

А. А. Аграчев¹

Ю. Л. Сачков²

Геометрическая теория управления*

¹Математический Институт им. Стеклова, ул. Губкина 8, Москва 117966, Россия
& SISSA-ISAS, 2-4 Via Beirut, Trieste 34014, Italy
E-mail: agrachev@ma.sissa.it

²Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский 152140, Россия
E-mail: sachkov@sys.botik.ru

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект No. 02-01-00506

*Как-нибудь
управимся . . .*

Предисловие

Перед Вами учебник по математической теории управления, представленной с геометрической точки зрения. В основу книги легли курсы, прочитанные старшим из соавторов в 2000–2001 годах в Международной Школе Высших Исследований в Триесте, Италия. Предварительные знания, необходимые для чтения книги, сводятся к стандартным курсам математического анализа и линейной алгебры, а также некоторым начальным сведениям из теории функций действительного переменного и функционального анализа; не требуется предварительного знакомства ни с теорией управления, ни с дифференциальной геометрией.

О чём же эта книга? Детерминированный мир классической физики описывается гладкими динамическими системами. Будущее в такой системе полностью определено начальными условиями; более того, близкое будущее меняется гладко, если гладко менять начальные условия. Оставляя место для свободной воли (не для случая, а именно для свободной воли) в этой мрачноватой картине полной предопределённости, мы получаем управляемую систему. Мы просто разрешаем менять некоторые параметры системы: менять в известных пределах, но в любое время, когда вздумается. Собственно, это то, что мы постоянно проделываем с собственным телом, автомобилями, летательными аппаратами, технологическими процессами и так далее. Мы управляем всеми этими динамическими системами!

Гладкие динамические системы описываются дифференциальными уравнениями. В этой книге мы имеем дело только с конечномерными системами: они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями на конечномерных гладких многообразиях. *Управляемая система* — это семейство обыкновенных дифференциальных уравнений. Семейство параметризовано *управляющими параметрами*. Все уравнения данного семейства определены на одном и том же многообразии, которое называется *пространством состояний* системы. Разрешается выбирать любые доступные значения управляющих параметров (т.е. выбирать любую динамическую систему из семейства), а также менять эти значения в произвольный момент времени. Таким образом, выбранные параметры, вообще говоря, зависят от времени. Эта зависимость называется *управлением* или *функцией управления*.

Выбрав управление, мы превращаем управляемую систему в неавтономное дифференциальное уравнение. Решение такого уравнения однозначно определяется начальными условиями и называется допустимой траекторией системы, отвечающей данному управлению. Таким образом, допустимая траектория — это некоторая кривая в пространстве состояний. Начальные условия — это начальная точка кривой, называемая также начальным состоянием. Разным управлениям отвечают, вообще говоря, разные допустимые траектории, начинающиеся в одной и той же точке. Все эти траектории

заполняют *множество достижимости*.

Одна из главных задач теории управления — задача управляемости — состоит в распознавании состояний, достижимых из данного начального. Впрочем, как правило, этого недостаточно. Выяснив, до каких состояний можно добраться, мы пытаемся найти наилучший путь. Пути можно сравнивать по времени перехода, длине допустимой траектории, затраченной энергии или значению какого-то другого функционала. Наилучшим считается путь, доставляющий минимум заранее выбранному функционалу. Поиск таких путей составляет предмет задачи оптимального управления. Две важные задачи — управляемости и оптимального управления — служат нам маяками на протяжении всей книги.

При чём здесь геометрия? Правая часть обыкновенного дифференциального уравнения есть векторное поле, а соответствующая динамическая система — поток, порожденный этим векторным полем. Таким образом, управляемая система — это семейство векторных полей. Интересующие нас свойства систем сохраняются при гладких заменах переменных в пространстве состояний. Кроме того, допускается обширный класс преобразований, перепараметризующих семейство полей; они называются преобразованиями обратной связи в теории управления и — калибровочными преобразованиями в геометрии и математической физике. Наличие всех этих преобразований есть внешнее формальное основание для применения геометрических методов и бескоординатного геометрического языка в теории управления.

Имеется и более глубокое основание. Как уже отмечалось, динамическая система — это поток (то есть однопараметрическая группа преобразований пространства состояний), порождённый векторным полем. Допустимая траектория, отвечающая постоянному управлению, есть траектория соответствующего потока. Траектория, отвечающая кусочно-постоянному управлению, строится при помощи суперпозиции подходящих элементов потоков, соответствующих значениям функции управления. Произвольное управление можно сколь угодно хорошо приблизить кусочно-постоянными. Следовательно, допустимые траектории и множества достижимости теснейшим образом связаны с группой преобразований, порождённой динамическими системами, из которых состоит изучаемая управляемая. В свою очередь, группы преобразований — это сердце геометрии.

Какое же место предназначено языку, методам и образам теории управления в геометрии и, более общим образом, в изучении основных структур окружающего нас мира? Чтобы понять это, полезно рассмотреть множества допустимых скоростей — первоначальный наивный способ описания множеств достижимости «в бесконечно-малом». Множество допустимых скоростей в заданной точке состоит из скоростей всех допустимых траекторий, проходящих через эту точку. Как правило, у интересных управляемых систем размерность множеств достижимости намного больше, чем размерность множеств допустимых скоростей. Например, типичная пара векторных полей на n -мерном многообразии порождает n -мерные множества достижимости при сколь угодно большом n . Иными словами, ограничения на скорости, вообще говоря, не влекут ограничений на состояния. Такого

рода ограничения на скорости обычно называют неголономными. Теория управления — это дисциплина, занимающаяся систематическим изучением возможных типов поведения при неголономных ограничениях и, в частности, исследованием вариационных задач с неголономными ограничениями, решения которых можно интерпретировать как «оптимальное поведение».

Первая глава книги носит вводный характер: мы напоминаем, что такое гладкие многообразия и обыкновенные дифференциальные уравнения на гладких многообразиях, после чего определяем управляемые системы. Вторая глава посвящена формальному исчислению, сильно облегчающему работу с нелинейными управляемыми системами. В главе 3 вводится простой и чрезвычайно распространённый в приложениях класс линейных систем, а в главе 4 эффективно описаны системы, которые можно превратить в линейные гладкими преобразованиями пространства состояний. Главы 5–7 посвящены фундаментальной «теореме об орбитах» Нагано и Суссмана и её приложениям. Теорема об орбитах утверждает, что любая орбита группы, порождённой семейством потоков, есть погружённое подмногообразие. При этом сама группа может быть совершенно необозримой. Глава 8 содержит общие факты о структуре множеств достижимости, начиная с простого условия, гарантирующего их полноту. В главе 9 вводятся преобразования обратной связи, дана классификация линейных систем по отношению к этим преобразованиям, а также эффективно описаны системы, которые можно превратить в линейные, если, наряду с гладкими заменами переменных в пространстве состояний, использовать преобразования обратной связи.

Остальная часть книги в основном посвящена оптимальному управлению. В главе 10 мы ставим задачу оптимального управления, даём её геометрическую интерпретацию и обсуждаем вопрос о существовании решения. Глава 11 содержит начальные сведения о дифференциальных формах и гамильтоновых системах, необходимые для квалифицированного исследования задач оптимального управления. Глава 12 посвящена геометрической бескоординатной формулировке и детальному доказательству принципа максимума Понтрягина — ключевого результата теории оптимального управления. Главы 13–16 содержат многочисленные приложения принципа максимума, включая одно любопытное свойство гамильтоновых систем с выпуклыми гамильтонианами и достаточно полные теории линейных задач быстрогодействия и регулярных линейно-квадратичных задач с конечным горизонтом. В главе 17 обсуждается гамильтонова версия теории полей экстремалей, хорошо приспособленная для приложений к задачам оптимального управления, и вводится уравнение Гамильтона – Якоби. Главы 18 и 19 посвящены методу подвижных реперов и задачам на группах Ли. Определение и необходимые сведения о группах Ли приведены в главе 18; все они легко выводятся из результатов о семействах векторных полей, полученных в предыдущих главах. В главах 20 и 21 подробно изучается вторая вариация в задачах оптимального управления и выводятся необходимые и достаточные условия оптимальности второго порядка, как для регулярных, так и для особых экстремалей. В короткой главе 22 описана полезная про-

цедура редукции, устанавливающая связь между особыми и регулярными экстремальными. В главе 23 вводится и вычисляется (в простейших маломерных ситуациях) кривизна задачи оптимального управления: замечательный инвариант, обобщающий гауссову кривизну поверхности. Наконец, в главе 24 мы обсуждаем управление классической неавтономной системой: одно тело катится по другому без проскальзываний и прокручиваний. В добавление отнесены доказательства некоторых результатов, сформулированных в главе 2.

Таково, кратко, содержание книги. В каждой главе мы стараемся оставаться на уровне учебника, т.е. приводить только первые достаточно простые результаты и некоторые приложения. Тема почти каждой главы уже получила серьёзное развитие, иногда весьма глубокое. Тому, кто желает изучить предмет глубже, придётся, после ознакомления с книгой, обратиться к журнальным статьям.

Геометрическая теория управления — весьма многогранный предмет, и многие важные темы в этой книге даже не упомянуты. Например, мы не рассматриваем важную задачу стабилизации при помощи обратной связи и не касаемся обширной теории управляемых систем «с выходом», включающей фундаментальные понятия наблюдаемости и реализации. Сведения по этим и другим темам можно найти в книгах по теории управления, приведённых в списке литературы.

В заключение, мы хотим поблагодарить наших учителей Реваза Валериановича Гамкрелидзе и Алексея Фёдоровича Филиппова за щедро переданное нам понимание математики и теории управления, а также за постоянную поддержку при работе над книгой.

Мы благодарны участникам семинара по геометрической теории управления в Международной Школе Высших Исследований в Триесте, особенно Улиссу Серру, Игорю Зеленко и Сержио Родригесу, за ценные замечания, позволившие улучшить изложение.

Наконец, мы не смогли бы написать эту книгу без тепла и заботы наших жён Ирины и Елены.

Содержание

1	Векторные поля и управляемые системы	1
1.1	Гладкие многообразия	1
1.2	Векторные поля на гладких многообразиях	4
1.3	Дифференциальные уравнения и потоки	8
1.4	Управляемые системы	12
2	Элементы хронологического исчисления	21
2.1	Точки, диффеоморфизмы и векторные поля	21
2.2	Полунормы и $C^\infty(M)$ -топология	25
2.3	Семейства функционалов и операторов	26
2.4	Хронологическая экспонента	28
2.5	Действие диффеоморфизмов на векторные поля	37
2.6	Коммутирование полей	41
2.7	Формула вариаций	42
2.8	Производная потока	43
3	Линейные системы	47
3.1	Формула Коши для линейных систем	47
3.2	Управляемость линейных систем	49
4	Линеаризация по состоянию	53
4.1	Локальная линеаризуемость	53
4.2	Глобальная линеаризуемость	57
5	Теорема об орбите	63
5.1	Формулировка теоремы об орбите	63
5.2	Погруженные подмногообразия	64
5.3	Следствия теоремы об орбите	66
5.4	Доказательство теоремы об орбите	68
5.5	Аналитический случай	71
5.6	Теорема Фробениуса	74
5.7	Эквивалентность по состоянию	77

6	Вращение твердого тела	83
6.1	Пространство состояний	83
6.2	Уравнения Эйлера	86
6.3	Фазовый портрет	90
6.4	Управляемое твердое тело: орбиты	92
7	Управление конфигурациями	99
7.1	Модель	99
7.2	Две свободные точки	102
7.3	Три свободные точки	103
7.4	Ломаная	107
8	Множества достижимости	111
8.1	Системы полного ранга	111
8.2	Совместимые векторные поля и релаксации	115
8.3	Устойчивость по Пуассону	118
8.4	Твердое тело: множества достижимости	120
9	Эквивалентность по состоянию и обратной связи	123
9.1	Эквивалентность по обратной связи	123
9.2	Линейные системы	125
9.3	Линеаризуемость по состоянию и обратной связи	133
10	Задача оптимального управления	139
10.1	Постановка задачи	139
10.2	Редукция к исследованию множеств достижимости	140
10.3	Компактность множеств достижимости	143
10.4	Задача быстрогодействия	145
10.5	Релаксации	146
11	Дифференциальные формы	149
11.1	Дифференциальные 1-формы	149
11.2	Дифференциальные k -формы	151
11.3	Внешний дифференциал	156
11.4	Производная Ли дифференциальных форм	158
11.5	Элементы симплектической геометрии	161
12	Принцип максимума Понтрягина	171
12.1	Геометрическая постановка и обсуждение ПМП	171
12.2	Доказательство принципа максимума Понтрягина	176
12.3	ПМП для задачи со свободным временем	181
12.4	ПМП для задач оптимального управления	183
12.5	ПМП для задач с общими граничными условиями	186

13 Примеры задач оптимального управления	195
13.1 Скорейшая остановка поезда на станции	195
13.2 Управление линейным осциллятором	198
13.3 Наиболее экономная остановка поезда	202
13.4 Линейный осциллятор с критерием качества	204
13.5 Машина Дубинса	205
14 Выпуклые гамильтонианы	211
15 Линейная задача быстрогодействия	215
15.1 Постановка задачи	215
15.2 Геометрия многогранников	216
15.3 Теорема о релейном управлении	217
15.4 Единственность управлений и экстремалей	219
15.5 Переключения оптимального управления	222
16 Линейно-квадратичная задача	229
16.1 Постановка задачи	229
16.2 Существование оптимального управления	230
16.3 Экстремали	233
16.4 Сопряженные точки	235
17 Достаточные условия оптимальности	241
17.1 Достаточные условия оптимальности	241
17.2 Уравнение Гамильтона-Якоби	249
17.3 Динамическое программирование	250
18 Геометрические задачи оптимального управления	253
18.1 Тривиализованное кокасательное расслоение	253
18.2 Группы Ли	262
18.3 Гамильтоновы системы на группах Ли	266
19 Задачи на компактных группах Ли	271
19.1 Риманова задача	271
19.2 Субриманова задача	273
19.3 Управление квантовыми системами	278
19.4 Задача быстрогодействия на $SO(3)$	291
20 Условия оптимальности второго порядка	299
20.1 Гессиан	299
20.2 Локальная открытость отображений	303
20.3 Дифференцирование отображения в конец	310
20.4 Необходимые условия оптимальности	315
20.5 Приложения	324
20.6 Системы со скалярным управлением	328

21 Уравнение Якоби	339
21.1 Регулярный случай: вывод уравнения Якоби	340
21.2 Особый случай: вывод уравнения Якоби	344
21.3 Необходимые условия оптимальности	349
21.4 Преобразование уравнения Якоби	350
21.5 Достаточные условия оптимальности	353
22 Редукция	363
22.1 Редукция	363
22.2 Управление твердым телом	366
22.3 Управление угловой скоростью	367
23 Кривизна	371
23.1 Кривизна двумерных систем	371
23.2 Кривизна трехмерных систем	382
24 Качение тел	387
24.1 Геометрическая модель	387
24.2 Двумерная риманова геометрия	389
24.3 Допустимые скорости	393
24.4 Управляемость	394
24.5 Задача минимизации длины	397
А Приложение	403
А.1 Гомоморфизмы и операторы в $C^\infty(M)$	403
А.2 Остаточный член	405
Библиография	409
Список рисунков	421
Предметный указатель	423

Глава 1

Векторные поля и управляемые системы на гладких многообразиях

1.1 Гладкие многообразия

Этот раздел посвящен краткому обзору основных понятий, связанных с гладкими многообразиями. Для их систематического изучения читатель может обратиться к вводной главе любого учебника по анализу на многообразиях, например [147].

В дальнейшем гладкость (многообразия, отображения, векторного поля и т.д.) означает C^∞ -гладкость.

Определение 1.1. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким k -мерным подмногообразием* $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$, если для любой точки $x \in M$ существует окрестность O_x в $\mathbb{R}^n$, в которой M задается одним из следующих способов:

- (1) существует гладкая вектор-функция

$$F : O_x \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}, \quad \text{rank} \left. \frac{dF}{dx} \right|_x = n - k$$

такая, что

$$O_x \cap M = F^{-1}(0);$$

- (2) существует гладкая вектор-функция

$$f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

из окрестности начала координат $0 \in V_0 \subset \mathbb{R}^k$, такая, что

$$f(0) = x, \quad \text{rank} \left. \frac{df}{dx} \right|_0 = k$$

причем

$$O_x \cap M = f(V_0)$$

и $f : V_0 \rightarrow O_x \cap M$ — гомеоморфизм;

(3) существует гладкая вектор-функция

$$\Phi : O_x \rightarrow O_0 \subset \mathbb{R}^n$$

на окрестность начала координат $0 \in O_0 \subset \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\operatorname{rank} \frac{d\Phi}{dx} \Big|_x = n$$

причем

$$\Phi(O_x \cap M) = \mathbb{R}^k \cap O_0.$$

Упражнение 1.1. Докажите, что способы (1)–(3) локального описания гладких подмногообразий взаимно эквивалентны.

Замечания. (1) Существуют два топологически различных одномерных многообразия: прямая $\mathbb{R}^1$ и окружность S^1 . Сфера S^2 и тор $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ — двумерные многообразия. Тор можно представлять как сферу с ручкой. Любое компактное ориентируемое двумерное многообразие топологически эквивалентно сфере с p ручками, $p = 0, 1, 2, \dots$.

(2) Гладкие многообразия естественно возникают в простейших задачах анализа. Например, окружность S^1 и тор $\mathbb{T}^2$ — естественные области определения соответственно периодических и дважды периодических функций. Однородные функции 3-х переменных естественно ограничивать на сферу S^2 .

Итак, гладкое подмногообразие есть подмножество в $\mathbb{R}^n$, которое локально может быть задано регулярной системой гладких уравнений или регулярной гладкой параметризацией.

Несмотря на то, что интуитивно важно представлять многообразия как подмножества евклидова пространства, часто удобно рассматривать многообразия независимо от какого бы то ни было вложения в $\mathbb{R}^n$. Абстрактное многообразие определяется следующим образом.

Определение 1.2. Гладким k -мерным многообразием M называется хаусдорфово паракомпактное топологическое пространство с заданной на нем гладкой структурой: M покрыто системой открытых подмножеств

$$M = \cup_{\alpha} O_{\alpha},$$

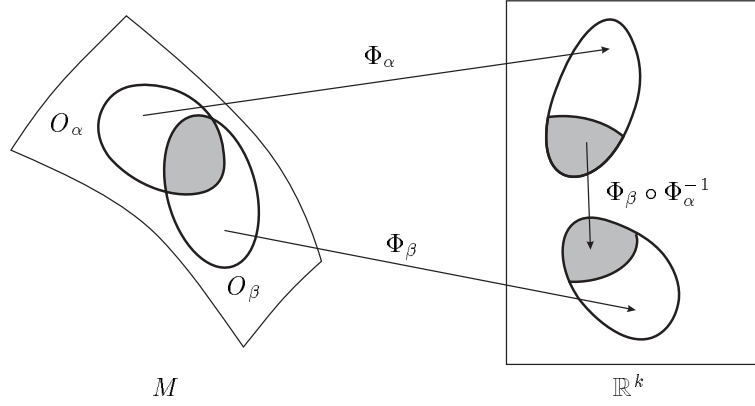
называемых координатными окрестностями, в каждой из которых определен гомеоморфизм

$$\Phi_{\alpha} : O_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

называемый локальной системой координат, так что все композиции

$$\Phi_{\beta} \circ \Phi_{\alpha}^{-1} : \Phi_{\alpha}(O_{\alpha} \cap O_{\beta}) \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \Phi_{\beta}(O_{\alpha} \cap O_{\beta}) \subset \mathbb{R}^k$$

суть диффеоморфизмы, см. рис. 1.1.

Рис. 1.1: Система координат на гладком многообразии M

Как правило, мы будем обозначать точку гладкого многообразия через q , а ее координатное представление в локальной системе координат — через x :

$$q \in M, \quad \Phi_\alpha : O_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad x = \Phi(q) \in \mathbb{R}^k.$$

Гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет определению абстрактного многообразия. Обратно, любое связное гладкое абстрактное многообразие можно рассматривать как гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. Для того, чтобы сформулировать точно это утверждение, дадим два определения.

Определение 1.3. Пусть M и N — соответственно k - и l -мерные гладкие многообразия. Непрерывное отображение

$$f : M \rightarrow N$$

называется *гладким*, если оно гладко в координатах. А именно, пусть $M = \cup_\alpha O_\alpha$ и $N = \cup_\beta V_\beta$ — покрытия M и N координатными окрестностями и

$$\Phi_\alpha : O_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \Psi_\beta : V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^l$$

соответствующие координатные отображения. Тогда для гладкости f все композиции

$$\Psi_\beta \circ f \circ \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(O_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \Psi_\beta(f(O_\alpha) \cap V_\beta) \subset \mathbb{R}^l$$

обязаны быть гладкими.

Определение 1.4. Гладкое многообразие M называется *диффеоморфным* гладкому многообразию N , если существует гомеоморфизм

$$f : M \rightarrow N$$

такой, что как f , так и его обращение f^{-1} — гладкие отображения. Такое отображение f называется *диффеоморфизмом*.

Множество всех диффеоморфизмов $f : M \rightarrow M$ гладкого многообразия M будем обозначать $\text{Diff } M$.

Гладкое отображение $f : M \rightarrow N$ называется *вложением* многообразия M в N , если отображение на образ $f : M \rightarrow f(M)$ есть диффеоморфизм. Отображение $f : M \rightarrow N$ называется *собственным*, если прообраз $f^{-1}(K)$ компактен для любого компакта $K \subseteq N$ (обозначение $K \subseteq N$ означает, что K есть компактное подмножество множества N).

Теорема 1.1 (Уитни). *Любое гладкое связное k -мерное многообразие имеет собственное вложение в $\mathbb{R}^{2k+1}$.*

Итак, можно сказать, что гладкое многообразие — это пространство, выглядящее локально как линейное, но без фиксированной линейной структуры, так что все гладкие системы координат равноправны. Именно язык многообразий, а не линейных пространств, является естественным языком современного нелинейного анализа.

1.2 Векторные поля на гладких многообразиях

Касательное пространство гладкого многообразия в точке — это линейное приближение многообразия в окрестности этой точки.

Определение 1.5. Пусть M — гладкое k -мерное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ и $x \in M$ — его точка. *Касательным пространством к M в точке x называется k -мерное линейное подпространство*

$$T_x M \subset \mathbb{R}^n,$$

которое определяется следующим образом в случаях (1)–(3) Определения 1.1:

$$(1) \quad T_x M = \text{Ker} \left. \frac{dF}{dx} \right|_x,$$

$$(2) \quad T_x M = \text{Im} \left. \frac{df}{dx} \right|_0,$$

$$(3) \quad T_x M = \left(\left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_x \right)^{-1} \mathbb{R}^k.$$

Замечание. Касательное пространство не зависит от координат, так как гладкие замены переменных порождают линейные преобразования касательного пространства.

Касательное пространство абстрактного многообразия в точке определяется как множество векторов скорости всех гладких кривых на многообразии, выходящих из этой точки.

Определение 1.6. Пусть $\gamma(\cdot)$ — гладкая кривая на многообразии M , выходящая из точки $q \in M$:

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ гладкое отображение, } \gamma(0) = q.$$

Касательным вектором

$$\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\gamma}(0)$$

кривой $\gamma(\cdot)$ в точке q называется класс эквивалентности всех гладких кривых в M , выходящих из q и имеющих такой же многочлен Тейлора порядка 1, как $\gamma(\cdot)$, в любой системе координат в окрестности точки q .

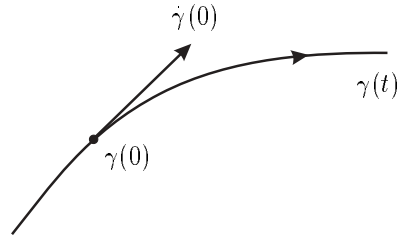


Рис. 1.2: Касательный вектор $\dot{\gamma}(0)$

Определение 1.7. *Касательным пространством* гладкого многообразия M в точке $q \in M$ называется множество всех касательных векторов всех гладких кривых в M , выходящих из q :

$$T_q M = \left\{ \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ гладкая, } \gamma(0) = q \right\}.$$

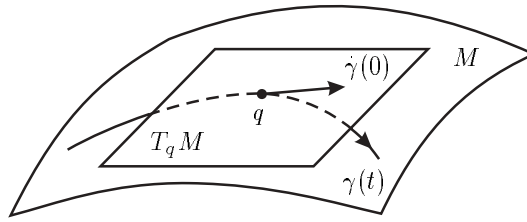


Рис. 1.3: Касательное пространство $T_q M$

Упражнение 1.2. Пусть M — гладкое k -мерное многообразие и $q \in M$. Покажите, что касательное пространство $T_q M$ имеет естественную структуру k -мерного линейного пространства.

Определение 1.8. *Гладким векторным полем* на гладком многообразии M называется гладкое отображение

$$q \in M \mapsto V(q) \in T_q M,$$

сопоставляющее любой точке $q \in M$ касательный вектор $V(q)$ в этой точке.

Мы будем обозначать множество всех гладких векторных полей на гладком многообразии M через $\text{Vec } M$.

Определение 1.9. *Гладкой динамической системой, или обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) на гладком многообразии M называется уравнение вида*

$$\frac{dq}{dt} = V(q), \quad q \in M,$$

или, что то же самое,

$$\dot{q} = V(q), \quad q \in M,$$

где $V(q)$ — гладкое векторное поле на M . Решением этой системы называется гладкое отображение

$$\gamma : I \rightarrow M$$

интервала $I \subset \mathbb{R}$ в многообразии M , такое, что

$$\frac{d\gamma}{dt} = V(\gamma(t)) \quad \forall t \in I.$$

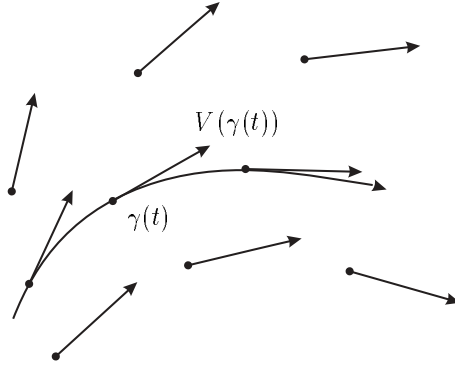


Рис. 1.4: Решение ОДУ $\dot{q} = V(q)$

Определение 1.10. Пусть $\Phi : M \rightarrow N$ — гладкое отображение между гладкими многообразиями M и N . Дифференциалом Φ в точке $q \in M$ называется линейное отображение

$$D_q \Phi : T_q M \rightarrow T_{\Phi(q)} N,$$

которое определяется следующим образом:

$$D_q \Phi \left(\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} \right) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\gamma(t)),$$

для любой гладкой кривой в M , выходящей из q :

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \gamma(0) = q.$$

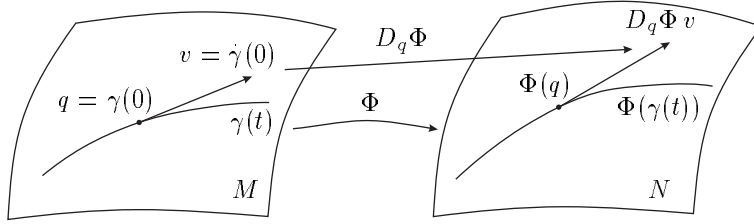


Рис. 1.5: Дифференциал $D_q \Phi$ отображения Φ

Изучим действие гладких отображений на векторные поля. Пусть $V \in \text{Vec } M$ — векторное поле на M и пусть

$$\dot{q} = V(q) \tag{1.1}$$

есть соответствующее дифференциальное уравнение. Чтобы найти образ векторного поля $V(q)$ под действием диффеоморфизма

$$\Phi : M \rightarrow N, \quad \Phi : q \mapsto x = \Phi(q),$$

возьмем решение $q(t)$ уравнения (1.1) и найдем уравнение, которому удовлетворяет образ решения $x(t) = \Phi(q(t))$:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \Phi(q(t)) = (D_q \Phi) \dot{q}(t) = (D_q \Phi) V(q(t)) = (D_{\Phi^{-1}(x)} \Phi) V(\Phi^{-1}(x(t))).$$

Итак, искомое уравнение имеет вид

$$\dot{x} = (D_{\Phi^{-1}(x)} \Phi) V(\Phi^{-1}(x)). \tag{1.2}$$

В правой части этого уравнения стоит векторное поле на N , порожденное диффеоморфизмом Φ :

$$(\Phi_* V)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (D_{\Phi^{-1}(x)} \Phi) V(\Phi^{-1}(x)).$$

Символ Φ_{*q} используется, наряду с $D_q \Phi$, для обозначения дифференциала отображения Φ в точке q .

Замечание. Вообще говоря, гладкое отображение Φ порождает отображение касательных векторов, а не векторных полей. Для того, чтобы $D\Phi$ отображал векторные поля в векторные поля, Φ должно быть диффеоморфизмом.

1.3 Обыкновенные дифференциальные уравнения и потоки

Теорема 1.2. *Рассмотрим гладкое дифференциальное уравнение*

$$\dot{q} = V(q), \quad q \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

на гладком многообразии M в $\mathbb{R}^n$. Для любой начальной точки $q_0 \in M$ существует единственное решение

$$q(t, q_0), \quad t \in (a, b), \quad a < 0 < b,$$

уравнения (1.3) с начальным значением

$$q(0, q_0) = q_0,$$

определенное на достаточно малом интервале (a, b) . Отображение

$$(t, q_0) \mapsto q(t, q_0)$$

гладкое. В частности, область определения (a, b) решения $q(\cdot, q_0)$ может быть выбрана гладко зависящей от точки q_0 .

Доказательство. Мы докажем эту теорему, сводя ее к классическому аналогу в $\mathbb{R}^n$. Утверждение теоремы локально. Выпрямим подмногообразие M в окрестности точки q_0 :

$$\begin{aligned} \Phi : O_{q_0} \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow O_0 \subset \mathbb{R}^n, \\ \Phi(O_{q_0} \cap M) &= \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Рассмотрим ограничение $\varphi = \Phi|_M$. Кривая $q(t)$ в M есть решение уравнения (1.3) тогда и только тогда, когда ее образ $x(t) = \varphi(q(t))$ в $\mathbb{R}^k$ — решение индуцированной системы

$$\dot{x} = \Phi_* V(x), \quad x \in \mathbb{R}^k,$$

поэтому утверждение теоремы следует из аналогичной теоремы для дифференциальных уравнений в евклидовом пространстве. $\square$

Теорема 1.3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие, а система дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$

$$\dot{q} = V(q), \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

удовлетворяет условию

$$V(q) \in T_q M \text{ для всех } q \in M.$$

Тогда для любой начальной точки $q_0 \in M$ соответствующее решение $q(t, q_0)$ уравнения (1.4) с начальным условием $q(0, q_0) = q_0$ принадлежит M для всех достаточно малых $|t|$.

Доказательство. Рассмотрим ограничение векторного поля:

$$f = V|_M.$$

По теореме существования для M , система

$$\dot{q} = f(q), \quad q \in M,$$

имеет решение $q(t, q_0)$, $q(0, q_0) = q_0$, такое, что

$$q(t, q_0) \in M \quad \text{при малых } |t|. \quad (1.5)$$

С другой стороны, кривая $q(t, q_0)$ есть решение уравнения (1.4) с тем же начальным условием. Поэтому включение (1.5) завершает доказательство теоремы. $\square$

Определение 1.11. Векторное поле $V \in \text{Vec } M$ называется *полным*, если для любой точки $q_0 \in M$ решение $q(t, q_0)$ задачи Коши

$$\dot{q} = V(q), \quad q(0, q_0) = q_0 \quad (1.6)$$

определено для всех $t \in \mathbb{R}$.

Пример 1.1. Векторное поле $V(x) = x$ полно на всей прямой $\mathbb{R}$, а также на ее подмножествах $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, и $\{0\}$, но неполно ни на каких других подмногообразиях прямой. Векторное поле $V(x) = x^2$ неполно ни на каких подмногообразиях прямой, кроме $\{0\}$.

Предложение 1.1. Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $q_0 \in M$ решение $q(t, q_0)$ задачи Коши (1.6) определено при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда векторное поле $V(q)$ полно.

Замечание. В этом утверждении требуется, чтобы существовало $\varepsilon > 0$, общее для всех начальных точек $q_0 \in M$. Вообще говоря, ε может быть не отделено от нуля для всех $q_0 \in M$. Например, для векторного поля $W(x) = x^2$ $\varepsilon \rightarrow 0$ при $x_0 \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть условие предложения выполняется. Тогда можно определить следующее семейство отображений на M :

$$\begin{aligned} P^t &: M \rightarrow M, & t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ P^t &: q_0 \mapsto q(t, q_0). \end{aligned}$$

$P^t(q_0)$ есть сдвиг точки $q_0 \in M$ вдоль траектории векторного поля $V(q)$ за время t . По теореме 1.2, все отображения P^t гладкие. Более того, $\{P^t \mid t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ есть гладкое семейство отображений.

Очень важное свойство этого семейства состоит в том, что оно образует однопараметрическую группу, т.е.

$$P^t(P^s(q)) = P^s(P^t(q)) = P^{t+s}(q), \quad q \in M, \quad t, s, t+s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Действительно, обе кривые в M :

$$t \mapsto P^t(P^s(q)) \quad \text{и} \quad t \mapsto P^{t+s}(q)$$

удовлетворяют уравнению $\dot{q} = V(q)$ с одним и тем же начальным условием $P^0(P^s(q)) = P^{0+s}(q) = P^s(q)$. В силу единственности, $P^t(P^s(q)) = P^{t+s}(q)$. Равенство для $P^s(P^t(q))$ получается перестановкой t и s .

Поэтому выполнены следующие локальные групповые свойства семейства P^t :

$$\begin{aligned} P^t \circ P^s &= P^s \circ P^t = P^{t+s}, & t, s, t+s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ P^0 &= \text{Id}, \\ P^{-t} \circ P^t &= P^t \circ P^{-t} = \text{Id}, & t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ P^{-t} &= (P^t)^{-1}, & t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{aligned}$$

В частности, все P^t суть диффеоморфизмы.

Определим семейство P^t для всех значений $t \in \mathbb{R}$. Любое $t \in \mathbb{R}$ можно представить в виде

$$t = \frac{\varepsilon}{2}K + \tau, \quad 0 \leq \tau < \frac{\varepsilon}{2}, \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Положим

$$P^t \stackrel{\text{def}}{=} P^\tau \circ \underbrace{P^{\pm\varepsilon/2} \circ \dots \circ P^{\pm\varepsilon/2}}_{|K| \text{ раз}}, \quad \pm = \text{sgn } t.$$

Тогда кривая

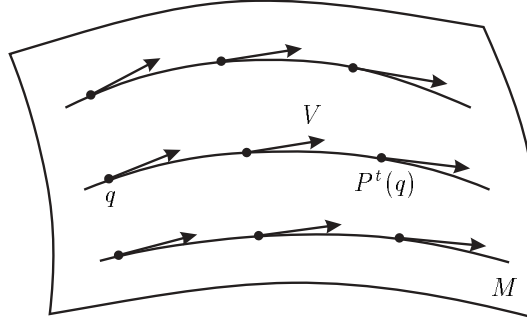
$$t \mapsto P^t(q_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

есть решение задачи Коши (1.6). □

Определение 1.12. Для полного векторного поля $V \in \text{Vec } M$ отображение

$$t \mapsto P^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

называется *поток*ом, порожденным полем V .

Рис. 1.6: Поток P^t векторного поля V

Замечание. Полезно представлять векторное поле $V \in \text{Vec } M$ как поле скоростей жидкости, движущейся по M . Поток P^t переносит за время $t \in \mathbb{R}$ любую частицу из положения $q \in M$ в положение $P^t(q) \in M$, см. рис. 1.6.

Простые достаточные условия полноты векторного поля можно сформулировать в терминах компактности.

Предложение 1.2. Пусть $K \Subset M$ — компактное подмножество, и пусть $V \in \text{Vec } M$. Тогда существует $\varepsilon_K > 0$ такое, что для любого $q_0 \in K$ решение $q(t, q_0)$ задачи Коши (1.6) определено при всех $t \in (-\varepsilon_K, \varepsilon_K)$.

Доказательство. По теореме 1.2, область определения решения $q(t, q_0)$ может быть выбрана непрерывно зависящей от q_0 . Диаметр области определения имеет положительную нижнюю грань $2\varepsilon_K$ для q_0 , принадлежащих компакту K . $\square$

Следствие 1.1. Любое векторное поле $V \in \text{Vec } M$ на компактном многообразии M полно.

Следствие 1.2. Предположим, что векторное поле $V \in \text{Vec } M$ имеет компактный носитель:

$$\text{supp } V \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{q \in M \mid V(q) \neq 0\}} \text{ компактен.}$$

Тогда поле V полно.

Доказательство. Действительно, согласно предложению 1.2, существует $\varepsilon > 0$ такое, что все траектории поля V , начинающиеся в $\text{supp } V$, определены для $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Но $V|_{M \setminus \text{supp } V} = 0$, поэтому все траектории поля V , начинающиеся вне $\text{supp } V$, постоянны, следовательно, определены для всех $t \in \mathbb{R}$. В силу предложения 1.1, векторное поле V полно. $\square$

Замечание. Если мы интересуемся поведением (траекторий) векторного поля $V \in \text{Vec } M$ в компактном подмноестве $K \Subset M$, можно считать, что V

полно. Действительно, возьмем открытую окрестность O_K подмножества K с компактным замыканием $\overline{O_K}$. Найдем функцию $a \in C^\infty(M)$ такую, что

$$a(q) = \begin{cases} 1, & q \in K, \\ 0, & q \in M \setminus O_K. \end{cases}$$

Тогда векторное поле $a(q)V(q) \in \text{Vec } M$ полно, так как оно имеет компактный носитель. С другой стороны, векторные поля $a(q)V(q)$ и $V(q)$ совпадают в K , поэтому они имеют одни и те же траектории в этом подмножестве.

1.4 Управляемые системы

Для динамических систем их будущее $q(t, q_0)$, $t > 0$, полностью определяется настоящим состоянием $q_0 = q(0, q_0)$. Закон преобразования $q_0 \mapsto q(t, q_0)$ — это поток P^t , поэтому динамика системы

$$\dot{q} = V(q), \quad q \in M, \quad (1.7)$$

определяется одним векторным полем $V(q)$.

Для того, чтобы быть в состоянии влиять на динамику, управлять ею, рассмотрим семейство динамических систем

$$\dot{q} = V_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U, \quad (1.8)$$

где семейство векторных полей V_u параметризовано параметром $u \in U$. Система вида (1.8) называется *управляемой системой*. Переменная u называется *управляющим параметром*, а множество U — *пространством управляющих параметров*. Априори никакие ограничения на множество U не накладываются, это произвольное множество, однако обычно U будет подмножеством гладкого многообразия. Переменная q называется *состоянием*, а многообразие M — *пространством состояний* управляемой системы (1.8). емой системы (1.8) в любой момент времени, изменяя значения управления $u \in U$. Для любого $u \in U$ соответствующее векторное поле $V_u \in \text{Vec } M$ порождает поток, который обозначается через P_u^t .

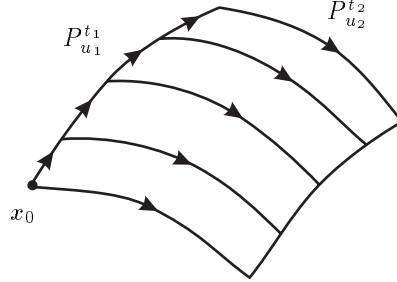
Типичная задача теории управления состоит в нахождении множества точек, достижимых из начальной точки $q_0 \in M$ благодаря выбору всевозможных значений $u \in U$ и переключению между этими значениями в разные моменты времени (для динамической системы (1.7) такое множество достижимости есть просто положительная полутраектория $q(t, q_0) = P^t(q_0)$, $t \geq 0$). Пусть мы выходим из точки $q_0 \in M$ и применяем следующую стратегию управления для системы (1.8): сначала выбираем некоторое значение управляющего параметра $u_1 \in U$, а затем переключаемся на другое значение $u_2 \in U$. Какие точки в M достижимы с помощью такой стратегии? С помощью управляющего параметра u_1 можно попасть в точки вида

$$\{ P_{u_1}^{t_1}(q_0) \mid t_1 \geq 0 \},$$

а все множество достижимых точек имеет вид

$$\{ P_{u_2}^{t_2} \circ P_{u_1}^{t_1}(q_0) \mid t_1, t_2 \geq 0 \},$$

т.е. это кусок 2-мерной поверхности:



Естественно задать следующий вопрос: какие точки достижимы из q_0 с помощью любых возможных стратегий управления?

Мы вернемся к этому вопросу ниже, а сейчас рассмотрим пример управляемой системы — упрощенной модели автомобиля.

Пример 1.2. Мы считаем, что состояние машины определяется положением ее центра масс $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и углом ориентации $\theta \in S^1$ относительно положительного направления оси x_1 . Поэтому пространство состояний системы есть нетривиальное 3-мерное многообразие — полноторий

$$M = \{ q = (x, \theta) \mid x \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1 \} = \mathbb{R}^2 \times S^1.$$

Будем предполагать, что возможны движения двух видов: можно ехать вперед и назад с некоторой постоянной линейной скоростью $u_1 \in \mathbb{R}$, и можно поворачивать машину вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью $u_2 \in \mathbb{R}$. Более того, эти способы движения можно комбинировать некоторым допустимым образом.

Динамическая система, описывающая движение по прямой со скоростью $u_1 \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos \theta, \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Вращение с угловой скоростью $u_2 \in \mathbb{R}$ описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ \dot{\theta} = u_2. \end{cases} \quad (1.10)$$

Управляющий параметр $u = (u_1, u_2)$ может принимать значения в некотором заданном подмножестве $U \subset \mathbb{R}^2$. Запишем уравнения (1.9) и (1.10) в векторной форме:

$$\dot{q} = u_1 V_1(q), \quad \dot{q} = u_2 V_2(q),$$

где

$$V_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

суть векторные поля на многообразии M . Тогда наша модель имеет вид

$$\dot{q} = V_u(q) = u_1 V_1(q) + u_2 V_2(q), \quad q \in M, \quad u \in U.$$

Эту модель можно записать в комплексной форме:

$$\begin{aligned} z &= x_1 + i x_2 \in \mathbb{C}, \\ \dot{z} &= u_1 e^{i\theta}, \\ \dot{\theta} &= u_2, \\ (u_1, u_2) &\in U, \quad (z, \theta) \in \mathbb{C} \times S^1. \end{aligned}$$

Замечание. Управляемую систему (1.8) часто записывают в другом виде:

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U.$$

Мы предпочитаем обозначение $V_u(q)$, подчеркивающее, что при фиксированном $u \in U$, V_u есть единый объект — векторное поле на M .

