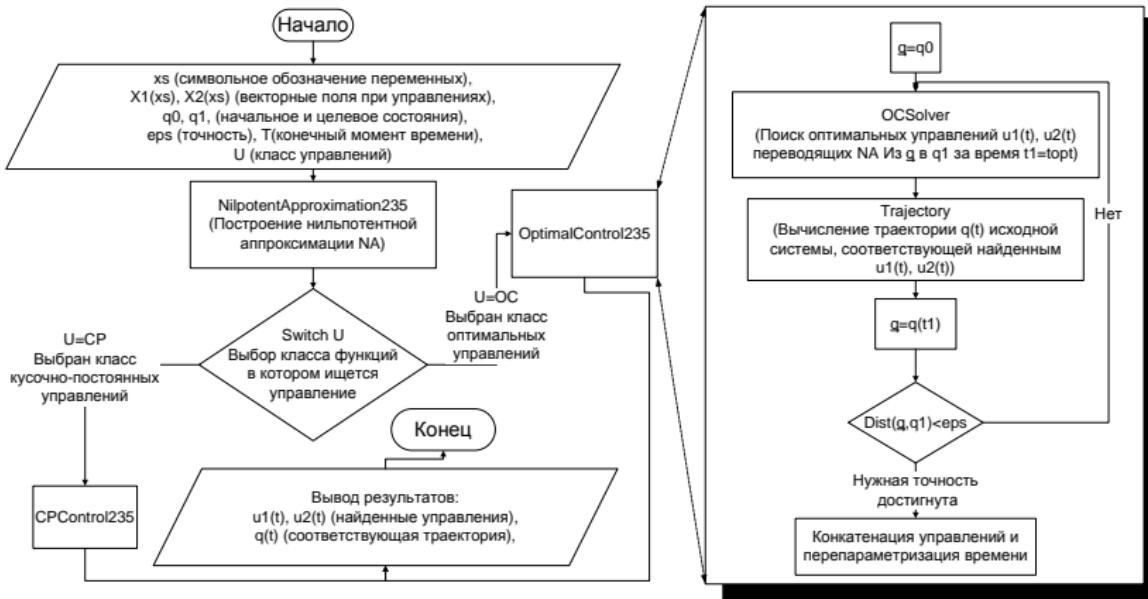
Решение конструктивной задачи управления

- Итерационный алгоритм поиска приближенного решения:



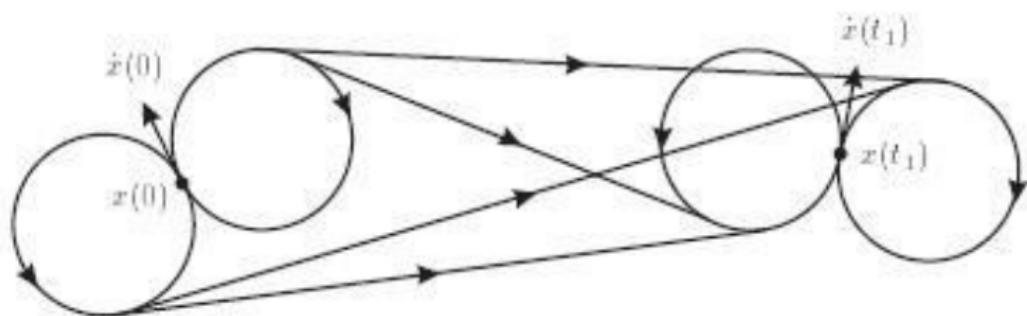
- Структура ПК Motion Planning:
 - модуль построения нильпотентной аппроксимации,
 - модуль решения задачи в классе кусочно-постоянных управлений,
 - модуль решения задачи в классе оптимальных управлений,
 - дополнительные функции

Программный комплекс MotionPlanning



Анимации ...

Приложение модели машины Дубинса к аэронавигации



Алгоритмы и программы решения

- Сведение задачи оптимального управления к системам алгебраических уравнений:

$$F(\varphi) = q_1, \quad \varphi \in N' \subset \mathbb{R}^n, \quad q_1 \in G' \subset G.$$

- Синтетические алгоритмы решения систем уравнений:
 - метод хорд,
 - метод Ньютона.
- Серии уравнений с непрерывной зависимостью решения от правой части.
- Последовательные и параллельные программы (Mathematica, gridMathematica, TSim).

Заключение

- Нетривиальные задачи оптимального управления
- Традиционные и новые методы математического исследования
- Результаты
- Приложения
- Алгоритмы и программы решения