Вернемся к изучению множества точек, достижимых вдоль траекторий управляемой системы из начальной точки.

Определение 1.13. *Множество достижимости* управляемой системы (1.8) с кусочно-постоянными управлениями из точки $q_0 \in M$ за время $t \geq 0$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}_{q_0}(t) = \left\{ P_{u_k}^{\tau_k} \circ \dots \circ P_{u_1}^{\tau_1}(q_0) \mid \tau_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \tau_i = t, u_i \in U, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

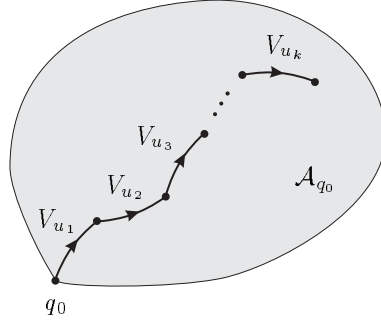
Множество достижимости из q_0 за любое неотрицательное время движения имеет вид

$$\mathcal{A}_{q_0} = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}_{q_0}(t),$$

см. рис. 1.7.

Для простоты рассмотрим сначала наименьшее нетривиальное пространство управлений, состоящее из двух индексов:

$$U = \{1, 2\},$$

Рис. 1.7: Множество достижимости $\mathcal{A}_{q_0}$

даже этот простой случай позволяет увидеть характерные особенности задачи. Тогда множество достижимости за любое неотрицательное время можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{ P_2^{\tau_k} \circ P_1^{\tau_{k-1}} \circ \dots \circ P_2^{\tau_2} \circ P_1^{\tau_1}(q_0) \mid \tau_i \geq 0, k \in \mathbb{N} \}.$$

Это выражение подсказывает, что множество достижимости $\mathcal{A}_{q_0}$ должно существенно зависеть от коммутационных свойств потоков P_1^t и P_2^s .

Сначала рассмотрим тривиальный коммутативный случай, т.е. предположим, что потоки перестановочны:

$$P_1^t \circ P_2^s = P_2^s \circ P_1^t \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Тогда множество достижимости может быть вычислено точно: так как

$$P_2^{\tau_k} \circ P_1^{\tau_{k-1}} \circ \dots \circ P_2^{\tau_2} \circ P_1^{\tau_1} = P_2^{\tau_k + \dots + \tau_2} \circ P_1^{\tau_{k-1} + \dots + \tau_1},$$

получаем

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{ P_2^s \circ P_1^t(q_0) \mid t, s \geq 0 \}.$$

Поэтому в коммутативном случае множество достижимости с помощью двух управляющих параметров есть кусок двумерной поверхности, быть может, с особенностями. Легко видеть, что если количество управляющих параметров равно $k \geq 2$ и соответствующие потоки $P_1^{t_1}, \dots, P_k^{t_k}$ коммутируют, то множество достижимости $\mathcal{A}_{q_0}$ есть, вообще говоря, кусок k -мерного многообразия, и, в частности, $\dim \mathcal{A}_{q_0} \leq k$.

Но этот коммутативный случай является исключительным и почти никогда не встречается в реальных управляемых системах.

Пример 1.3. В построенной выше модели машины динамика управления определяется двумя векторными полями (1.11) на трехмерном многообразии $M = \mathbb{R}_x^2 \times S_\theta^1$. Очевидно, что мы можем перевести машину из любой начальной конфигурации $q_0 \in M$ в любую конечную конфигурацию $q_1 \in M$,

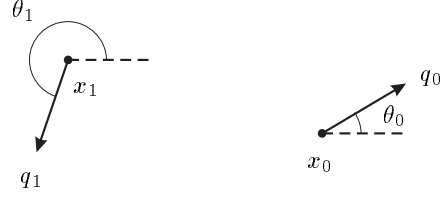
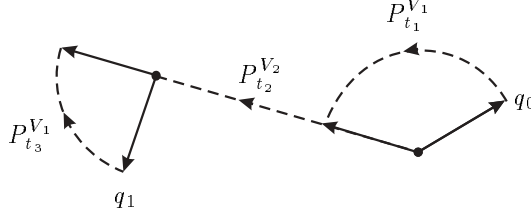


Рис. 1.8: Начальная и конечная конфигурации машины

Рис. 1.9: Перевод машины из q_0 в q_1

попеременно совершая поступательные движения и вращения (с постоянной скоростью), см. рис. 1.9.

Поэтому любая точка трехмерного многообразия M достижима из любой другой точки с помощью двух векторных полей V_1, V_2 . Это возможно благодаря некоммутативности этих полей (т.е. их потоков).

Как можно определить коммутационные свойства пары векторных полей $V_1, V_2 \in \text{Vec } M$, не находя явно их потоки P_1^t, P_2^s , т.е. не интегрируя дифференциальные уравнения $\dot{q} = V_1(q), \dot{q} = V_2(q)$?

Если потоки P_1^t, P_2^s коммутируют, то кривая

$$\gamma(s, t) = P_1^{-t} \circ P_2^s \circ P_1^t(q) = P_2^s(q), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

не зависит от t . Естественнo предположить, что за коммутационные свойства потоков векторных полей V_1, V_2 в точке q отвечает некоторый член малого порядка тейлоровского разложения отображения (1.12) при $t = s = 0$. Очевидно, что производные первых порядков

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right|_{s=t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right|_{s=t=0} = V_2(q)$$

здесь бесполезны, так же как и чистые производные второго порядка

$$\left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right|_{s=t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right|_{s=t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} V_2(P_2^s(q)).$$

Искомой производной должна быть смешанная вторая производная

$$\left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} \right|_{s=t=0}.$$

Оказывается, что эта производная задает некоторый касательный вектор к M . Он называется *скобкой Ли* векторных полей V_1, V_2 в точке q и обозначается $[V_1, V_2](q)$:

$$[V_1, V_2](q) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \right|_{t=s=0} P_1^{-t} \circ P_2^s \circ P_1^t(q) \in T_q M. \quad (1.13)$$

Векторное поле $[V_1, V_2] \in \text{Vec } M$ определяет коммутационные соотношения полей V_1 и V_2 , его часто называют *коммутатором* векторных полей V_1, V_2 .

Эффективная формула для вычисления скобки Ли векторных полей в локальных координатах дается в следующем предложении.

Предложение 1.3. Пусть V_1, V_2 — векторные поля на $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$[V_1, V_2](x) = \frac{dV_2}{dx} V_1(x) - \frac{dV_1}{dx} V_2(x). \quad (1.14)$$

Доказательство предоставляется читателю как упражнение.

Скобку Ли векторных полей V_1, V_2 можно определить по-другому, рассматривая кривую

$$\gamma(t) = P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \circ P_2^t \circ P_1^t(q),$$

см. рис. 1.10.

Упражнение 1.3. Покажите, что в локальных координатах

$$\gamma(t) = x + [V_1, V_2](x)t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow 0,$$

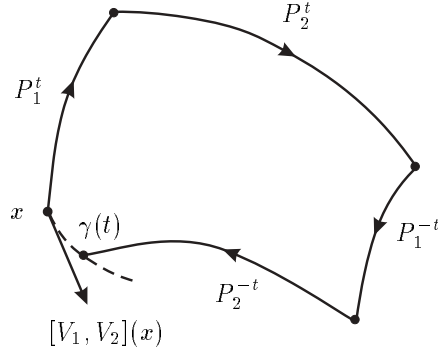
т.е. $[V_1, V_2](x)$ — вектор скорости C^1 -кривой $\gamma(\sqrt{t})$. В частности, отсюда следует, что $[V_1, V_2](x)$ есть действительно касательный вектор к M :

$$[V_1, V_2](x) \in T_x M.$$

В следующей главе мы построим эффективное алгебраическое исчисление для выполнения подобных вычислений без использования координат.

В коммутативном случае множество достижимости системы из двух полей V_1, V_2 не зависит от количества переключений стратегии управления. В общем некоммутативном случае картина иная: чем больше количество переключений, тем больше точек достижимо.

Пусть мы можем двигаться вдоль векторных полей $\pm V_1$ и $\pm V_2$. Тогда инфинитезимально допустимо движение в новом направлении $\pm[V_1, V_2]$, которое, вообще говоря, линейно не зависит от исходных направлений $\pm V_1, \pm V_2$. Используя ту же стратегию переключения для полей $\pm V_1$ и $\pm[V_1, V_2]$, мы добавляем еще одно инфинитезимальное направление движения $\pm[V_1, [V_1, V_2]]$.

Рис. 1.10: Скобка Ли векторных полей V_1, V_2

Аналогично можно получить $\pm[V_2, [V_1, V_2]]$. Повторяя эту процедуру с новыми векторными полями, полученными на предыдущих шагах, можно получить скобку Ли сколь угодно высокого порядка в качестве инфинитезимального направления движения для достаточно большого числа переключений.

Пример 1.4. Вычислите скобку Ли векторных полей

$$V_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{x_1, x_2}^2 \times S_\theta^1$$

возникающих в модели машины. Напомним, что поле V_1 порождает движение вперед, а поле V_2 — поворот машины против часовой стрелки. Согласно (1.14), получаем

$$\begin{aligned} [V_1, V_2](q) &= \frac{dV_2}{dq} V_1(q) - \frac{dV_1}{dq} V_2(q) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Векторное поле $[V_1, V_2]$ порождает движение машины в направлении, перпендикулярном ее ориентации. Это — типичный маневр при парковке автомобиля: последовательность четырех движений с одной и той же малой амплитудой вида

движение вперед $\rightarrow$ поворот против часовой стрелки $\rightarrow$
 $\rightarrow$ движение назад $\rightarrow$ поворот по часовой стрелке

приводит к движению вправо (в главном члене), см. рис. 1.11.

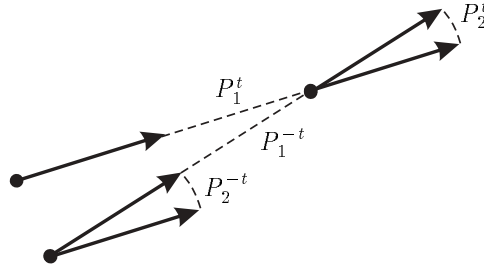


Рис. 1.11: Реализация скобки Ли маневром машины

Покажем это явно, вычисляя скобку Ли $[V_1, V_2]$ как в примере 1.3:

$$\begin{aligned} P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \circ P_2^t \circ P_1^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + t(\cos \theta - \cos(\theta + t)) \\ x_2 + t(\sin \theta - \sin(\theta + t)) \\ \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + o(t^2), \quad t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и опять получаем

$$[V_1, V_2](q) = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Конечно, эту скобку Ли можно вычислить и по определению как в (1.13):

$$\begin{aligned} P_1^{-t} \circ P_2^s \circ P_1^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + t(\cos \theta - \cos(\theta + s)) \\ x_2 + t(\sin \theta - \sin(\theta + s)) \\ \theta + s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + ts \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + O(t^2 + s^2)^{3/2}, \quad t, s \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и коммутатор (1.15) получен еще раз.

Глава 2

Элементы хронологического исчисления

В этой главе мы построим операторное исчисление, с помощью которого можно работать с нелинейными системами и потоками как с линейными, по крайней мере на формальном уровне. Идея состоит в том, чтобы заметить нелинейный объект — гладкое многообразие M — линейным, хотя и бесконечномерным — коммутативной алгеброй гладких функций на M . Более подробное изложение этих вопросов читатель может найти в работах [19], [22]. Для изучения начальных определений и фактов функционального анализа, использующихся в этой главе, можно обратиться, например, к учебнику [145].

2.1 Точки, диффеоморфизмы и векторные поля

В этом разделе мы отождествляем точки, диффеоморфизмы и векторные поля на многообразии M с некоторыми функционалами и операторами в алгебре $C^\infty(M)$ всех гладких вещественнозначных функций на M .

Сложение, произведение и умножение на константы определяются в алгебре $C^\infty(M)$, как обычно, поточечно: если $a, b \in C^\infty(M)$, $q \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$(a + b)(q) = a(q) + b(q),$$

$$(a \cdot b)(q) = a(q) \cdot b(q),$$

$$(\alpha \cdot a)(q) = \alpha \cdot a(q).$$

Любая точка $q \in M$ определяет линейный функционал

$$\hat{q} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{q}a = a(q), \quad a \in C^\infty(M).$$

Функционалы $\hat{q}$ суть гомоморфизмы из алгебры $C^\infty(M)$ в $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \hat{q}(a+b) &= \hat{q}a + \hat{q}b, & a, b \in C^\infty(M), \\ \hat{q}(a \cdot b) &= (\hat{q}a) \cdot (\hat{q}b), & a, b \in C^\infty(M), \\ \hat{q}(\alpha \cdot a) &= \alpha \cdot \hat{q}a, & \alpha \in \mathbb{R}, a \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

Поэтому любой точке $q \in M$ соответствует нетривиальный гомоморфизм алгебр $\hat{q} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Оказывается, что это соответствие обратимо.

Предложение 2.1. Пусть $\varphi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ — нетривиальный гомоморфизм алгебр. Тогда существует такая точка $q \in M$, что $\varphi = \hat{q}$.

Мы докажем это утверждение в приложении.

Замечание. Алгебра $C^\infty(M)$ определяет не только M как множество точек. Топология на M восстанавливается по слабой топологии на пространстве функционалов на $C^\infty(M)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_n a = \hat{q}a \quad \forall a \in C^\infty(M).$$

Более того, гладкую структуру на M также можно восстановить по $C^\infty(M)$, фактически, «по определению»: вещественнозначная функция на множестве $\{\hat{q} \mid q \in M\}$ является гладкой тогда и только тогда, когда она имеет вид $\hat{q} \mapsto \hat{q}a$ для некоторого $a \in C^\infty(M)$.

Любой диффеоморфизм $P : M \rightarrow M$ определяет автоморфизм алгебры $C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} \hat{P} : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M), & \hat{P} \in \text{Aut}(C^\infty(M)), \\ (\hat{P}a)(q) &= a(P(q)), & q \in M, \quad a \in C^\infty(M), \end{aligned}$$

т.е. $\hat{P}$ действует на функцию a как замена переменных. Обратно, любой автоморфизм алгебры $C^\infty(M)$ имеет такой вид.

Предложение 2.2. Любой автоморфизм $A : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ имеет вид $\hat{P}$ для некоторого $P \in \text{Diff } M$.

Доказательство. Пусть $A \in \text{Aut}(C^\infty(M))$. Возьмем любую точку $q \in M$. Тогда композиция

$$\hat{q} \circ A : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

есть нетривиальный гомоморфизм алгебр, поэтому она имеет вид $\hat{q}_1$ для некоторого $q_1 \in M$. Обозначим $q_1 = P(q)$, тогда

$$\hat{q} \circ A = \widehat{P(q)} = \hat{q} \circ \hat{P} \quad \forall q \in M,$$

т.е.

$$A = \hat{P},$$

и P — искомый диффеоморфизм. □

Теперь мы опишем касательные векторы к M как функционалы на $C^\infty(M)$. Касательные векторы к M суть векторы скорости кривых в M , а точки M отождествляются с линейными функционалами на $C^\infty(M)$; поэтому мы должны получить линейные функционалы на $C^\infty(M)$, отличные от гомоморфизмов в $\mathbb{R}$. Чтобы понять, какие именно функционалы на $C^\infty(M)$ соответствуют касательным векторам к M , возьмем гладкую кривую $q(t)$ из точек M . Тогда соответствующая кривая из функционалов $\widehat{q}(t) = \widehat{q(t)}$ на $C^\infty(M)$ удовлетворяет мультипликативному закону

$$\widehat{q}(t)(a \cdot b) = \widehat{q}(t)a \cdot \widehat{q}(t)b, \quad a, b \in C^\infty(M).$$

Продифференцировав это равенство при $t = 0$, получаем, что вектор скорости кривой из функционалов

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\widehat{q}}{dt} \right|_{t=0}, \quad \xi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\xi(ab) = \xi(a)b(q(0)) + a(q(0))\xi(b).$$

Значит, каждому касательному вектору $v \in T_q M$ мы должны сопоставить линейный функционал

$$\xi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

такой, что

$$\xi(ab) = (\xi a)b(q) + a(q)(\xi b), \quad a, b \in C^\infty(M). \quad (2.1)$$

Но имеется линейный функционал $\xi = \widehat{v}$, естественно соответствующий любому касательному вектору $v \in T_q M$ — производная по направлению v :

$$\widehat{v}a = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} a(q(t)), \quad q(0) = q, \quad \dot{q}(0) = v,$$

и этот функционал удовлетворяет правилу Лейбница (2.1).

Покажем, что это правило в точности характеризует производные по направлению.

Предложение 2.3. Пусть $\xi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный функционал, удовлетворяющий правилу Лейбница (2.1) для некоторой точки $q \in M$. Тогда $\xi = \widehat{v}$ для некоторого касательного вектора $v \in T_q M$.

Доказательство. Заметим сначала, что любой функционал ξ , удовлетворяющий правилу Лейбница (2.1), локален, т.е. зависит только от значений функций в сколь угодно малой окрестности O_q точки q :

$$\tilde{a}|_{O_q} = a|_{O_q} \Rightarrow \xi \tilde{a} = \xi a, \quad a, \tilde{a} \in C^\infty(M).$$

Действительно, возьмем функцию срезки $b \in C^\infty(M)$ такую, что $b|_{M \setminus O_q} \equiv 1$ и $b(q) = 0$. Тогда $(\tilde{a} - a)b = \tilde{a} - a$, следовательно,

$$\xi(\tilde{a} - a) = \xi((\tilde{a} - a)b) = \xi(\tilde{a} - a)b(q) + (\tilde{a} - a)(q)\xi b = 0.$$

Поэтому наше утверждение локально, и мы докажем его в координатах.

Выберем локальные координаты $(x_1, \dots, x_n)$ на M , центрированные в точке q . Требуется доказать, что существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0.$$

Во-первых,

$$\xi(1) = \xi(1 \cdot 1) = (\xi 1) \cdot 1 + 1 \cdot (\xi 1) = 2\xi(1),$$

поэтому $\xi(1) = 0$. В силу линейности, $\xi(\text{const}) = 0$.

Во-вторых, чтобы вычислить действие ξ на произвольной гладкой функции, разложим ее по лемме Адамара:

$$a(x) = a(0) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x_i}(tx) x_i dt = a(0) + \sum_{i=1}^n b_i(x) x_i,$$

где

$$b_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x_i}(tx) dt$$

суть гладкие функции. Тогда

$$\xi a = \sum_{i=1}^n \xi(b_i x_i) = \sum_{i=1}^n ((\xi b_i) x_i(0) + b_i(0)(\xi x_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial a}{\partial x_i}(0),$$

где мы обозначили $\alpha_i = \xi x_i$ и воспользовались равенством $b_i(0) = \frac{\partial a}{\partial x_i}(0)$. $\square$

Итак, касательные векторы $v \in T_q M$ отождествляются с производными по направлению $\hat{v} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. с линейными функционалами, удовлетворяющими правилу Лейбница (2.1).

Теперь мы охарактеризуем векторные поля на M . Гладкое векторное поле на M есть семейство касательных векторов $v_q \in T_q M$, $q \in M$, такое, что для любого $a \in C^\infty(M)$ отображение $q \mapsto v_q a$, $q \in M$, есть гладкая функция на M .

Гладкому векторному полю $V \in \text{Vec } M$ соответствует линейный оператор

$$\hat{V} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

удовлетворяющий правилу Лейбница

$$\hat{V}(ab) = (\hat{V}a)b + a(\hat{V}b), \quad a, b \in C^\infty(M),$$

это производная по направлению поля V , производная Ли.

Линейный оператор в алгебре, удовлетворяющий правилу Лейбница, называется *дифференцированием* алгебры, т.е. производная Ли $\hat{V}$ есть дифференцирование алгебры $C^\infty(M)$. Покажем, что соответствие между гладкими векторными полями на M и дифференцированиями алгебры $C^\infty(M)$ обратимо.

Предложение 2.4. *Любое дифференцирование алгебры $C^\infty(M)$ есть производная по направлению некоторого гладкого векторного поля на M .*

Доказательство. Пусть $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ — дифференцирование. Возьмем любую точку $q \in M$. Покажем, что линейный функционал

$$d_q \stackrel{\text{def}}{=} \hat{q} \circ D : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

есть производная по направлению в точке q , т.е. удовлетворяет правилу Лейбница (2.1):

$$\begin{aligned} d_q(ab) &= \hat{q}(D(ab)) = \hat{q}((Da)b + a(Db)) = \hat{q}(Da)b(q) + a(q)\hat{q}(Db) = \\ &= (d_q a)b(q) + a(q)(d_q b), \quad a, b \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

□

Итак, мы можем отождествить точки $q \in M$, диффеоморфизмы $P \in \text{Diff } M$ и векторные поля $V \in \text{Vec } M$ соответственно с нетривиальными гомоморфизмами $\hat{q} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, автоморфизмами $\hat{P} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ и дифференцированиями $\hat{V} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$.

Например, точку $P(q)$ можно записать в операторных обозначениях как $\hat{q} \circ \hat{P}$. Более того, мы будем опускать крышки и писать $q \circ P$. Это не приведет к двусмысленности: если q стоит справа от P , то q — это точка, P — диффеоморфизм, а $P(q)$ — значение диффеоморфизма P в точке q . А если q слева от P , то q — гомоморфизм, P — автоморфизм, а $q \circ P$ — гомоморфизм алгебры $C^\infty(M)$. Аналогично $V(q) \in T_q M$ есть значение векторного поля V в точке q , а $q \circ V : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ — производная по направлению вектора $V(q)$.

2.2 Полунормы и $C^\infty(M)$ -топология

Определим полунормы и топологию в пространстве $C^\infty(M)$.

По теореме Уитни гладкое многообразие M является собственным подмногообразием евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ для достаточно большого N . Обозначим через h_i , $i = 1, \dots, N$, гладкое векторное поле на M , являющееся ортогональной проекцией из $\mathbb{R}^N$ на M постоянного векторного поля $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \text{Vec}(\mathbb{R}^N)$. Получаем N векторных полей $h_1, \dots, h_N \in \text{Vec } M$, порождающих касательное пространство $T_q M$ в любой точке $q \in M$.

Определим семейство полунорм $\|\cdot\|_{s,K}$ на пространстве $C^\infty(M)$ следующим образом:

$$\|a\|_{s,K} = \sup \{ |h_{i_l} \circ \dots \circ h_{i_1} a(q)| \mid q \in K, 1 \leq i_1, \dots, i_l \leq N, 0 \leq l \leq s \},$$

$$a \in C^\infty(M), \quad s \geq 0, \quad K \Subset M.$$

Это семейство полунорм определяет топологию на $C^\infty(M)$. База этой топологии задается подмножествами

$$\left\{ a \in C^\infty(M) \mid \|a\|_{n,K_n} < \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где K_n , $n \in \mathbb{N}$, есть вложенная система компактов, покрывающая M :

$$K_n \subset K_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = M.$$

Эта топология на $C^\infty(M)$ не зависит от вложения M в $\mathbb{R}^N$. Она называется *топологией равномерной сходимости со всеми производными на компактах*, или просто *$C^\infty(M)$ -топологией*. В этой топологии $C^\infty(M)$ — пространство Фреше (полное метризуемое локально выпуклое топологическое векторное пространство).

Последовательность функций $a_k \in C^\infty(M)$ сходится к функции $a \in C^\infty(M)$ при $k \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - a\|_{s,K} = 0 \quad \forall s \geq 0, \quad K \Subset M.$$

Для векторных полей $V \in \text{Vec } M$ определим полунормы вида

$$\|V\|_{s,K} = \sup \{ \|Va\|_{s,K} \mid \|a\|_{s+1,K} = 1 \}, \quad s \geq 0, \quad K \Subset M. \quad (2.2)$$

Можно доказать, что любое векторное поле $V \in \text{Vec } M$ имеет конечные полунормы $\|V\|_{s,K}$, и что справедлива оценка действия диффеоморфизма $P \in \text{Diff } M$ на функцию $a \in C^\infty(M)$:

$$\|Pa\|_{s,K} \leq C_{s,P} \|a\|_{s,P(K)}, \quad s \geq 0, \quad K \Subset M. \quad (2.3)$$

Поэтому векторные поля и диффеоморфизмы — линейные непрерывные операторы на топологическом векторном пространстве $C^\infty(M)$.

2.3 Семейства функционалов и операторов

В дальнейшем мы часто будем рассматривать однопараметрические семейства точек, диффеоморфизмов и векторных полей, удовлетворяющих различным свойствам регулярности (например, дифференцируемости или абсолютной непрерывности) относительно параметра. Так как мы отождествляем точки с функционалами, а диффеоморфизмы и векторные поля с операторами на $C^\infty(M)$, то свойства регулярности для них мы можем определить

в слабом смысле, через соответствующие свойства однопараметрических семейств функций

$$t \mapsto a_t, \quad a_t \in C^\infty(M), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому сначала дадим определения для семейств функций.

Непрерывность и *дифференцируемость* семейства функций a_t по параметру t определяются стандартным образом так как $C^\infty(M)$ — топологическое векторное пространство. Семейство a_t называется *измеримым* по t , если функция $t \mapsto a_t(q)$ измерима для любого $q \in M$. Измеримое семейство a_t называется *локально интегрируемым*, если

$$\int_{t_0}^{t_1} \|a_t\|_{s,K} dt < \infty \quad \forall s \geq 0, \quad K \in M, \quad t_0, t_1 \in \mathbb{R}.$$

Семейство a_t называется *абсолютно непрерывным* по t , если

$$a_t = a_{t_0} + \int_{t_0}^t b_\tau d\tau$$

для некоторого локально интегрируемого семейства функций b_t . Семейство a_t называется *липшицевым* по t , если

$$\|a_t - a_\tau\|_{s,K} \leq C_{s,K} |t - \tau| \quad \forall s \geq 0, \quad K \in M, \quad t, \tau \in \mathbb{R},$$

и *локально ограниченным* по t , если

$$\|a_t\|_{s,K} \leq C_{s,K,I}, \quad \forall s \geq 0, \quad K \in M, \quad I \in \mathbb{R}, \quad t \in I,$$

где $C_{s,K}$ и $C_{s,K,I}$ — некоторые константы, зависящие от s , K и I .

Теперь мы можем определить свойства регулярности семейств функционалов и операторов на $C^\infty(M)$. Семейство линейных функционалов на $C^\infty(M)$

$$t \mapsto A_t, \quad t \in \mathbb{R},$$

удовлетворяет некоторому свойству регулярности (т.е. является *непрерывным, дифференцируемым, измеримым, локально интегрируемым, абсолютно непрерывным, липшицевым, локально ограниченным* по t), если семейство

$$t \mapsto A_t a, \quad t \in \mathbb{R},$$

удовлетворяет этому свойству для любого $a \in C^\infty(M)$.

Локально ограниченное по t семейство векторных полей

$$t \mapsto V_t, \quad V_t \in \text{Vec } M, \quad t \in \mathbb{R},$$

называется *неавтономным векторным полем*, или просто *векторным полем* на M . Абсолютно непрерывное по t семейство диффеоморфизмов

$$t \mapsto P^t, \quad P^t \in \text{Diff } M, \quad t \in \mathbb{R},$$

называется *поток* на M . Для любого неавтономного векторного поля V_t семейство функций $t \mapsto V_t a$ локально интегрируемо для любого $a \in C^\infty(M)$. Аналогично для любого потока P^t семейство функций $(P^t a)(q) = a(P^t(q))$ абсолютно непрерывно по t для любого $a \in C^\infty(M)$.

Интегралы измеримых локально интегрируемых семейств и производные дифференцируемых семейств определяются также в слабом смысле:

$$\int_{t_0}^{t_1} A_t dt : a \mapsto \int_{t_0}^{t_1} (A_t a) dt, \quad a \in C^\infty(M),$$

$$\frac{d}{dt} A_t : a \mapsto \frac{d}{dt} (A_t a), \quad a \in C^\infty(M).$$

Можно показать, что если A_t и B_t непрерывные семейства, дифференцируемые в точке t_0 , то семейство $A_t \circ B_t$ непрерывно, дифференцируемо в t_0 и удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} (A_t \circ B_t) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} A_t \right) \circ B_{t_0} + A_{t_0} \circ \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} B_t \right),$$

доказательство приведено в приложении.

Если семейства A_t и B_t операторов абсолютно непрерывны, то композиция $A_t \circ B_t$ также абсолютно непрерывна, то же самое справедливо для композиции функционалов и операторов. Для любого абсолютно непрерывного семейства функций a_t семейство $A_t a_t$ также абсолютно непрерывно, и правило Лейбница также справедливо.

2.4 Хронологическая экспонента

В этом разделе мы рассмотрим *неавтономное дифференциальное уравнение* вида

$$\dot{q} = V_t(q), \quad q(0) = q_0, \quad (2.4)$$

где V_t — неавтономное векторное поле на M , и изучим поток, определяемый этим полем. Через $\dot{q}$, как обычно, обозначается производная $\frac{dq}{dt}$, то есть уравнение (2.4) в развернутой форме записывается как

$$\frac{dq(t)}{dt} = V_t(q(t)).$$

2.4.1 Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью

Построим локальные решения задачи Коши (2.4) на многообразии M , сводя ее к задаче Коши в евклидовом пространстве. Подробное изложение теории неавтономных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ с правой частью, разрывной по t , читатель может найти, например, в [139].

Выберем локальные координаты $x = (x^1, \dots, x^n)$ в окрестности O_{q_0} точки q_0 :

$$\begin{aligned}\Phi : O_{q_0} \subset M &\rightarrow O_{x_0} \subset \mathbb{R}^n, & \Phi : q &\mapsto x, \\ \Phi(q_0) &= x_0.\end{aligned}$$

В этих координатах поле V_t имеет вид

$$(\Phi_* V_t)(x) = \tilde{V}_t(x) = \sum_{i=1}^n v_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad x \in O_{x_0}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

и задача (2.4) преобразуется в следующую:

$$\dot{x} = \tilde{V}_t(x), \quad x(0) = x_0, \quad x \in O_{x_0} \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.6)$$

В силу локальной ограниченности неавтономного векторного поля $V_t \in \text{Vec } M$ компоненты $v_i(t, x)$, $i = 1, \dots, n$, его координатного представления (2.5) являются:

- (1) измеримыми и локально ограниченными по t для любого фиксированного $x \in O_{x_0}$,
- (2) гладкими по x для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}$,
- (3) дифференцируемыми по x с локально ограниченными частными производными:

$$\left| \frac{\partial v_i}{\partial x}(t, x) \right| \leq C_{I,K}, \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad x \in K \subseteq O_{x_0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В силу классической теоремы Каратеодори (см., например, [8]), задача Коши (2.6) имеет единственное решение, т.е. вектор-функцию $x(t, x_0)$, липшицеву по t , гладкую по x_0 и такую, что:

- (1) дифференциальное уравнение (2.6) удовлетворяется для почти всех t ,
- (2) выполняется начальное условие: $x(0, x_0) = x_0$.

Тогда перенос этого решения из $\mathbb{R}^n$ на M

$$q(t, q_0) = \Phi^{-1}(x(t, x_0)),$$

есть решение задачи (2.4) на M . Отображение $q(t, q_0)$ липшицево по t и гладко по q_0 , оно удовлетворяет почти всюду ОДУ и начальному условию в (2.4).

Для любого $q_0 \in M$ решение $q(t, q_0)$ задачи Коши (2.4) может быть продолжено на максимальный интервал $t \in J_{q_0} \subset \mathbb{R}$, содержащий начало координат и зависящий от q_0 .

Мы будем предполагать, что решения $q(t, q_0)$ определены для всех $q_0 \in M$ и всех $t \in \mathbb{R}$, т.е. $J_{q_0} = \mathbb{R}$ для любых $q_0 \in M$. Тогда неавтономное поле V_t называется *полным*. Это имеет место, например, когда все поля V_t , $t \in \mathbb{R}$, равны нулю вне общего компакта в M (в этом случае будем говорить, что неавтономное векторное поле V_t имеет *компактный носитель*).

2.4.2 Определение правой хронологической экспоненты

Уравнение (2.4), записанное как линейное уравнение для липшицевых по t семейств функционалов на $C^\infty(M)$:

$$\dot{q}(t) = q(t) \circ V_t, \quad q(0) = q_0, \quad (2.7)$$

удовлетворяется для построенного в предыдущем пункте семейства функционалов

$$q(t, q_0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad q_0 \in M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ниже мы покажем, что эта задача Коши не имеет других решений (см. Утверждение 2.5). Поэтому поток, определяемый равенством

$$P^t : q_0 \mapsto q(t, q_0), \quad (2.8)$$

есть единственное решение операторной задачи Коши

$$\dot{P}^t = P^t \circ V_t, \quad P^0 = \text{Id}, \quad (2.9)$$

(где Id обозначает единичный оператор) в классе липшицевых потоков на M . Поток P^t , определенный в (2.8), называется *правой хронологической экспонентой* поля V_t и обозначается через

$$P^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau.$$

Ниже мы построим асимптотический ряд для хронологической экспоненты, оправдывающий такое обозначение.

2.4.3 Разложение в формальный ряд

Перепишем дифференциальное уравнение (2.7) как интегральное:

$$q(t) = q_0 + \int_0^t q(\tau) \circ V_\tau d\tau \quad (2.10)$$

затем подставим это выражение для $q(t)$ в правую часть

$$\begin{aligned} &= q_0 + \int_0^t \left(q_0 + \int_0^{\tau_1} q(\tau_2) \circ V_{\tau_2} d\tau_2 \right) \circ V_{\tau_1} d\tau_1 \\ &= q_0 \circ \left(\text{Id} + \int_0^t V_\tau dt \right) + \iint_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t} q(\tau_2) \circ V_{\tau_2} \circ V_{\tau_1} d\tau_2 d\tau_1, \end{aligned}$$

многократно повторим эту процедуру, и получим разложение:

$$\begin{aligned}
 q(t) = q_0 \circ & \left(\text{Id} + \int_0^t V_\tau d\tau + \iint_{\Delta_2(t)} V_{\tau_2} \circ V_{\tau_1} d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \right. \\
 & \left. \int_{\Delta_n(t)} \dots \int V_{\tau_n} \circ \dots \circ V_{\tau_1} d\tau_n \dots d\tau_1 \right) + \\
 & \int_{\Delta_{n+1}(t)} \dots \int q(\tau_{n+1}) \circ V_{\tau_{n+1}} \circ \dots \circ V_{\tau_1} d\tau_{n+1} \dots d\tau_1. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta_n(t) = \{(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \tau_n \leq \dots \leq \tau_1 \leq t\}$$

обозначает n -мерный симплекс. Чисто формально переходя в (2.11) к пределу $n \rightarrow \infty$, получаем формальный ряд для решения $q(t)$ задачи (2.7):

$$q_0 \circ \left(\text{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(t)} \dots \int V_{\tau_n} \circ \dots \circ V_{\tau_1} d\tau_n \dots d\tau_1 \right),$$

а потому и для решения P^t задачи (2.9):

$$\text{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(t)} \dots \int V_{\tau_n} \circ \dots \circ V_{\tau_1} d\tau_n \dots d\tau_1. \quad (2.12)$$

Упражнение 2.1. Предыдущее разложение в ряд получено при условии $t > 0$, хотя хронологическая экспонента определена при всех значениях t . Покажите, что поток $\overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau$ при $t < 0$ имеет разложение

$$\text{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(-t)} \dots \int (-V_{\tau_n}) \circ \dots \circ (-V_{\tau_1}) d\tau_n \dots d\tau_1.$$

Этот ряд аналогичен ряду (2.12), поэтому в дальнейшем мы ограничимся изучением случая $t > 0$.

2.4.4 Оценки и сходимость ряда

К сожалению, полученные ряды никогда не сходятся на $C^\infty(M)$ в слабом смысле (при $V_t \not\equiv 0$): всегда существует гладкая функция на M , на которой они расходятся. Но можно показать, что ряд (2.12) является асимптотическим для хронологической экспоненты $P^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau$. Справедлива

следующая оценка остаточного члена: обозначим m -ую частичную сумму ряда (2.12) через

$$S_m(t) = \text{Id} + \sum_{n=1}^{m-1} \int_{\Delta_n(t)} \cdots \int V_{\tau_n} \circ \cdots \circ V_{\tau_1} d\tau_n \dots d\tau_1,$$

тогда для любых $a \in C^\infty(M)$, $s \geq 0$, $K \Subset M$

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau - S_m(t) \right) a \right\|_{s,K} \\ & \leq C e^{C \int_0^t \|V_\tau\|_{s,K'} d\tau} \frac{1}{m!} \left(\int_0^t \|V_\tau\|_{s+m-1,K'} d\tau \right)^m \|a\|_{s+m,K'} \quad (2.13) \\ & = O(t^m), \quad t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $K' \Subset M$ — некоторый компакт, содержащий K . Мы докажем оценку (2.13) в приложении. Из оценки (2.13) следует, что

$$\left\| \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon V_\tau d\tau - S_m^\varepsilon(t) \right) a \right\|_{s,K} = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $S_m^\varepsilon(t)$ обозначает m -ую частичную сумму ряда (2.12) для поля εV_t .

Поэтому получаем следующее разложение в асимптотический ряд:

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau \approx \text{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(t)} \cdots \int V_{\tau_n} \circ \cdots \circ V_{\tau_1} d\tau_n \dots d\tau_1. \quad (2.14)$$

Мы будем использовать члены этого ряда порядков ноль, один и два:

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau \approx \text{Id} + \int_0^t V_\tau d\tau + \iint_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t} V_{\tau_2} \circ V_{\tau_1} d\tau_2 d\tau_1 + \cdots$$

Докажем, что асимптотический ряд сходится к хронологической экспоненте на любом нормированном подпространстве $L \subset C^\infty(M)$, на котором V_t определено и ограничено:

$$V_t L \subset L, \quad \|V_t\| = \sup \{ \|V_t a\| \mid a \in L, \|a\| \leq 1 \} < \infty. \quad (2.15)$$

Применим операторный ряд (2.14) к любой функции $a \in L$ и оценим члены полученного ряда:

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(t)} \cdots \int V_{\tau_n} \circ \cdots \circ V_{\tau_1} a d\tau_n \dots d\tau_1. \quad (2.16)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\Delta_n(t)} \cdots \int V_{\tau_n} \circ \cdots \circ V_{\tau_1} a \, d\tau_n \dots d\tau_1 \right\| \\ & \leq \int_{0 \leq \tau_n \leq \dots \leq \tau_1 \leq t} \|V_{\tau_n}\| \cdot \dots \cdot \|V_{\tau_1}\| \, d\tau_n \dots d\tau_1 \cdot \|a\| \end{aligned}$$

используя симметрию относительно перестановок индексов $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

$$= \int_{0 \leq \tau_{\sigma(n)} \leq \dots \leq \tau_{\sigma(1)} \leq t} \|V_{\tau_n}\| \cdot \dots \cdot \|V_{\tau_1}\| \, d\tau_n \dots d\tau_1 \cdot \|a\|$$

и переходя к интегралу по кубу

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{n!} \int_0^t \cdots \int_0^t \|V_{\tau_n}\| \cdot \dots \cdot \|V_{\tau_1}\| \, d\tau_n \dots d\tau_1 \cdot \|a\| \\ & = \frac{1}{n!} \left(\int_0^t \|V_{\tau}\| \, d\tau \right)^n \cdot \|a\|. \end{aligned}$$

Итак, ряд (2.16) мажорируется экспоненциальным рядом, поэтому операторный ряд (2.14) сходится на L .

Ряд (2.16) можно почленно дифференцировать, поэтому он удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и функция $P^t a$:

$$\dot{a}_t = V_t a_t, \quad a_0 = a.$$

Следовательно,

$$P^t a = a + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(t)} \cdots \int V_{\tau_n} \circ \cdots \circ V_{\tau_1} a \, d\tau_n \dots d\tau_1.$$

Итак, в случае (2.15) асимптотический ряд сходится, более того, справедлива оценка

$$\|P^t a\| \leq e^{\int_0^t \|V_{\tau}\| \, d\tau} \|a\|, \quad a \in L.$$

Можно показать, что оценка и сходимост имеют место не только для локально ограниченных, но и для интегрируемых на $[0, t]$ векторных полей:

$$\int_0^t \|V_{\tau}\| \, d\tau < \infty.$$

Заметим, что условия (2.15) выполняются на любом конечномерном V_t -инвариантном подпространстве $L \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$. В частности, это имеет место когда $M = \mathbb{R}^n$, L есть пространство линейных векторных полей, а V_t — линейное поле на $\mathbb{R}^n$.

Если M , V_t и a вещественно аналитические, то ряд (2.16) сходится при достаточно малых t , см. доказательство в [19].

2.4.5 Левая хронологическая экспонента

Рассмотрим обратный оператор $Q^t = (P^t)^{-1}$ к правой хронологической экспоненте $P^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau$. Найдем ОДУ для Q^t дифференцируя тождество

$$P^t \circ Q^t = \text{Id}.$$

По правилу Лейбница получаем

$$\dot{P}^t \circ Q^t + P^t \circ \dot{Q}^t = 0,$$

поэтому, учитывая уравнение (2.9) для потока P^t , имеем

$$P^t \circ V_t \circ Q^t + P^t \circ \dot{Q}^t = 0.$$

Умножая это равенство слева на Q^t , получаем

$$V_t \circ Q^t + \dot{Q}^t = 0.$$

То есть поток Q^t есть решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt} Q^t = -V_t \circ Q^t, \quad Q^0 = \text{Id}, \quad (2.17)$$

двойственной к задаче Коши (2.9) для правой хронологической экспоненты P^t . Поток Q^t называется *левой хронологической экспонентой* и обозначается через

$$Q^t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t (-V_\tau) d\tau.$$

Найдем асимптотический ряд для левой хронологической экспоненты так же, как для правой, многократной подстановкой в правую часть:

$$\begin{aligned} Q^t &= \text{Id} + \int_0^t (-V_\tau) \circ Q^\tau d\tau \\ &= \text{Id} + \int_0^t (-V_\tau) d\tau + \iint_{\Delta_2(t)} (-V_{\tau_1}) \circ (-V_{\tau_2}) \circ Q^{\tau_2} d\tau_2 d\tau_1 = \dots \\ &= \text{Id} + \sum_{n=1}^{m-1} \int_{\Delta_n(t)} \dots \int (-V_{\tau_1}) \circ \dots \circ (-V_{\tau_n}) d\tau_n \dots d\tau_1 \\ &\quad + \int_{\Delta_m(t)} \dots \int (-V_{\tau_1}) \circ \dots \circ (-V_{\tau_m}) \circ Q^{\tau_m} d\tau_m \dots d\tau_1. \end{aligned}$$

Для левой хронологической экспоненты справедлива оценка остаточного члена, аналогичная оценке (2.13) для правой экспоненты, и полученный ряд является асимптотическим:

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^t (-V_\tau) d\tau \approx \text{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(t)} \dots \int (-V_{\tau_1}) \circ \dots \circ (-V_{\tau_n}) d\tau_n \dots d\tau_1.$$

Замечания. (1) Обратная стрелка в левой хронологической экспоненте $\overleftarrow{\exp}$ соответствует обратному порядку операторов $(-V_{\tau_1}) \circ \dots \circ (-V_{\tau_n})$, $\tau_n \leq \dots \leq \tau_1$.

(2) Правая и левая хронологические экспоненты удовлетворяют соответствующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau \circ V_t, \\ \frac{d}{dt} \overleftarrow{\exp} \int_0^t (-V_\tau) d\tau &= -V_t \circ \overleftarrow{\exp} \int_0^t (-V_\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Направление стрелок согласуется с направлением появления операторов V_t , $-V_t$ в правой части этих уравнений.

(3) Если начальное значение задается в момент времени $t_0 \neq 0$, то нижний предел интегралов в хронологических экспонентах полагается равным t_0 .

(4) Справедливо очевидное правило композиции потоков:

$$\overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t_1} V_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_1}^{t_2} V_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t_2} V_\tau d\tau.$$

Упражнение 2.2. Докажите, что

$$\overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t_1} V_\tau d\tau = \left(\overrightarrow{\exp} \int_{t_1}^{t_0} V_\tau d\tau \right)^{-1} = \overleftarrow{\exp} \int_{t_1}^{t_0} (-V_\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

2.4.6 Единственность для функциональных и операторных уравнений

Мы видели, что дифференциальное уравнение (2.7) для липшицевых семейств функционалов имеет решение $q(t) = q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau$. Теперь мы можем доказать, что это уравнение других решений не имеет.

Предложение 2.5. Пусть V_t — полное неавтономное векторное поле на M . Тогда задача Коши (2.7) имеет единственное решение в классе липшицевых семейств функционалов на $C^\infty(M)$.

Доказательство. Пусть липшицево семейство функционалов q_t есть решение задачи (2.7). Тогда

$$\frac{d}{dt} (q_t \circ (P^t)^{-1}) = \frac{d}{dt} (q_t \circ Q^t) = q_t \circ V_t \circ Q^t - q_t \circ V_t \circ Q^t = 0,$$

поэтому $q_t \circ Q^t \equiv \text{const}$. Но $Q_0 = \text{Id}$, следовательно, $q_t \circ Q^t \equiv q_0$, значит

$$q_t = q_0 \circ P^t = q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau$$

есть единственное решение задачи Коши (2.7). $\square$

Аналогично оба операторных уравнения $\dot{P}^t = P^t \circ V_t$ и $\dot{Q}^t = -V_t \circ Q^t$ не имеют других решений кроме хронологических экспонент.

2.4.7 Автономные векторные поля

В случае *автономного векторного поля*

$$V_t \equiv V \in \text{Vec } M,$$

поток полного поля называется *экспонентой* и обозначается через e^{tV} . Асимптотический ряд для экспоненты принимает форму

$$e^{tV} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} V^n = \text{Id} + tV + \frac{t^2}{2} V \circ V + \dots,$$

т.е. это обычный экспоненциальный ряд.

Экспонента автономного векторного поля удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dt} e^{tV} = e^{tV} \circ V = V \circ e^{tV}, \quad e^{tV}|_{t=0} = \text{Id}.$$

Используем асимптотический ряд для экспоненты для вычисления скобки Ли автономных векторных полей $V, W \in \text{Vec } M$. Вычислим первый непостоянный член в асимптотическом разложении следующей кривой в точке $t = 0$:

$$\begin{aligned} q(t) &= q \circ e^{tV} \circ e^{tW} \circ e^{-tV} \circ e^{-tW} \\ &= q \circ \left(\text{Id} + tV + \frac{t^2}{2} V^2 + \dots \right) \circ \left(\text{Id} + tW + \frac{t^2}{2} W^2 + \dots \right) \\ &\quad \circ \left(\text{Id} - tV + \frac{t^2}{2} V^2 + \dots \right) \circ \left(\text{Id} - tW + \frac{t^2}{2} W^2 + \dots \right) \\ &= q \circ \left(\text{Id} + t(V + W) + \frac{t^2}{2} (V^2 + 2V \circ W + W^2) + \dots \right) \\ &\quad \circ \left(\text{Id} - t(V + W) + \frac{t^2}{2} (V^2 + 2V \circ W + W^2) + \dots \right) \\ &= q \circ (\text{Id} + t^2 (V \circ W - W \circ V) + \dots). \end{aligned}$$

Итак, скобка Ли векторных полей как операторов (производных по направлению) в $C^\infty(M)$ имеет вид

$$[V, W] = V \circ W - W \circ V.$$

Отсюда следует формула в локальных координатах: если

$$V = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad W = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i, b_i \in C^\infty(M),$$

то

$$[V, W] = \sum_{i,j=1}^n \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{dW}{dx} V - \frac{dV}{dx} W.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} q \circ e^{tV} \circ e^{sW} \circ e^{-tV} &= q \circ (\text{Id} + tV + \dots) \circ (\text{Id} + sW + \dots) \circ (\text{Id} - tV + \dots) \\ &= q \circ (\text{Id} + sW + ts[V, W] + \dots), \end{aligned}$$

и

$$q \circ [V, W] = \left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \right|_{s=t=0} q \circ e^{tV} \circ e^{sW} \circ e^{-tV}.$$

2.5 Действие диффеоморфизмов на векторные поля

Мы уже нашли аналоги точек, диффеоморфизмов и векторных полей среди функционалов и операторов на $C^\infty(M)$. Теперь рассмотрим действие диффеоморфизмов на векторные поля.

Возьмем касательный вектор $v \in T_q M$ и диффеоморфизм $P \in \text{Diff } M$. Касательный вектор $P_* v \in T_{P(q)} M$ есть вектор скорости образа кривой, выходящей из q со скоростью v . Мы утверждаем, что

$$P_* v = v \circ P, \quad v \in T_q M, \quad P \in \text{Diff } M, \quad (2.19)$$

как функционалы на $C^\infty(M)$. Возьмем кривую

$$q(t) \in M, \quad q(0) = q, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} q(t) = v,$$

тогда

$$\begin{aligned} P_* v a &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} a(P(q(t))) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} q(t) \right) \circ P a \\ &= v \circ P a, \quad a \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

Теперь найдем выражение для $P_* V$, $V \in \text{Vec } M$, как дифференцирования алгебры $C^\infty(M)$. Имеем

$$\begin{aligned} q \circ P \circ P_* V &= P(q) \circ P_* V = (P_* V)(P(q)) = P_*(V(q)) = V(q) \circ P \\ &= q \circ V \circ P, \quad q \in M, \end{aligned}$$

поэтому

$$P \circ P_* V = V \circ P,$$

то есть

$$P_* V = P^{-1} \circ V \circ P, \quad P \in \text{Diff } M, \quad V \in \text{Vec } M.$$

Итак, диффеоморфизмы действуют на векторные поля как подобия. В частности, диффеоморфизмы сохраняют композиции:

$$P_*(V \circ W) = P^{-1} \circ (V \circ W) \circ P = (P^{-1} \circ V \circ P) \circ (P^{-1} \circ W \circ P) = P_* V \circ P_* W,$$

а потому и скобки Ли векторных полей:

$$P_*[V, W] = P_*(V \circ W - W \circ V) = P_*V \circ P_*W - P_*W \circ P_*V = [P_*V, P_*W].$$

Если $B : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ — автоморфизм, то соответствующее подобие обычно обозначается через $\text{Ad } B$:

$$(\text{Ad } B)V \stackrel{\text{def}}{=} B \circ V \circ B^{-1}.$$

В этих терминах

$$P_* = \text{Ad } P^{-1}, \quad P \in \text{Diff } M.$$

Теперь вычислим инфинитезимальную версию оператора Ad . Пусть P^t есть поток поля V :

$$P^0 = \text{Id}, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P^t = V \in \text{Vec } M.$$

Тогда

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (P^t)^{-1} = -V,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad } P^t)W &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (P^t \circ W \circ (P^t)^{-1}) = V \circ W - W \circ V \\ &= [V, W], \quad W \in \text{Vec } M. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\text{ad } V = \text{ad} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P^t \right) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad } P^t,$$

тогда

$$(\text{ad } V)W = [V, W], \quad W \in \text{Vec } M.$$

Дифференцируя тождество

$$\text{Ad } P^t [X, Y] = [\text{Ad } P^t X, \text{Ad } P^t Y] \quad X, Y \in \text{Vec } M,$$

в момент $t = 0$, получаем *тождество Якоби* для скобки Ли векторных полей:

$$(\text{ad } V)[X, Y] = [(\text{ad } V)X, Y] + [X, (\text{ad } V)Y],$$

которое можно также записать в виде

$$[V, [X, Y]] = [[V, X], Y] + [X, [V, Y]], \quad V, X, Y \in \text{Vec } M,$$

или в симметричной форме

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad X, Y, Z \in \text{Vec } M. \quad (2.20)$$

Множество $\text{Vec } M$ является линейным пространством с дополнительной операцией — скобкой Ли, удовлетворяющей следующим свойствам:

(1) билинейность:

$$\begin{aligned} [\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z], \\ [X, \alpha Y + \beta Z] &= \alpha[X, Y] + \beta[X, Z], \quad X, Y, Z \in \text{Vec } M, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

(2) кососимметричность:

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad X, Y \in \text{Vec } M,$$

(3) тождество Якоби (2.20).

Иными словами, множество $\text{Vec } M$ всех гладких векторных полей на гладком многообразии M образует *алгебру Ли*.

Рассмотрим поток $P^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau$ неавтономного векторного поля V_t .

Найдем дифференциальное уравнение для семейства операторов $\text{Ad } P^t = (P^t)_*^{-1}$ в алгебре Ли $\text{Vec } M$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{Ad } P^t)X &= \frac{d}{dt}(P^t \circ X \circ (P^t)^{-1}) \\ &= P^t \circ V_t \circ X \circ (P^t)^{-1} - P^t \circ X \circ V_t \circ (P^t)^{-1} \\ &= (\text{Ad } P^t)[V_t, X] = (\text{Ad } P^t) \text{ad } V_t X, \quad X \in \text{Vec } M. \end{aligned}$$

Итак, семейство операторов $\text{Ad } P^t$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \text{Ad } P^t = (\text{Ad } P^t) \circ \text{ad } V_t \quad (2.21)$$

с начальным условием

$$\text{Ad } P^0 = \text{Id}. \quad (2.22)$$

Семейство $\text{Ad } P^t$ — обратимое решение задачи Коши

$$\dot{A}_t = A_t \circ \text{ad } V_t, \quad A_0 = \text{Id}$$

для операторов $A_t : \text{Vec } M \rightarrow \text{Vec } M$. Можно повторить рассуждение, проведенное нами выше для аналогичной задачи (2.9) для потоков и получить асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \text{Ad } P^t &\approx \text{Id} + \int_0^t \text{ad } V_\tau d\tau + \dots \\ &\quad + \int \dots \int_{\Delta_n(t)} \text{ad } V_{\tau_n} \circ \dots \circ \text{ad } V_{\tau_1} d\tau_n \dots d\tau_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

затем доказать единственность решения и оправдать следующее обозначение:

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } V_\tau d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ad } P^t = \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau \right).$$

Аналогичные тождества для левой хронологической экспоненты имеют вид

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad}(-V_\tau) d\tau &\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ad} \left(\overleftarrow{\exp} \int_0^t (-V_\tau) d\tau \right) \\ &\approx \operatorname{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(t)} \cdots \int (-\operatorname{ad} V_{\tau_1}) \circ \cdots \circ (-\operatorname{ad} V_{\tau_n}) d\tau_n \dots d\tau_1. \end{aligned}$$

Для асимптотического ряда (2.23) справедлива оценка остаточного члена, аналогичная оценке (2.13) для потока P^t . Обозначим частичную сумму

$$T_m = \operatorname{Id} + \sum_{n=1}^{m-1} \int_{\Delta_n(t)} \cdots \int \operatorname{ad} V_{\tau_n} \circ \cdots \circ \operatorname{ad} V_{\tau_1} d\tau_n \dots d\tau_1,$$

тогда для любых $X \in \operatorname{Vec} M$, $s \geq 0$, $K \Subset M$

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\operatorname{Ad} \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau - T_m \right) X \right\|_{s,K} \\ &\leq C_1 e^{C_1 \int_0^t \|V_\tau\|_{s+1,K'} d\tau} \frac{1}{m!} \left(\int_0^t \|V_\tau\|_{s+m,K'} d\tau \right)^m \|X\|_{s+m,K'} \quad (2.24) \\ &= O(t^m), \quad t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $K' \Subset M$ — некоторый компакт, содержащий K .

Для автономных векторных полей вводится обозначение

$$e^{t \operatorname{ad} V} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ad} e^{tV},$$

иными словами, семейство операторов $e^{t \operatorname{ad} V} : \operatorname{Vec} M \rightarrow \operatorname{Vec} M$ есть единственное решение задачи

$$\dot{A}_t = A_t \circ \operatorname{ad} V, \quad A_0 = \operatorname{Id}.$$

Справедливо асимптотическое разложение

$$e^{t \operatorname{ad} V} \approx \operatorname{Id} + t \operatorname{ad} V + \frac{t^2}{2} \operatorname{ad}^2 V + \dots$$

Упражнение 2.3. Пусть $P \in \operatorname{Diff} M$, и пусть V_t — неавтономное векторное поле на M . Покажите, что

$$P \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau \circ P^{-1} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (\operatorname{Ad} P V_\tau) d\tau. \quad (2.25)$$

2.6 Коммутирование полей

Пусть $V_t \in \text{Vec } M$ — неавтономное векторное поле и пусть $P^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau$ — его поток. Зададимся вопросом: при каких условиях поток P^t сохраняет векторное поле $W \in \text{Vec } M$:

$$P^t_* W = W \quad \forall t,$$

или, что то же самое,

$$(P^t)^{-1}_* W = W \quad \forall t.$$

Предложение 2.6.

$$P^t_* W = W \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad [V_t, W] = 0 \quad \forall t.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (P^t)^{-1}_* W &= \frac{d}{dt} \text{Ad } P^t W = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } V_\tau d\tau \right) W \\ &= \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } V_\tau d\tau \circ \text{ad } V_t \right) W = \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } V_\tau d\tau \right) [V_t, W] \\ &= (P^t)^{-1}_* [V_t, W], \end{aligned}$$

поэтому $(P^t)^{-1}_* W \equiv W$ тогда и только тогда, когда $[V_t, W] \equiv 0$. $\square$

Вообще говоря, потоки не коммутируют, ни для неавтономных векторных полей V_t, W_t :

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} V_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_2} W_\tau d\tau \neq \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_2} W_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} V_\tau d\tau,$$

ни для автономных векторных полей V, W :

$$e^{t_1 V} \circ e^{t_2 W} \neq e^{t_2 W} \circ e^{t_1 V}.$$

В автономном случае коммутирование потоков равносильно коммутированию векторных полей:

$$e^{t_1 V} \circ e^{t_2 W} = e^{t_2 W} \circ e^{t_1 V}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad \Leftrightarrow \quad [V, W] = 0.$$

Мы уже показали необходимость коммутирования векторных полей для коммутирования их потоков, сейчас докажем достаточность. Имеем

$$(\text{Ad } e^{t_1 V}) W = e^{t_1 \text{ad } V} W = W.$$

Учитывая равенство (2.25), получаем

$$e^{t_1 V} \circ e^{t_2 W} \circ e^{-t_1 V} = e^{t_2 (\text{Ad } e^{t_1 V}) W} = e^{t_2 W}.$$

2.7 Формула вариаций

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\dot{q} = V_t(q) + W_t(q). \quad (2.26)$$

Будем считать V_t исходным векторным полем, а W_t — его возмущением. Найдем формулу для потока Q^t нового поля $V_t + W_t$ как возмущение потока $P^t = \exp \int_0^t V_\tau d\tau$ исходного поля V_t . Иными словами, мы хотим получить разложение вида

$$Q^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (V_\tau + W_\tau) d\tau = C_t \circ P^t.$$

Действуем как в методе вариации постоянных: подставляем это разложение в уравнение (2.26):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q^t &= Q^t \circ (V_t + W_t) \\ &= \dot{C}_t \circ P^t + C_t \circ P^t \circ V_t \\ &= \dot{C}_t \circ P^t + Q^t \circ V_t, \end{aligned}$$

сокращаем общий член $Q^t \circ V_t$:

$$Q^t \circ W_t = \dot{C}_t \circ P^t,$$

и записываем уравнение для неизвестного потока C_t :

$$\begin{aligned} \dot{C}_t &= Q^t \circ W_t \circ (P^t)^{-1} \\ &= C_t \circ P^t \circ W_t \circ (P^t)^{-1} \\ &= C_t \circ (\text{Ad } P^t) W_t \\ &= C_t \circ \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } V_\tau d\tau \right) W_t, \\ C_0 &= \text{Id}. \end{aligned}$$

Эта операторная задача Коши имеет форму (2.9), потому имеет единственное решение:

$$C_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } V_\theta d\theta \right) W_\tau d\tau.$$

Итак, мы получили искомое разложение возмущенного потока:

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t (V_\tau + W_\tau) d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } V_\theta d\theta \right) W_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau. \quad (2.27)$$

Это равенство называется *формулой вариаций*. Ее можно записать в следующем виде:

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t (V_\tau + W_\tau) d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (\text{Ad } P^\tau) W_\tau d\tau \circ P^t.$$

То есть возмущенный поток равен композиции исходного потока P^t с потоком возмущения W_t , подкрученного потоком P^t .

Получим другую версию формулы вариаций с потоком P^t слева от подкрученного потока. Имеем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp} \int_0^t (V_\tau + W_\tau) d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t (\text{Ad } P^\tau) W_\tau d\tau \circ P^t \\ &= P^t \circ (P^t)^{-1} \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t (\text{Ad } P^\tau) W_\tau d\tau \circ P^t \\ &= P^t \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\text{Ad } (P^t)^{-1} \circ \text{Ad } P^\tau \right) W_\tau d\tau \\ &= P^t \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\text{Ad } \left((P^t)^{-1} \circ P^\tau \right) \right) W_\tau d\tau. \end{aligned}$$

Так как

$$(P^t)^{-1} \circ P^\tau = \overrightarrow{\exp} \int_t^\tau V_\theta d\theta,$$

получаем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp} \int_0^t (V_\tau + W_\tau) d\tau &= P^t \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_t^\tau \text{ad } V_\theta d\theta \right) W_\tau d\tau \\ &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_t^\tau \text{ad } V_\theta d\theta \right) W_\tau d\tau. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для автономных векторных полей $V, W \in \text{Vec } M$, формулы вариаций (2.27), (2.28) принимают следующую форму:

$$e^{t(V+W)} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t e^{\tau \text{ad } V} W d\tau \circ e^{tV} = e^{tV} \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t e^{(\tau-t) \text{ad } V} W d\tau. \quad (2.29)$$

В частности, при $t = 1$ получаем

$$e^{V+W} = \overrightarrow{\exp} \int_0^1 e^{\tau \text{ad } V} W d\tau \circ e^V.$$

2.8 Производная потока по параметру

Пусть $V_t(s)$ — неавтономное векторное поле, гладко зависящее от вещественного параметра s . Исследуем зависимость потока поля $V_t(s)$ от параметра s .

Запишем

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau(s + \varepsilon) d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (V_\tau(s) + \delta_{V_\tau}(s, \varepsilon)) d\tau \quad (2.30)$$

с возмущением $\delta_{V_\tau}(s, \varepsilon) = V_\tau(s + \varepsilon) - V_\tau(s)$. По формуле вариаций (2.27), вышеприведенный поток равен

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } V_\theta(s) d\theta \right) \delta_{V_\tau}(s, \varepsilon) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau(s) d\tau.$$

Разложим по ε :

$$\begin{aligned} \delta_{V_\tau}(s, \varepsilon) &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial s} V_\tau(s) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \\ W_\tau(s, \varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } V_\theta(s) d\theta \right) \delta_{V_\tau}(s, \varepsilon) \\ &= \varepsilon \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } V_\theta(s) d\theta \right) \frac{\partial}{\partial s} V_\tau(s) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp} \int_0^t W_\tau(s, \varepsilon) d\tau &= \text{Id} + \int_0^t W_\tau(s, \varepsilon) d\tau + O(\varepsilon^2) \\ &= \text{Id} + \varepsilon \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } V_\theta(s) d\theta \right) \frac{\partial}{\partial s} V_\tau(s) d\tau + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau(s + \varepsilon) d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t W_{s, \tau}(\varepsilon) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau(s) d\tau \\ &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau(s) d\tau \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } V_\theta(s) d\theta \right) \frac{\partial}{\partial s} V_\tau(s) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau(s) d\tau + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau(s) d\tau &= \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } V_\theta(s) d\theta \right) \frac{\partial}{\partial s} V_\tau(s) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau(s) d\tau. \quad (2.31) \end{aligned}$$

Аналогично по формуле вариаций (2.28) получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau(s) d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau(s) d\tau \circ \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_t^\tau \text{ad } V_\theta(s) d\theta \right) \frac{\partial}{\partial s} V_\tau(s) d\tau. \quad (2.32) \end{aligned}$$

Для автономного векторного поля $V(s)$, зависящего от параметра, формула (2.31) принимает форму

$$\frac{\partial}{\partial s} e^{tV(s)} = \int_0^t e^{\tau \operatorname{ad} V(s)} \frac{\partial V}{\partial s} d\tau \circ e^{tV(s)},$$

а при $t = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial s} e^{V(s)} = \int_0^1 e^{\tau \operatorname{ad} V(s)} \frac{\partial V}{\partial s} d\tau \circ e^{V(s)}. \quad (2.33)$$

Предложение 2.7. *Предположим, что*

$$\left[\int_0^t V_\tau d\tau, V_t \right] = 0 \quad \forall t. \quad (2.34)$$

Тогда

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau = e^{\int_0^t V_\tau d\tau} \quad \forall t.$$

Иными словами, в предположении условия коммутативности (2.34) хронологическая экспонента $\overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau$ совпадает с потоком $Q^t = e^{\int_0^t V_\tau d\tau}$, задающимся условиями:

$$Q^t = Q_1^t, \\ \frac{\partial Q_s^t}{\partial s} = \int_0^t V_\tau d\tau \circ Q_s^t, \quad Q_0^t = \operatorname{Id}.$$

Доказательство. Покажем, что экспонента в правой части удовлетворяет тому же уравнению, что и хронологическая экспонента в левой части. В силу (2.33), имеем

$$\frac{d}{dt} e^{\int_0^t V_\tau d\tau} = \int_0^1 e^{\tau \operatorname{ad} \int_0^t V_\theta d\theta} V_t d\tau \circ e^{\int_0^t V_\tau d\tau}.$$

Ввиду равенства (2.34),

$$e^{\tau \operatorname{ad} \int_0^t V_\theta d\theta} V_t = V_t,$$

поэтому

$$\frac{d}{dt} e^{\int_0^t V_\tau d\tau} = V_t \circ e^{\int_0^t V_\tau d\tau}.$$

Благодаря равенству (2.34), можно также поменять местами операторы в правой части:

$$\frac{d}{dt} e^{\int_0^t V_\tau d\tau} = e^{\int_0^t V_\tau d\tau} \circ V_t.$$

Заметим, что выполняется начальное условие

$$e^{\int_0^t V_\tau d\tau} \Big|_{t=0} = \operatorname{Id}.$$

Теперь утверждение следует из того, что задача Коши для потоков

$$\dot{A}_t = A_t \circ V_t, \quad A_0 = \text{Id}$$

имеет единственное решение:

$$A_t = e^{\int_0^t V_\tau d\tau} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau.$$

□

Глава 3

Линейные системы

В этой главе мы рассмотрим простейший класс управляемых систем — *линейные системы*

$$\dot{x} = Ax + c + \sum_{i=1}^m u_i b_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m, \quad (3.1)$$

где A — постоянная вещественная матрица порядка n , а $c, b_1, \dots, b_m$ — постоянные векторы в $\mathbb{R}^n$.

3.1 Формула Коши для линейных систем

Пусть $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ — локально интегрируемые функции. Тогда решение системы (3.1), соответствующее этому управлению и удовлетворяющее начальному условию

$$x(0, x_0) = x_0$$

дается *формулой Коши*:

$$x(t, x_0) = e^{tA} \left(x_0 + \int_0^t e^{-\tau A} \left(\sum_{i=1}^m u_i(\tau) b_i + c \right) d\tau \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Мы используем здесь обозначение для матричной экспоненты:

$$e^{tA} = \text{Id} + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots$$

Формула Коши проверяется дифференцированием. В силу единственности, она дает решение задачи Коши.

Линейная система (3.1) — частный случай *аффинной по управлению системы*:

$$\dot{x} = x \circ \left(f_0 + \sum_{i=1}^m u_i f_i \right). \quad (3.2)$$

Чтобы получить систему (3.1) из (3.2), достаточно положить

$$f_0(x) = Ax + c, \quad f_i(x) = b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.3)$$

Предложение 3.1. *Формула Коши для линейных систем следует из формулы вариаций.*

Доказательство. Приведем доказательство только в случае $c = 0$.

Формула вариаций для системы (3.2) имеет вид

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(f_0 + \sum_{i=1}^m u_i(\tau) f_i \right) d\tau \\ &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } f_0 d\theta \right) \circ \sum_{i=1}^m u_i(\tau) f_i \right) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t f_0 d\tau \\ &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m u_i(\tau) e^{\tau \text{ad } f_0} f_i \right) d\tau \circ e^{tf_0}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Мы предполагаем, что $c = 0$, т.е. $f_0(x) = Ax$. Тогда

$$x \circ e^{tf_0} = e^{tA}x. \quad (3.5)$$

Далее, так как $(\text{ad } f_0)f_i = [f_0, f_i] = [Ax, b] = -Ab$, то

$$\begin{aligned} e^{\tau \text{ad } f_0} f_i &= f_i + \tau(\text{ad } f_0)f_i + \frac{\tau^2}{2!}(\text{ad } f_0)^2 f_i + \dots + \frac{\tau^n}{n!}(\text{ad } f_0)^n f_i + \dots \\ &= b_i - \tau Ab_i + \frac{\tau^2}{2!}(-A)^2 b_i + \dots + \frac{\tau^n}{n!}(-A)^n b_i + \dots \\ &= e^{-\tau A} b_i. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить левый поток в (3.4), напомним, что кривая

$$x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m u_i(\tau) e^{\tau \text{ad } f_0} f_i \right) d\tau = x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m u_i(\tau) e^{-\tau A} b_i \right) d\tau \quad (3.6)$$

есть решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) e^{-tA} b_i, \quad x(0) = x_0,$$

поэтому (3.6) равно

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(e^{-\tau A} \sum_{i=1}^m u_i(\tau) b_i \right) d\tau.$$

Учитывая (3.5), получаем формулу Коши:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(f_0 + \sum_{i=1}^m u_i(\tau) f_i \right) d\tau \\ &= \left(x_0 + \int_0^t \left(e^{-\tau A} \sum_{i=1}^m u_i(\tau) b_i \right) d\tau \right) \circ e^{t f_0} \\ &= e^{tA} \left(x_0 + \int_0^t \left(e^{-\tau A} \sum_{i=1}^m u_i(\tau) b_i \right) d\tau \right). \end{aligned}$$

□

Заметим, что в общем случае ($c \neq 0$) формулу Коши можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x(t, x_0) &= e^{tA} x_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} \sum_{i=1}^m u_i(\tau) b_i d\tau + e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} c d\tau \\ &= e^{tA} x_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} \sum_{i=1}^m u_i(\tau) b_i d\tau + \frac{e^{tA} - \text{Id}}{A} c, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\frac{e^{tA} - \text{Id}}{A} c = tc + \frac{t^2}{2!} Ac + \frac{t^3}{3!} A^2 c + \dots + \frac{t^n}{n!} A^{n-1} c + \dots.$$

3.2 Управляемость линейных систем

Из формулы Коши (3.7) следует, что отображение

$$u \mapsto x(t, u, x_0),$$

переводящее локально интегрируемое управление $u = u(\cdot)$ в конечную точку соответствующей траектории, является аффинным. Поэтому множество достижимости $\mathcal{A}_{x_0}(t)$ линейной системы (3.1) за фиксированное время $t > 0$ есть аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.1. Управляемая система в пространстве состояний M называется *вполне управляемой* за время $t > 0$, если

$$\mathcal{A}_{x_0}(t) = M \quad \forall x_0 \in M.$$

Полная управляемость означает, что для любой пары точек $x_0, x_1 \in M$ существует такое управление u , что соответствующее решение $x(\cdot, u, x_0)$ управляемой системы переводит x_0 в x_1 за время t :

$$x(0, u, x_0) = x_0, \quad x(t, u, x_0) = x_1.$$

Исследование полной управляемости линейных систем облегчается благодаря следующему наблюдению. Аффинное отображение

$$u \mapsto e^{tA}x_0 + \frac{e^{tA} - \text{Id}}{A}c + e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} \sum_{i=1}^m u_i(\tau) b_i d\tau$$

сюръективно тогда и только тогда, когда сюръективна его линейная часть

$$u \mapsto e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} \sum_{i=1}^m u_i(\tau) b_i d\tau. \quad (3.8)$$

В свою очередь, сюръективность отображения (3.8) равносильна сюръективности следующего отображения:

$$u \mapsto \int_0^t e^{-\tau A} \sum_{i=1}^m u_i(\tau) b_i d\tau. \quad (3.9)$$

Теорема 3.1. *Линейная система (3.1) вполне управляема за время $t > 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\text{span}\{A^j b_i \mid j = 0, \dots, n-1, i = 1, \dots, m\} = \mathbb{R}^n. \quad (3.10)$$

Доказательство. Необходимость. От противного, предположим, что условие (3.10) не выполняется. Тогда существует ковектор $p \in \mathbb{R}^{n*}$, $p \neq 0$, такой, что

$$pA^j b_i = 0, \quad j = 0, \dots, n-1, i = 1, \dots, m. \quad (3.11)$$

По теореме Кэли,

$$A^n = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j$$

для некоторых вещественных чисел $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$, поэтому

$$A^k = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^k A^j$$

для любого $k \in \mathbb{N}$ и некоторых $\beta_j^k \in \mathbb{R}$. Тогда из (3.11) получаем:

$$pA^k b_i = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^k pA^j b_i = 0, \quad k = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, m.$$

Поэтому

$$pe^{-\tau A} b_i = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

значит,

$$p \int_0^t e^{-\tau A} \sum_{i=1}^m u_i(\tau) b_i d\tau = \int_0^t \sum_{i=1}^m u_i(\tau) pe^{-\tau A} b_i d\tau = 0,$$

т.е. отображение (3.9) не сюръективно. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. От противного, пусть отображение (3.9) не сюръективно. Тогда существует ковектор $p \in \mathbb{R}^{n*}$, $p \neq 0$, такой, что

$$p \int_0^t \sum_{i=1}^m u_i(\tau) e^{-\tau A} b_i d\tau = 0 \quad \forall u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)). \quad (3.12)$$

Возьмем управление

$$u(\tau) = (0, \dots, 0, v_s(\tau), 0, \dots, 0),$$

где единственная отличная от нуля i -ая компонента имеет вид

$$v_s(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq s, \\ 0, & \tau > s. \end{cases}$$

Тогда из равенства (3.12) следует, что

$$p \int_0^s e^{-\tau A} b_i d\tau = 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

поэтому

$$p e^{-sA} b_i = 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Последовательно дифференцируя это тождество при $s = 0$, получаем

$$p A^k b_i = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, \dots, m,$$

что противоречит (3.10). Достаточность доказана. $\square$

Таким образом, если линейная система вполне управляема за какое-то время $t > 0$, то она вполне управляема и за любое другое положительное время. В этом случае линейная система называется управляемой.

Глава 4

Линеаризация нелинейных систем по состоянию

Цель данной главы — в том, чтобы охарактеризовать нелинейные системы

$$\dot{q} = f_0(q) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(q), \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m, \quad q \in M, \quad (4.1)$$

являющиеся локально или глобально эквивалентными управляемым линейным системам. Иными словами, мы хотим найти условия на векторные поля $f_0, f_1, \dots, f_m$, обеспечивающие существование диффеоморфизма (глобального $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ или локального $\Phi : O_{q_0} \subset M \rightarrow O_0 \subset \mathbb{R}^n$), переводящего нелинейную систему (4.1) в некоторую управляемую линейную систему (3.1).

4.1 Локальная линеаризуемость

Начнем с локальной задачи. Условия локальной линеаризуемости естественно формулировать в терминах скобок Ли, т.к. они сохраняются при диффеоморфизмах:

$$\Phi_*[V, W] = [\Phi_*V, \Phi_*W], \quad V, W \in \text{Vec } M.$$

Условие управляемости (3.10) легко записывается в терминах скобок Ли: для векторных полей (3.3) имеем

$$(-A)^j b_i = (\text{ad } f_0)^j f_i = \underbrace{[f_0, [\dots [f_0, f_i] \dots]]}_{j \text{ times}},$$

поэтому критерий управляемости для линейных систем (3.10) имеет вид

$$\text{span}\{x_0 \circ (\text{ad } f_0)^j f_i \mid j = 0, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, m\} = T_{x_0} \mathbb{R}^n.$$

Далее, очевидно, что следующее условие выполняется для линейных векторных полей (3.3):

$$[(\operatorname{ad} f_0)^{j_1} f_{i_1}, (\operatorname{ad} f_0)^{j_2} f_{i_2}] = [(-A)^{j_1} b_{i_1}, (-A)^{j_2} b_{i_2}] = 0, \\ 0 \leq j_1, j_2, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq m.$$

Оказывается, что указанные выше два условия локально характеризуют управляемые линейные системы.

Теорема 4.1. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, $f_0, f_1, \dots, f_m \in \operatorname{Vec} M$, и $q_0 \in M$. Диффеоморфизм

$$\Phi : O_{q_0} \rightarrow O_0$$

некоторой окрестности $O_{q_0} \subset M$ точки q_0 в некоторую окрестность $O_0 \subset \mathbb{R}^n$ начала координат $0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$(\Phi_* f_0)(x) = Ax + c, \quad x \in O_0, \\ (\Phi_* f_i)(x) = b_i, \quad x \in O_0, \quad i = 1, \dots, m,$$

для некоторых $n \times n$ матрицы A и векторов $c, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию управляемости (3.10), существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\operatorname{span}\{q_0 \circ (\operatorname{ad} f_0)^j f_i \mid j = 0, \dots, n-1, i = 1, \dots, m\} = T_{q_0} M, \quad (4.2)$$

$$q \circ [(\operatorname{ad} f_0)^{j_1} f_{i_1}, (\operatorname{ad} f_0)^{j_2} f_{i_2}] = 0, \\ q \in O_{q_0}, \quad 0 \leq j_1, j_2 \leq n, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq m. \quad (4.3)$$

Замечание. Иными словами, диффеоморфизм Φ в формулировке теоремы переводит нелинейную систему (4.1) в линейную (3.1).

Прежде чем доказывать теорему, рассмотрим следующее предложение, которое понадобится нам ниже.

Лемма 4.1. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, и пусть $Y_1, \dots, Y_k \in \operatorname{Vec} M$. Диффеоморфизм

$$\Phi : O_0 \rightarrow O_{q_0}$$

окрестности $O_0 \subset \mathbb{R}^n$ в окрестность $O_{q_0} \subset M$, $q_0 \in M$ такой, что

$$\Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = Y_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

существует тогда и только тогда, когда векторные поля $Y_1, \dots, Y_k$ коммутируют:

$$[Y_i, Y_j] \equiv 0, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

и линейно независимы:

$$\dim \operatorname{span}(q_0 \circ Y_1, \dots, q_0 \circ Y_k) = k.$$

Доказательство. Необходимость очевидна, т.к. скобка Ли и линейная независимость сохраняются при диффеоморфизмах.

Достаточность. Выберем поля $Y_{k+1}, \dots, Y_n \in \text{Vec } M$, дополняющие $Y_1, \dots, Y_k$ до базиса:

$$\text{span}(q \circ Y_1, \dots, q \circ Y_n) = T_q M, \quad q \in O_{q_0}.$$

Отображение

$$\Phi(s_1, \dots, s_n) = q_0 \circ e^{s_n Y_n} \circ \dots \circ e^{s_1 Y_1}$$

определено в достаточно малой окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$. Имеем

$$\Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial s_i} \Big|_{s=0} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial s_i} \Big|_{s=0} \Phi(s) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} q_0 \circ e^{\varepsilon Y_i} = q_0 \circ Y_i.$$

Поэтому дифференциал $\Phi_*|_{s=0}$ сюръективен, и по теореме о неявной функции Φ — диффеоморфизм из некоторой окрестности точки 0 в $\mathbb{R}^n$ на некоторую окрестность точки q_0 в M .

Теперь докажем, что Φ выпрямляет векторные поля $Y_1, \dots, Y_k$. Во-первых, заметим, что так как эти поля коммутируют, то коммутируют и их потоки, поэтому

$$e^{s_k Y_k} \circ \dots \circ e^{s_1 Y_1} = e^{\sum_{i=1}^k s_i Y_i}$$

и

$$\Phi(s_1, \dots, s_n) = q_0 \circ e^{s_n Y_n} \circ \dots \circ e^{s_{k+1} Y_{k+1}} \circ e^{\sum_{i=1}^k s_i Y_i}.$$

Тогда для $i = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial s_i} \right) \Big|_{\Phi(s)} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Phi(s_1, \dots, s_i + \varepsilon, \dots, s_n) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} q_0 \circ e^{s_n Y_n} \circ \dots \circ e^{s_{k+1} Y_{k+1}} \circ e^{\sum_{j=1}^k s_j Y_j} \circ e^{\varepsilon Y_i} \\ &= q_0 \circ e^{s_n Y_n} \circ \dots \circ e^{s_{k+1} Y_{k+1}} \circ e^{\sum_{j=1}^k s_j Y_j} \circ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} e^{\varepsilon Y_i} \\ &= \Phi(s) \circ Y_i. \end{aligned}$$

□

Теперь мы можем доказать теорему 4.1 о локальной эквивалентности нелинейных систем линейным.

Доказательство. Необходимость очевидна, т.к. скобки Ли инвариантны относительно диффеоморфизмов, а для управляемых линейных систем условия (4.2), (4.3) выполняются.

Достаточность. Выберем базис пространства $T_{q_0}M$ из векторов вида $q_0 \circ (\text{ad } f_0)^j f_i$:

$$Y_\alpha = (\text{ad } f_0)^{j_\alpha} f_{i_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad 0 \leq j_\alpha \leq n-1, \quad 1 \leq i_\alpha \leq m, \\ \text{span}(q_0 \circ Y_1, \dots, q_0 \circ Y_n) = T_{q_0}M.$$

По лемме 4.1, существует выпрямляющий диффеоморфизм:

$$\Phi : O_{q_0} \rightarrow O_0, \quad \Phi_* Y_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Покажем, что диффеоморфизм Φ — искомый.

(1) Проверим сначала, что векторные поля $\Phi_* f_i$, $i = 1, \dots, m$, постоянны. То есть, покажем, что в разложении

$$\Phi_* f_i = \sum_{\alpha=1}^n \beta_\alpha^i(x) \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad i = 1, \dots, m,$$

функции $\beta_\alpha^i(x)$ постоянны. Имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \Phi_* f_i \right] = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \beta_\alpha^i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad (4.4)$$

с другой стороны,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \Phi_* f_i \right] = [\Phi_* Y_\alpha, \Phi_* f_i] = \Phi_* [Y_\alpha, f_i] = \Phi_* [(\text{ad } f_0)^{j_\alpha} f_{i_\alpha}, f_i] = 0 \quad (4.5)$$

по условию (4.3). Сравнивая (4.4) и (4.5), получаем

$$\frac{\partial \beta_\alpha^i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_\alpha^i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

т.е. $\Phi_* f_i$, $i = 1, \dots, m$, суть постоянные векторные поля, которые мы и обозначим через b_i , $i = 1, \dots, m$.

(2) Теперь покажем, что векторное поле $\Phi_* f_0$ линейно. Докажем, что в разложении

$$\Phi_* f_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

все функции $\beta_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, линейны. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}, \Phi_* f_0 \right] \right] \\ &= [\Phi_* Y_\alpha, [\Phi_* Y_\beta, \Phi_* f_0]] = \Phi_* [Y_\alpha, [Y_\beta, f_0]] \\ &= \Phi_* [(\text{ad } f_0)^{j_\alpha} f_{i_\alpha}, [(\text{ad } f_0)^{j_\beta} f_{i_\beta}, f_0]] \\ &= -\Phi_* [(\text{ad } f_0)^{j_\alpha} f_{i_\alpha}, [f_0, (\text{ad } f_0)^{j_\beta} f_{i_\beta}]] \\ &= -\Phi_* [(\text{ad } f_0)^{j_\alpha} f_{i_\alpha}, (\text{ad } f_0)^{j_\beta+1} f_{i_\beta}] \\ &= 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

по условию (4.3). Поэтому

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv 0, \quad i, \alpha, \beta = 1, \dots, n,$$

т.е. $\Phi_* f_0$ — линейное векторное поле, которое мы обозначим через $Ax + c$.

Для линейной системы $\dot{x} = Ax + c + \sum_{i=1}^m u_i b_i$ из предположения (4.2) следует условие управляемости (3.10). Теорема доказана. $\square$

4.2 Глобальная линеаризуемость

Теперь докажем следующее предложение о глобальной эквивалентности.

Теорема 4.2. Пусть M — связное гладкое n -мерное многообразие, и пусть $f_0, f_1, \dots, f_m \in \text{Vec } M$. Диффеоморфизм

$$\Phi : M \rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

многообразия M на произведение k -мерного тора $\mathbb{T}^k$ и пространства $\mathbb{R}^{n-k}$ для некоторого $k \leq n$ такой, что

$$\begin{aligned} (\Phi_* f_0)(x) &= Ax + c, & x \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \\ (\Phi_* f_i)(x) &= b_i, & x \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

для некоторой $n \times n$ матрицы A с нулевыми первыми k столбцами:

$$Ae_i = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (4.6)$$

и векторами $c, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющими условию управляемости (3.10), существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} (\text{ad } f_0)^j f_i, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, m, \\ \text{суть полные векторные поля,} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\text{span}\{q \circ (\text{ad } f_0)^j f_i \mid j = 0, \dots, n-1, i = 1, \dots, m\} = T_q M, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} q \circ [(\text{ad } f_0)^{j_1} f_{i_1}, (\text{ad } f_0)^{j_2} f_{i_2}] &= 0, \\ q \in M, \quad 0 \leq j_1, j_2 \leq n, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq m. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Замечания. (1) Если вдобавок многообразие M односвязно, то оно диффеоморфно $\mathbb{R}^n$, т.е. $k = 0$.

(2) Если же многообразие M компактно, т.е. диффеоморфно $\mathbb{T}^n$, и $m < n$, то на M не существует глобально линеаризуемых систем. Действительно, тогда $A = 0$, и условие управляемости (3.10) нарушается.

Доказательство. Достаточность. Зафиксируем произвольную точку $q_0 \in M$ и выберем в $T_{q_0} M$ базис из векторов вида

$$\begin{aligned} Y_\alpha &= (\text{ad } f_0)^{j_\alpha} f_{i_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \\ \text{span}(q_0 \circ Y_1, \dots, q_0 \circ Y_n) &= T_{q_0} M. \end{aligned}$$

(1) Сначала покажем, что векторные поля $Y_1, \dots, Y_n$ линейно независимы всюду на M . Очевидно, что множество

$$O = \{q \in M \mid \text{span}(q \circ Y_1, \dots, q \circ Y_n) = T_q M\}$$

открыто. Покажем, что оно замкнуто. На этом множестве справедливо разложение

$$q \circ (\text{ad } f_0)^j f_i = q \circ \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}^{ij} Y_{\alpha}, \quad q \in O, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.10)$$

для некоторых функций $a_{\alpha}^{ij} \in C^{\infty}(O)$. Докажем, что на самом деле все a_{α}^{ij} постоянны. Имеем

$$0 = [Y_{\beta}, \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}^{ij} Y_{\alpha}]$$

по правилу Лейбница $[X, aY] = (Xa)Y + a[X, Y]$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}^{ij} [Y_{\beta}, Y_{\alpha}] + \sum_{\alpha=1}^n (Y_{\beta} a_{\alpha}^{ij}) Y_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n (Y_{\beta} a_{\alpha}^{ij}) Y_{\alpha}, \quad \beta = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

поэтому

$$Y_{\beta} a_{\alpha}^{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{\alpha}^{ij}|_O = \text{const}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, m.$$

Поэтому равенство (4.10) справедливо в замыкании $\overline{O}$. Следовательно, векторные поля $Y_1, \dots, Y_n$ линейно независимы в $\overline{O}$ (если это не так, то все семейство $(\text{ad } f_0)^j f_i$, $j = 0, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, m$, линейно зависимо в $\overline{O}$). Итак, множество O замкнуто. Так как оно одновременно открыто, а M связно, то

$$O = M,$$

т.е. векторные поля $Y_1, \dots, Y_n$ линейно независимы в M .

(2) Определим «обращение» Ψ искомого диффеоморфизма следующим образом:

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = q_0 \circ e^{x_1 Y_1} \circ \dots \circ e^{x_n Y_n}$$

т.к. векторные поля Y_α коммутируют

$$= q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha Y_\alpha}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(3) Покажем, что гладкое отображение $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ регулярно, т.е. его дифференциал сюръективен. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha}(x) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Psi(x_1, \dots, x_\alpha + \varepsilon, \dots, x_n) \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} q_0 \circ e^{\sum_{\beta=1}^n x_\beta Y_\beta + \varepsilon Y_\alpha} \\ &= q_0 \circ e^{\sum_{\beta=1}^n x_\beta Y_\beta} \circ Y_\alpha \\ &= \Psi(x) \circ Y_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

поэтому

$$\Psi_{*x}(\mathbb{R}^n) = T_{\Psi(x)}M.$$

Итак, отображение Ψ регулярно, потому локально диффеоморфно. В частности, его образ $\Psi(\mathbb{R}^n)$ открыт.

(4) Докажем, что множество $\Psi(\mathbb{R}^n)$ замкнуто. Возьмем любую точку $q \in \Psi(\mathbb{R}^n)$. Так как векторные поля $Y_1, \dots, Y_n$ линейно независимы, образ отображения

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto q \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha Y_\alpha}, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

содержит окрестность точки q . Поэтому существует такое $y \in \mathbb{R}^n$, что

$$q \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha Y_\alpha} \in \Psi(\mathbb{R}^n),$$

т.е.

$$q \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha Y_\alpha} = q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha Y_\alpha}$$

для некоторого $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} q &= q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha Y_\alpha} \circ e^{-\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha Y_\alpha} = q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n (x_\alpha - y_\alpha) Y_\alpha} \\ &= \Psi(x - y). \end{aligned}$$

Иными словами, $q \in \Psi(\mathbb{R}^n)$.

Поэтому множество $\Psi(\mathbb{R}^n)$ замкнуто. Так как оно открыто и M связно, то

$$\Psi(\mathbb{R}^n) = M.$$

(5) Легко видеть, что прообраз

$$\Psi^{-1}(q_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) = q_0\}$$

есть подгруппа абелевой группы $\mathbb{R}^n$. Действительно, пусть

$$\Psi(x) = q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha Y_\alpha} = \Psi(y) = q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha Y_\alpha} = q_0,$$

тогда

$$\Psi(x+y) = q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n (x_\alpha + y_\alpha) Y_\alpha} = q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha Y_\alpha} \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha Y_\alpha} = q_0.$$

Аналогично, если

$$\Psi(x) = q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha Y_\alpha} = q_0,$$

то

$$\Psi(-x) = q_0 \circ e^{-\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha Y_\alpha} = q_0.$$

Наконец,

$$\Psi(0) = q_0.$$

(6) Более того, $G_0 = \Psi^{-1}(q_0)$ — дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^n$, т.е. малая окрестность начала координат в $\mathbb{R}^n$ не содержит ненулевых элементов прообраза $\Psi^{-1}(q_0)$, т.к. Ψ — локальный диффеоморфизм.

(7) Отображение Ψ корректно определено на факторе $\mathbb{R}^n / G_0$. Действительно, пусть $y \in G_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Psi(x+y) &= q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n (x_\alpha + y_\alpha) Y_\alpha} = q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha Y_\alpha} \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha Y_\alpha} \\ &= q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha Y_\alpha} = \Psi(x). \end{aligned}$$

Поэтому определено отображение

$$\Psi : \mathbb{R}^n / G_0 \rightarrow M. \quad (4.11)$$

(8) Отображение (4.11) взаимно однозначно: если

$$\Psi(x) = \Psi(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

то

$$q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha Y_\alpha} = q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha Y_\alpha},$$

поэтому

$$q_0 \circ e^{\sum_{\alpha=1}^n (x_\alpha - y_\alpha) Y_\alpha} = q_0,$$

т.е. $x - y \in G_0$.

(9) Следовательно, отображение (4.11) — диффеоморфизм. По лемме 4.2, приведенной ниже, дискретная подгруппа G_0 группы $\mathbb{R}^n$ является решеткой:

$$G_0 = \left\{ \sum_{i=1}^k n_i e_i \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

поэтому фактор по ней — цилиндр:

$$\mathbb{R}^n / G_0 = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Итак, мы построили диффеоморфизм

$$\Phi = \Psi^{-1} : M \rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Равенства (4.8) и (4.9) доказываются в точности как в теореме 4.1.

Векторное поле $\Phi_* f_0 = Ax + c$ корректно определено на факторе $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, поэтому справедливы равенства (4.6). Достаточность доказана.

Необходимость. Очевидно, что условия (4.7) и (4.9) выполняются для любой линейной системы на цилиндре $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Если линейная система управляема на цилиндре, то она управляема и на $\mathbb{R}^n$, поэтому условие управляемости (4.8) также выполняется. $\square$

Докажем следующее общее предложение, которым мы воспользовались выше.

Лемма 4.2. Пусть Γ — дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^n$. Тогда она является решеткой, т.е. существуют линейно независимые векторы $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^k n_i e_i \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

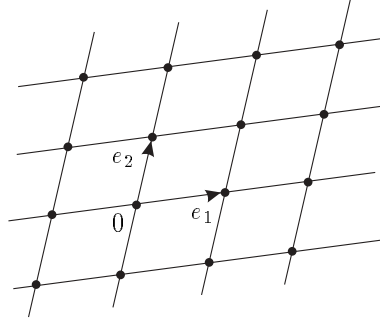


Рис. 4.1: Решетка, порожденная векторами e_1, e_2

Доказательство. Будем доказывать индукцией по размерности n объемлющей группы $\mathbb{R}^n$.

(1) Пусть $n = 1$. Так как подгруппа $\Gamma \subset \mathbb{R}$ дискретна, в ней существует ближайший к началу координат $0 \in \mathbb{R}$ элемент $e_1 \neq 0$. По групповому свойству,

все кратные $\pm e_1 \pm e_1 \pm \dots \pm e_1 = \pm n e_1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, также содержатся в Γ . Докажем, что Γ не содержит других элементов.

От противного, предположим, что существует элемент $x \in \Gamma$ такой, что $n e_1 < x < (n+1)e_1$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда элемент $y = x - n e_1 \in \Gamma$ содержится в интервале $(0, e_1) \subset \mathbb{R}$. Но тогда $y \neq 0$ ближе к началу координат, чем e_1 , что противоречит предположению. Следовательно, $\Gamma = \mathbb{Z} e_1 = \{n e_1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$, что и требовалось доказать.

(2) Докажем шаг индукции: предположим, что утверждение леммы доказано для некоторого $n-1 \in \mathbb{N}$ и докажем его для следующего номера n .

Выберем ближайший к началу координат $0 \in \mathbb{R}^n$ элемент $e_1 \in \Gamma$, $e_1 \neq 0$. Обозначим через l прямую $\mathbb{R} e_1$, а через Γ_1 решетку $\mathbb{Z} e_1 \subset \Gamma$. Предположим, что $\Gamma \neq \Gamma_1$ (в противном случае все доказано).

Покажем, что существует ближайший к l элемент $e_2 \in \Gamma \setminus \Gamma_1$:

$$\text{dist}(e_2, l) = \min\{\text{dist}(x, l) \mid x \in \Gamma \setminus l\}. \quad (4.12)$$

Возьмем любой отрезок $I = [n e_1, (n+1)e_1] \subset l$, и обозначим через $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow l$ ортогональную проекцию из $\mathbb{R}^n$ на l . В силу компактности отрезка I и дискретности подгруппы Γ , n -мерная полоса $\pi^{-1}(I)$ содержит ближайший к I элемент $e_2 \in \Gamma \setminus l$:

$$\text{dist}(e_2, I) = \min\{\text{dist}(x, I) \mid x \in (\Gamma \setminus l) \cap \pi^{-1}(I)\}.$$

Тогда элемент e_2 — искомый: он удовлетворяет равенству (4.12), т.к. любой элемент со свойством (4.12) можно перенести в полосу $\pi^{-1}(I)$ элементами решетки Γ_1 .

Поэтому достаточно малая окрестность прямой l не содержит элементов из дополнения $\Gamma \setminus \Gamma_1$. Следовательно, факторгруппа Γ/Γ_1 есть дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^n/l = \mathbb{R}^{n-1}$. По предположению индукции, Γ/Γ_1 — решетка, значит, Γ также решетка. $\square$

Глава 5

Теорема об орбите и ее приложения

5.1 Формулировка теоремы об орбите

Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$ — любое множество гладких векторных полей. Для упрощения формулировок будем предполагать, что все поля в $\mathcal{F}$ полны. Впрочем, все определения и результаты, приводимые ниже, легко обобщаются на случай неполных полей; оставляем эти обобщения читателю в виде упражнения.

Мы возвращаемся к изучению множеств достижимости: исследуем структуру множеств достижимости системы $\mathcal{F}$ с помощью кусочно-постоянных управлений

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{q_0 \circ e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k} \mid t_i \geq 0, f_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}\}, \quad q_0 \in M.$$

Но сначала рассмотрим большее множество — *орбиту* семейства $\mathcal{F}$ из некоторой точки q_0 :

$$\mathcal{O}_{q_0} = \{q_0 \circ e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k} \mid t_i \in \mathbb{R}, f_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}\}, \quad q_0 \in M.$$

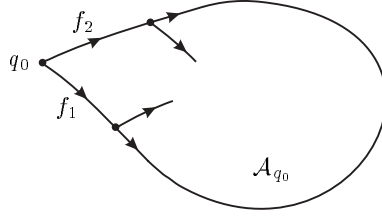
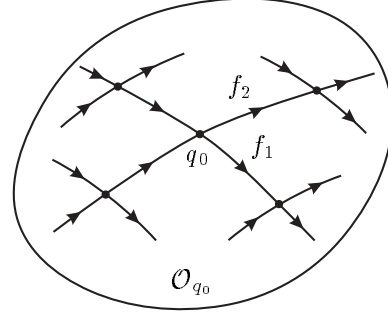
В орбите $\mathcal{O}_{q_0}$ можно двигаться вдоль векторных полей f_i как вперед, так и назад, в то время как во множестве достижимости $\mathcal{A}_{q_0}$ возможно только движение вперед, см. рис. 5.1, 5.2.

Впрочем, если семейство $\mathcal{F}$ *симметрично*: $\mathcal{F} = -\mathcal{F}$ (т.е. $f \in \mathcal{F} \Rightarrow -f \in \mathcal{F}$), то множества достижимости совпадают с орбитами: $\mathcal{O}_{q_0} = \mathcal{A}_{q_0}$, $q_0 \in M$.

Вообще говоря, орбиты имеют более простую структуру, чем множества достижимости. Она описывается в следующем важнейшем предложении.

Теорема 5.1 (Теорема об орбите, Нагано–Суссманн). Пусть $\mathcal{F}$ — семейство векторных полей и q_0 — точка в M . Тогда:

- (1) орбита $\mathcal{O}_{q_0}$ есть связное погруженное подмногообразие многообразия M .

Рис. 5.1: Множество достижимости $\mathcal{A}_{q_0}$ Рис. 5.2: Орбита $\mathcal{O}_{q_0}$

$$(2) \quad T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{span}\{q \circ (\text{Ad } P)f \mid P \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{F}\}, q \in \mathcal{O}_{q_0}.$$

Здесь мы обозначаем через $\mathcal{P}$ группу диффеоморфизмов многообразия M , порожденную потоками полей из $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{P} = \{e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k} \mid t_i \in \mathbb{R}, f_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}\} \subset \text{Diff } M.$$

Мы определим и обсудим понятие погруженного многообразия в следующем разделе.

5.2 Погруженные подмногообразия

Определение 5.1. Подмножество W гладкого n -мерного многообразия называется *погруженным k -мерным подмногообразием* многообразия M , $k \leq n$, если существует взаимно однозначное *погружение*

$$\Phi : N \rightarrow M, \quad \text{Ker } \Phi_{*x} = 0 \quad \forall x \in N$$

гладкого k -мерного многообразия N , такое что

$$W = \Phi(N).$$

Замечание. Погруженное подмногообразие W многообразия M можно также определить как многообразие, содержащееся в M , такое что отображение включения

$$i : W \rightarrow M, \quad i : q \mapsto q,$$

есть погружение.

Достаточно малые окрестности O_x в погруженном подмногообразии W многообразия M являются подмногообразиями в M , но всё W может и не быть подмногообразием в M в смысле определения 1.1. Вообще говоря, топология W может быть сильнее, чем топология, индуцированная на W топологией M .

Пример 5.1. Пусть $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — взаимно однозначное погружение прямой в плоскость, такое что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = \Phi(0)$. Тогда $W = \Phi(\mathbb{R})$ — погруженное одномерное подмногообразие $\mathbb{R}^2$, см. рис. 5.3. Топология W , унаследованная от $\mathbb{R}$, сильнее, чем топология, индуцированная $\mathbb{R}^2$. Интервалы $\Phi(-\varepsilon, \varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ в первой топологии открыты, а во второй нет.

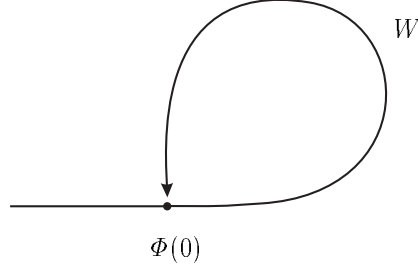


Рис. 5.3: Погруженное многообразие

Понятие погруженного подмногообразия неизбежно возникает при описании орбит семейств векторных полей. Уже орбита одного векторного поля (т.е. его траектория) есть погруженное подмногообразие и может не быть подмногообразием в смысле определения 1.1.

Пример 5.2. Осциллятор с двумя степенями свободы описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha^2 x &= 0, & x &\in \mathbb{R}, \\ \ddot{y} + \beta^2 y &= 0, & y &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

В комплексных переменных

$$z = x - i\dot{x}/\alpha, \quad w = y - i\dot{y}/\beta$$

эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\alpha z, & z &\in \mathbb{C}, \\ \dot{w} &= i\beta w, & w &\in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

поэтому они имеют решения

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{i\alpha t} z(0), \\ w(t) &= e^{i\beta t} w(0). \end{aligned}$$

Любое решение $(z(t), w(t))$ уравнений (5.1) принадлежит некоторому инвариантному тору

$$\mathbb{T}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = \text{const}, |w| = \text{const}\}.$$

Любой такой тор параметризуется аргументами чисел z, w по модулю 2π , поэтому он является группой: $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2 / (2\pi \mathbb{Z})^2$.

Введем новый параметр $\tau = \alpha t$, тогда траектории (z, w) становятся образам прямой $\{(\tau, (\beta/\alpha)\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}\}$ при погружении

$$(\tau, (\beta/\alpha)\tau) \mapsto (\tau + 2\pi \mathbb{Z}, (\beta/\alpha)\tau + 2\pi \mathbb{Z}) \in \mathbb{R}^2 / (2\pi \mathbb{Z})^2,$$

поэтому погруженными подмногообразиями тора.

Если отношение β/α иррационально, то траектории всюду плотны в торе: они образуют иррациональную обмотку тора. В этом случае траектории, т.е. орбиты соответствующего векторного поля, — не подмногообразия, а всего лишь погруженные подмногообразия.

Замечание. Погруженные подмногообразия наследуют многие локальные свойства подмногообразий. В частности, касательное пространство погруженного подмногообразия $W = \text{Im } \Phi \subset M$, где Φ — погружение, задается как

$$T_{\Phi(x)}W = \text{Im } \Phi_{*x}.$$

Далее, легко доказать следующее свойство произвольного векторного поля $V \in \text{Vec } M$:

$$V(q) \in T_q W \quad \forall q \in W \quad \Rightarrow \quad q \circ e^{tV} \in W \quad \forall q \in W,$$

для всех t , достаточно близких к 0.

5.3 Следствия теоремы об орбите

Перед тем, как доказать теорему об орбите, мы получим несколько следствий из нее.

Пусть $\mathcal{O}_{q_0}$ — орбита семейства $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$.

Во-первых, если $f \in \mathcal{F}$, то $f(q) \in T_q \mathcal{O}_{q_0}$ для всех $q \in \mathcal{O}_{q_0}$. Действительно, траектория $q \circ e^{tf}$ принадлежит орбите $\mathcal{O}_{q_0}$, поэтому ее касательный вектор $f(q)$ содержится в касательном пространстве $T_q \mathcal{O}_{q_0}$.

Далее, если $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, то $[f_1, f_2](q) \in T_q \mathcal{O}_{q_0}$ для всех $q \in \mathcal{O}_{q_0}$. Это следует из того, что вектор $[f_1, f_2](q)$ касается траектории

$$t \mapsto q \circ e^{tf_1} \circ e^{tf_2} \circ e^{-tf_1} \circ e^{-tf_2} \in \mathcal{O}_{q_0}.$$

Аналогично, для трёх векторных полей $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}$ имеем $[f_1, [f_2, f_3]](q) \in T_q \mathcal{O}_{q_0}$, $q \in \mathcal{O}_{q_0}$. Действительно, так как $[f_2, f_3](q) \in T_q \mathcal{O}_{q_0}$, $q \in \mathcal{O}_{q_0}$, то все траектории поля $[f_2, f_3]$, начинающиеся в погруженном подмногообразии $\mathcal{O}_{q_0}$, не покидают его. Затем повторяем рассуждение, приведенное в предыдущем абзаце.

Можно продолжать таким образом и далее и получить скобки Ли сколь угодно высокого порядка

$$[f_1, [\dots [f_{k-1}, f_k] \dots]](q)$$

как касательные векторы к $\mathcal{O}_{q_0}$ при $f_i \in \mathcal{F}$. Эти рассуждения естественно суммируются в терминах алгебры Ли векторных полей, порожденной семейством $\mathcal{F}$:

$$\text{Lie } \mathcal{F} = \text{span}\{[f_1, [\dots [f_{k-1}, f_k] \dots]] \mid f_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}\} \subset \text{Vec } M,$$

и пространства, образованного значениями этих векторных полей в точке $q \in M$:

$$\text{Lie}_q \mathcal{F} = \{q \circ V \mid V \in \text{Lie } \mathcal{F}\} \subset T_q M.$$

Получаем следующее предложение.

Следствие 5.1. *Для любой точки $q \in \mathcal{O}_{q_0}$*

$$\text{Lie}_q \mathcal{F} \subset T_q \mathcal{O}_{q_0}. \quad (5.2)$$

Замечание. Мы покажем вскоре, что во многих важных случаях включение (5.2) обращается в равенство. В общем случае получаем следующую оценку сверху:

$$\dim \text{Lie}_q \mathcal{F} \leq \dim \mathcal{O}_{q_0}, \quad q \in \mathcal{O}_{q_0}.$$

Из теоремы об орбите также вытекает следующее предложение, часто используемое в теории управления.

Теорема 5.2 (Рашевский–Чжоу). *Пусть M — связное гладкое многообразие, и пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$. Если семейство $\mathcal{F}$ вполне неголономно:*

$$\text{Lie}_q \mathcal{F} = T_q M \quad \forall q \in M, \quad (5.3)$$

то

$$\mathcal{O}_{q_0} = M \quad \forall q_0 \in M. \quad (5.4)$$

Определение 5.2. Семейство $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$, удовлетворяющее свойству (5.3), называется *вполне неголономным* или семейством *полного ранга*.

Докажем теорему 5.2.

Доказательство. По следствию 5.1, равенство (5.3) означает, что любая орбита $\mathcal{O}_{q_0}$ — открытое подмножество M .

Далее, рассмотрим следующее отношение эквивалентности в M :

$$q_1 \sim q_2 \Leftrightarrow q_2 \in \mathcal{O}_{q_1}, \quad q_1, q_2 \in M. \quad (5.5)$$

Многообразие M есть объединение взаимно непересекающихся классов эквивалентности. Любой класс является открытым подмножеством многообразия M . Но M связно, поэтому существует лишь один непустой класс эквивалентности, то есть M совпадает с единственной орбитой $\mathcal{O}_{q_0}$. $\square$

Для симметричных семейств множества достижимости совпадают с орбитами, поэтому получаем следующее предложение.

Следствие 5.2. *Симметричное вполне неголономное семейство векторных полей на связном многообразии вполне управляемо.*

5.4 Доказательство теоремы об орбите

Введем обозначение:

$$(\text{Ad } \mathcal{P})\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\text{Ad } P)f \mid P \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{F}\} \subset \text{Vec } M$$

и рассмотрим следующее подпространство в $T_q M$:

$$\Pi_q \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{q \circ (\text{Ad } \mathcal{P})\mathcal{F}\}.$$

Это пространство — кандидат в касательные пространства $T_q \mathcal{O}_{q_0}$.

Лемма 5.1. $\dim \Pi_q = \dim \Pi_{q_0}$ для всех $q \in \mathcal{O}_{q_0}$, $q_0 \in M$.

Доказательство. Отметим, что если $q \in \mathcal{O}_{q_0}$, то $q = q_0 \circ Q$ для некоторого диффеоморфизма $Q \in \mathcal{P}$.

Возьмем произвольный элемент $q_0 \circ (\text{Ad } P)f \in \Pi_{q_0}$, где $P \in \mathcal{P}$, $f \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_*(q_0 \circ (\text{Ad } P)f) &= q_0 \circ (\text{Ad } P)f \circ Q = q_0 \circ P \circ f \circ P^{-1} \circ Q \\ &= (q_0 \circ Q) \circ (Q^{-1} \circ P \circ f \circ P^{-1} \circ Q) \\ &= q \circ \text{Ad}(Q^{-1} \circ P)f \in \Pi_q \end{aligned}$$

в силу того, что $Q^{-1} \circ P \in \mathcal{P}$.

Имеем $Q_*\Pi_{q_0} \subset \Pi_q$, поэтому $\dim \Pi_{q_0} \leq \dim \Pi_q$. Но q_0 и q можно поменять местами, следовательно, $\dim \Pi_q \leq \dim \Pi_{q_0}$. Итак, $\dim \Pi_q = \dim \Pi_{q_0}$. $\square$

Теперь докажем теорему об орбите.

Доказательство. Многообразие M распадается в объединение взаимно непесекающихся классов эквивалентности отношения (5.5) — орбит $\mathcal{O}_q$. Введем на M новую «сильную» топологию, в которой все орбиты суть связные компоненты.

Для любой точки $q \in M$, обозначим $m = \dim \Pi_q$ и выберем элементы $V_1, \dots, V_m \in (\text{Ad } \mathcal{P})\mathcal{F}$ так, чтобы

$$\text{span}(V_1(q), \dots, V_m(q)) = \Pi_q. \quad (5.6)$$

Определим отображение:

$$G_q : (t_1, \dots, t_m) \mapsto q \circ e^{t_1 V_1} \circ \dots \circ e^{t_m V_m}, \quad t_i \in \mathbb{R}.$$

Имеем

$$\left. \frac{\partial G_q}{\partial t_i} \right|_0 = V_i(q),$$

поэтому в достаточно малой окрестности O_0 начала координат $0 \in \mathbb{R}^m$ векторы $\frac{\partial G_q}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial G_q}{\partial t_m}$ линейно независимы, т.е. $G_q|_{O_0}$ — погружение.

Множества вида $G_q(O_0)$, $q \in M$, являются кандидатами на роль элементов базы топологии на M . Докажем несколько соответствующих свойств этих множеств.

(1) Так как отображения G_q регулярны, множества $G_q(O_0)$ — m -мерные подмногообразия многообразия M , быть может, для меньших окрестностей O_0 .

(2) Покажем, что $G_q(O_0) \subset \mathcal{O}_q$. Любой элемент базиса (5.6) имеет вид $V_i = (\text{Ad } P_i)f_i$, $P_i \in \mathcal{P}$, $f_i \in \mathcal{F}$. Тогда

$$e^{tV_i} = e^{t(\text{Ad } P_i)f_i} = e^{tP_i \circ f_i \circ P_i^{-1}} = P_i \circ e^{tf_i} \circ P_i^{-1} \in \mathcal{P},$$

поэтому

$$G_q(t) = q \circ e^{tV_i} \in \mathcal{O}_q, \quad t \in O_0.$$

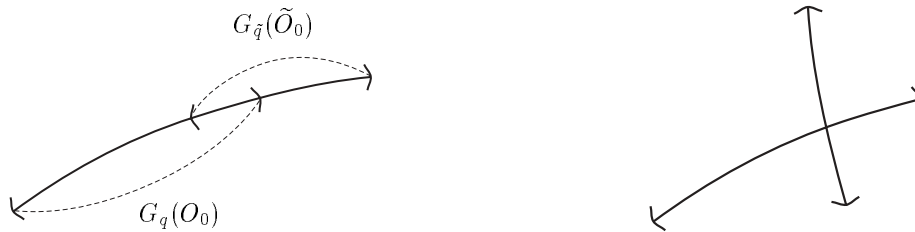
(3) Покажем, что $G_{*t}(T_t \mathbb{R}^m) = \Pi_{G(t)}$, $t \in O_0$. Так как $\text{rank } G_{*t}|_{O_0} = m$ и $\dim \Pi_{G(t)}|_{O_0} = m$, остается доказать, что $\left. \frac{\partial G_q}{\partial t_i} \right|_t \in \Pi_{G_q(t)}$ для $t \in O_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_i} G_q(t) &= \frac{\partial}{\partial t_i} q \circ e^{t_1 V_1} \circ \dots \circ e^{t_m V_m} \\ &= q \circ e^{t_1 V_1} \circ \dots \circ e^{t_i V_i} \circ V_i \circ e^{t_{i+1} V_{i+1}} \circ \dots \circ e^{t_m V_m} \\ &= q \circ e^{t_1 V_1} \circ \dots \circ e^{t_i V_i} \circ e^{t_{i+1} V_{i+1}} \circ \dots \circ e^{t_m V_m} \\ &\quad \circ e^{-t_m V_m} \circ \dots \circ e^{-t_{i+1} V_{i+1}} \circ V_i \circ e^{t_{i+1} V_{i+1}} \circ \dots \circ e^{t_m V_m} \end{aligned}$$

(введем обозначение $Q = e^{t_{i+1} V_{i+1}} \circ \dots \circ e^{t_m V_m} \in \mathcal{P}$)

$$= G_q(t) \circ Q^{-1} \circ V_i \circ Q = G_q(t) \circ \text{Ad } Q^{-1} V_i \in \Pi_{G_q(t)}.$$

(4) Докажем, что множества вида $G_q(O_0)$, $q \in M$, образуют базу топологии на M . Достаточно показать, что любое непустое пересечение $G_q(O_0) \cap G_{\tilde{q}}(\tilde{O}_0)$ содержит подмножество вида $G_{\hat{q}}(\hat{O}_0)$, т.е. это пересечение устроено как на рисунке слева, а не справа:



Пусть точка $\hat{q}$ принадлежит множеству $G_q(O_0)$. Тогда $\dim \Pi_{\hat{q}} = \dim \Pi_q = m$. Рассмотрим отображение

$$G_{\hat{q}} : (t_1, \dots, t_m) \mapsto \hat{q} \circ e^{t_1 \hat{V}_1} \circ \dots \circ e^{t_m \hat{V}_m},$$

$$\text{span}(\hat{q} \circ \hat{V}_1, \dots, \hat{q} \circ \hat{V}_m) = \Pi_{\hat{q}}.$$

Достаточно показать, что при малых $(t_1, \dots, t_m)$

$$G_{\hat{q}}(t_1, \dots, t_m) \in G_q(O_0),$$

тогда можно заменить $G_q(O_0)$ на $G_{\hat{q}}(\tilde{O}_0)$. Проведем доказательство шаг за шагом. Рассмотрим кривую $t_1 \mapsto \hat{q} \circ e^{t_1 \hat{V}_1}$. По свойству (3) выше, $\hat{V}_1(q') \in \Pi_{q'}$ для $q' \in G_q(O_0)$ и достаточно близких к $\hat{q}$. Так как $G_q(O_0)$ — подмногообразие в M и $\Pi_q = T_q G_q(O_0)$, то кривая $\hat{q} \circ e^{t_1 \hat{V}_1}$ принадлежит $G_q(O_0)$ для достаточно малых $|t_1|$. Повторив это рассуждение, получаем что

$$(\hat{q} \circ e^{t_1 \hat{V}_1}) \circ e^{t_2 \hat{V}_2} \in G_q(O_0)$$

при малых $|t_1|, |t_2|$. Продолжая этот процесс, получаем включение

$$(\hat{q} \circ e^{t_1 \hat{V}_1} \circ \dots \circ e^{t_{m-1} \hat{V}_{m-1}}) \circ e^{t_m \hat{V}_m} \in G_q(O_0)$$

для $(t_1, \dots, t_m)$, достаточно близких к $0 \in \mathbb{R}^m$.

Свойство (4) доказано, и множества $G_q(O_0)$, $q \in M$, образуют базу топологии на M . Обозначим через $M^{\mathcal{F}}$ полученное топологическое пространство, т.е. множество M с только что введенной на нем «сильной» топологией.

(5) Покажем, что для любого $q_0 \in M$ орбита $\mathcal{O}_{q_0}$ связна, открыта и замкнута в «сильной» топологии.

Связность: все отображения $t \mapsto q \circ e^{tf}$, $f \in \mathcal{F}$, непрерывны в «сильной» топологии, поэтому любую точку $q \in \mathcal{O}_{q_0}$ можно соединить с q_0 непрерывной кривой в $M^{\mathcal{F}}$.

Открытость: для любого $q \in \mathcal{O}_{q_0}$ множество вида $G_q(O_0) \subset \mathcal{O}_{q_0}$ — окрестность точки q в $M^{\mathcal{F}}$.

Замкнутость: любая орбита является дополнением к объединению открытых множеств (орбит), поэтому она замкнута.

Итак, любая орбита $\mathcal{O}_{q_0}$ есть компонента связности топологического пространства $M^{\mathcal{F}}$.

(6) Определим гладкую структуру на каждой орбите $\mathcal{O}_{q_0}$, выбрав $G_q(O_0)$ в качестве координатных окрестностей и G_q^{-1} в качестве координатных отображений. Так как все $G_q|_{\mathcal{O}_{q_0}}$ суть погружения, любая орбита $\mathcal{O}_{q_0}$ — погруженное подмногообразие в M . Заметим, что эти подмногообразия могут иметь разные размерности для разных q_0 .

(7) По свойству (3), имеем $T_q \mathcal{O}_{q_0} = \Pi_q$, $q \in \mathcal{O}_{q_0}$.

Теорема об орбите полностью доказана. $\square$

Описание касательного пространства к орбите, которое дает эта теорема:

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{span}(q \circ (\text{Ad } \mathcal{P})\mathcal{F}),$$

не очень конструктивно, так как группа $\mathcal{P}$ имеет довольно сложную структуру. Впрочем, мы уже получили из теоремы об орбите оценку снизу:

$$\text{Lie}_q \mathcal{F} \subset \text{span}(q \circ (\text{Ad } \mathcal{P})\mathcal{F}). \quad (5.7)$$

Отметим, что это включение несложно доказать непосредственно. Используем асимптотическое разложение поля $\text{Ad } e^{tf} \hat{f} = e^{t \text{ad } f} \hat{f}$. Возьмем любой элемент $\text{ad } f_1 \circ \dots \circ \text{ad } f_k \hat{f} \in \text{Lie } \mathcal{F}$, $f_i, \hat{f} \in \mathcal{F}$. Имеем $\text{Ad}(e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k}) \hat{f} \in (\text{Ad } \mathcal{P})\mathcal{F}$, поэтому

$$\begin{aligned} q \circ \frac{\partial^k}{\partial t_1 \dots \partial t_k} \Big|_0 \text{Ad}(e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k}) \hat{f} \\ = q \circ \frac{\partial^k}{\partial t_1 \dots \partial t_k} \Big|_0 (e^{t_1 \text{ad } f_1} \circ \dots \circ e^{t_k \text{ad } f_k}) \hat{f} \\ = q \circ \text{ad } f_1 \circ \dots \circ \text{ad } f_k \hat{f} \in \text{span}(q \circ (\text{Ad } \mathcal{P})\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда включение (5.7) становится строгим.

Пример 5.3. Пусть $M = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, a(x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} \right\}$, где функция $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $a \not\equiv 0$, имеет компактный носитель.

Легко видеть, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^2$ орбита $\mathcal{O}_x$ совпадает со всей плоскостью $\mathbb{R}^2$. Действительно, семейство $\mathcal{F} \cup (-\mathcal{F})$ вполне управляемо на плоскости. Каковы бы ни были начальная точка $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ и конечная точка $x_1 = (x_1^1, x_1^2)$, можно перевести x_0 в x_1 : сначала идем из x_0 вдоль поля $\pm \frac{\partial}{\partial x^1}$ в точку $(\tilde{x}^1, x_0^2)$ с $a(\tilde{x}^1) \neq 0$, затем движемся вдоль поля $\pm a(\tilde{x}^1) \frac{\partial}{\partial x^2}$ до точки $(\tilde{x}^1, x_1^2)$, и наконец попадаем в (x_1^1, x_1^2) вдоль $\pm \frac{\partial}{\partial x^1}$, см. рис. 5.4.

С другой стороны,

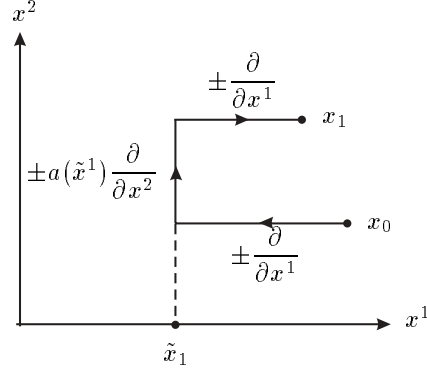
$$\dim \text{Lie}_{(x^1, x^2)}(\mathcal{F}) = \begin{cases} 1, & x^1 \notin \text{supp } a, \\ 2, & a(x^1) \neq 0. \end{cases}$$

То есть $x \circ (\text{Ad } \mathcal{P})\mathcal{F} = T_x \mathbb{R}^2 \neq \text{Lie}_x \mathcal{F}$ при $x^1 \notin \text{supp } a$.

Однако этот пример существенно неаналитический. В аналитическом случае включение (5.7) превращается в равенство. Мы докажем это в следующем разделе.

5.5 Аналитический случай

Множество $\text{Vec } M$ — не просто алгебра Ли (т.е. линейное пространство, замкнутое относительно скобки Ли), но также и *модуль* над $C^\infty(M)$: любое поле $V \in \text{Vec } M$ можно умножить на функцию $a \in C^\infty(M)$ и получить

Рис. 5.4: Полная управляемость семейства $\mathcal{F}$

векторное поле $aV \in \text{Vec } M$. Если рассматривать векторные поля как дифференцирования алгебры $C^\infty(M)$, то произведение функции a и поля V есть поле

$$(aV)b = a \cdot (Vb), \quad b \in C^\infty(M).$$

В локальных координатах любая компонента V в точке $q \in M$ умножается на $a(q)$.

Упражнение 5.1. Пусть $X, Y \in \text{Vec } M$, $a \in C^\infty(M)$, $P \in \text{Diff } M$. Докажите равенства:

$$(\text{ad } X)(aY) = (Xa)Y + a(\text{ad } X)Y,$$

$$(\text{Ad } P)(aX) = (Pa) \text{Ad } P X.$$

Подмодуль $\mathcal{V} \subset \text{Vec } M$ называется *конечнопорожденным* над $C^\infty(M)$, если в нем существует конечный глобальный базис векторных полей:

$$\exists V_1, \dots, V_k \in \text{Vec } M \quad \text{такие, что} \quad \mathcal{V} = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i V_i \mid a_i \in C^\infty(M) \right\}.$$

Лемма 5.2. Пусть $\mathcal{V} \subset \text{Vec } M$ — конечнопорожденный подмодуль над $C^\infty(M)$. Предположим, что для некоторого векторного поля $X \in \text{Vec } M$

$$(\text{ad } X)\mathcal{V} = \{(\text{ad } X)V \mid V \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{V}.$$

Тогда

$$(\text{Ad } e^{tX}) \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Доказательство. Пусть поля $V_1, \dots, V_k$ образуют базис $\mathcal{V}$. По условию леммы,

$$[X, V_i] = \sum_{j=1}^k a_{ij} V_j \quad (5.8)$$

для некоторых функций $a_{ij} \in C^\infty(M)$. Нужно доказать, что векторные поля

$$V_i(t) = (\text{Ad } e^{tX})V_i = e^{t \text{ad } X} V_i, \quad t \in \mathbb{R},$$

являются линейными комбинациями полей V_i с коэффициентами из $C^\infty(M)$.

Найдем дифференциальное уравнение для $V_i(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= e^{t \text{ad } X} [X, V_i] = e^{t \text{ad } X} \sum_{j=1}^k a_{ij} V_j \\ &= \sum_{j=1}^k (e^{tX} a_{ij}) V_j(t). \end{aligned}$$

Для фиксированного $q \in M$ определим следующую матрицу порядка k :

$$A(t) = (a_{ij}(t)), \quad a_{ij}(t) = e^{tX} a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Получаем линейную систему ОДУ:

$$\dot{V}_i(t) = \sum_{j=1}^k a_{ij}(t) V_j(t). \quad (5.9)$$

Введем фундаментальную матрицу Γ этой системы:

$$\dot{\Gamma} = A(t)\Gamma, \quad \Gamma(0) = \text{Id}.$$

Так как $A(t)$ гладко зависит от q , матрица Γ также гладко зависит от q :

$$\Gamma(t) = (\gamma_{ij}(t)), \quad \gamma_{ij}(t) \in C^\infty(M), \quad i, j = 1, \dots, k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теперь решения линейной системы (5.9) можно записать в виде:

$$V_i(t) = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij}(t) V_j(0).$$

Но поля $V_i(0) = V_i$ — порождающие модуля, т.е. мы получили искомое разложение полей $V_i(t)$ по порождающим. $\square$

Подмодуль $\mathcal{V} \subset \text{Vec } M$ называется *локально конечнопорожденным* над $C^\infty(M)$, если для любой точки $q \in M$ существует окрестность $O \subset M$, сужение на которую $\mathcal{F}|_O$ конечнопорождено над $C^\infty(O)$, т.е. имеет базис векторных полей.

Теорема 5.3. Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$. Предположим, что модуль $\text{Lie } \mathcal{F}$ локально конечнопорожден над $C^\infty(M)$. Тогда

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{Lie}_q \mathcal{F}, \quad q \in \mathcal{O}_{q_0} \quad (5.10)$$

для любой орбиты $\mathcal{O}_{q_0}$, $q_0 \in M$, семейства $\mathcal{F}$.

Мы докажем эту теорему ниже, а сейчас выведем из нее важное предложение.

Следствие 5.3. *Если M и $\mathcal{F}$ вещественно аналитичны, то справедливо равенство (5.10).*

Доказательство. В аналитическом случае модуль $\text{Lie } \mathcal{F}$ локально конечнопорожден. Действительно, любой модуль, порожденный аналитическими векторными полями, локально конечнопорожден. Это — нётерово свойство кольца ростков аналитических функций, см. [141]. $\square$

Теперь докажем теорему 5.3.

Доказательство. В силу теоремы об орбите,

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{span} \left\{ q \circ \text{Ad} \left(e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k} \right) \hat{f} \mid f_i, \hat{f} \in \mathcal{F}, t_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (5.11)$$

По определению алгебры Ли $\text{Lie } \mathcal{F}$,

$$(\text{ad } f) \text{Lie } \mathcal{F} \subset \text{Lie } \mathcal{F} \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Применяя лемму 5.2 к локально конечнопорожденному $C^\infty(M)$ -модулю $\mathcal{V} = \text{Lie } \mathcal{F}$, получаем

$$(\text{Ad } e^{tf}) \text{Lie } \mathcal{F} \subset \text{Lie } \mathcal{F} \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Следовательно,

$$\text{Ad} \left(e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k} \right) \hat{f} = \text{Ad } e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ \text{Ad } e^{t_k f_k} \hat{f} \in \text{Lie } \mathcal{F}$$

для любых $f_i, \hat{f} \in \mathcal{F}, t_k \in \mathbb{R}$. Ввиду равенства (5.11),

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} \subset \text{Lie}_q \mathcal{F}.$$

А обратное включение (5.7) уже было получено. Итак, $T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{Lie}_q \mathcal{F}$.

Другое доказательство этой теоремы можно получить, используя локальную сходимост экспоненциального ряда в аналитическом случае. $\square$

5.6 Теорема Фробениуса

Выведем из теоремы об орбите классическую теорему Фробениуса.

Определение 5.3. *Распределением $\Delta \subset TM$ на гладком многообразии M называется любое семейство линейных подпространств $\Delta_q \subset T_q M$, гладко зависящее от точки $q \in M$. Размерность подпространств $\Delta_q, q \in M$, предполагается постоянной.*

Геометрически, в каждой точке $q \in M$ приложено пространство $\Delta_q \subset T_q M$, т.е. имеем поле касательных подпространств на M .

Определение 5.4. Распределение Δ на многообразии M называется *интегрируемым*, если для любой точки $q \in M$ существует погруженное подмногообразие $N_q \subset M$, $q \in N_q$, такое, что

$$T_{q'} N_q = \Delta_{q'} \quad \forall q' \in N_q.$$

Подмногообразие N_q называется *интегральным многообразием* распределения Δ , проходящим через точку q , см. рис. 5.5.

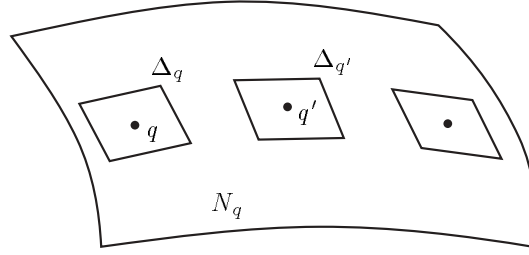


Рис. 5.5: Интегральное многообразие N_q распределения Δ

Иными словами, интегрируемость распределения $\Delta \subset TM$ означает, что через любую точку $q \in M$ можно провести подмногообразие N_q , касательные пространства которого — элементы распределения Δ .

Замечание. Если $\dim \Delta_q = 1$, то распределение Δ интегрируемо по теореме 1.2 о существовании и единственности решений ОДУ. Действительно, в окрестности любой точки M можно выбрать базис распределения Δ , т.е. векторное поле $V \in \text{Vec } M$ такое, что $\Delta_q = \text{span}(V(q))$, $q \in M$. Но тогда траектории ОДУ $\dot{q} = V(q)$ суть одномерные подмногообразия с касательными пространствами Δ_q .

Однако в общем случае ($\dim \Delta_q > 1$) распределение Δ может быть неинтегрируемым. Действительно, рассмотрим семейство векторных полей, касающихся Δ :

$$\overline{\Delta} = \{V \in \text{Vec } M \mid V(q) \in \Delta_q \quad \forall q \in M\}.$$

Предположим, что распределение Δ интегрируемо. Любое векторное поле из семейства $\overline{\Delta}$ касается интегральных многообразий N_q , поэтому орбита $\mathcal{O}_q$ семейства $\overline{\Delta}$, ограниченного на достаточно малую окрестность точки q , содержится в интегральном многообразии N_q . Более того, так как $\dim \mathcal{O}_q \geq \dim \Delta_q = \dim N_q$, то локально $\mathcal{O}_q = N_q$: можно двигаться в N_q в любом направлении вдоль полей семейства $\overline{\Delta}$. По теореме об орбите, $T_q \mathcal{O}_q \supset \text{Lie}_q \overline{\Delta}$, поэтому

$$\text{Lie}_q \overline{\Delta} = \Delta_q.$$

Это означает, что

$$[V_1, V_2] \in \overline{\Delta} \quad \forall V_1, V_2 \in \overline{\Delta}. \quad (5.12)$$

Пусть $\dim \Delta_q = k$. Выберем базис распределения Δ в окрестности O_{q_0} точки $q_0 \in M$:

$$\Delta_q = \text{span}(f_1(q), \dots, f_k(q)) \quad \forall q \in O_{q_0}.$$

Тогда включение (5.12) записывается как *условие Фробениуса*:

$$[f_i, f_j] = \sum_{l=1}^k c_{ij}^l f_l, \quad c_{ij}^l \in C^\infty(O_{q_0}). \quad (5.13)$$

Мы показали, что из интегрируемости распределения следует условие Фробениуса для его базиса.

Обратно, если условие (5.13) выполняется в окрестности любой точки $q_0 \in M$, то $\text{Lie}(\overline{\Delta}) = \overline{\Delta}$. Поэтому $\text{Lie}(\overline{\Delta})$ — локально конечнопорожденный модуль над $C^\infty(M)$. По теореме 5.3,

$$T_q O_{q_0} = \text{Lie}_q \overline{\Delta}, \quad q \in O_{q_0}.$$

Поэтому

$$T_q O_{q_0} = \Delta_q, \quad q \in O_{q_0},$$

т.е. орбита O_{q_0} есть интегральное многообразие распределения Δ , проходящее через точку q_0 . Мы доказали следующее предложение.

Теорема 5.4 (Фробениус). *Распределение $\Delta \subset TM$ интегрируемо тогда и только тогда, когда условие Фробениуса (5.13) выполняется для любого базиса Δ в окрестности любой точки $q_0 \in M$.*

Замечания. (1) По правилу Лейбница

$$[f, ag] = (fa)g + a[f, g], \quad f, g \in \text{Vec } M, \quad a \in C^\infty(M),$$

условие Фробениуса не зависит от выбора базиса $f_1, \dots, f_k$: если оно выполняется в каком-нибудь одном базисе, то выполняется и в любом другом.

(2) Можно рассматривать также гладкие распределения Δ с переменным рангом $\dim \Delta_q$. Такое распределение определяется как локально конечнопорожденный над $C^\infty(M)$ подмодуль $\Delta \subset \text{Vec } M$. Для таких распределений из условия Фробениуса следует интегрируемость; но размерность интегральных многообразий становится в общем случае переменной, хотя и остается постоянной вдоль орбит $\overline{\Delta}$. Это — обобщение фазового портрета векторного поля. Заметим еще раз, однако, что в общем случае распределения с $\dim \Delta_q > 1$ неинтегрируемы.

5.7 Эквивалентность управляемых систем по состоянию

В этом разделе мы рассмотрим еще одно приложение теоремы об орбите — к задаче эквивалентности управляемых систем (или семейств векторных полей).

Пусть U — произвольное индексное множество. Рассмотрим два семейства векторных полей на гладких многообразиях M и N , параметризованных одним и тем же множеством U :

$$\begin{aligned} f_U &= \{f_u \mid u \in U\} \subset \text{Vec } M, \\ g_U &= \{g_u \mid u \in U\} \subset \text{Vec } N. \end{aligned}$$

Возьмем любую пару точек $x_0 \in M$, $y_0 \in N$, и предположим, что семейства f_U , g_U имеют полный ранг:

$$\text{Lie}_{x_0} f_U = T_{x_0} M, \quad \text{Lie}_{y_0} g_U = T_{y_0} N.$$

Определение 5.5. Семейства f_U и g_U называются *локально эквивалентными по состоянию*, если существует диффеоморфизм окрестностей

$$\begin{aligned} \Phi : O_{x_0} \subset M &\rightarrow O_{y_0} \subset N, \\ \Phi : x_0 &\mapsto y_0, \end{aligned}$$

переводящий одно семейство в другое:

$$\Phi_* f_u = g_u \quad \forall u \in U.$$

Обозначение: $(f_U, x_0) \simeq (g_U, y_0)$.

Замечание. Мы рассматриваем здесь только гладкие преобразования состояния $x \mapsto y$, в то время как управления u не меняются. Поэтому такая эквивалентность называется эквивалентностью по состоянию. Ранее мы уже рассматривали эквивалентность по состоянию нелинейных и линейных систем, как локальную, так и глобальную, см. главу 4.

Сначала попытаемся найти необходимые условия локальной эквивалентности систем f_U и g_U . Пусть

$$(f_U, x_0) \simeq (g_U, y_0).$$

В силу инвариантности скобки Ли,

$$\Phi_*[f_{u_1}, f_{u_2}] = [\Phi_* f_{u_1}, \Phi_* f_{u_2}] = [g_{u_1}, g_{u_2}], \quad u_1, u_2 \in U,$$

т.е. соотношения между скобками Ли векторных полей эквивалентных семейств f_U и g_U должны сохраняться. Рассмотрим все соотношения между

этим скобками Ли в одной точке: определим системы касательных векторов

$$\begin{aligned}\xi_{u_1 \dots u_k} &= [f_{u_1}, [\dots, f_{u_k}] \dots](x_0) \in T_{x_0} M, \\ \eta_{u_1 \dots u_k} &= [g_{u_1}, [\dots, g_{u_k}] \dots](y_0) \in T_{y_0} N.\end{aligned}$$

Для этих систем имеем равенство

$$\Phi_*|_{x_0} \xi_{u_1 \dots u_k} = \eta_{u_1 \dots u_k}, \quad u_1, \dots, u_k \in U, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теперь можно сформулировать необходимое условие локальной эквивалентности семейств f_U и g_U в терминах линейного изоморфизма

$$\Phi_*|_{x_0} = A : T_{x_0} M \leftrightarrow T_{y_0} N.$$

Если $(f_U, x_0) \simeq (g_U, y_0)$, то существует линейный изоморфизм

$$A : T_{x_0} M \leftrightarrow T_{y_0} N,$$

отображающий систему векторов $\{\xi_{u_1 \dots u_k}\}$ в систему $\{\eta_{u_1 \dots u_k}\}$. Оказывается, что в аналитическом случае это условие достаточно для локальной эквивалентности по состоянию. То есть в аналитическом случае комбинации частных производных векторных полей f_u , $u \in U$, входящие в $\{\xi_{u_1 \dots u_k}\}$, образуют полную систему инвариантов семейства f_U для эквивалентности по состоянию.

Теорема 5.5. Пусть f_U и g_U — вещественно аналитические семейства векторных полей полного ранга на вещественно аналитических многообразиях M и N соответственно. Пусть $x_0 \in M$, $y_0 \in N$. Тогда $(f_U, x_0) \simeq (g_U, y_0)$ в том и только в том случае, когда существует линейный изоморфизм

$$A : T_{x_0} M \leftrightarrow T_{y_0} N$$

такой, что

$$A\{\xi_{u_1 \dots u_k}\} = \{\eta_{u_1 \dots u_k}\} \quad \forall u_1, \dots, u_k \in U, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.14)$$

Замечание. Если вдобавок M , N односвязны и все поля f_u , g_u полны, то имеет место глобальная эквивалентность.

Перед тем, как доказывать теорему 5.5, сформулируем условие (5.14) по-другому и укажем метод его проверки.

Пусть семейство f_U имеет полный ранг:

$$\text{span}\{\xi_{u_1 \dots u_k} \mid u_1, \dots, u_k \in U, \quad k \in \mathbb{N}\} = T_{x_0} M.$$

Выберем базис:

$$\text{span}(\xi_{\bar{\alpha}_1}, \dots, \xi_{\bar{\alpha}_n}) = T_{x_0} M, \quad \bar{\alpha}_i = (u_{1i}, \dots, u_{ki}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.15)$$

и выразим все векторы семейства ξ через базисные векторы:

$$\xi_{u_1 \dots u_k} = \sum_{i=1}^n c_{u_1 \dots u_k}^i \xi_{\bar{\alpha}_i}. \quad (5.16)$$

Если существует линейный изоморфизм $A : T_{x_0}M \leftrightarrow T_{y_0}N$ со свойством (5.14), то векторы

$$\eta_{\bar{\alpha}_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

должны образовывать базис пространства $T_{y_0}N$:

$$\text{span}(\eta_{\bar{\alpha}_1}, \dots, \eta_{\bar{\alpha}_n}) = T_{y_0}N, \quad (5.17)$$

а все векторы семейства η должны выражаться через базисные векторы с теми же коэффициентами, что и семейство ξ , см. (5.16):

$$\eta_{u_1 \dots u_k} = \sum_{i=1}^n c_{u_1 \dots u_k}^i \eta_{\bar{\alpha}_i}. \quad (5.18)$$

Легко получить обратную импликацию: если можно выбрать базисы в $T_{x_0}M$ и $T_{y_0}N$ из семейств ξ и η как в (5.15) и (5.17) так, чтобы имели место разложения (5.16) и (5.18) с одними и теми же коэффициентами $c_{u_1 \dots u_k}^i$, то существует линейный изоморфизм A со свойством (5.14). Действительно, в этом случае можно определить изоморфизм на базисных векторах:

$$A : \xi_{\bar{\alpha}_i} \mapsto \eta_{\bar{\alpha}_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Можно получить еще одну переформулировку, введя следующую терминологию. Конфигурации $\{\xi_{u_1 \dots u_k}\}$ и $\{\eta_{u_1 \dots u_k}\}$ называются эквивалентными, если множества соотношений $K(f_U)$ и $K(g_U)$ между элементами этих конфигураций совпадают: $K(f_U) = K(g_U)$. Здесь мы обозначаем через $K(f_U)$ множество всех наборов коэффициентов, для которых соответствующие линейные комбинации равны нулю:

$$K(f_U) = \left\{ (b_{u_1 \dots u_k}) \mid \sum_{u_1 \dots u_k} b_{u_1 \dots u_k} \xi_{u_1 \dots u_k} = 0 \right\}.$$

Тогда теорему 5.5 можно выразить следующим образом.

Принцип Нагано. *Вся локальная информация о семействах аналитических векторных полей полного ранга содержится в скобках Ли.*

Впрочем, заметим, что конфигурация $\xi_{u_1 \dots u_k}$ и система соотношений $K(f_U)$, вообще говоря, необозримы и не могут быть описаны просто. Поэтому обычно принцип Нагано неприменим непосредственно к описанию свойств управляемых систем, но это важный направляющий принцип.

Теперь докажем теорему 5.5.

Доказательство. Необходимость уже доказана. Докажем достаточность с помощью теоремы об орбите. Для этого построим вспомогательную систему на декартовом произведении

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}.$$

Для векторных полей $f \in \text{Vec } M$ и $g \in \text{Vec } N$ определим их прямое произведение $f \times g \in \text{Vec}(M \times N)$ как дифференцирование

$$(f \times g)a|_{(x,y)} = (fa_y^1)|_x + (ga_x^2)|_y, \quad a \in C^\infty(M \times N), \quad (5.19)$$

где семейства функций $a_y^1 \in C^\infty(M)$, $a_x^2 \in C^\infty(N)$ определяются следующим образом:

$$a_y^1 : x \mapsto a(x, y), \quad a_x^2 : y \mapsto a(x, y), \quad x \in M, y \in N.$$

Поэтому проекция поля $f \times g$ на M есть f , а проекция на N равна g . Наконец, определим прямое произведение систем f_U и g_U как

$$f_U \times g_U = \{f_u \times g_u \mid u \in U\} \subset \text{Vec}(M \times N).$$

Предположим, что существует линейный изоморфизм $A : T_{x_0}M \leftrightarrow T_{y_0}N$, отображающий конфигурацию ξ в η как в (5.14), и построим локальную эквивалентность $(f_U, x_0) \simeq (g_U, y_0)$.

В силу определения (5.19), скобка Ли в семействе $f_U \times g_U$ вычисляется следующим образом:

$$[f_{u_1} \times g_{u_1}, f_{u_2} \times g_{u_2}] = [f_{u_1}, f_{u_2}] \times [g_{u_1}, g_{u_2}], \quad u_1, u_2 \in U,$$

поэтому

$$\begin{aligned} & [f_{u_1} \times g_{u_1}, [\dots, f_{u_k} \times g_{u_k}] \dots](x_0, y_0) \\ &= [f_{u_1}, [\dots, f_{u_k}] \dots](x_0) \times [g_{u_1}, [\dots, g_{u_k}] \dots](y_0) \\ &= \xi_{u_1 \dots u_k} \times \eta_{u_1 \dots u_k} = \xi_{u_1 \dots u_k} \times A\xi_{u_1 \dots u_k}, \quad u_1, \dots, u_k \in U, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dim \text{Lie}_{(x_0, y_0)}(f_U \times g_U) = n,$$

где $n = \dim M$. По аналитической версии теоремы об орбите (следствие 5.3) для семейства $f_U \times g_U \subset \text{Vec}(M \times N)$, орбита $\mathcal{O}$ системы $f_U \times g_U$, проходящая через точку (x_0, y_0) , есть n -мерное погруженное подмногообразие (поэтому локально подмногообразие) в $M \times N$. Касательное пространство к орбите имеет вид

$$\begin{aligned} T_{(x_0, y_0)}\mathcal{O} &= \text{span}(\xi_{u_1 \dots u_k} \times A\xi_{u_1 \dots u_k}) \\ &= \text{span}\{v \times Av \mid v \in T_{x_0}\} \subset T_{(x_0, y_0)}M \times N = T_{x_0}M \times T_{y_0}N, \end{aligned}$$

т.е. это график линейного изоморфизма A . Рассмотрим канонические проекции на сомножители:

$$\begin{aligned}\pi_1 : M \times N &\rightarrow M, & \pi_1(x, y) &= x, \\ \pi_2 : M \times N &\rightarrow N, & \pi_2(x, y) &= y.\end{aligned}$$

Ограничения $\pi_1|_{\mathcal{O}}$, $\pi_2|_{\mathcal{O}}$ суть локальные диффеоморфизмы т.к. дифференциалы

$$\begin{aligned}\pi_{1*}|_{(x_0, y_0)} &: (v, Av) \mapsto v, & v &\in T_{x_0}M, \\ \pi_{2*}|_{(x_0, y_0)} &: (v, Av) \mapsto Av, & v &\in T_{x_0}M,\end{aligned}$$

взаимно однозначны.

Тогда $\Phi = \pi_2 \circ (\pi_1|_{\mathcal{O}})^{-1}$ — локальный диффеоморфизм из M в N с графиком $\mathcal{O}$ и

$$\Phi_* = \pi_{2*} \circ (\pi_1|_{\mathcal{O}})_*^{-1} : f_u \mapsto g_u, \quad u \in U.$$

Следовательно, $(f_U, x_0) \simeq (g_U, y_0)$. □

Глава 6

Вращение твердого тела

В этой главе мы рассматриваем вращения *твердого тела* вокруг неподвижной точки. То есть изучаются такие движения тела в трехмерном пространстве, что:

- расстояние между любыми точками тела остается неизменным и
- в теле существует точка, остающаяся неподвижной при движении тела.

Мы будем рассматривать как свободные движения (в отсутствии внешних сил), так и управляемые движения (когда к телу прилагаются внешние силы, чтобы перевести его в желаемое положение).

Эта система — очень упрощенная модель космического спутника, вращающегося вокруг своего центра масс.

Дополнительные сведения о дифференциальных уравнениях, описывающих вращения твердого тела, можно найти в книге [136].

6.1 Пространство состояний

Состояние твердого тела определяется его положением и скоростью. Выберем ортонормированный репер, закрепленный в теле в неподвижной точке (подвижный репер) и ортонормированный репер, закрепленный в окружающем пространстве в неподвижной точке (неподвижный репер), см. рис. 6.1. Множество положений твердого тела есть множество всех ортонормированных положительно ориентированных реперов в трехмерном пространстве. Это множество естественно отождествляется с $SO(3)$ — группой линейных ортогональных преобразований $\mathbb{R}^3$, сохраняющих ориентацию, или, что равносильно, с группой ортогональных унимодулярных матриц порядка 3:

$$\begin{aligned} SO(3) &= \{Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid (Qx, Qy) = (x, y), \det Q = 1\} \\ &= \{Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid QQ^* = \text{Id}, \det Q = 1\}. \end{aligned}$$

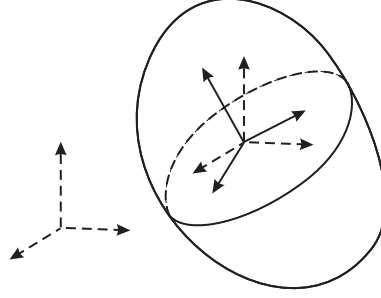


Рис. 6.1: Неподвижный и подвижный реперы

Отображение $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ переводит координатное представление точки в подвижном репере в ее координатное представление в неподвижном репере.

Замечание. Мы обозначаем скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ через $(\cdot, \cdot)$. Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^3$ с координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ в некотором ортонормированном базисе имеем $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Отметим, что множество положений твердого тела $SO(3)$ — не линейное пространство, а нетривиальное гладкое многообразие.

Теперь опишем скорости твердого тела. Обозначим через $Q_t \in SO(3)$ положение тела в момент времени t . Операторы $Q_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ортогональны, т.е.

$$(Q_t x, Q_t y) = (x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Дифференцируя это тождество по t , получаем

$$(\dot{Q}_t x, Q_t y) + (Q_t x, \dot{Q}_t y) = 0. \quad (6.1)$$

Матрица

$$\Omega_t = Q_t^{-1} \dot{Q}_t$$

называется *угловой скоростью в теле*. Так как

$$\dot{Q}_t = Q_t \Omega_t,$$

то равенство (6.1) можно записать в виде

$$(Q_t \Omega_t x, Q_t y) + (Q_t x, Q_t \Omega_t y) = 0,$$

откуда в силу ортогональности получаем

$$(\Omega_t x, y) + (x, \Omega_t y) = 0,$$

т.е.

$$\Omega_t^* = -\Omega_t,$$

матрица Ω_t кососимметрична. Поэтому скорости твердого тела имеют вид

$$\dot{Q}_t = Q_t \Omega_t, \quad \Omega_t^* = -\Omega_t.$$

Иными словами, мы нашли касательное пространство

$$T_Q \text{SO}(3) = \{Q\Omega \mid \Omega^* = -\Omega\}, \quad Q \in \text{SO}(3).$$

Пространство кососимметрических матриц порядка 3 обозначается через $\text{so}(3)$, оно является касательным пространством к группе $\text{SO}(3)$ в единице:

$$\text{so}(3) = \{\Omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \Omega^* = -\Omega\} = T_{\text{Id}} \text{SO}(3).$$

Пространство $\text{so}(3)$ есть алгебра Ли группы Ли $\text{SO}(3)$.

Каждой кососимметрической матрице $\Omega \in \text{so}(3)$ можно сопоставить вектор $\omega \in \mathbb{R}^3$:

$$\Omega \sim \omega, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Тогда действие оператора Ω на вектор $x \in \mathbb{R}^3$ задается с помощью векторного произведения в $\mathbb{R}^3$:

$$\Omega x = \omega \times x, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть x — некоторая точка твердого тела. Её положение в пространстве $\mathbb{R}^3$ есть $Q_t x$. Далее, скорость этой точки равна

$$\dot{Q}_t x = Q_t \Omega_t x = Q_t (\omega_t \times x).$$

ω_t есть вектор угловой скорости точки x в подвижном репере: если зафиксировать подвижный репер Q_t в один момент времени t , то мгновенная скорость точки x в момент t в подвижном репере равна $Q_t^{-1} \dot{Q}_t x = \Omega_t x = \omega_t \times x$, т.е. точка x вращается вокруг оси, направленной вдоль вектора ω_t , с угловой скоростью $\|\omega_t\|$.

Введем скалярное произведение матриц $\Omega = (\Omega_{ij}) \in \text{so}(3)$ следующим образом:

$$\langle \Omega^1, \Omega^2 \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(\Omega^1 \Omega^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \Omega_{ij}^1 \Omega_{ij}^2 = \sum_{i < j} \Omega_{ij}^1 \Omega_{ij}^2.$$

Это произведение согласуется с отождествлением (6.2) кососимметрических матриц порядка 3 и 3-мерных векторов:

$$\langle \Omega^1, \Omega^2 \rangle = (\omega^1, \omega^2), \\ \Omega^i \sim \omega^i, \quad \Omega^i \in \text{so}(3), \quad \omega^i \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2.$$

Более того, это произведение инвариантно в следующем смысле:

$$\langle (\text{Ad } Q)\Omega^1, (\text{Ad } Q)\Omega^2 \rangle = \langle \Omega^1, \Omega^2 \rangle, \quad Q \in \text{SO}(3), \quad \Omega^1, \Omega^2 \in \mathfrak{so}(3), \quad (6.3)$$

т.е. $\text{Ad } Q : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ — ортогональное преобразование относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Действительно,

$$\text{tr}((\text{Ad } Q)\Omega^1 (\text{Ad } Q)\Omega^2) = \text{tr}(Q\Omega^1 Q^{-1} Q\Omega^2 Q^{-1}) = \text{tr}(Q\Omega^1 \Omega^2 Q^{-1}) = \text{tr}(\Omega^1 \Omega^2)$$

в силу инвариантности следа матрицы.

Выведем инфинитезимальную версию свойства инвариантности (6.3). Возьмем произвольную матрицу $\Omega \in \mathfrak{so}(3)$ и рассмотрим гладкую кривую $Q_t \in \text{SO}(3)$, выходящую из единицы со скоростью Ω :

$$\dot{Q}_0 = \Omega, \quad Q_0 = \text{Id}.$$

Тогда

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Ad } Q_t = \text{ad } \Omega,$$

и, дифференцируя (6.3) по t при $t = 0$, получаем тождество:

$$\langle (\text{ad } \Omega)\Omega^1, \Omega^2 \rangle + \langle \Omega^1, (\text{ad } \Omega)\Omega^2 \rangle = 0, \quad \Omega, \Omega^1, \Omega^2 \in \mathfrak{so}(3), \quad (6.4)$$

т.е. отображение $\text{ad } \Omega : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ кососимметрично относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Вектор $\omega_1 \times \omega_2 \in \mathbb{R}^3$ соответствует матрице $[\Omega_1, \Omega_2] \in \mathfrak{so}(3)$ в силу изоморфизма (6.2), поэтому тождество (6.4) можно записать с помощью векторного произведения:

$$(\omega \times \omega^1, \omega^2) + (\omega^1, \omega \times \omega^2) = 0, \quad \omega, \omega^1, \omega^2 \in \mathbb{R}^3.$$

6.2 Уравнения Эйлера

Выведем уравнения движения твердого тела из принципа наименьшего действия.

Пусть распределение массы твердого тела имеет плотность $\rho(x)$, где $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ — неотрицательная интегрируемая функция с компактным носителем. Пусть $Q_t \in \text{SO}(3)$ есть положение, а $\Omega_t \in \mathfrak{so}(3)$ — угловая скорость тела, так что

$$\dot{Q}_t = Q_t \Omega_t. \quad (6.5)$$

Выберем произвольную точку x . Положение этой точки в пространстве есть $Q_t x$, а ее скорость равна $\dot{Q}_t x$. Распределение кинетической энергии в теле имеет плотность $\frac{1}{2} \rho(x) (\dot{Q}_t x, \dot{Q}_t x)$, поэтому полная кинетическая энергия тела в момент времени t равна

$$j(\Omega_t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) (Q_t \Omega_t x, Q_t \Omega_t x) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) (\Omega_t x, \Omega_t x) dx,$$

это квадратичная форма $j = j(\Omega_t)$ на пространстве $\mathfrak{so}(3)$. Соответствующую билинейную форму можно записать в виде

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)(\Omega^1 x, \Omega^2 x) dx = \langle A\Omega^1, \Omega^2 \rangle, \quad \Omega^1, \Omega^2 \in \mathfrak{so}(3),$$

для некоторого линейного симметрического оператора

$$A : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3), \quad A = A^* > 0,$$

который называется тензором инерции твердого тела. Наконец, функционал действия имеет вид

$$J(\Omega_.) = \int_0^{t_1} j(\Omega_t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \langle A\Omega_t, \Omega_t \rangle dt,$$

где 0 и t_1 — начальный и конечный моменты движения.

Пусть Q_0 и Q_{t_1} — начальное и конечное положения движущегося тела. Согласно принципу наименьшего действия, движение тела Q_t , $t \in [0, t_1]$, должно быть экстремалью следующей задачи:

$$\begin{aligned} J(\Omega_.) &\rightarrow \min, \\ \dot{Q}_t &= Q_t \Omega_t, \quad Q_0, Q_{t_1} \text{ фиксированы.} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Найдем эти экстремали.

Пусть Ω_t есть угловая скорость вдоль выбранной траектории Q_t , тогда

$$Q_0^{-1} \circ Q_{t_1} = \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} \Omega_t dt.$$

Рассмотрим произвольное малое возмущение угловой скорости:

$$\Omega_t + \varepsilon U_t + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для того, чтобы такое возмущение было допустимым, начало и конец соответствующей траектории не должны зависеть от ε :

$$Q_0^{-1} \circ Q_{t_1} = \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} (\Omega_t + \varepsilon U_t + O(\varepsilon^2)) dt,$$

поэтому

$$0 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} Q_0^{-1} \circ Q_{t_1} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} (\Omega_t + \varepsilon U_t + O(\varepsilon^2)) dt. \quad (6.7)$$

По формуле (2.31) производной потока по параметру, выражение в правой части (6.7) равно

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_1} \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \Omega_\tau d\tau \right) U_t dt \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} \Omega_t dt \\ &= \int_0^{t_1} \text{Ad} (Q_0^{-1} \circ Q_t) U_t dt \circ Q_0^{-1} \circ Q_{t_1} \\ &= Q_0^{-1} \int_0^{t_1} \text{Ad} Q_t U_t dt \circ Q_{t_1}. \end{aligned}$$

Поэтому равенство (6.7) можно записать в виде

$$\int_0^{t_1} \text{Ad } Q_t U_t dt = 0.$$

Обозначим

$$V_t = \int_0^t \text{Ad } Q_\tau U_\tau d\tau, \quad (6.8)$$

тогда условие допустимости вариации U_t принимает вид

$$V_0 = V_{t_1} = 0. \quad (6.9)$$

Найдем экстремали задачи (6.6).

$$0 = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J(\Omega_{\cdot, \varepsilon}) = \int_0^{t_1} \langle A\Omega_t, U_t \rangle dt$$

в силу (6.3)

$$= \int_0^{t_1} \langle (\text{Ad } Q_t) A\Omega_t, (\text{Ad } Q_t) U_t \rangle dt$$

используя (6.8)

$$= \int_0^{t_1} \langle (\text{Ad } Q_t) A\Omega_t, \dot{V}_t \rangle dt$$

интегрируя по частям с условием допустимости (6.9)

$$= - \int_0^{t_1} \left\langle \frac{d}{dt} (\text{Ad } Q_t) A\Omega_t, V_t \right\rangle dt.$$

Поэтому вышеприведенный интеграл равен нулю на любом допустимом операторе V_t , следовательно

$$\frac{d}{dt} (\text{Ad } Q_t) A\Omega_t = 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Отсюда

$$\text{Ad } Q_t ([\Omega_t, A\Omega_t] + A\dot{\Omega}_t) = 0, \quad t \in [0, t_1],$$

поэтому

$$A\dot{\Omega}_t = [A\Omega_t, \Omega_t], \quad t \in [0, t_1]. \quad (6.10)$$

Введем оператор

$$M_t = A\Omega_t,$$

который называется кинетическим моментом тела, и обозначим

$$B = A^{-1}.$$

Комбинируя равенства (6.10) и (6.5), получаем *уравнения Эйлера* вращения свободного твердого тела:

$$\begin{cases} \dot{M}_t = [M_t, BM_t], & M_t \in \mathfrak{so}(3), \\ \dot{Q}_t = Q_t BM_t, & Q_t \in \mathrm{SO}(3). \end{cases}$$

Замечание. Описанный способ вывода уравнений Эйлера можно применить к кривым на группе $\mathrm{SO}(n)$ ортогональных унимодулярных матриц порядка n для любого $n > 0$. Таким образом получаются уравнения вращения обобщенного n -мерного твердого тела.

Теперь перепишем уравнения Эйлера, используя изоморфизм (6.2) пространств $\mathfrak{so}(3)$ и $\mathbb{R}^3$, существенно трехмерный и не обобщающийся на высшие размерности. Напомним, что кососимметрической матрице

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_3 & \mu_2 \\ \mu_3 & 0 & -\mu_1 \\ -\mu_2 & \mu_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3),$$

соответствует вектор $\mu \in \mathbb{R}^3$ вида

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}, \quad M \sim \mu.$$

В этих терминах уравнения Эйлера принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{\mu}_t = \mu_t \times \beta \mu_t, & \mu_t \in \mathbb{R}^3, \\ \dot{Q}_t = Q_t \hat{\beta} \mu_t, & Q_t \in \mathrm{SO}(3), \end{cases}$$

где $\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\hat{\beta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ — операторы, соответствующие отображению $B : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ в силу изоморфизма $\mathfrak{so}(3) \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ (6.2).

Собственные векторы симметрического положительно определенного оператора $\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ называются главными осями инерции твердого тела. Мы предполагаем в дальнейшем, что твердое тело асимметрично, т.е. оператор β имеет 3 разные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Упорядочим собственные значения β :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3,$$

и выберем ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 из соответствующих собственных векторов, т.е. главных осей инерции. В базисе e_1, e_2, e_3 оператор β становится диагональным:

$$\beta \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 \\ \lambda_2 \mu_2 \\ \lambda_3 \mu_3 \end{pmatrix},$$

а уравнение $\dot{\mu}_t = \mu_t \times \beta \mu_t$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\mu}_1 = (\lambda_3 - \lambda_2)\mu_2\mu_3, \\ \dot{\mu}_2 = (\lambda_1 - \lambda_3)\mu_1\mu_3, \\ \dot{\mu}_3 = (\lambda_2 - \lambda_1)\mu_1\mu_2. \end{cases} \quad (6.11)$$

6.3 Фазовый портрет

Опишем фазовый портрет первого из уравнений Эйлера:

$$\dot{\mu}_t = \mu_t \times \beta \mu_t, \quad \mu_t \in \mathbb{R}^3. \quad (6.12)$$

Это уравнение имеет два интеграла: энергию

$$(\mu_t, \mu_t) = \text{const}$$

и кинетический момент

$$(\mu_t, \beta \mu_t) = \text{const}.$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu_t, \mu_t) &= 2(\mu_t \times \beta \mu_t, \mu_t) = -2(\beta \mu_t, \mu_t \times \mu_t) = 0, \\ \frac{d}{dt}(\mu_t, \beta \mu_t) &= (\mu_t \times \beta \mu_t, \beta \mu_t) + (\mu_t, \beta(\mu_t \times \beta \mu_t)) = 2(\mu_t \times \beta \mu_t, \beta \mu_t) \\ &= -2(\mu_t, \beta \mu_t \times \beta \mu_t) = 0 \end{aligned}$$

в силу инвариантности скалярного произведения (6.4) и симметричности β .

Потому все траектории μ_t уравнения (6.12) удовлетворяют ограничениям

$$\begin{cases} \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \text{const}, \\ \lambda_1 \mu_1^2 + \lambda_2 \mu_2^2 + \lambda_3 \mu_3^2 = \text{const}, \end{cases} \quad (6.13)$$

т.е. принадлежат пересечениям сфер с эллипсоидами. Учитывая однородность системы (6.12), изобразим ее траектории на одной сфере — единичной:

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1, \quad (6.14)$$

все остальные траектории получаются с помощью гомотетий.

Во-первых, пересечения единичной сферы с главными осями инерции, т.е. точки

$$\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$$

являются положениями равновесия, и других равновесий нет, см. уравнения (6.11).

Далее, положения равновесия $\pm e_1, \pm e_3$, соответствующие наибольшему и наименьшему собственным значениям λ_1, λ_3 , устойчивы, а именно, это

центры, а равновесия $\pm e_2$, соответствующие λ_2 , неустойчивы — седла. Это легко видеть по геометрии пересечений единичной сферы с эллипсоидами

$$\lambda_1 \mu_1^2 + \lambda_2 \mu_2^2 + \lambda_3 \mu_3^2 = C.$$

Действительно, при $C < \lambda_3$ эллипсоиды содержатся внутри сферы и не пересекаются с ней. При $C = \lambda_3$ эллипсоид касается единичной сферы изнутри в точках $\pm e_3$. Далее, при $C > \lambda_3$ и близких к λ_3 эллипсоиды пересекают единичную сферу по двум замкнутым кривым, окружающим соответственно e_3 и $-e_3$. Аналогично устроены пересечения вблизи $C = \lambda_1$. При $C > \lambda_1$ эллипсоиды слишком велики и не пересекают единичную сферу; при $C = \lambda_1$ малая полуось эллипсоида становится равной радиусу сферы, и он касается сферы снаружи в $\pm e_1$; а при $C < \lambda_1$ и близких к λ_1 пересечение состоит из двух кривых, окружающих $\pm e_1$. При $C = \lambda_2$ эллипсоид касается сферы в концах средних полуосей $\pm e_2$, и в окрестности каждой из точек $e_2, -e_2$ пересечение состоит из четырех ветвей сепаратрис, стремящихся к этой точке. Уравнения сепаратрис выводятся из системы

$$\begin{cases} \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1, \\ \lambda_1 \mu_1^2 + \lambda_2 \mu_2^2 + \lambda_3 \mu_3^2 = \lambda_2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на λ_2 и вычтем из второго:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mu_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3) \mu_3^2 = 0.$$

Следовательно, сепаратрисы принадлежат пересечению единичной сферы с двумя плоскостями

$$\Pi_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1 = \pm \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3} \mu_3\},$$

т.е. это дуги больших окружностей.

Оказывается, что из траекторий системы только сепаратрисы и положения равновесия принадлежат двумерным плоскостям. Более того, все остальные траектории удовлетворяют следующему условию:

$$\mu \notin \Pi_{\pm}, \mu \notin \mathbb{R}e_i \quad \Rightarrow \quad \mu \wedge \dot{\mu} \wedge \ddot{\mu} \neq 0, \quad (6.15)$$

то есть векторы μ , $\dot{\mu}$ и $\ddot{\mu}$ линейно независимы. Действительно, возьмем любую траекторию μ_t на единичной сфере. Все траектории, гомотетичные данной, образуют конус вида

$$C(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) = \lambda_1 \mu_1^2 + \lambda_2 \mu_2^2 + \lambda_3 \mu_3^2, \quad \lambda_3 \leq C \leq \lambda_1. \quad (6.16)$$

Но квадратичный конус в $\mathbb{R}^3$ является либо вырожденным, либо эллиптическим. Условия $\mu \notin \Pi_{\pm}$, $\mu \notin \mathbb{R}e_i$ означают, что $C \neq \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$, т.е. конус (6.16) эллиптический. Теперь неравенство (6.15) вытекает из следующих двух фактов. Во-первых, $\mu \wedge \dot{\mu} \neq 0$, т.е. траектория μ_t не касается порождающей конуса. Во-вторых, пересечение эллиптического конуса с

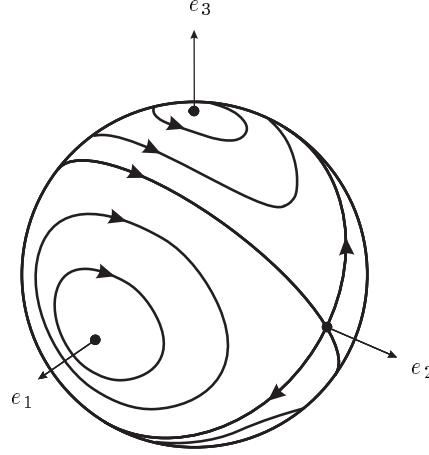


Рис. 6.2: Фазовый портрет системы (6.12)

плоскостью, не содержащей порождающей конуса, есть эллипс — сильно выпуклая кривая.

Ввиду уравнения (6.12), условие выпуклости (6.15) для конуса, порожденного траекторией, переписывается в следующем образом:

$$\mu \notin \Pi_{\pm}, \mu \notin \mathbb{R}e_i \Rightarrow \mu \wedge (\mu \times \beta\mu) \wedge ((\mu \times \beta\mu) \times \beta\mu + \mu \times \beta(\mu \times \beta\mu)) \neq 0. \quad (6.17)$$

Плоские сепаратрисы на фазовом портрете являются регулярными кривыми на сфере, поэтому

$$\mu \in \Pi_{\pm}, \mu \notin \mathbb{R}e_2 \Rightarrow \mu \wedge \dot{\mu} \neq 0,$$

или, в силу уравнения (6.12),

$$\mu \in \Pi_{\pm}, \mu \notin \mathbb{R}e_2 \Rightarrow \mu \wedge (\mu \times \beta\mu) \neq 0. \quad (6.18)$$

6.4 Управляемое твердое тело: орбиты

Предположим, что мы можем управлять вращениями твердого тела, прикладывая момент силы вдоль фиксированной прямой в теле. Можно менять направление момента силы на противоположное в любой момент времени.

Напишем управляемую систему для угловой скорости:

$$\dot{\mu}_t = \mu_t \times \beta\mu_t \pm l, \quad \mu_t \in \mathbb{R}^3, \quad (6.19)$$

тогда полная система для управляемого твердого тела имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\mu}_t = \mu_t \times \beta\mu_t \pm l, & \mu_t \in \mathbb{R}^3, \\ \dot{Q}_t = Q_t \hat{\beta}\mu_t, & Q_t \in \text{SO}(3), \end{cases} \quad (6.20)$$

где $l \neq 0$ — фиксированный вектор вдоль выбранной прямой.

Мы опишем орбиты и множества достижимости 6-мерной системы (6.20). Но сначала изучим орбиты 3-мерной системы (6.19).

6.4.1 Орбиты 3-мерной системы

Система (6.19) аналитична, поэтому размерность орбиты через точку $\mu \in \mathbb{R}^3$ равна размерности пространства

$$\text{Lie}_\mu(\mu \times \beta\mu \pm l) = \text{Lie}_\mu(\mu \times \beta\mu, l).$$

Введем обозначения для векторных полей:

$$f(\mu) = \mu \times \beta\mu, \quad g(\mu) \equiv l,$$

и вычислим несколько скобок Ли:

$$\begin{aligned} [g, f](\mu) &= \frac{df}{d\mu}g(\mu) - \frac{dg}{d\mu}f(\mu) = l \times \beta\mu + \mu \times \beta l, \\ [g, [g, f]](\mu) &= l \times \beta l + l \times \beta l = 2l \times \beta l, \\ \frac{1}{2}[[g, [g, f]], [g, f]](\mu) &= l \times \beta(l \times \beta l) + (l \times \beta l) \times \beta l. \end{aligned}$$

Используя свойство (6.17) с $l = \mu$, получаем три постоянных векторных поля g , $[g, f]$, $[[g, [g, f]], [g, f]]$, которые линейно независимы:

$$\begin{aligned} g(\mu) \wedge \frac{1}{2}[g, f](\mu) \wedge \frac{1}{2}[[g, [g, f]], [g, f]](\mu) \\ = l \wedge l \times \beta l \wedge ((l \times \beta l) \times \beta l + l \times \beta(l \times \beta l)) \neq 0 \end{aligned}$$

при $l \notin \Pi_\pm$, $l \notin \mathbb{R}e_i$.

В случае общего положения получаем следующее утверждение.

Случай 1. $l \notin \Pi_\pm$, $l \notin \mathbb{R}e_i$.

Предложение 6.1. Пусть $l \notin \Pi_\pm$, $l \notin \mathbb{R}e_i$. Тогда $\text{Lie}_\mu(f, g) = \mathbb{R}^3$ для любого $\mu \in \mathbb{R}^3$. Система (6.19) имеет одну 3-мерную орбиту — $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим специальные случаи расположения вектора l .

Случай 2. Пусть $l \in \Pi_+$, $l \notin \mathbb{R}e_2$. Так как плоскость Π_+ инвариантна для свободного тела (6.12) и $l \in \Pi_+$, плоскость Π_+ инвариантна также и для управляемого тела (6.19), т.е. орбита через любую точку плоскости Π_+ содержится в Π_+ . С другой стороны, из свойства (6.18) получаем

$$l \wedge (l \times \beta l) \neq 0.$$

Но векторы $l = g(\mu)$ и $l \times \beta l = \frac{1}{2}[g, [g, f]](\mu)$ образуют базис плоскости Π_+ , поэтому Π_+ является орбитой через любую точку $\mu \in \Pi_+$. Итак, плоскость

Π_+ есть орбита системы (6.19). Если начальная точка $\mu_0 \notin \Pi_+$, то траектория μ_t системы (6.19) через μ_0 не плоская, поэтому

$$(\mu_t \times \beta \mu_t) \wedge l \wedge (l \times \beta l) \neq 0.$$

Итак, орбита через μ_0 трехмерна. Мы доказали следующее утверждение.

Предложение 6.2. *Пусть $l \in \Pi_+ \setminus \mathbb{R}e_2$. Тогда система (6.19) имеет одну 2-мерную орбиту — плоскость Π_+ , и две 3-мерные орбиты — связные компоненты $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi_+$.*

Случай $l \in \Pi_- \setminus \mathbb{R}e_2$ полностью аналогичен рассмотренному, и справедливо аналогичное утверждение с Π_- вместо Π_+ .

Случай 3. Пусть теперь $l \in \mathbb{R}e_1 \setminus \{0\}$, т.е. $l = ce_1$, $c \neq 0$. Во-первых, прямая $\mathbb{R}e_1$ — орбита. Действительно, если $\mu \in \mathbb{R}e_1$, то $f(\mu) = 0$, и $g(\mu) = l$ также касается прямой $\mathbb{R}e_1$.

Чтобы найти остальные орбиты, построим интеграл управляемой системы (6.19) из двух интегралов (6.13) свободного тела. Так как $g(\mu) = l = ce_1$, мы ищем линейную комбинацию интегралов (6.13), не зависящую от μ_1 . Умножим первый интеграл на λ_1 , вычтем из него второй интеграл, и получим интеграл управляемого твердого тела:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mu_2^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)\mu_3^2 = C. \quad (6.21)$$

Так как $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, это — эллиптический цилиндр в $\mathbb{R}^3$.

Поэтому любая орбита системы (6.19) содержится в некотором цилиндре (6.21). С другой стороны, орбита через любую точку $\mu_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}e_1$ должна быть по меньшей мере двумерной. Действительно, если $\mu_0 \notin \mathbb{R}e_2 \cup \mathbb{R}e_3$, то свободное тело имеет траектории, не касающиеся поля g ; а если $\mu_0 \in \mathbb{R}e_2$ или $\mathbb{R}e_3$, то этого можно достичь малым смещением точки μ_0 вдоль поля g . Поэтому все орбиты вне прямой $\mathbb{R}e_1$ — эллиптические цилиндры (6.21).

Предложение 6.3. *Пусть $l \in \mathbb{R}e_1 \setminus \{0\}$. Тогда все орбиты системы (6.19) имеют вид (6.21): имеется одна 1-мерная орбита — прямая $\mathbb{R}e_1$ ($C = 0$), и бесконечное количество 2-мерных орбит — эллиптические цилиндры (6.21) при $C > 0$.*

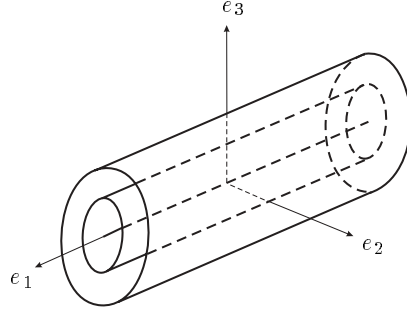
Случай $l \in \mathbb{R}e_3 \setminus \{0\}$ полностью аналогичен рассмотренному.

Предложение 6.4. *Пусть $l \in \mathbb{R}e_3 \setminus \{0\}$. Тогда система (6.19) имеет одну 1-мерную орбиту — прямую $\mathbb{R}e_3$, и бесконечное количество 2-мерных орбит — эллиптические цилиндры*

$$(\lambda_1 - \lambda_3)\mu_1^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)\mu_2^2 = C, \quad C > 0.$$

Случай 4. Рассмотрим последний случай: пусть $l \in \mathbb{R}e_2 \setminus \{0\}$. Как и выше, найдем интеграл управляемой системы (6.19):

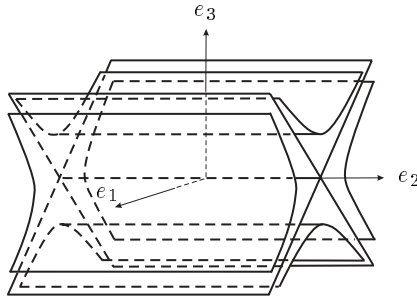
$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mu_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)\mu_3^2 = C. \quad (6.22)$$

Рис. 6.3: Орбиты в случае $l \in \mathbb{R}e_1 \setminus \{0\}$

При $C \neq 0$ это уравнение задает гиперболический цилиндр. С помощью рассуждения, аналогичного использованному в случае 3, получаем следующее описание орбит.

Предложение 6.5. Пусть $l \in \mathbb{R}e_2 \setminus \{0\}$. Тогда существует одна 1-мерная орбита — прямая $\mathbb{R}e_2$, и бесконечное количество 2-мерных орбит следующего вида:

- (1) связные компоненты гиперболических цилиндров (6.22) при $C \neq 0$;
- (2) полуплоскости — связные компоненты множества $(\Pi_+ \cup \Pi_-) \setminus \mathbb{R}e_2$.

Рис. 6.4: Орбиты в случае $l \in \mathbb{R}e_2 \setminus \{0\}$

Итак, мы рассмотрели все возможные положения вектора $l \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, и во всех случаях описали орбиты 3-мерной системы (6.19). Теперь изучим орбиты полной 6-мерной системы (6.20).

6.4.2 Орбиты 6-мерной системы

Векторные поля в правой части 6-мерной системы (6.20) суть

$$f(Q, \mu) = \begin{pmatrix} Q \hat{\beta} \mu \\ \mu \times \beta \mu \end{pmatrix}, \quad g(Q, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}, \quad (Q, \mu) \in \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3.$$

Отметим правило коммутирования векторных полей специального вида, возникающих в нашей задаче:

$$f_i(Q, \mu) = \begin{pmatrix} Q \hat{\beta} w_i(\mu) \\ v_i(\mu) \end{pmatrix} \in \text{Vec}(\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3),$$

$$[f_1, f_2](Q, \mu) = \begin{pmatrix} Q[\hat{\beta} w_1, \hat{\beta} w_2]_{\text{so}(3)} + Q \hat{\beta} \left(\frac{\partial w_2}{\partial \mu} v_1 - \frac{\partial w_1}{\partial \mu} v_2 \right) \\ \frac{\partial v_2}{\partial \mu} v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \mu} v_2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим сначала те же скобки Ли, что и в 3-мерном случае:

$$[g, f] = \begin{pmatrix} Q \hat{\beta} l \\ l \times \beta \mu + \mu \times \beta l \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}[g, [g, f]] = \begin{pmatrix} 0 \\ l \times \beta l \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}[[g, [g, f]], [g, f]] = \begin{pmatrix} 0 \\ l \times \beta(l \times \beta l) + (l \times \beta l) \times \beta l \end{pmatrix}.$$

Далее, для любого векторного поля $X \in \text{Vec}(\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3)$ вида

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad x \text{ — постоянное векторное поле в } \mathbb{R}^3, \quad (6.23)$$

имеем

$$[X, f] = \begin{pmatrix} Q \hat{\beta} x \\ * \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Чтобы изучить орбиты 6-мерной системы (6.20) через точку $(Q, \mu) \in \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$, рассмотрим различные случаи из пункта 6.4.1 для 3-мерной системы (6.19).

Случай 1. $l \notin \Pi_{\pm}$, $l \notin \mathbb{R}e_i$. Можно выбрать 3 линейно независимые векторные поля в $\text{Lie}(f, g)$ вида (6.23):

$$X_1 = g, \quad X_2 = \frac{1}{2}[g, [g, f]], \quad X_3 = \frac{1}{2}[[g, [g, f]], [g, f]].$$

Используя правило коммутирования (6.24), получаем 6 линейно независимых векторов в $\text{Lie}_{(Q, \mu)}(f, g)$:

$$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge [X_1, f] \wedge [X_2, f] \wedge [X_3, f] \neq 0.$$

Поэтому орбита через точку (Q, μ) 6-мерна.

Случай 2. $l \in \Pi_{\pm} \setminus \mathbb{R}e_2$.

Случай 2.1. $\mu \notin \Pi_{\pm}$. Во-первых, $\text{Lie}(f, g)$ содержит 2 линейно независимые поля вида (6.23):

$$X_1 = g, \quad X_2 = \frac{1}{2}[g, [g, f]].$$

Так как траектория свободного тела в $\mathbb{R}^3$ через μ не плоская, можно считать, что вектор $v = \mu \times \beta\mu$ линейно независим от l и $l \times \beta l$. Мы покажем ниже, что $\text{Lie}(f, g)$ содержит 2 векторных поля вида

$$Y_1 = \begin{pmatrix} Q M_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} Q M_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad M_1 \wedge M_2 \neq 0, \quad (6.25)$$

где векторные поля v_1 и v_2 равны нулю в точке μ . Из этого будет следовать, что $\text{Lie}_{(Q, \mu)}(f, g)$ содержит 6 линейно независимых векторов:

$$\begin{aligned} X_1(Q, \mu), \quad X_2(Q, \mu), \quad f(Q, \mu), \\ Y_1(Q, \mu) = \begin{pmatrix} Q M_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2(Q, \mu) = \begin{pmatrix} Q M_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ [Y_1, Y_2](Q, \mu) = \begin{pmatrix} Q[M_1, M_2] \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и потому орбита через точку (Q, μ) 6-мерна.

Найдем 2 векторных поля вида (6.25) в алгебре Ли $\text{Lie}(f, g)$. Выбирая подходящие линейные комбинации с полями X_1, X_2 , спроецируем вторую компоненту полей $[g, f]$ и $\frac{1}{2}[f, [g, [g, f]]]$ на прямую $\mathbb{R}v$. В результате получим векторные поля

$$\begin{pmatrix} Q \hat{\beta} l \\ k_1 v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q \hat{\beta}(l \times \beta l) \\ k_2 v \end{pmatrix} \in \text{Lie}(f, g). \quad (6.26)$$

Если k_1 и k_2 равны нулю в точке μ , то эти векторные поля можно взять в качестве Y_1, Y_2 в (6.25). Если же k_1 или k_2 не равно нулю в μ , то такие векторные поля Y_1, Y_2 можно построить, подбирая линейные комбинации полей (6.26) и f с полями $g, [g, [g, f]]$.

Поэтому в случае 2.1 орбита 6-мерна.

Случай 2.2. $\mu \in \Pi_{\pm}$. Имеется 5 линейно независимых векторов в $\text{Lie}_{(Q, \mu)}(f, g)$:

$$X_1 = g, \quad X_2 = \frac{1}{2}[g, [g, f]], \quad [X_1, f], \quad [X_2, f], \quad [[X_1, f], [X_2, f]].$$

Орбита в $\mathbb{R}^3$ 2-мерна, поэтому орбита в $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ 5-мерна.

Случай 3. $l \in \mathbb{R}e_1 \setminus \{0\}$.

Случай 3.1. $\mu \notin \mathbb{R}e_1$. Рассуждаем так же, как в случае 2.1. Можем считать, что векторы l и $v = \mu \times \beta\mu$ линейно независимы. Орбита в $\mathbb{R}^3$ 2-мерна, а ее касательное пространство порождается векторами l и v , поэтому в алгебре Ли $\text{Lie}(f, g)$ можно найти векторные поля вида

$$Y_1 = [g, f] - C_1 g - C_2 f = \begin{pmatrix} Q\hat{\beta}l + C_3 Q\hat{\beta}\mu \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_2 = [Y_1, f] = \begin{pmatrix} Q[\hat{\beta}l, \hat{\beta}\mu] + C_4 Q\hat{\beta}\mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

для некоторых функций C_i , $i = 1, \dots, 4$. Итак, мы нашли 5 линейно независимых векторов в пространстве $\text{Lie}_{(Q, \mu)}(f, g)$:

$$g, \quad f, \quad Y_1, \quad Y_2, \quad [Y_1, Y_2].$$

Поэтому орбита 6-мерной системы (6.20) 5-мерна (она не может быть 6-мерной, так как 3-мерная система (6.19) имеет 2-мерную орбиту).

Случай 3.2. $\mu \in \mathbb{R}e_1$. Векторы

$$f(Q, \mu) = \begin{pmatrix} Q\hat{\beta}\mu \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [g, f](Q, \mu) = \begin{pmatrix} Q\hat{\beta}l \\ 0 \end{pmatrix},$$

линейно независимы, поэтому $\dim \text{Lie}_{(Q, \mu)}(f, g) = \dim \text{span}(f, g)|_{(Q, \mu)} = 2$. Следовательно, орбита 2-мерна.

Случаи $l \in \mathbb{R}e_i \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$, аналогичны случаю 3.

Подведем итоги нашего исследования орбит управляемого твердого тела (6.20).

Предложение 6.6. Пусть (Q, μ) — точка в $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$. Если орбита $\mathcal{O}$ 3-мерной системы (6.19) через точку μ 3- или 2-мерна, то орбита 6-мерной системы (6.20) через точку (Q, μ) есть $\text{SO}(3) \times \mathcal{O}$, т.е. соответственно 6- или 5-мерна. Если $\dim \mathcal{O} = 1$, то 6-мерная система имеет 2-мерную орбиту.

Мы опишем множества достижимости этой системы в разделе 8.4 после знакомства с некоторыми общими фактами о множествах достижимости.

Глава 7

Управление конфигурациями

В этой главе мы рассмотрим приложения теоремы об орбите к системам, управляемым с помощью изменения их конфигурации, т.е. взаимного расположения частей системы. Хорошо известный пример такой системы — падающая кошка. Если кошка оказывается без опоры над землей (например, падает с дерева или ее бросает ребенок), то она начинает вращать хвостом и изгибать свое тело так, чтобы приземлиться точно на лапы, независимо от первоначальной ориентации над землей. Механические системы, менее искусные в поворачивании и изгибании своих частей (например, собака или просто твердое тело), так вести себя не могут. Вероятно, именно управление с помощью изменения конфигурации играют ключевую роль в феномене падающей кошки. Мы рассматриваем простую модель систем, управляемых таким образом, и исследуем орбиты в некоторых простейших примерах.

7.1 Модель

Система материальных точек, т.е. распределение массы в $\mathbb{R}^n$, описывается неотрицательной мерой μ на $\mathbb{R}^n$. Мы ограничимся мерами с компактным носителем. Например, система точек $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ массы $\mu_1, \dots, \mu_k > 0$ моделируется атомарной мерой $\mu = \sum_{i=1}^k \mu_i \delta_{x_i}$, где δ_{x_i} — функция Дирака, сосредоточенная в точке x_i . Можно считать точки x_i свободными или связанными некоторыми ограничениями в $\mathbb{R}^n$. Более общо, масса может быть распределена вдоль отрезков или поверхностей различных размерностей. Поэтому пространством состояний M систем, которые мы будем рассматривать, будет некоторый разумный класс мер на $\mathbb{R}^n$.

Предполагается, что управляющий субъект находится внутри конструкции и изменяет ее конфигурацию. Система консервативна, т.е. импульс и кинетический момент сохраняются. Исследуем орбиты систем, подчиненных таким связям.

С математической точки зрения, механическая система имеет законы сохранения из-за того, что у нее есть симметрии. Кинетическая система рассматриваемой системы равна

$$L = \frac{1}{2} \int |\dot{x}|^2 d\mu, \quad (7.1)$$

в частности, для атомарной меры $\mu = \sum_{i=1}^k \mu_i \delta_{x_i}$,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \mu_i |\dot{x}_i|^2.$$

Согласно теореме Нётер (см., например [136]), если поток векторного поля $V \in \text{Vec } \mathbb{R}^n$ сохраняет функцию Лагранжа L , то система имеет первый интеграл вида

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} V(x) = \text{const}.$$

В нашем случае лагранжиан (7.1) инвариантен относительно изометрий евклидова пространства, т.е. трансляций и вращений в $\mathbb{R}^n$.

Трансляции в $\mathbb{R}^n$ порождаются постоянными векторными полями:

$$V(x) = a \in \mathbb{R}^n,$$

поэтому наша система имеет законы сохранения

$$\int \langle \dot{x}, a \rangle d\mu = \text{const} \quad \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

Иными словами,

$$\int \dot{x} d\mu = \text{const},$$

т.е. центр масс системы движется с постоянной скоростью (полный импульс сохраняется). Выберем инерциальную систему отсчета, в которой центр масс неподвижен:

$$\int \dot{x} d\mu = 0.$$

Для атомарной меры $\mu = \sum_{i=1}^k \mu_i \delta_{x_i}$ это равенство имеет вид

$$\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = \text{const},$$

что сводится заменой координат в $\mathbb{R}^n$ к закону сохранения

$$\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = 0.$$

Теперь рассмотрим вращения в $\mathbb{R}^n$. Пусть векторное поле

$$V(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

сохраняет евклидову структуру в $\mathbb{R}^n$, т.е. его поток

$$e^{tV}(x) = e^{tA}x$$

сохраняет скалярное произведение:

$$\langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Дифференцируя это равенство при $t = 0$, получаем

$$\langle Ax, y \rangle + \langle x, Ay \rangle = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. матрица A кососимметрична:

$$A^* = -A.$$

Обратно, из если выполнено предыдущее равенство, то

$$(e^{tA})^* = e^{tA^*} = e^{-tA} = (e^{tA})^{-1},$$

т.е. матрица e^{tA} ортогональна. Мы доказали, что поток e^{tA} сохраняет евклидову структуру в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $A^* = -A$. Аналогично 3-мерному случаю, рассмотренному в разделе 6.1, группа сохраняющих ориентацию линейных ортогональных преобразований евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ обозначается через $\text{SO}(n)$, а соответствующая алгебра Ли кососимметрических преобразований $\mathbb{R}^n$ обозначается через $\text{so}(n)$. В этих обозначениях, мы доказали, что

$$e^{tA} \in \text{SO}(n) \Leftrightarrow A \in \text{so}(n).$$

Вернемся к выводу законов сохранения нашей системы материальных точек. Лагранжиан $L = \frac{1}{2} \int |\dot{x}|^2 d\mu$ инвариентен относительно вращений в $\mathbb{R}^n$, поэтому из теоремы Нётер получаем интегралы вида

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} V(x) = \int \langle \dot{x}, Ax \rangle d\mu = \text{const}, \quad A \in \text{so}(n).$$

Для атомарной меры $\mu = \sum_{i=1}^k \mu_i \delta_{x_i}$ имеем

$$\sum_{i=1}^k \mu_i \langle \dot{x}_i, Ax_i \rangle = \text{const}, \quad A \in \text{so}(n), \quad (7.2)$$

и в дальнейшем мы ограничимся простейшим случаем, когда константа в правой части равна нулю.

Итак, имеем следующие законы сохранения для системы материальных точек $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ массы $\mu_1, \dots, \mu_k$:

$$\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = 0, \quad (7.3)$$

$$\sum_{i=1}^k \mu_i \langle \dot{x}_i, Ax_i \rangle = 0, \quad A \in \mathfrak{so}(n). \quad (7.4)$$

Пространством состояний системы является подмножество

$$M \subset \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_k,$$

а допустимые траектории — гладкие кривые в M , удовлетворяющие связям (7.3), (7.4). Первое равенство (7.3) задает подмногообразие в M ; конечно, это равенство разрешается относительно любой переменной x_i , и от него можно легко избавиться, уменьшая размерность M . Второе равенство (7.4) — линейное ограничение на скорости $\dot{x}_i$, оно задает распределение на M . Поэтому условия допустимости (7.3), (7.4) задают линейную по управлениям, потому симметричную, управляемую систему на M . Отметим, что более общее условие (7.2) задает «аффинное распределение», а управляемая система (7.3), (7.2) аффинна по управлениям, потому, вообще говоря, не симметрична.

Мы рассмотрим только симметричный случай (7.3), (7.4). Тогда орбиты совпадают со множествами достижимости. Мы найдем орбиты для следующих простых систем:

- (1) Две свободные точки: $k = 2$,
- (2) Три свободные точки: $k = 3$,
- (3) Ломаная с тремя звеньями в $\mathbb{R}^2$.

7.2 Две свободные точки

Имеем $k = 2$, и первое условие допустимости (7.3) принимает вид

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Исключим вторую точку:

$$x_1 = x, \quad x_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2}x,$$

и запретим столкновение точек:

$$x \neq 0.$$

Тогда пространство состояний системы есть

$$M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Второе условие допустимости (7.4)

$$\mu_1 \langle \dot{x}_1, Ax_1 \rangle + \mu_2 \langle \dot{x}_2, Ax_2 \rangle = 0, \quad A \in \mathfrak{so}(n),$$

переписывается как

$$(\mu_1 + \mu_1^2/\mu_2) \langle \dot{x}, Ax \rangle = 0, \quad A \in \mathfrak{so}(n),$$

то есть

$$\langle \dot{x}, Ax \rangle = 0, \quad A \in \mathfrak{so}(n). \quad (7.5)$$

Это уравнение легко разрешается благодаря следующему предложению.

Упражнение 7.1. Если $A \in \mathfrak{so}(n)$, то $\langle Ax, x \rangle = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Более того, для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ пространство $\{Ax \mid A \in \mathfrak{so}(n)\}$ совпадает со всем ортогональным дополнением $x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle = 0\}$.

Поэтому ограничение (7.5) означает, что

$$\dot{x} \wedge x = 0,$$

т.е. скорость допустимой кривой пропорциональна вектору состояния. Это условие задает одномерное, потому интегрируемое, распределение. Поэтому допустимые кривые имеют вид

$$x(t) = \alpha(t)x(0), \quad \alpha(t) > 0.$$

Орбита и множество достижимости через любую точку $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ есть луч

$$\mathcal{O}_x = \mathbb{R}_+ x = \{\alpha x \mid \alpha > 0\}.$$

Точки x_1, x_2 могут двигаться вдоль неподвижной прямой в $\mathbb{R}^n$, и ориентация системы не может изменяться. Чтобы получить менее тривиальное поведение, необходимо рассмотреть более сложные системы.

7.3 Три свободные точки

Теперь $k = 3$, и мы исключаем третью точку с помощью первого условия допустимости (7.3):

$$\begin{aligned} x &= \mu_1 x_1, & y &= \mu_2 x_2, \\ x_3 &= -\frac{1}{\mu_3}(x + y). \end{aligned}$$

Чтобы запретить вырожденные конфигурации, в которых точки x_1, x_2, x_3 коллинеарны, будем считать, что векторы x, y линейно независимы. Поэтому пространство состояний есть

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \wedge y \neq 0\}.$$

Введем обозначение

$$\rho_i = \frac{1}{\mu_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда второе условие допустимости (7.4) принимает форму:

$$\langle \dot{x}, A((\rho_1 + \rho_3)x + \rho_3 y) \rangle + \langle \dot{y}, A((\rho_2 + \rho_3)y + \rho_3 x) \rangle = 0, \quad A \in \mathfrak{so}(n).$$

Оказывается, что при этом условии допустимые скорости $\dot{x}, \dot{y}$ должны принадлежать плоскости $\text{span}(x, y)$. Это вытекает от противного из следующего предложения.

Лемма 7.1. Пусть векторы $v, w, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условию

$$v \wedge w \neq 0, \quad \text{span}(v, w, \xi, \eta) \neq \text{span}(v, w).$$

Тогда существует $A \in \mathfrak{so}(n)$ такое, что

$$\langle Av, \xi \rangle + \langle Aw, \eta \rangle \neq 0.$$

Доказательство. Во-первых, можно предполагать, что

$$\langle v, w \rangle = 0. \quad (7.6)$$

Действительно, выберем такой вектор $\hat{w} \in \text{span}(v, w)$, что $\langle v, \hat{w} \rangle = 0$. Тогда $w = \hat{w} + \alpha v$ и

$$\langle Av, \xi \rangle + \langle Aw, \eta \rangle = \langle Av, \xi + \alpha \eta \rangle + \langle A\hat{w}, \eta \rangle,$$

поэтому можно заменить w на $\hat{w}$.

Во-вторых, можно нормировать векторы v, w и предполагать, что

$$|v| = |w| = 1. \quad (7.7)$$

Наконец, пусть $\xi \notin \text{span}(v, w)$, так можно считать в силу симметричности условий леммы по ξ, η . Тогда

$$\xi = \alpha v + \beta w + l$$

для некоторого вектора

$$l \perp \text{span}(v, w).$$

Выберем оператор $A \in \mathfrak{so}(n)$ такой, что

$$Aw = 0,$$

$$A : \text{span}(v, l) \rightarrow \text{span}(v, l) \text{ обратим.}$$

Тогда

$$\langle Av, \xi \rangle + \langle Aw, \eta \rangle = \langle Av, l \rangle \neq 0,$$

т.е. оператор A искомый. $\square$

Эта лемма означает, что для любой пары начальных точек $(x, y) \in M$ все допустимые кривые x_t и y_t принадлежат плоскости $\text{span}(x, y) \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому мы рассматриваем ограничение нашей системы на такую плоскость и считаем, что $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Итак, получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}, A((\rho_1 + \rho_3)x + \rho_3 y) \rangle + \langle \dot{y}, A((\rho_2 + \rho_3)y + \rho_3 x) \rangle &= 0, \quad A \in \text{so}(2), \\ (x, y) \in M &= \{(v, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid v \wedge w \neq 0\}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Следовательно,

$$A = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. равенство (7.8) определяет одно линейное уравнение на скорости, т.е. распределение ранга 3 на 4-мерном многообразии M . Используя упражнение 7.1, легко видеть, что это распределение порождено следующими тремя линейными векторными полями:

$$\begin{aligned} V_1 &= ((\rho_1 + \rho_3)x + \rho_3 y) \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} (\rho_1 + \rho_3)x + \rho_3 y \\ 0 \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ V_2 &= ((\rho_2 + \rho_3)y + \rho_3 x) \frac{\partial}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_3 x + (\rho_2 + \rho_3)y \end{pmatrix} = B_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ V_3 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Id} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$B_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 + \rho_3 & \rho_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho_3 & \rho_2 + \rho_3 \end{pmatrix}, \quad \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для упрощения формул, будем записывать 4-мерные векторы как 2-мерные столбцы: например,

$$V_1 = \begin{pmatrix} (\rho_1 + \rho_3)x + \rho_3 y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho_1 + \rho_3)x_1 + \rho_3 y_1 \\ (\rho_1 + \rho_3)x_2 + \rho_3 y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Наше распределение ранга 3 может иметь орбиты размерности 3 или 4. Чтобы выяснить, какая из этих возможностей реализуется, вычислим скобку Ли:

$$\begin{aligned} [V_1, V_2] &= [B_1, B_2] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ [B_1, B_2] &= \rho_3 \begin{pmatrix} \rho_3 & \rho_2 + \rho_3 \\ -(\rho_1 + \rho_3) & -\rho_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что

$$V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \wedge [V_1, V_2] \neq 0 \Leftrightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \text{Id} \wedge [B_1, B_2] \neq 0.$$

Мы записываем матрицы порядка 2 как векторы в стандартном базисе пространства $\mathfrak{gl}(2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{aligned} \det(\text{Id}, B_1, B_2, [B_1, B_2]) &= \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 + \rho_3 & 0 & \rho_3 \\ 0 & \rho_3 & 0 & \rho_2 + \rho_3 \\ 0 & 0 & \rho_3 & -(\rho_1 + \rho_3) \\ 1 & 0 & \rho_2 + \rho_3 & -\rho_3 \end{vmatrix} \\ &= 2\rho_3(\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, поля $V_1, V_2, V_3, [V_1, V_2]$ линейно независимы всюду на M , т.е. наша управляемая система имеет лишь 4-мерные орбиты. Поэтому орбиты совпадают с компонентами связности пространства состояний. Многообразие M распадается на 2 связные компоненты, соответствующие положительной и отрицательной ориентации репера (x, y) :

$$\begin{aligned} M &= M_+ \cup M_-, \\ M_{\pm} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \det(x, y) \gtrless 0\}. \end{aligned}$$

Итак, система на M имеет 2 орбиты, поэтому 2 множества достижимости: M_+ и M_- . Из любой пары линейно независимых векторов $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ достижима любая невырожденная конфигурация $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, для которой $\tilde{x}, \tilde{y} \in \text{span}(x, y)$ и репер $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ориентирован так же, как (x, y) .

Возвращаясь к исходной задаче для 3 точек $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$: 2-мерная линейная плоскость треугольника (x_1, x_2, x_3) должна сохраняться, так же как центр масс и ориентация треугольника. Помимо этого, треугольник (x_1, x_2, x_3) может вращаться, деформироваться и растягиваться как угодно.

Конфигурации из 3-х точек, лежащие в разных 2-мерных плоскостях (или задающие противоположные ориентации в одной и той же 2-мерной плоскости), недостижимы друг для друга: множества достижимости из этих конфигураций взаимно не пересекаются. Впрочем, если две конфигурации лежат в 2-мерных плоскостях, имеющих общую прямую, то пересечение замыканий множеств достижимости непусто: оно состоит из коллинеарных троек, лежащих на одной прямой. Теоретически можно представить движение, переводящее одну конфигурацию в другую: сначала 3 точки делаются коллинеарными в исходной 2-мерной плоскости, а затем эта коллинеарная конфигурация переводится в конечную конфигурацию в терминальной 2-мерной плоскости.

7.4 Ломаная

Рассмотрим систему из четырех материальных точек, расположенных в вершинах трехзвенной ломаной на двумерной плоскости. Мы изучим наиболее симметричный случай, когда все массы единичны и все звенья ломаной имеют единичную длину, см. рис. 7.1.

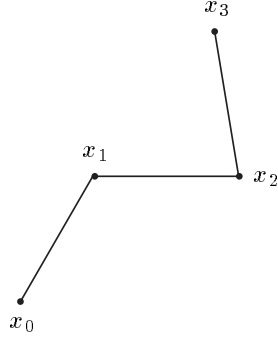


Рис. 7.1: Ломаная

Голономные ограничения для точек

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

имеют вид

$$\sum_{j=0}^3 x_j = 0, \quad |x_j - x_{j-1}| = 1, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7.9)$$

Поэтому

$$x_j - x_{j-1} = e^{i\theta_j}, \quad \theta_j \in S^1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Положение системы определяется тремя углами $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, и пространство состояний есть 3-мерный тор:

$$M = S^1 \times S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^3 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_j \in S^1, j = 1, 2, 3\}.$$

Неголономные ограничения на скорости сводятся к равенству

$$\sum_{j=0}^3 \langle ix_j, \dot{x}_j \rangle = 0.$$

Чтобы выразить это равенство через координаты θ_j , сначала обозначим

$$y_j = x_j - x_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Учитывая условие $\sum_{j=0}^3 x_j = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{3y_1}{4} - \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{4}, \\ x_1 &= \frac{y_1}{4} - \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{4}, \\ x_2 &= \frac{y_1}{4} + \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{4}, \\ x_3 &= \frac{y_1}{4} + \frac{y_2}{2} + \frac{3y_3}{4}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим дифференциальную форму:

$$\begin{aligned} \omega = \sum_{j=0}^3 \langle i x_j, dx_j \rangle &= \langle i ((3/4)y_1 + (1/2)y_2 + (1/4)y_3), dy_1 \rangle \\ &\quad + \langle i ((1/2)y_1 + y_2 + (1/2)y_3), dy_2 \rangle \\ &\quad + \langle i ((1/4)y_1 + (1/2)y_2 + (3/4)y_3), dy_3 \rangle. \end{aligned}$$

Так как $\langle i y_j, dy_k \rangle = \langle e^{i\theta_j}, e^{i\theta_k} d\theta_k \rangle = \cos(\theta_j - \theta_k) d\theta_k$, имеем

$$\begin{aligned} \omega &= ((3/4) + (1/2) \cos(\theta_2 - \theta_1) + (1/4) \cos(\theta_3 - \theta_1)) d\theta_1 \\ &\quad + ((1/2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + 1 + (1/2) \cos(\theta_3 - \theta_2)) d\theta_2 \\ &\quad + ((1/4) \cos(\theta_1 - \theta_3) + (1/2) \cos(\theta_2 - \theta_3) + 3/4) d\theta_3. \end{aligned}$$

Следовательно, наша система задает распределение $\Delta = \text{Ker } \omega$ ранга 2 на 3-мерном многообразии $M = \mathbb{T}^3$. Орбиты могут быть двумерными или трехмерными. Чтобы различить эти два случая, можно поступить, как в предыдущем разделе: найти базис из векторных полей и вычислить скобки Ли. Но сейчас легче исследовать интегрируемость распределения Δ двойственным образом, с помощью дифференциальных форм.

Предположим, что распределение Δ имеет 2-мерное интегральное многообразие $N \subset M$. Тогда

$$\omega|_N = 0,$$

следовательно,

$$0 = d(\omega|_N) = (d\omega)|_N,$$

поэтому

$$0 = d\omega_q|_{\Delta_q} = d\omega_q|_{\text{Ker } \omega_q}, \quad q \in N.$$

В терминах внешнего произведения дифференциальных форм,

$$(\omega \wedge d\omega)_q = 0, \quad q \in N.$$

Вычислим дифференциал и внешнее произведение:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sin(\theta_2 - \theta_1) d\theta_1 \wedge d\theta_2 + \sin(\theta_3 - \theta_2) d\theta_2 \wedge d\theta_3 + \frac{1}{2} \sin(\theta_3 - \theta_1) d\theta_1 \wedge d\theta_3, \\ \omega \wedge d\omega &= \frac{1}{2} (\sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_2)) d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3. \end{aligned}$$

Поэтому $\omega \wedge d\omega = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_2) = 0,$$

то есть

$$\theta_3 = \theta_1 \tag{7.10}$$

или

$$(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_3 - \theta_2) = \pi, \tag{7.11}$$

см. рис. 7.2, 7.3.

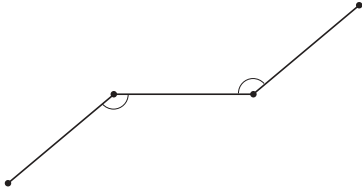


Рис. 7.2: Трудная для управления конфигурация: $\theta_1 = \theta_3$

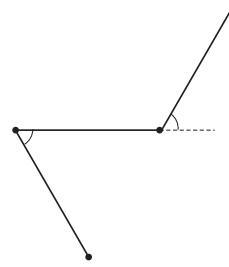


Рис. 7.3: Трудная для управления конфигурация: $(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_3 - \theta_2) = \pi$

Конфигурации (7.10) и (7.11) трудны для управления: если ни одно из этих равенств не выполняется, то $\omega \wedge d\omega \neq 0$, т.е. система имеет 3-мерные орбиты. Если выбрать базис из векторных полей X_1, X_2 в распределении Δ , то уже первая скобка $[X_1, X_2]$ линейно не зависит от X_1, X_2 в точках, где нарушаются оба равенства (7.10), (7.11).

Остается исследовать интегрируемость распределения Δ в точках поверхностей (7.10), (7.11). Здесь $[X_1, X_2](q) \in \Delta_q$, но можно получить неинтегрируемость Δ благодаря скобкам более высокого порядка.

Сначала рассмотрим двумерную поверхность

$$P = \{\theta_3 = \theta_1\}.$$

Если орбита через точку $q \in P$ двумерна, то распределение Δ должно касаться P в окрестности q . Но легко видеть, что, например,

$$T_q P \ni \frac{\partial}{\partial \theta_2} \Big|_q \notin \Delta_q, \quad q \in P.$$

Поэтому система имеет трехмерные орбиты через любую точку поверхности P .

Аналогично легко показать, что орбиты через точки второй поверхности (7.11) также трехмерны.

Пространство состояний M связно, поэтому имеется единственная орбита (и множество достижимости) — все многообразие M . Система вполне управляема.

Глава 8

Множества достижимости

В этой главе мы изучим некоторые общие свойства множеств достижимости. Мы будем рассматривать семейства векторных полей $\mathcal{F}$ на гладком многообразии M , удовлетворяющие свойству:

$$\text{Lie}_q \mathcal{F} = T_q M \quad \forall q \in M. \quad (8.1)$$

В этом случае говорят, что система $\mathcal{F}$ имеет *полный ранг* на M^1 . Согласно аналитической версии теоремы об орбите (следствие 5.3), орбиты систем полного ранга являются открытыми подмножествами пространства состояний M .

Если семейство $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$ не имеет полного ранга, а M и $\mathcal{F}$ вещественно аналитические, то можно перейти от $\mathcal{F}$ к семейству полного ранга $\mathcal{F}|_{\mathcal{O}}$, где $\mathcal{O}$ — орбита $\mathcal{F}$. Поэтому в аналитическом случае условие полного ранга (8.1) не слишком ограничительно.

8.1 Множества достижимости систем полного ранга

У систем полного ранга не только орбиты, но и множества достижимости имеют полную размерность. Более того, справедливо следующее важное утверждение.

Теорема 8.1 (Кренер). Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$ — система полного ранга. Тогда $\mathcal{A}_{q_0} \subset \text{int } \mathcal{A}_{q_0}$ для любой точки $q_0 \in M$.

Замечание. В частности, множества достижимости за произвольное время имеют непустую внутренность:

$$\text{int } \mathcal{A}_{q_0} \neq \emptyset.$$

Множества достижимости могут быть:

¹В англоязычной литературе используется также термин *bracket-generating system*.

- открытыми множествами, рис. 8.1,
- многообразиями с гладкой границей, рис. 8.2,
- многообразиями с границей, имеющей особенности (угловые точки или точки возврата), рис. 8.3, 8.4.

Легко построить соответствующие примеры управляемых систем (например, на плоскости).

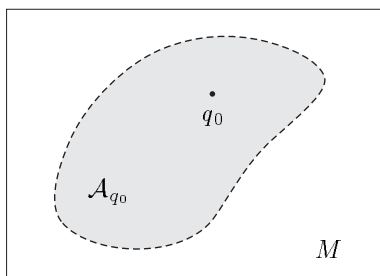


Рис. 8.1: Орбита — открытое множество

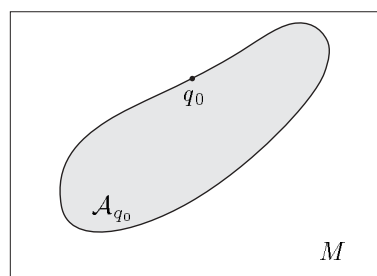


Рис. 8.2: Орбита — многообразие с гладкой границей

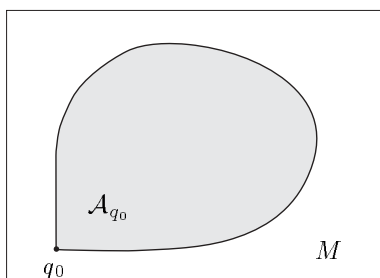


Рис. 8.3: Орбита — многообразие с негладкой границей

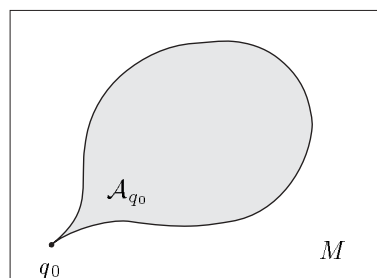


Рис. 8.4: Орбита — многообразие с негладкой границей

С другой стороны, теорема Кренера запрещает следующие возможности для множеств достижимости $\mathcal{A}_{q_0}$ систем полного ранга:

- подмножество M неполной размерности, рис. 8.5,
- множество, имеющее граничные точки, изолированные от внутренних точек, рис. 8.6.

Докажем теорему Кренера.

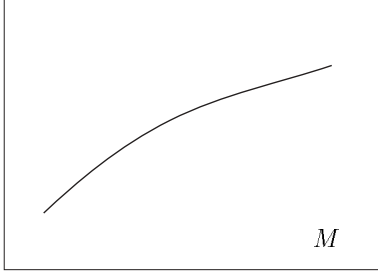


Рис. 8.5: Запрещенная орбита: подмножество неполной размерности

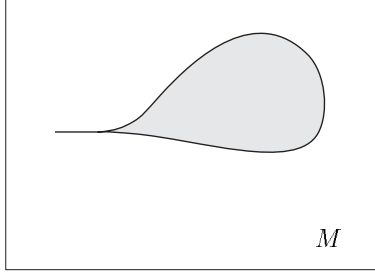


Рис. 8.6: Запрещенная орбита: множество с изолированными граничными точками

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $q_0 \in M$, выберем любую точку $q' \in \mathcal{A}_{q_0}$, и покажем, что

$$q' \in \overline{\text{int } \mathcal{A}_{q_0}}. \quad (8.2)$$

(1) Существует такое векторное поле $f_1 \in \mathcal{F}$, что $f_1(q') \neq 0$, в противном случае $\text{Lie}_{q'}(\mathcal{F}) = 0$ и $\dim M = 0$. Кривая

$$s_1 \mapsto q' \circ e^{s_1 f_1}, \quad s_1 \in (0, \varepsilon), \quad (8.3)$$

образует одномерное подмногообразие M при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Если $\dim M = 1$, то $q' \circ e^{s_1 f_1} \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}$ для малых $s_1 > 0$, и включение (8.2) доказано.

(2) Пусть $\dim M > 1$. Тогда сколь угодно близко к q' можно найти точку q_1 на кривой (8.3) и поле $f_2 \in \mathcal{F}$ такие, что вектор $f_2(q_1)$ не касается кривой (8.3):

$$\begin{aligned} q_1 &= q' \circ e^{t_1^1 f_1}, & t_1^1 &\text{ достаточно мало,} \\ (q_1 \circ f_1) \wedge (q_1 \circ f_2) &\neq 0, \end{aligned}$$

в противном случае $\dim \text{Lie}_q \mathcal{F} = 1$ в точках q , лежащих на кривой (8.3) при достаточно малых s_1 . Тогда отображение

$$(s_1, s_2) \mapsto q_1 \circ e^{s_1 f_1} \circ e^{s_2 f_2}, \quad s_1 > 0, \quad s_2 > 0, \quad (8.4)$$

есть погружение вблизи начала координат в $\mathbb{R}_{s_1, s_2}^2$, поэтому его образ — двумерное подмногообразие M .

Если $\dim M = 2$, то включение (8.2) доказано.

(3) Предположим, что $\dim M > 2$. Тогда можно найти вектор $f_3(q)$, $f_3 \in \mathcal{F}$, не касающийся поверхности (8.4) достаточно близко к q' : существуют $t_2^1, t_2^2 > 0$ и $f_3 \in \mathcal{F}$ такие, что векторное поле f_3 не касается поверхности (8.4)

в некоторой точке $q_2 = q' \circ e^{t_2^1 f_1} \circ e^{t_2^2 f_2}$. В противном случае семейство $\mathcal{F}$ не имеет полного ранга.

Отображение

$$(s_1, s_2, s_3) \mapsto q_2 \circ e^{s_1 f_1} \circ e^{s_2 f_2} \circ e^{s_3 f_3}, \quad s_i > 0,$$

есть погружение в малой окрестности начала координат в $\mathbb{R}_{s_1, s_2, s_3}^3$, поэтому его образ — гладкое трехмерное подмногообразие M .

Если $\dim M = 3$, то включение (8.2) доказано. В противном случае продолжаем рассуждение.

(4) По индукции, для $\dim M = n$ находим точку

$$(t_{n-1}^1, t_{n-1}^2, \dots, t_{n-1}^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t_{n-1}^i > 0$$

и поля $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ такие, что отображение

$$(s_1, \dots, s_n) \mapsto q_{n-1} \circ e^{s_1 f_1} \circ \dots \circ e^{s_n f_n}, \quad s_i > 0,$$

$$q_{n-1} = q' \circ e^{t_{n-1}^1 f_1} \circ e^{t_{n-1}^2 f_2} \circ \dots \circ e^{t_{n-1}^{n-1} f_{n-1}},$$

есть погружение. Образ этого погружения — n -мерное подмногообразие M , то есть открытое множество. Это открытое множество содержится в $\mathcal{A}_{q_0}$, и его можно выбрать сколь угодно близким к точке q' . Включение (8.2) и теорема доказаны. $\square$

Из теоремы Кренера получаем следующее предложение.

Следствие 8.1. Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$ — система полного ранга. Если $\overline{\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F})} = M$ для некоторой точки $q_0 \in M$, то $\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F}) = M$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $q \in M$ и покажем, что она принадлежит множеству достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F})$.

Рассмотрим систему

$$-\mathcal{F} = \{-V \mid V \in \mathcal{F}\} \subset \text{Vec } M.$$

Эта система имеет полный ранг, поэтому по теореме 8.1

$$\mathcal{A}_q(-\mathcal{F}) \subset \overline{\text{int } \mathcal{A}_q(-\mathcal{F})} \quad \forall q \in M.$$

Возьмем любую точку $\hat{q} \in \text{int } \mathcal{A}_q(-\mathcal{F})$ и окрестность этой точки $O_{\hat{q}} \subset \mathcal{A}_q(-\mathcal{F})$. Так как $\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F})$ плотно в M , имеем

$$\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F}) \cap O_{\hat{q}} \neq \emptyset.$$

Поэтому $\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{A}_q(-\mathcal{F}) \neq \emptyset$, т.е. существует точка

$$q' \in \mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{A}_q(-\mathcal{F}).$$

Иными словами, точку q' можно представить двумя способами:

$$\begin{aligned} q' &= q_0 \circ e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k}, & f_i &\in \mathcal{F}, \ t_i > 0, \\ q' &= q \circ e^{-s_1 g_1} \circ \dots \circ e^{-s_l g_l}, & g_i &\in \mathcal{F}, \ s_i > 0. \end{aligned}$$

Умножая оба разложения справа на $e^{s_1 g_1} \circ \dots \circ e^{s_l g_l}$, получаем

$$q = q_0 \circ e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k} \circ e^{s_1 g_1} \circ \dots \circ e^{s_l g_l} \in \mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F}),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Это предложение означает, что при исследовании управляемости можно заменять множество достижимости системы полного ранга его замыканием. В следующем разделе мы покажем, как можно добавлять к управляемой системе новые векторные поля, не увеличивая при этом замыкания множества достижимости.

8.2 Совместимые векторные поля и релаксации

Определение 8.1. Векторное поле $f \in \text{Vec } M$ называется *совместимым* с системой $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$ если

$$\mathcal{A}_q(\mathcal{F} \cup f) \subset \overline{\mathcal{A}_q(\mathcal{F})} \quad \forall q \in M.$$

Простое условие совместимости дается в следующем утверждении.

Предложение 8.1. Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$. Для любых векторных полей $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ и любых функций $a_1, a_2 \in C^\infty(M)$, $a_1, a_2 \geq 0$, векторное поле $a_1 f_1 + a_2 f_2$ совместимо с системой $\mathcal{F}$.

Отсюда, учитывая следствие 5.2, получаем полезное предложение.

Следствие 8.2. Если $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$ — система полного ранга такая, что порожденный ею положительный конус

$$\text{cone}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i f_i \mid f_i \in \mathcal{F}, \ a_i \in C^\infty(M), \ a_i \geq 0, \ k \in \mathbb{N} \right\} \subset \text{Vec } M$$

симметричен, то система $\mathcal{F}$ вполне управляема.

Предложение 8.1 вытекает из следующего сильного общего утверждения.

Теорема 8.2. Пусть неавтономные векторные поля X_τ, Y_τ , $\tau \in [0, t_1]$, имеют компактный носитель. Пусть функция $\alpha : [0, t_1] \rightarrow [0, 1]$ измерима. Тогда существует последовательность неавтономных векторных полей $Z_\tau^n \in \{X_\tau, Y_\tau\}$, т.е. $Z_\tau^n = X_\tau$ или Y_τ для любых τ и n , такая что поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t Z_\tau^n d\tau \rightarrow \overrightarrow{\exp} \int_0^t (\alpha(\tau) X_\tau + (1 - \alpha(\tau)) Y_\tau) d\tau, \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по $(t, q) \in [0, t_1] \times M$ и равномерно со всеми производными по $q \in M$.

Отсюда следует предложение 8.1. В случае $a_1(q) + a_2(q) = 1$ оно получается из теоремы 8.2. Действительно, легко показать, что кривые $q(t) = q_0 \circ e^{t(a_1 f_1 + a_2 f_2)}$ и $q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t (\alpha_1(\tau) f_1 + \alpha_2(\tau) f_2) d\tau$, $\alpha_i(t) = a_i(q(t))$, совпадают друг с другом (указание: докажите, что кривая $q_0 \circ e^{t(a_1 f_1 + a_2 f_2)} \circ \overleftarrow{\exp} \int_0^t (-\alpha_1(\tau) f_1 - \alpha_2(\tau) f_2) d\tau$ постоянна). В случае $a_1(q), a_2(q) > 0$ мы умножаем управляющие параметры на произвольную положительную функцию (это не влияет на множество достижимости за произвольное неотрицательное время), а случай $a_1(q), a_2(q) \geq 0$ получается предельным переходом.

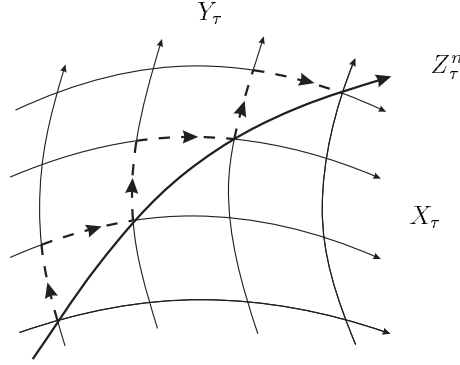


Рис. 8.7: Аппроксимация потока, теорема 8.2

Замечание. Если поля X_τ, Y_τ кусочно-непрерывны по τ , то аппроксимирующие поля Z_τ^n в теореме 8.2 могут быть выбраны кусочно-постоянными.

Теорема 8.2 следует из двух лемм, приведенных ниже.

Лемма 8.1. *Если выполнены условия теоремы 8.2, то существует последовательность неавтономных векторных полей $Z_\tau^n \in \{X_\tau, Y_\tau\}$ такая, что*

$$\int_0^t Z_\tau^n d\tau \rightarrow \int_0^t (\alpha(\tau) X_\tau + (1 - \alpha(\tau)) Y_\tau) d\tau$$

равномерно по $(t, q) \in [0, t_1] \times M$ и равномерно со всеми производными по $q \in M$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное натуральное число n . Можно выбрать такое покрытие отрезка $[0, t_1]$ подмножествами

$$\bigcup_{i=1}^N E_i = [0, t_1],$$

что для любых $i = 1, \dots, N$ существуют $X_i, Y_i \in \text{Vec } M$ такие, что

$$\|X_\tau - X_i\|_{n,K} \leq \frac{1}{n}, \quad \|Y_\tau - Y_i\|_{n,K} \leq \frac{1}{n},$$

где K — компактный носитель полей X_τ, Y_τ . Действительно, поля X_τ, Y_τ ограничены в норме $\|\cdot\|_{n+1,K}$, поэтому они образуют предкомпактное множество в топологии, индуцированной $\|\cdot\|_{n,K}$.

Разделим множества E_i на n подмножеств равной меры:

$$E_i = \bigcup_{j=1}^n E_{ij}, \quad |E_{ij}| = \frac{1}{n}|E_i|, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

В каждом E_{ij} выберем подмножество F_{ij} такое, что

$$F_{ij} \subset E_{ij}, \quad |F_{ij}| = \int_{E_{ij}} \alpha(\tau) d\tau.$$

Наконец, определим следующие векторные поля:

$$Z_\tau^n = \begin{cases} X_\tau, & \tau \in F_{ij}, \\ Y_\tau, & \tau \in E_{ij} \setminus F_{ij}. \end{cases}$$

Тогда легко видеть, что последовательность полей Z_τ^n — искомая. $\square$

Теперь докажем вторую часть теоремы 8.2.

Лемма 8.2. Пусть неавтономные векторные поля Z_τ^n , $n = 1, 2, \dots$, и Z_τ , $\tau \in [0, t_1]$, ограничены по τ и имеют компактный носитель. Если

$$\int_0^t Z_\tau^n d\tau \rightarrow \int_0^t Z_\tau d\tau, \quad n \rightarrow \infty,$$

то

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t Z_\tau^n d\tau \rightarrow \overrightarrow{\exp} \int_0^t Z_\tau d\tau, \quad n \rightarrow \infty,$$

где оба предельных перехода равномерны по $(t, q) \in [0, t_1] \times M$ и равномерны со всеми производными по $q \in M$.

Доказательство. (1) Сначала докажем утверждение в случае $Z_\tau = 0$. Обозначим поток

$$P_t^n = \overrightarrow{\exp} \int_0^t Z_\tau^n d\tau.$$

Тогда

$$P_t^n = \text{Id} + \int_0^t P_\tau^n \circ Z_\tau^n d\tau$$

интегрируя по частям

$$= \text{Id} + P_t^n \circ \int_0^t Z_\tau^n d\tau - \int_0^t \left(P_\tau^n \circ Z_\tau^n \circ \int_0^\tau Z_\theta^\tau d\theta \right) d\tau.$$

Так как $\int_0^t Z_\tau^n d\tau \rightarrow 0$, последние два члена в предыдущем разложении стремятся к нулю, поэтому

$$P_t^n \rightarrow \text{Id},$$

что доказывает утверждение леммы в случае $Z_\tau = 0$.

(2) Рассмотрим общий случай. Разложим векторные поля последовательно:

$$Z_\tau^n = Z_\tau + V_\tau^n, \quad \int_0^t V_\tau^n d\tau \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Обозначим $P_t^n = \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau^n d\tau$. Из формулы вариаций получаем

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t Z_\tau^n d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (V_\tau^n + Z_\tau) d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } P_\tau^n Z_\tau d\tau \circ P_t^n.$$

По части (1) этого доказательства, $P_t^n \rightarrow \text{Id}$, следовательно $\text{Ad } P_t^n \rightarrow \text{Id}$, откуда

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t Z_\tau^n d\tau \rightarrow \overrightarrow{\exp} \int_0^t Z_\tau d\tau,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Итак, мы доказали теорему 8.2, а потому и предложение 8.1.

8.3 Устойчивость по Пуассону

Определение 8.2. Пусть $f \in \text{Vec } M$ — полное векторное поле. Точка $q \in M$ называется *устойчивой по Пуассону* для поля f , если для любого $t > 0$ и любой окрестности O_q точки q существуют точка $q' \in O_q$ и момент времени $t' > t$ такие, что $q' \circ e^{t'f} \in O_q$.

То есть все траектории не могут навсегда покинуть окрестность устойчивой по Пуассону точки, некоторые из них обязаны возвращаться в эту окрестность в сколь угодно далеком будущем.

Замечание. Если траектория $q \circ e^{tf}$ периодическая, то точка q устойчива по Пуассону для поля f .

Определение 8.3. Полное векторное поле $f \in \text{Vec } M$ называется *устойчивым по Пуассону*, если все точки многообразия M устойчивы по Пуассону для f .

Условие устойчивости по Пуассону кажется довольно ограничительным, но тем не менее в приложениях оно часто выполняется, см. ниже теорему Пуанкаре.

Но сначала выясним, что означает устойчивость по Пуассону для задачи управляемости.

Предложение 8.2. Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$ — система полного ранга. Если векторное поле $f \in \mathcal{F}$ устойчиво по Пуассону, то поле $-f$ совместимо с системой $\mathcal{F}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $q_0 \in M$ и момент времени $t > 0$. Чтобы доказать предложение, аппроксимируем точку $q_0 \circ e^{-tf}$ достижимыми точками.

Так как система $\mathcal{F}$ имеет полный ранг, можно выбрать открытое множество $W \subset \text{int } \mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F})$ сколь угодно близко к q_0 . Тогда множество $W \circ e^{-tf}$ будет близким к точке $q_0 \circ e^{-tf}$.

В силу устойчивости по Пуассону, существует $t' > t$ такое, что

$$\emptyset \neq (W \circ e^{-tf}) \circ e^{t'f} \cap W \circ e^{-tf} = W \circ e^{(t'-t)f} \cap W \circ e^{-tf}.$$

Но $W \circ e^{(t'-t)f} \subset \mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F})$, поэтому

$$\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F}) \cap W \circ e^{-tf} \neq \emptyset.$$

Итак, в любой окрестности точки $q_0 \circ e^{-tf}$ имеются точки множества достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F})$, то есть $q_0 \circ e^{-tf} \in \overline{\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F})}$. $\square$

Теорема 8.3 (Пуанкаре). Пусть M — гладкое многообразие с формой объема Vol . Пусть векторное поле $f \in \text{Vec } M$ полно, а его поток e^{tf} сохраняет объем. Пусть $W \subset M$, $W \subset \overline{\text{int } W}$, есть подмножество конечной меры, инвариантное относительно f :

$$\text{Vol}(W) < \infty, \quad W \circ e^{tf} \subset W \quad \forall t > 0.$$

Тогда все точки множества W устойчивы по Пуассону для поля f .

Доказательство. Возьмем любую точку $q \in W$ и любую ее окрестность $O \subset M$ конечного объема. Множество $V = W \cap O$ содержит непустое открытое подмножество $\text{int } W \cap O$, поэтому $\text{Vol}(V) > 0$. Чтобы доказать теорему, мы покажем, что

$$V \circ e^{t'f} \cap V \neq \emptyset \quad \text{для некоторых больших } t'.$$

Зафиксируем любое $t > 0$. Все множества

$$V \circ e^{ntf}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

имеют один и тот же положительный объем, поэтому некоторые из них обязаны пересекаться. Действительно, если бы

$$V \circ e^{ntf} \cap V \circ e^{mtf} = \emptyset \quad \forall n, m = 0, 1, 2, \dots,$$

то $\text{Vol}(W) = \infty$ так как все эти множества содержатся в W . Следовательно, существуют неотрицательные целые числа $n > m$ такие, что

$$V \circ e^{ntf} \cap V \circ e^{mtf} \neq \emptyset.$$

Умножая это неравенство справа на e^{-mtf} , получаем

$$V \circ e^{(n-m)tf} \cap V \neq \emptyset.$$

Поэтому точка q устойчива по Пуассону для f , и теорема доказана. $\square$

Векторное поле называется *консервативным*, если его поток сохраняет объем.

Напомним, что векторное поле на $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ консервативно, т.е. сохраняет стандартный объем $\text{Vol}(V) = \int_V dx_1 \dots dx_n$ тогда и только тогда, когда это оно бездивергентно:

$$\text{div}_x f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0, \quad f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

8.4 Управляемое твердое тело: множества достижимости

Применим полученные общие результаты к управляемой системе (6.20), описывающей вращения твердого тела:

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} = f(Q, \mu) \pm g(Q, \mu), \quad (Q, \mu) \in \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3, \quad (8.5)$$

$$f = \begin{pmatrix} Q \hat{\beta} \mu \\ \mu \times \beta \mu \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}.$$

По предложению 8.1, векторное поле $f = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}(f - g)$ совместимо с системой (8.5). Покажем, что это поле устойчиво по Пуассону на $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$.

Сначала рассмотрим векторное поле $f(Q, \mu)$ на большем пространстве $\mathbb{R}_Q^9 \times \mathbb{R}_\mu^3$, где $\mathbb{R}_Q^9$ — пространство всех матриц порядка 3. Имеем $\text{div}_{(Q, \mu)} f = 0$, поэтому поле f консервативно на $\mathbb{R}_Q^9 \times \mathbb{R}_\mu^3$.

Далее, так как первая компонента поля f линейна по Q , она удовлетворяет следующему свойству левоинвариантности по Q :

$$e^{tf} \begin{pmatrix} Q \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_t \\ \mu_t \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tf} \begin{pmatrix} PQ \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PQ_t \\ \mu_t \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

$$Q, Q_t, P \in \mathbb{R}_Q^9, \quad \mu, \mu_t \in \mathbb{R}_\mu^3.$$

В силу этого свойства, поле f имеет компактные инвариантные множества в $\mathbb{R}_Q^9 \times \mathbb{R}_\mu^3$ вида

$$W = (\text{SO}(3) K) \times \{(\mu, \mu) \leq C\}, \quad K \in \mathbb{R}_Q^9, \quad K \subset \overline{\text{int } K}, \quad C > 0,$$

так что $W \subset \overline{\text{int } W}$. По теореме Пуанкаре, поле f устойчиво по Пуассону на всех этих множествах W , а потому и на $\mathbb{R}_Q^9 \times \mathbb{R}_\mu^3$. Ввиду свойства инвариантности (8.6), поле f устойчиво по Пуассону и на $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$.

Так как поле f совместимо с системой (8.5), противоположное поле $-f$ также с ней совместимо. Следовательно, и векторные поля

$$\pm g = (f \pm g) - f$$

совместимы с этой системой. Итак, все векторные поля симметричной системы

$$\text{span}(f, g) = \{af + bg \mid a, b \in C^\infty\}$$

совместимы с исходной системой. Поэтому замыкания множеств достижимости исходной системы (8.5) и расширенной системы $\text{span}(f, g)$ совпадают.

Пусть исходная система имеет полный ранг. Тогда и симметричная система $\text{span}(f, g)$ имеет полный ранг, следовательно, является вполне управляемой. Поэтому в случае полного ранга исходная система (8.5) вполне управляема.

В случае неполного ранга множества достижимости имеют более сложную структуру. Если l совпадает с главной осью инерции, то орбиты системы (8.5) совпадают со множествами достижимости. В случае $l \in \Pi_\pm \setminus \mathbb{R}e_2$ это уже не так. Это легко видеть по фазовому портрету векторного поля $f(\mu) = \mu \times \beta\mu$ в плоскости $\Pi_\pm$: прямая $\mathbb{R}e_2$ состоит из положений равновесия f , а в полуплоскостях $\Pi_\pm \setminus \mathbb{R}e_2$ траектории f — полуокружности с центром в начале координат, см. рис. 8.8.

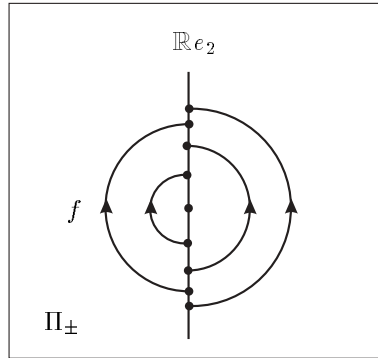


Рис. 8.8: Фазовый портрет поля $f|_{\Pi_\pm}$ при $l \in \Pi_\pm \setminus \mathbb{R}e_2$

Поле f неустойчиво по Пуассону в плоскостях $\Pi_\pm$. Случай $l \in \Pi_\pm \setminus \mathbb{R}e_2$ отличается от случая полного ранга из-за того, что под действием поля f трехмерный объем в $\mathbb{R}^3$ сохраняется, а двумерный объем в инвариантных плоскостях $\Pi_\pm$ — нет.

Подробный анализ задачи управляемости в случае неполного ранга проведен в работе [64].

Глава 9

Эквивалентность управляемых систем по состоянию и обратной связи

9.1 Эквивалентность по обратной связи

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U. \quad (9.1)$$

Будем предполагать, что не только M , но и U есть гладкое многообразие. От правой части системы будем требовать, чтобы для всех фиксированных $u \in U$, правая часть $f(q, u)$ была гладким векторным полем на M , а отображение

$$(u, q) \mapsto f(q, u)$$

было гладким. В качестве допустимых управлений будем брать измеримые локально ограниченные отображения

$$t \mapsto u(t) \in U,$$

для простоты можно также рассматривать кусочно-непрерывные управления. При подстановке такого управления $u(t)$ в управляемую систему (9.1) получается неавтономное дифференциальное уравнение

$$\dot{q} = f(q, u(t)), \quad (9.2)$$

с правой частью гладкой по q и измеримой, локально ограниченной по t . Для таких ОДУ справедлива стандартная теорема существования и единственности решений, по крайней мере локальная. Решения $q(\cdot)$ дифференциального уравнения (9.2) — липшицевы кривые в M (см. раздел 2.4.1).

В разделе 5.7 мы уже рассматривали преобразования состояния управляемых систем, т.е. диффеоморфизмы M . Преобразования состояния отображают траектории управляемых систем в траектории, с тем же управлением. Сейчас мы рассмотрим новый класс преобразований обратной связи, также переводящий траектории в траектории, но возможно с новым управлением.

Обозначим пространство новых управляющих параметров через $\widehat{U}$, будем предполагать, что это гладкое многообразие.

Определение 9.1. Пусть $\varphi : M \times \widehat{U} \rightarrow U$ есть гладкое отображение. Преобразование вида

$$f(q, u) \mapsto f(q, \varphi(q, \widehat{u})), \quad q \in M, \quad u \in U, \quad \widehat{u} \in \widehat{U},$$

называется *преобразованием обратной связи*.

Замечание. Преобразование обратной связи перепараметризует управление u некоторым способом, зависящим от состояния q .

Легко видеть, что любая допустимая траектория $q(\cdot)$ новой системы $\dot{q} = f(q, \varphi(q, \widehat{u}))$, соответствующая управлению $\widehat{u}(\cdot)$, является также допустимой и для исходной системы $\dot{q} = f(q, u)$ с управлением $u(\cdot) = \varphi(q(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, хотя обратное, вообще говоря, неверно.

Чтобы получить обратное соответствие, будем рассматривать обратимые преобразования обратной связи, для которых

$$\widehat{U} = U, \quad \varphi|_{q \times U} \in \text{Diff } U.$$

Такие отображения $\varphi : M \times U \rightarrow U$ порождают преобразования обратной связи

$$f(q, u) \mapsto f(q, \varphi(q, u)).$$

Соответствующие управляемые системы

$$\dot{q} = f(q, u) \quad \text{и} \quad \dot{q} = f(q, \varphi(q, u))$$

называются *эквивалентными по обратной связи*.

При работе с управляемой системой естественно пытаться ее упростить преобразованиями состояния и обратной связи.

Замечание. В математической физике преобразования обратной связи называются калибровочными преобразованиями.

Далее в этой главе будем рассматривать только аффинные по управлению системы

$$\dot{q} = f(q) + \sum_{i=1}^k u_i g_i(q), \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \quad q \in M. \quad (9.3)$$

К таким системам естественно применять преобразования обратной связи, аффинные по управлению:

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k, \\ \varphi_i(q, u) &= c_i(q) + \sum_{j=1}^k d_{ij}(q) u_j, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Поставим себе задачу охарактеризовать аффинные по управлению системы (9.3), локально эквивалентные линейным управляемым системам относительно преобразований состояния и обратной связи (9.4), и классифицировать их относительно этого класса преобразований.

9.2 Линейные системы

Рассмотрим сначала линейные управляемые системы

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^k u_i b_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \quad (9.5)$$

где A — матрица порядка n , а b_i , $i = 1, \dots, k$, — векторы в $\mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что векторы $b_1, \dots, b_k$ линейно независимы:

$$\dim \text{span}(b_1, \dots, b_k) = k,$$

этого всегда можно добиться исключением некоторых векторов b_i . Найдем нормальные формы линейных систем относительно преобразований состояния и обратной связи.

К линейным системам (9.5) применяем преобразования обратной связи, которые имеют вид (9.4) и, более того, сохраняют линейную структуру:

$$\begin{aligned} c_i(x) &= \langle c_i, x \rangle, & c_i &\in \mathbb{R}^{n*}, \quad i = 1, \dots, k, \\ d_{ij}(x) &= d_{ij} \in \mathbb{R}, & i, j &= 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Обозначим через $D : \text{span}(b_1, \dots, b_k) \rightarrow \text{span}(b_1, \dots, b_k)$ линейный оператор с матрицей (d_{ij}) в базисе $b_1, \dots, b_k$. Линейные преобразования обратной связи (9.4), (9.6) действуют на векторные поля в правой части линейной системы (9.5) следующим образом:

$$(Ax, b_1, \dots, b_k) \mapsto \left(Ax + \sum_{i=1}^k \langle c_i, x \rangle b_i, Db_1, \dots, Db_k \right). \quad (9.7)$$

Это отображение должно быть обратимым, поэтому будем предполагать оператор D обратимым.

Линейные преобразования состояния действуют на линейные системы следующим образом:

$$(Ax, b_1, \dots, b_k) \mapsto (CAC^{-1}x, Cb_1, \dots, Cb_k), \quad (9.8)$$

где $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — обратимый линейный оператор. Эквивалентность линейных систем по состоянию означает, что эти системы имеют одинаковые координатные представления в подходящих базисах в пространстве состояний $\mathbb{R}^n$.

9.2.1 Линейные системы со скалярным управлением

Рассмотрим простую модельную линейную систему:

$$x^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^{(i)} = u, \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (9.9)$$

где $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$. Перепишем эту систему в стандартной форме в переменных $x_i = x^{(i-1)}$, $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_{i+1} + u, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (9.10)$$

Если взять $-\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_{i+1} + u$ в качестве нового управления, т.е. применить преобразование обратной связи (9.4), (9.6) с

$$k = 1, \quad c = (-\alpha_0, \dots, -\alpha_{n-1}), \quad d = 1,$$

то система (9.10) перейдет в систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = u, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (9.11)$$

которая в скалярном виде записывается как

$$x^{(n)} = u, \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9.12)$$

Итак, система (9.10) эквивалентна системе (9.11) по обратной связи.

Оказывается, что простые системы (9.10) и (9.11) являются соответственно нормальными формами управляемых линейных систем относительно преобразований состояния, и преобразований состояния и обратной связи.

Предложение 9.1. *Любая управляемая линейная система со скалярным управлением*

$$\dot{x} = Ax + ub, \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9.13)$$

$$\text{span}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = \mathbb{R}^n, \quad (9.14)$$

эквивалентна по состоянию системе (9.10), а потому эквивалентна по состоянию и обратной связи системе (9.11).

Доказательство. Отыщем базис $e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^n$, в котором система (9.13) записывается в виде (9.10). Координаты $y_1, \dots, y_n$ точки $x \in \mathbb{R}^n$ в базисе $e_1, \dots, e_n$ находятся из разложения

$$x = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

Исходя из требуемого вида системы (9.10), вектор b должен иметь координаты $b = (0, \dots, 0, 1)^*$, поэтому базисный вектор с номером n определен однозначно:

$$e_n = b.$$

Найдем остальные базисные векторы $e_1, \dots, e_{n-1}$. Нашу линейную систему (9.13) можно переписать в виде:

$$\dot{x} = Ax \mod \mathbb{R}b,$$

тогда в координатах получаем:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i e_i = \sum_{i=1}^n y_i A e_i \mod \mathbb{R}b,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n-1} \dot{y}_i e_i = \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} A e_{i+1} \mod \mathbb{R}b.$$

Требуемые дифференциальные уравнения:

$$\dot{y}_i = y_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

выполняются в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$ тогда и только тогда, когда справедливы равенства:

$$A e_{i+1} = e_i + \beta_i b, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (9.15)$$

$$A e_1 = \beta_0 b \quad (9.16)$$

для некоторых чисел $\beta_0, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Остается показать, что можно подобрать базисные векторы $e_1, \dots, e_{n-1}$, удовлетворяющие равенствам (9.15), (9.16). Перепишем равенство (9.15) в виде

$$e_i = A e_{i+1} - \beta_i b, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (9.17)$$

откуда последовательно получаем:

$$\begin{aligned} e_n &= b, \\ e_{n-1} &= A b - \beta_{n-1} b, \\ e_{n-2} &= A^2 b - \beta_{n-1} A b - \beta_{n-2} b, \\ &\dots \\ e_1 &= A^{n-1} b - \beta_{n-1} A^{n-2} b - \dots - \beta_1 b. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Итак, из равенства (9.16) следует, что

$$Ae_1 = A^n b - \beta_{n-1} A^{n-1} b - \dots - \beta_1 A b = \beta_0 b.$$

Равенство

$$A^n b = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A^i b \quad (9.19)$$

удовлетворяется на единственном наборе $(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$ так как векторы $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ образуют базис $\mathbb{R}^n$ (на самом деле β_i — коэффициенты характеристического многочлена оператора A).

Векторы $e_1, \dots, e_n$, построенные по равенствам (9.18) с этими коэффициентами β_i , образуют искомый базис. Действительно, равенства (9.15), (9.16) выполняются по построению. Векторы $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы по условию управляемости (9.14). $\square$

Замечание. Базис $e_1, \dots, e_n$, построенный в предыдущем доказательстве, единствен, поэтому преобразование состояния, приводящее управляемую линейную систему со скалярным управлением (9.13) в нормальную форму (9.10), также единственно.

9.2.2 Линейные системы с векторным управлением

Теперь рассмотрим управляемые линейные системы с векторным управлением

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^k u_i b_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \quad (9.20)$$

$$\text{span}\{A^j b_i \mid j = 0, \dots, n-1, i = 1, \dots, k\} = \mathbb{R}^n. \quad (9.21)$$

Напомним, что векторы $b_1, \dots, b_k$ предполагаются линейно независимыми.

В случае $k = 1$ все управляемые линейные системы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны по состоянию и обратной связи нормальной форме (9.11), поэтому при фиксированной размерности n инвариантов по состоянию и обратной связи нет. В случае $k > 1$ это не так, и мы начнем с описания инвариантов по состоянию и обратной связи.

Индексы Кронекера

Рассмотрим следующие подпространства в $\mathbb{R}^n$:

$$D^m = \text{span}\{A^j b_i \mid j = 0, \dots, m-1, i = 1, \dots, k\}, \quad m = 1, \dots, n. \quad (9.22)$$

Обратимые линейные преобразования состояния (9.8) сохраняют размерности этих подпространств, поэтому числа

$$\dim D^m, \quad m = 1, \dots, n,$$

являются инвариантами по состоянию.

Теперь покажем, что обратимые линейные преобразования обратной связи (9.7) сохраняют пространства D^m . Любое такое преобразование можно разложить на два преобразования обратной связи вида

$$(Ax, b_1, \dots, b_k) \mapsto (Ax + \sum_{i=1}^k \langle c_i, x \rangle b_i, b_1, \dots, b_k), \quad (9.23)$$

$$(Ax, b_1, \dots, b_k) \mapsto (Ax, Db_1, \dots, Db_k). \quad (9.24)$$

Очевидно, что преобразования (9.24), т.е. замены b_i , сохраняют пространства D^m . Рассмотрим преобразования (9.23). Обозначим новую матрицу:

$$\hat{A}x = Ax + \sum_{i=1}^k \langle c_i, x \rangle b_i.$$

Имеем

$$\hat{A}^j x = A^j x \mod D^j, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Но $D^{m-1} \subset D^m$, $m = 2, \dots, n$, следовательно, преобразования обратной связи (9.23) сохраняют пространства D^m , $m = 1, \dots, n$.

Итак, пространства D^m , $m = 1, \dots, n$, инвариантны относительно преобразований обратной связи, а их размерности — инварианты преобразований состояния и обратной связи.

Выразим числа $\dim D^m$, $m = 1, \dots, n$, через другие — так называемые индексы Кронекера. Построим следующую $n \times k$ матрицу, элементы которой суть n -мерные векторы:

$$\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_k \\ Ab_1 & \dots & Ab_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{n-1}b_1 & \dots & A^{n-1}b_k \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

Заменим каждый вектор $A^j b_i$, $j = 0, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, k$, в этой матрице символом: крестиком $\times$ или ноликом $\circ$, по следующему правилу. Будем двигаться в матрице (9.25) по строкам, т.е. упорядочим ее элементы следующим образом:

$$b_1, \dots, b_k, Ab_1, \dots, Ab_k, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_k. \quad (9.26)$$

Вектор $A^j b_i$ в матрице (9.25) заменяем крестиком, если он линейно независим от предыдущих векторов в цепочке (9.26), в противном случае заменяем этот вектор ноликом. После этой процедуры получаем матрицу вида:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \dots & \times \\ \times & \circ & \times & \times & \dots & \circ \\ \times & \circ & \circ & \times & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \times & \dots & \circ \end{pmatrix}.$$

Отметим, что имеются некоторые ограничения на появление крестиков и ноликов в матрице Σ . Общее количество крестиков в этой матрице равно n (по условию управляемости (9.21)), и вся первая строка заполнена только крестиками (так как $b_1, \dots, b_k$ линейно независимы). Далее, если столбец матрицы Σ содержит нолик, то все элементы ниже его также нолики. Действительно, если вектор $A^j b_i$ в (9.25) заменяется нулем в Σ , то

$$A^j b_i \in \text{span}\{A^j b_\alpha \mid \alpha < i\} + \text{span}\{A^\beta b_\alpha \mid \beta < j, \alpha = 1, \dots, k\}.$$

Но тогда аналогичные включения справедливы для всех векторов $A^{j+1} b_i, \dots, A^{n-1} b_i$, т.е. ниже нолика стоят только нолики. Итак, каждый столбец матрицы Σ состоит из столбца крестиков над столбцом ноликов (столбец ноликов может отсутствовать).

Обозначим через n_1 высоту самого высокого столбца крестиков в матрице Σ , через n_2 высоту второго по высоте столбца крестиков, $\dots$, наконец, через n_k высоту самого низкого столбца крестиков в Σ . Полученные натуральные числа:

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$$

называются *индексами Кронекера* линейной системы (9.20). Так как общее количество крестиков в матрице Σ равно размерности пространства состояний, получаем равенство

$$\sum_{i=1}^k n_i = n.$$

Более того, по построению имеем

$$\text{span}(b_1, Ab_1, \dots, A^{n_1-1} b_1; \dots; b_k, Ab_k, \dots, A^{n_k-1} b_k) = \mathbb{R}^n. \quad (9.27)$$

Покажем, что индексы Кронекера n_i выражаются через размерности $\dim D^i$. Имеем:

$$\dim D^1 = k = \text{числу крестиков в первой строке } \Sigma,$$

$$\dim D^2 = \text{числу крестиков в первых 2 строках } \Sigma,$$

$\dots$

$$\dim D^i = \text{числу крестиков в первых } i \text{ строках } \Sigma,$$

так что

$$\Delta(i) \stackrel{\text{def}}{=} \dim D^i - \dim D^{i-1} = \text{числу крестиков в } i\text{-ой строке } \Sigma.$$

Переставим столбцы матрицы Σ : поставим самый высокий столбец на первое место, второй по высоте столбец на второе место, и т.д. Получаем $n \times k$ -матрицу в «блочнотреугольной» форме. Эта матрица, повернутая на угол $\pi/2$, есть подграфик функции $\Delta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Легко видеть, что величины индексов Кронекера равны точкам скачков функции Δ , а количество этих индексов для каждой величины равно высоте соответствующего скачка Δ .

Итак, индексы Кронекера выражаются через $\dim D^i$, $i = 1, \dots, k$, поэтому они являются инвариантами по состоянию и обратной связи.

Нормальная форма Бруновского

Найдем нормальные формы линейных систем под действием преобразований состояния, а также состояния и обратной связи. В частности, покажем, что индексы Кронекера образуют полный набор инвариантов линейных систем по состоянию и обратной связи.

Теорема 9.1. *Любая управляемая линейная система (9.20), (9.21) с k управляющими параметрами эквивалентна по состоянию системе вида*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \dots \\ \dot{y}_{n_1-1}^1 = y_{n_1}^1, \\ \dot{y}_{n_1}^1 = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 0 \leq i \leq n_j-1}} \alpha_{ij}^1 y_{i+1}^j + u_1, \end{array} \right. , \dots , \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1^k = y_2^k, \\ \dots \\ \dot{y}_{n_k-1}^k = y_{n_k}^k, \\ \dot{y}_{n_k}^k = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 0 \leq i \leq n_j-1}} \alpha_{ij}^k y_{i+1}^j + u_k, \end{array} \right. \quad (9.28)$$

где

$$x = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n_i}} y_j^i e_j^i, \quad (9.29)$$

и эквивалентна по состоянию и обратной связи системе вида

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^{(n_1)} = u_1, \\ \dots \\ y_k^{(n_k)} = u_k, \end{array} \right. \quad (9.30)$$

где n_i , $i = 1, \dots, k$, суть индексы Кронекера системы (9.20).

Система (9.30) называется *нормальной формой Бруновского* линейной системы (9.20).

Докажем теорему 9.1.

Доказательство. Покажем сначала, что любую управляемую линейную систему (9.20) можно записать в подходящем базисе в $\mathbb{R}^n$:

$$e_1^1, \dots, e_{n_1}^1; \dots; e_1^k, \dots, e_{n_k}^k \quad (9.31)$$

в канонической форме (9.28).

Действуем в точности как в случае скалярного управления (раздел 9.2.1). Требуемая каноническая форма (9.28) однозначно определяет последние базисные векторы во всех k группах:

$$e_{n_1}^1 = b_1, \dots, e_{n_k}^k = b_k. \quad (9.32)$$

Обозначим пространство $B = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$. Тогда наша система

$$\dot{x} = Ax \mod B$$

записывается в координатах как

$$\dot{x} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n_i}} \dot{y}_j^i e_j^i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n_i}} y_j^i A e_j^i \mod B.$$

Учитывая требуемые уравнения

$$\dot{y}_j^i = y_{j+1}^i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j < n_i,$$

имеем

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j < n_i}} y_{j+1}^i e_j^i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n_i}} y_j^i A e_j^i \mod B,$$

или, что равносильно,

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 2 \leq j \leq n_i}} y_j^i e_{j-1}^i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n_i}} y_j^i A e_j^i \mod B.$$

Итак, искомые базисные векторы обязаны удовлетворять следующим соотношениям:

$$A e_j^i = e_{j-1}^i \mod B, \quad 1 \leq i \leq k, \quad 2 \leq j \leq n_i, \quad (9.33)$$

$$A e_1^i = 0 \mod B, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (9.34)$$

Будем последовательно разрешать уравнения (9.33), начиная с (9.32), для всех $i = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned} e_{n_i}^i &= b_i, \\ e_{n_i-1}^i &= A b_i - \sum_{\gamma=1}^k \beta_{i,n_i-1}^\gamma b_\gamma, \\ e_{n_i-2}^i &= A^2 b_i - \sum_{\gamma=1}^k \beta_{i,n_i-1}^\gamma A b_\gamma - \sum_{\gamma=1}^k \beta_{i,n_i-2}^\gamma b_\gamma, \\ &\dots \\ e_1^i &= A^{n_i-1} b_i - \sum_{\gamma=1}^k \beta_{i,n_i-1}^\gamma A^{n_i-2} b_\gamma - \dots - \sum_{\gamma=1}^k \beta_{i,1}^\gamma b_\gamma, \end{aligned}$$

в то время как из (9.34) следует, что

$$A e_1^i = \sum_{\gamma=1}^k \beta_{i,0}^\gamma b_\gamma$$

для некоторых чисел $\beta_{i,j}^\gamma$, $1 \leq i \leq k$, $0 \leq j \leq n_i$, $1 \leq \gamma \leq k$. Получаем уравнение

$$A^{n_i} b_i = \sum_{\gamma=1}^k \beta_{i,n_i-1}^\gamma A^{n_i-1} b_\gamma + \dots + \sum_{\gamma=1}^k \beta_{i,0}^\gamma b_\gamma,$$

имеющее единственное решение относительно $\beta_{i,j}^\gamma$ в силу условия (9.27).

Итак, мы доказали, что существует единственное линейное преобразование состояния, приводящее управляемую линейную систему (9.20) к каноническому виду (9.28).

Выбирая в качестве новых управлений функции

$$- \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 0 \leq i \leq n_j - 1}} \alpha_{ij}^l y_{i+1}^j + u_l, \quad l = 1, \dots, k,$$

видим, что каждая из k подсистем в (9.28) эквивалентна по обратной связи системе вида (9.11), или, что то же самое, (9.12). Поэтому вся система (9.20) эквивалентна по состоянию и обратной связи нормальной форме Бруновского (9.30). $\square$

9.3 Линеаризуемость по состоянию и обратной связи

Рассмотрим аффинную по управлениям нелинейную систему:

$$\dot{q} = f(q) + \sum_{j=1}^k u_j g_j(q), \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \quad q \in M. \quad (9.35)$$

Для нелинейных систем естественная задача — локальная: при каких условиях система (9.35) локально эквивалентна по состоянию и обратной связи управляемой линейной системе?

Определение 9.2. Система (9.35) называется *локально эквивалентной по состоянию и обратной связи* линейной системе (9.20) в окрестности точки $q_0 \in M$, если существуют преобразование состояния — диффеоморфизм

$$\Phi : O_{q_0} \rightarrow \hat{O} \subset \mathbb{R}^n$$

из окрестности O_{q_0} точки q_0 в M на открытое подмножество $\hat{O} \subset \mathbb{R}^n$, и преобразование обратной связи

$$\begin{aligned} \varphi : O_{q_0} \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^k, \\ \varphi(q, u) &= \begin{pmatrix} a_1(q) \\ \dots \\ a_k(q) \end{pmatrix} + D(q)u, \end{aligned} \quad (9.36)$$

с обратимой и гладко зависящей от q матрицей

$$D(q) = (d_{ij}(q)), \quad i, j = 1, \dots, k,$$

такие, что преобразование состояния и обратной связи (Φ, φ) переводит систему (9.35), ограниченную на O_{q_0} , в линейную систему (9.20), ограниченную на $\hat{O}$.

Конструкция подпространств D^m (9.22) выдерживает обобщение на случай нелинейных систем (9.35): достаточно рассмотреть семейства подпространств

$$D_q^m = \text{span}\{(\text{ad } f)^j g_i(q) \mid j = 0, \dots, m-1, i = 1, \dots, k\} \subset T_q M.$$

Заметим, что, вообще говоря, $\dim D_q^m \neq \text{const}$, поэтому семейство D^m может не быть распределением.

Отметим, что в случае управляемой линейной системы (9.20) семейство $D_x^m \equiv D^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, обладает следующими свойствами:

1. $\dim D_x^m = \text{const}$,
2. $D_x^n = T_x \mathbb{R}^n$,
3. распределения D^m , $m = 1, \dots, n$, интегрируемы (так как они порождаются постоянными векторными полями $A^j b_i$).

Перед тем как сформулировать условия линейризуемости нелинейных систем по состоянию и обратной связи в терминах семейств D_q^m , докажем следующие свойства этих семейств.

Лемма 9.1. *Если семейства D^m , $m = 1, \dots, n$, инволютивны, то они инвариантны относительно преобразований обратной связи.*

Доказательство. Отметим сначала, что преобразования обратной связи (9.36) можно представить как композицию преобразований двух типов:

$$(f, g_1, \dots, g_k) \mapsto (f + a_j g_j, g_1, \dots, g_k), \quad (9.37)$$

$$(f, g_1, \dots, g_k) \mapsto (f, Dg_1, \dots, Dg_k), \quad (9.38)$$

где $D(q) = (d_{ij}(q))$, $i, j = 1, \dots, k$, обратимы и гладко зависят от q . А теперь докажем лемму индукцией по m .

Пусть $m = 1$. Очевидно, что семейство

$$D^1 = \text{span}\{g_i \mid i = 1, \dots, k\}$$

сохраняется обоими типами преобразований (9.37) и (9.38).

Шаг индукции: предположим, что утверждение доказано для $m-1$, и докажем его для m . Семейство

$$D^m = \{[f, X] \mid X \in D^{m-1}\} + D^{m-1}$$

сохраняется преобразованиями (9.38). Рассмотрим преобразование вида (9.37). Имеем

$$[f + a_j g_j, X] = [f, X] - [X, a_j g_j] = [f, X] - (X a_j) g_j - a_j [X, g_j].$$

Далее:

$$X \in D^{m-1} \Rightarrow [f, X] \in D^m,$$

$$(X a_j) g_j \in D^1 \subset D^m,$$

$$X \in D^{m-1}, g_j \in D^1 \subset D^{m-1} \Rightarrow [X, g_j] \in D^{m-1} \subset D^m,$$

поэтому

$$[f + a_j g_j, X] \in D^m \quad \forall X \in D^{m-1}.$$

Итак, семейство D^m сохраняется преобразованиями обратной связи вида (9.37). $\square$

Теорема 9.2. Система (9.35) локально эквивалентна по состоянию и обратной связи управляемой линейной системе (9.20) тогда и только тогда, когда:

- (1) $\dim D_q^m$, $m = 1, \dots, n$, не зависит от q , т.е. семейства D^m — распределения,
- (2) $D_q^n = T_q M$,
- (3) распределения D^m , $m = 1, \dots, n$, инволютивны.

Условия (1)–(3) необходимы для локальной эквивалентности по состоянию и обратной связи, это следует из рассуждения перед леммой 9.1.

Мы докажем достаточность в теореме 9.3 ниже только в случае скалярного управления. Для $k = 1$ получаем систему

$$\dot{q} = f(q) + u g(q), \quad u \in \mathbb{R}, \quad q \in M, \quad (9.39)$$

и соответствующие семейства подпространств

$$D_q^m = \text{span}\{(\text{ad } f)^i g(q) \mid i = 0, 1, \dots, m-1\}, \quad m = 1, \dots, n, \quad q \in M.$$

Оказывается, что в этом случае из инволютивности D^{n-1} следует инволютивность D^m для меньших m .

Теорема 9.3. Система (9.39) локально эквивалентна по состоянию и обратной связи управляемой линейной системе (9.13) тогда и только тогда, когда:

- (1) $D_q^n = T_q M$,
- (2) распределение D^{n-1} инволютивно.

Сначала докажем следующее предложение, имеющее самостоятельное общее значение: интегральные многообразия интегрируемых распределений допускают гладкую параметризацию.

Лемма 9.2. Пусть $\Delta = \text{span}\{X_1, \dots, X_k\}$ — интегрируемое распределение на гладком n -мерном многообразии M , $\dim \Delta_q = k$. Тогда для любой точки $q_0 \in M$ существуют окрестность $q_0 \in O_{q_0} \subset M$ и гладкая вектор-функция

$$\varphi : O_{q_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

такие, что:

- (1) $\text{rank } \varphi_{*q} = n - k$, $q \in O_{q_0}$, u

(2) $\varphi^{-1}(y)$ есть интегральное многообразие Δ для любого $y \in \varphi(O_{q_0})$, или, что равносильно,

(2') $\ker \varphi_{*q} = \Delta_q$, $q \in O_{q_0}$.

Доказательство. Дополним векторные поля $X_1, \dots, X_k$ до базиса:

$$\text{span}\{Y_1, \dots, Y_{n-k}, X_1, \dots, X_k\} = \text{Vec } O_{q_0},$$

в достаточно малой окрестности $q_0 \in O_{q_0} \subset M$. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} \psi : (t, s) &\mapsto q_0 \circ e^{t_1 Y_1} \circ \dots \circ e^{t_{n-k} Y_{n-k}} \circ e^{s_1 X_1} \circ \dots \circ e^{s_k X_k}, \\ t &= (t_1, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}, \quad s = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi}{\partial t_i} \right|_0 &= Y_i, \quad i = 1, \dots, n-k, \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial s_i} \right|_0 &= X_i, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

поэтому ψ — локальный диффеоморфизм в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$.

Далее, при фиксированном $t = t^0$, множество

$$\{\psi(t^0, s) \mid s \in \mathbb{R}^k\}$$

есть интегральное многообразие Δ .

Наконец, по теореме о неявной функции локально определено гладкое отображение

$$\varphi : \psi(t, s) \mapsto t.$$

Это и есть искомая вектор-функция. □

Докажем теорему 9.3.

Доказательство. Необходимость уже показана в рассуждении перед леммой 9.1: для управляемых линейных систем выполняются оба условия (1), (2).

Чтобы доказать достаточность, построим координаты, в которых наша система (9.39) принимает простую форму, а затем применим преобразование обратной связи, приводящее эту систему к нормальной форме (9.11).

В силу интегрируемости распределения D^{n-1} , из леммы 9.2 следует существование гладкой функции

$$\varphi_1 : O_{q_0} \rightarrow \mathbb{R}$$

такой, что

$$d_q \varphi_1 \neq 0, \quad \langle d_q \varphi_1, D_q^{n-1} \rangle = 0, \quad q \in O_{q_0}. \quad (9.40)$$

Определим следующие функции в окрестности O_{q_0} :

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= f\varphi_1 = \langle d\varphi_1, f \rangle, \\ \varphi_3 &= f\varphi_2 = f^2\varphi_1, \\ &\dots \\ \varphi_n &= f\varphi_{n-1} = f^{n-1}\varphi_1\end{aligned}$$

(повторные производные по направлению векторного поля f).

Мы утверждаем, что функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (которые и будут координатами, в которых система (9.39) упрощается) удовлетворяют равенствам:

$$(\operatorname{ad} f)^j g \varphi_l = \begin{cases} 0, & j+l < n, \\ \pm (\operatorname{ad} f)^{n-1} g \varphi_1 \neq 0, & j+l = n. \end{cases} \quad (9.41)$$

Во-первых, заметим, что $b = (\operatorname{ad} f)^{n-1} g \varphi_1|_{O_{q_0}} \neq 0$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}D_q^{n-1} &= \operatorname{span}\{g(q), \dots, (\operatorname{ad} f)^{n-2} g(q)\}, \\ T_q M &= \operatorname{span}\{g(q), \dots, (\operatorname{ad} f)^{n-1} g(q)\} = \operatorname{span}\{D_q^{n-1}, (\operatorname{ad} f)^{n-1} g(q)\},\end{aligned}$$

поэтому равенство $(\operatorname{ad} f)^{n-1} g \varphi_1(q) = 0$ несовместно со свойствами (9.40).

Теперь докажем (9.41) индукцией по l . В случае $l = 1$ доказывать нечего.

Предположим, что равенство (9.41) доказано для $l-1$ и докажем его для l . Имеем

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} f)^j g \varphi_l &= ((\operatorname{ad} f)^j g \circ f) \varphi_{l-1} \\ &= ((\operatorname{ad} f)^j g \circ f - f \circ (\operatorname{ad} f)^j g + f \circ (\operatorname{ad} f)^j g) \varphi_{l-1} \\ &= (-[f, (\operatorname{ad} f)^j g] + f \circ (\operatorname{ad} f)^j g) \varphi_{l-1} \\ &= (-(\operatorname{ad} f)^{j+1} g + f \circ (\operatorname{ad} f)^j g) \varphi_{l-1}.\end{aligned}$$

Если $j+l \leq n$, то $j+l-1 < n$, и $(\operatorname{ad} f)^j g \varphi_{l-1} = 0$ по предположению индукции. Поэтому

$$(\operatorname{ad} f)^j g \varphi_l = -(\operatorname{ad} f)^{j+1} g \varphi_{l-1} \quad \text{при } j+l \leq n,$$

и равенство (9.41) для l следует из этого же равенства для $l-1$.

Итак, равенство (9.41) доказано для всех l . Так как векторы $g(q), \dots, (\operatorname{ad} f)^{n-1} g(q)$ порождают касательное пространство $T_q M$ при $q \in O_{q_0}$, отображение

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : O_{q_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

есть локальный диффеоморфизм: дифференциалы $d_q \varphi_1, \dots, d_q \varphi_n$ образуют базис в $T_q^* M$, двойственный к $g(q), \dots, (\operatorname{ad} f)^{n-1} g(q) \in T_q M$.

Возьмем Φ в качестве координатного отображения, тогда точка $q \in M$ имеет координаты

$$x_l = \varphi_l(q), \quad l = 1, \dots, n.$$

Запишем нашу систему $\dot{q} = f(q) + ug(q)$ в этих координатах, для этого продифференцируем x_l в силу этой системы.

$$\frac{d}{dt}x_l = \frac{d}{dt}\varphi_l(q(t)) = (f + ug)\varphi_l = f\varphi_l + ug\varphi_l.$$

Если $l < n$, то $g\varphi_l = 0$ благодаря равенству (9.41), поэтому

$$\frac{d}{dt}x_l = f\varphi_l = \varphi_{l+1} = x_{l+1}, \quad l = 1, \dots, n-1.$$

Если же $l = n$, то

$$\frac{d}{dt}x_n = f\varphi_n + ug\varphi_n = f\varphi_n \pm ub, \quad b = g\varphi_n \neq 0.$$

Итак, в координатах $x_1, \dots, x_n$ наша система (9.39) записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = f\varphi_n \pm ub. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим преобразование обратной связи

$$u \mapsto \mp \frac{f\varphi_n - u}{b}.$$

После этого преобразования n -ая компонента нашей системы превращается в уравнение

$$\dot{x}_n = f\varphi_n \pm \left(\mp \frac{f\varphi_n - u}{b} \right) b = f\varphi_n - f\varphi_n + u = u,$$

то есть вся система имеет требуемую форму (9.11). □

Глава 10

Задача оптимального управления

10.1 Постановка задачи

Мы будем рассматривать управляемую систему вида

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m. \quad (10.1)$$

Как обычно, M — гладкое многообразие, а U — произвольное подмножество $\mathbb{R}^m$. На правую часть управляемой системы наложим следующие требования:

$$q \mapsto f_u(q) \text{ гладкое векторное поле на } M \text{ при любом фиксированном } u \in U, \quad (10.2)$$

$$(q, u) \mapsto f_u(q) \text{ непрерывное отображение для } q \in M, u \in \overline{U}, \quad (10.3)$$

и кроме того, в любых локальных координатах на M

$$(q, u) \mapsto \frac{\partial f_u}{\partial q}(q) \text{ непрерывное отображение при } q \in M, u \in \overline{U}. \quad (10.4)$$

Допустимые управления — измеримые локально ограниченные отображения

$$u : t \mapsto u(t) \in U.$$

Подставляя такое управление $u = u(t)$ вместо управляющего параметра в систему (10.1), получаем неавтономное дифференциальное уравнение $\dot{q} = f_u(q)$. По классической теореме Каратеодори, для любой точки $q_0 \in M$ задача Коши

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q(0) = q_0, \quad (10.5)$$

имеет единственное решение (см. раздел 2.4.1). Часто мы будем фиксировать начальную точку q_0 и обозначать соответствующее решение задачи (10.5) просто через $q_u(t)$.

Чтобы сравнивать допустимые управления на отрезке $[0, t_1]$ друг с другом, введем *функционал качества*:

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t)) dt, \quad (10.6)$$

подынтегральная функция которого

$$\varphi : M \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

удовлетворяет тем же условиям регулярности, что и правая часть f , см. (10.2)–(10.4).

Возьмем любую пару точек $q_0, q_1 \in M$. Мы будем рассматривать следующую *задачу оптимального управления*.

Задача. Минимизировать функционал J на множестве всех допустимых управлений $u = u(t)$, $t \in [0, t_1]$, для которых соответствующее решение $q_u(t)$ задачи Коши (10.5) удовлетворяет краевому условию

$$q_u(t_1) = q_1. \quad (10.7)$$

Эту задачу можно также записать следующим образом:

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (10.8)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (10.9)$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt \rightarrow \min. \quad (10.10)$$

Мы будем изучать два типа задач — с закрепленным конечным временем t_1 и свободным t_1 . Решение u такой задачи называется *оптимальным управлением*, а соответствующая кривая $q_u(t)$ — *оптимальной траекторией*.

Таким образом, задача оптимального управления — это задача минимизации функционала $J(u)$ с ограничениями на управление u , которые задаются управляемой системой и краевыми условиями (10.5), (10.7). Обычно эти связи невозможно разрешить относительно u , поэтому для решения задач оптимального управления требуются специальные методы.

10.2 Редукция к исследованию множеств достижимости

Зафиксируем начальную точку $q_0 \in M$. *Множество достижимости* управляемой системы (10.1) за время $t \geq 0$ из точки q_0 с помощью измеримых локально ограниченных управлений определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}_{q_0}(t) = \{q_u(t) \mid u \in L^\infty([0, t], U)\}.$$

Аналогично можно рассматривать множества достижимости за время не больше t :

$$\mathcal{A}_{q_0}^t = \bigcup_{0 \leq \tau \leq t} \mathcal{A}_{q_0}(\tau)$$

и за произвольное неотрицательное время:

$$\mathcal{A}_{q_0} = \bigcup_{0 \leq \tau < \infty} \mathcal{A}_{q_0}(\tau).$$

Оказывается, задачи оптимального управления на пространстве состояний M , по существу, можно свести к исследованию множеств достижимости некоторых вспомогательных управляемых систем на расширенном пространстве состояний

$$\widehat{M} = \mathbb{R} \times M = \{\widehat{q} = (y, q) \mid y \in \mathbb{R}, q \in M\}.$$

А именно, рассмотрим следующую расширенную управляемую систему на $\widehat{M}$:

$$\frac{d\widehat{q}}{dt} = \widehat{f}_u(\widehat{q}), \quad \widehat{q} \in \widehat{M}, \quad u \in U, \quad (10.11)$$

с правой частью

$$\widehat{f}_u(\widehat{q}) = \begin{pmatrix} \varphi(q, u) \\ f_u(q) \end{pmatrix}, \quad q \in M, \quad u \in U,$$

где φ — подынтегральная функция функционала качества J , см. (10.6). Обозначим через $\widehat{q}_u(t)$ решение расширенной системы (10.11) с начальными условиями

$$\widehat{q}_u(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 10.1. Пусть $q_{\bar{u}}(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть оптимальная траектория в задаче (10.8)–(10.10) с закрепленным конечным временем t_1 . Тогда соответствующая траектория $\widehat{q}_{\bar{u}}(t)$ расширенной системы (10.11) приходит на границу множества достижимости этой системы:

$$\widehat{q}_{\bar{u}}(t_1) \in \partial \widehat{A}_{(0, q_0)}(t_1). \quad (10.12)$$

Доказательство. Решения $\widehat{q}_u(t)$ расширенной системы выражаются через решения $q_u(t)$ исходной системы (10.1) как

$$\widehat{q}_u(t) = \begin{pmatrix} J_t(u) \\ q_u(t) \end{pmatrix},$$

где

$$J_t(u) = \int_0^t \varphi(q_u(\tau), u(\tau)) d\tau.$$

Поэтому множества достижимости расширенной системы (10.11) из точки $(0, q_0)$ имеют вид

$$\widehat{\mathcal{A}}_{(0, q_0)}(t) = \{(J_t(u), q_u(t)) \mid u \in L^\infty([0, t], U)\}.$$

Множество $\widehat{\mathcal{A}}_{(0, q_0)}(t_1)$ не может пересекаться с лучом

$$\{(y, q_1) \in \widehat{M} \mid y < J_{t_1}(\tilde{u})\},$$

см. рис. 10.1.

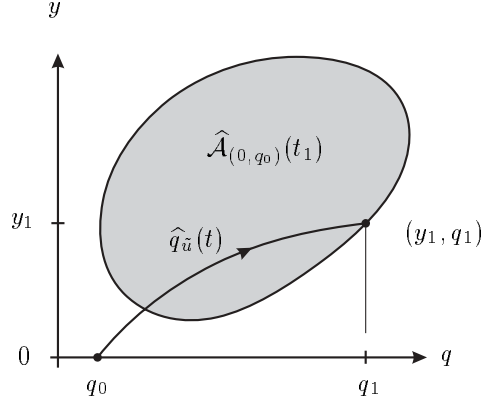


Рис. 10.1: Траектория $q_{\tilde{u}}(t)$ оптимальна

Действительно, предположим, что существует точка

$$(y, q_1) \in \widehat{\mathcal{A}}_{(0, q_0)}(t_1), \quad y < J_{t_1}(\tilde{u}).$$

Тогда траектория $\widehat{q}_u(t)$ расширенной системы, переводящая $(0, q_0)$ в (y, q_1) :

$$\widehat{q}_u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{q}_u(t_1) = \begin{pmatrix} y \\ q_1 \end{pmatrix},$$

проецируется в траекторию $q_u(t)$, $q_u(0) = q_0$, $q_u(t_1) = q_1$, с меньшим значением функционала качества:

$$J_{t_1}(u) = y < J_{t_1}(\tilde{u}),$$

что противоречит оптимальности траектории $q_{\tilde{u}}(t)$. Включение (10.12) доказано. $\square$

Итак, оптимальные траектории (точнее, их поднятия на расширенное пространство состояний $\widehat{M}$) должны приходить на границу множества достижимости $\widehat{\mathcal{A}}_{(0, q_0)}(t_1)$. Чтобы найти оптимальные траектории, мы найдем

траектории, приходящие на границу $\hat{\mathcal{A}}_{(0,q_0)}(t_1)$, а затем выберем из них оптимальные. Первый шаг гораздо важнее второго, поэтому решение задач оптимального управления, по существу, сводится к исследованию динамики множеств достижимости.

10.3 Компактность множеств достижимости

Благодаря сведению задач оптимального управления к исследованию множеств достижимости, существование оптимальных решений сводится к компактности множеств достижимости.

В следующем предложении даются достаточные условия компактности множеств достижимости для управляемой системы (10.1): $\mathcal{A}_{q_0}(t)$ за время t и $\mathcal{A}_{q_0}^t$ за время не больше t .

Теорема 10.1 (Филиппов). Пусть пространство управляющих параметров $U \in \mathbb{R}^m$ компактно. Пусть существует компакт $K \in M$ такой, что $f_u(q) = 0$ при $q \notin K$, $u \in U$. Предположим также, что множества допустимых скоростей

$$f_U(q) = \{f_u(q) \mid u \in U\} \subset T_q M, \quad q \in M,$$

выпуклы. Тогда множества достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t)$ и $\mathcal{A}_{q_0}^t$ компактны для всех $q_0 \in M$, $t > 0$.

Замечание. Условие выпуклости множества допустимых скоростей $f_U(q)$ естественно ввиду теоремы 8.2: поток уравнения

$$\dot{q} = \alpha(t)f_{u_1}(q) + (1 - \alpha(t))f_{u_2}(q), \quad 0 \leq \alpha(t) \leq 1,$$

аппроксимируется потоками систем вида

$$\dot{q} = f_v(q), \quad \text{где } v(t) \in \{u_1(t), u_2(t)\}.$$

Приведем эскиз доказательства теоремы 10.1.

Доказательство. Во-первых, заметим, что все неавтономные векторные поля $f_u(q)$ с допустимыми управлениями u имеют компактный общий носитель, поэтому полны. Далее, в условиях теоремы скорости $f_u(q)$, $q \in M$, $u \in U$, равномерно ограничены, поэтому все траектории $q(t)$ управляемой системы (10.1), выходящие из q_0 , липшицевы с одной и той же константой Липшица. Поэтому множество допустимых траекторий предкомпактно в топологии равномерной сходимости. (Можно вложить многообразие M в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, тогда пространство непрерывных кривых $q(t)$ наследует равномерную топологию непрерывных отображений из $[0, t_1]$ в $\mathbb{R}^N$.) Любая последовательность $q_n(t)$ допустимых траекторий:

$$\dot{q}_n(t) = f_{u_n}(q_n(t)), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad q_n(0) = q_0,$$

содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность, сохраним за ней обозначение $q_n(t)$:

$$q_n(\cdot) \rightarrow q(\cdot) \text{ в } C[0, t_1] \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Покажем, что $q(t)$ — допустимая траектория управляемой системы (10.1).

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$. Тогда в локальных координатах

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}(q_n(t+\varepsilon) - q_n(t)) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} f_{u_n}(q_n(\tau)) d\tau \\ &\in \operatorname{conv} \bigcup_{\tau \in [t, t+\varepsilon]} f_U(q_n(\tau)) \subset \operatorname{conv} \bigcup_{q \in O_{q(t)}(c\varepsilon)} f_U(q), \end{aligned}$$

где c — удвоенная константа Липшица допустимых траекторий. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{1}{\varepsilon}(q(t+\varepsilon) - q(t)) \in \operatorname{conv} \bigcup_{q \in O_{q(t)}(c\varepsilon)} f_U(q).$$

Теперь пусть $\varepsilon \rightarrow 0$. Если t — точка дифференцируемости $q(t)$, то

$$\dot{q}(t) \in f_U(q)$$

так как $f_U(q)$ компактно.

Чтобы показать, что $q(t)$ — допустимая траектория управляемой системы (10.1), мы должны найти измеримый селектор $u(t) \in U$, порождающий $q(t)$. Это можно сделать, используя лексикографический порядок на множестве $U = \{(u_1, \dots, u_m)\} \subset \mathbb{R}^m$.

Множество

$$V_t = \{v \in U \mid \dot{q}(t) = f_v(q(t))\}$$

является компактным подмножеством U , а потому и $\mathbb{R}^m$. Существует вектор $v^{\min}(t) \in V_t$, минимальный в смысле лексикографического порядка. Чтобы найти $v^{\min}(t)$, сначала минимизируем первую координату на V_t :

$$v_1^{\min} = \min\{v_1 \mid v = (v_1, \dots, v_m) \in V_t\},$$

затем минимизируем вторую координату на компактном множестве, полученном на первом шаге:

$$v_2^{\min} = \min\{v_2 \mid v = (v_1^{\min}, v_2, \dots, v_m) \in V_t\},$$

и так далее,

$$v_m^{\min} = \min\{v_m \mid v = (v_1^{\min}, \dots, v_{m-1}^{\min}, v_m) \in V_t\}.$$

Управление $v^{\min}(t) = (v_1^{\min}(t), \dots, v_m^{\min}(t))$ измеримо, поэтому $q(t)$ есть допустимая траектория системы (10.1), порожденная этим управлением.

Мы доказали компактность множества достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t)$. Компактность $\mathcal{A}_{q_0}^t$ доказывается аналогичным рассуждением. $\square$

Замечание. Условие общего компактного носителя векторных полей в правой части существенно в теореме Филиппова для обеспечения равномерной ограниченности скоростей и полноты векторных полей. На многообразии достаточные условия полноты векторного поля невозможно дать в терминах ограниченности векторного поля и его производных: даже постоянное векторное поле неполно в ограниченной области в $\mathbb{R}^n$. Однако во многих случаях компактность множеств достижимости можно доказать и без предположения компактного общего носителя. Если имеются априорные оценки решений управляемой системы, можно умножить правую часть на функцию срезки и получить систему с векторными полями, имеющими общий компактный носитель. К новой системе теорема Филиппова уже применима. Но исходная и новая системы имеют одни и те же траектории в рассматриваемой области, поэтому исходная система имеет компактные множества достижимости.

Для систем на $M = \mathbb{R}^n$ имеется хорошо известное достаточное условие полноты векторных полей: если правая часть растёт на бесконечности не быстрее линейного поля, т.е.

$$|f_u(x)| \leq C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U, \quad (10.13)$$

для некоторой константы C , то неавтономные поля $f_u(x)$ полны (здесь $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ — норма точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$).

Это условие даёт и априорную оценку решений: любое решение $x(t)$ управляемой системы

$$\dot{x} = f_u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U, \quad (10.14)$$

с правой частью, удовлетворяющей неравенству (10.13), допускает оценку

$$|x(t)| \leq e^{2Ct} (|x(0)| + 1), \quad t \geq 0.$$

Поэтому теорема Филиппова и предшествующее замечание дают следующее достаточное условие компактности множеств достижимости для систем в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 10.1. Пусть система (10.14) имеет компактное пространство управляющих параметров $U \subseteq \mathbb{R}^m$ и выпуклые множества скоростей $f_U(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Предположим также, что правая часть системы удовлетворяет оценке вида (10.13). Тогда множества достижимости $\mathcal{A}_{x_0}(t)$ и $\mathcal{A}_{x_0}^t$ компактны для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

10.4 Задача быстрогодействия

Выберем пару точек $q_0 \in M$ и $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}$. Цель задачи быстрогодействия — в том, чтобы попасть из точки q_0 в точку q_1 вдоль траекторий управляемой системы (10.1) наискорейшим образом:

$$\min_u \{t_1 \mid q_u(t_1) = q_1\}. \quad (10.15)$$

То есть мы рассматриваем задачу оптимального управления, описанную в разделе 10.1 с интегрантом $\varphi(q, u) \equiv 1$ и свободным конечным временем t_1 .

Редуцируя эту задачу к исследованию множеств достижимости и применяя теорему Филиппова, получаем следующий результат.

Следствие 10.2. *В условиях теоремы 10.1, задача быстрогодействия (10.1), (10.15) имеет решение для любых точек $q_0 \in M$, $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}$.*

10.5 Релаксации

Рассмотрим управляемую систему (10.1) с компактным множеством управляющих параметров U . Существует стандартная процедура *релаксации* управляемой системы (10.1), расширяющая множество скоростей $f_U(q)$ этой системы до его выпуклой оболочки $\text{conv } f_U(q)$.

Напомним, что *выпуклая оболочка* $\text{conv } S$ подмножества S линейного пространства — это наименьшее выпуклое множество, содержащее S . Конструктивное описание выпуклой оболочки дается в следующем классическом утверждении: любая точка выпуклой оболочки множества S в n -мерном линейном пространстве есть выпуклая комбинация некоторого набора из $n + 1$ точки в S .

Лемма 10.1 (Каратеодори). *Для любого подмножества $S \subset \mathbb{R}^n$, его выпуклая оболочка может быть представлена в виде*

$$\text{conv } S = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \mid x_i \in S, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

Доказательство этой леммы приведено, например, в [144].

Релаксация (ослабление) управляемой системы (10.1) строится следующим образом. Пусть $n = \dim M$ есть размерность пространства состояний. Множество управляющих параметров новой системы имеет вид

$$V = \Delta^n \times \underbrace{U \times \cdots \times U}_{n+1 \text{ раз}},$$

где

$$\Delta^n = \left\{ (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

есть стандартный n -мерный симплекс. То есть новый управляющий параметр имеет вид

$$v = (\alpha, u_0, \dots, u_n) \in V, \quad \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \Delta^n, \quad u_i \in U.$$

Если U компактно, то V также компактно.

Ослабленная система имеет вид

$$\dot{q} = g_v(q) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f_{u_i}(q), \quad v = (\alpha, u_0, \dots, u_n) \in V, \quad q \in M. \quad (10.16)$$

По лемме Каратеодори, множество скоростей $g_V(q)$ системы (10.16) выпукло, более того,

$$g_V(q) = \text{conv } f_U(q).$$

Если все векторные поля в правой части (10.16) имеют общий компактный носитель, из теоремы Филиппова следует компактность множеств достижимости ослабленной системы. По теореме 8.2, любую траекторию ослабленной системы (10.16) можно равномерно приблизить семействами траекторий исходной системы (10.1). Поэтому множества достижимости ослабленной системы совпадают с замыканиями множеств достижимости исходной системы.

Глава 11

Дифференциальные формы и симплектическая геометрия

Необходимое условие оптимальности для задач оптимального управления на гладких многообразиях — Принцип максимума Понтрягина, см. главу 12 — формулируется в терминах симплектической геометрии. В этой главе мы приводим соответствующие определения и необходимые нам факты. Перед этим мы напомним некоторые начальные сведения о дифференциальных формах на многообразиях. Цель этой главы — в том, чтобы разъяснить основные понятия, а не систематически изложить весь материал, и она не может заменить стандартный учебник. В качестве таких учебников мы можем рекомендовать, например, [147], [136], [138].

11.1 Дифференциальные 1-формы

11.1.1 Линейные формы

Пусть E — вещественное линейное пространство конечной размерности n . Множество линейных форм на E , т.е. линейных отображений $\xi : E \rightarrow \mathbb{R}$, имеет естественную структуру линейного пространства, которое называется *сопряженным пространством* к E и обозначается через E^* . Если векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис E , то соответствующий *двойственный базис* E^* образован ковекторами $e_1^*, \dots, e_n^*$ такими, что

$$\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

(мы используем угловые скобки для записи значения линейной формы $\xi \in E^*$ на векторе $v \in E$: $\langle \xi, v \rangle = \xi(v)$). Поэтому сопряженное пространство

имеет ту же размерность, что и исходное:

$$\dim E^* = n = \dim E.$$

11.1.2 Кокасательное расслоение

Пусть M — гладкое многообразие, а $T_q M$ — его касательное пространство в точке $q \in M$. Пространство линейных форм на $T_q M$, т.е. сопряженное пространство $(T_q M)^*$ к $T_q M$, называется *кокасательным пространством* многообразия M в точке q и обозначается через $T_q^* M$. Объединение всех кокасательных пространств называется *кокасательным расслоением* M :

$$T^* M \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{q \in M} T_q^* M$$

(кокасательные пространства в разных точках не пересекаются). Множество $T^* M$ имеет естественную структуру гладкого многообразия размерности $2n$, где $n = \dim M$. Локальные координаты на $T^* M$ получаются из локальных координат на M .

Пусть $O \subset M$ — координатная окрестность, а

$$\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q)),$$

есть локальная система координат. Дифференциалы координатных функций

$$dx_i|_q \in T_q^* M, \quad i = 1, \dots, n, \quad q \in O,$$

образуют базис в кокасательном пространстве $T_q^* M$. Двойственный базис в касательном пространстве $T_q M$ образован векторами

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q &\in T_q M, \quad i = 1, \dots, n, \quad q \in O, \\ \left\langle dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle &\equiv \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Любую линейную форму $\xi \in T_q^* M$ можно разложить по базисным формам:

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i.$$

Поэтому любой ковектор $\xi \in T^* M$ характеризуется n координатами $(x_1, \dots, x_n)$ точки $q \in M$, где приложен ковектор ξ , и n координатами $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ линейной формы ξ в базисе $dx_1, \dots, dx_n$. Отображения вида

$$\xi \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_n; x_1, \dots, x_n)$$

задают локальные координаты в кокасательном расслоении. Поэтому $T^* M$ есть $2n$ -мерное многообразие. Координаты вида (ξ, x) называются *каноническими координатами* на $T^* M$.

Если $F : M \rightarrow N$ есть гладкое отображение между гладкими многообразиями, то дифференциал

$$F_* : T_q M \rightarrow T_{F(q)} N$$

имеет сопряженное отображение

$$F^* \stackrel{\text{def}}{=} (F_*)^* : T_{F(q)}^* N \rightarrow T_q^* M$$

которое задается следующим образом:

$$\begin{aligned} F^* \xi &= \xi \circ F_*, & \xi &\in T_{F(q)}^* N, \\ \langle F^* \xi, v \rangle &= \langle \xi, F_* v \rangle, & v &\in T_q M. \end{aligned}$$

Вектор $v \in T_q M$ переносится вперед дифференциалом F_* в вектор $F_* v \in T_{F(q)} N$, а ковектор $\xi \in T_{F(q)}^* N$ переносится назад в ковектор $F^* \xi \in T_q^* M$. Поэтому гладкое отображение $F : M \rightarrow N$ между многообразиями порождает гладкое отображение $F^* : T^* N \rightarrow T^* M$ между их кокасательными расслоениями.

11.1.3 Дифференциальные 1-формы

Дифференциальная 1-форма на M есть гладкое отображение

$$q \mapsto \omega_q \in T_q^* M, \quad q \in M,$$

т.е. семейство $\omega = \{\omega_q\}$ линейных форм на касательных пространствах $T_q M$, гладко зависящее от точки $q \in M$. Множество всех дифференциальных 1-форм на M имеет естественную структуру бесконечномерного линейного пространства, которое обозначается через $\Lambda^1 M$.

Подобно тому, как линейные формы на линейном пространстве являются двойственными объектами к векторам этого пространства, дифференциальные формы на многообразии — двойственные объекты к гладким кривым на многообразии. Спаривание задается *интегралом* дифференциальной 1-формы $\omega \in \Lambda^1 M$ по ориентированной гладкой кривой $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$, который определяется следующим образом:

$$\int_\gamma \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \langle \omega_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

Интеграл 1-формы по кривой не зависит от сохраняющих ориентацию гладких перепараметризаций кривой и меняет знак при замене ориентации.

11.2 Дифференциальные k -формы

Дифференциальная k -форма на M — это объект, который должен интегрироваться по k -мерным поверхностям в M . Инфинитезимально k -мерная

поверхность представляется своим касательным пространством, т.е. некоторым k -мерным подпространством в $T_q M$. Таким образом, нам нужен объект, двойственный ко множеству k -мерных подпространств линейного пространства. Зафиксируем линейное пространство E . Любое k -мерное подпространство определяется своим базисом $v_1, \dots, v_k \in E$. Двойственные объекты должны задаваться отображениями

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \omega(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}$$

такими, что $\omega(v_1, \dots, v_k)$ зависит только от линейной оболочки векторов $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ и ориентированного объема k -мерного параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, \dots, v_k$. Более того, эта зависимость должна быть линейной. Напомним, что отношение объемов параллелепипедов, порожденных векторами $w_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} v_j$, $i = 1, \dots, k$, и векторами $v_1, \dots, v_k$, равно $\det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^k$, и что определитель матрицы порядка k есть полилинейная кососимметрическая форма от столбцов матрицы. Поэтому следующее определение двойственных объектов вполне естественно.

11.2.1 Внешние k -формы

Пусть E — конечномерное вещественное линейное пространство, $\dim E = n$, и пусть $k \in \mathbb{N}$. *Внешней k -формой* на E называется отображение

$$\omega : \underbrace{E \times \dots \times E}_{k \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R},$$

полилинейное:

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \dots, \alpha_1 v_i^1 + \alpha_2 v_i^2, \dots, v_k) \\ = \alpha_1 \omega(v_1, \dots, v_i^1, \dots, v_k) + \alpha_2 \omega(v_1, \dots, v_i^2, \dots, v_k), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

и кососимметрическое:

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k), \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Множество всех внешних k -форм на E обозначается через $\Lambda^k E$. В силу кососимметричности, любая внешняя форма степени $k > n$ равна нулю, т.е. $\Lambda^k E = \{0\}$ при $k > n$.

Внешние формы можно умножать на вещественные числа, а внешние формы одной степени k можно складывать между собой, поэтому все $\Lambda^k E$ суть линейные пространства. Мы сможем построить базис $\Lambda^k E$ после того, как рассмотрим еще одну операцию между внешними формами — внешнее произведение. Внешнее произведение двух форм $\omega_1 \in \Lambda^{k_1} E$, $\omega_2 \in \Lambda^{k_2} E$ есть внешняя форма $\omega_1 \wedge \omega_2$ степени $k_1 + k_2$.

Для линейных 1-форм $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1 E$ имеется естественное (тензорное) произведение:

$$\omega_1 \otimes \omega_2 : (v_1, v_2) \mapsto \omega_1(v_1)\omega_2(v_2), \quad v_1, v_2 \in E,$$

в результате которого получается билинейная, но не кососимметричная форма. Внешнее произведение есть антисимметризация тензорного:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 : (v_1, v_2) \mapsto \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1), \quad v_1, v_2 \in E.$$

Аналогично, тензорное и внешнее произведения форм $\omega_1 \in \Lambda^{k_1}E$ и $\omega_2 \in \Lambda^{k_2}E$ — это следующие формы степени $k_1 + k_2$:

$$\begin{aligned} \omega_1 \otimes \omega_2 &: (v_1, \dots, v_{k_1+k_2}) \mapsto \omega_1(v_1, \dots, v_{k_1})\omega_2(v_{k_1+1}, \dots, v_{k_1+k_2}), \\ \omega_1 \wedge \omega_2 &: (v_1, \dots, v_{k_1+k_2}) \mapsto \\ &\frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma} (-1)^{\nu(\sigma)} \omega_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k_1)})\omega_2(v_{\sigma(k_1+1)}, \dots, v_{\sigma(k_1+k_2)}), \end{aligned} \quad (11.1)$$

где сумма берется по всем перестановкам σ порядка $k_1 + k_2$, а $\nu(\sigma)$ — четность перестановки σ . Множитель $\frac{1}{k_1!k_2!}$ вводится для нормировки суммы в (11.1), так как она содержит $k_1!k_2!$ одинаковых слагаемых: например, если перестановка σ не перемешивает первые k_1 и последние k_2 аргумента, то все члены вида

$$(-1)^{\nu(\sigma)} \omega_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k_1)})\omega_2(v_{\sigma(k_1+1)}, \dots, v_{\sigma(k_1+k_2)})$$

равны

$$\omega_1(v_1, \dots, v_{k_1})\omega_2(v_{k_1+1}, \dots, v_{k_1+k_2}).$$

Это обеспечивает ассоциативность внешнего произведения:

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3, \quad \omega_i \in \Lambda^{k_i}E,$$

Более того, внешнее произведение косокоммутативно:

$$\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{k_1k_2} \omega_1 \wedge \omega_2, \quad \omega_i \in \Lambda^{k_i}E.$$

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства E , а $e_1^*, \dots, e_n^*$ — соответствующий двойственный базис E^* . Если $1 \leq k \leq n$, то следующие C_n^k элементов образуют базис пространства $\Lambda^k E$:

$$e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

Из равенств

$$\begin{aligned} (e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) &= 1, \\ (e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) &= 0, \quad \text{если } (i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k) \end{aligned}$$

при $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ следует, что любая k -форма $\omega \in \Lambda^k E$ единственным образом представляется в виде

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*,$$

где

$$\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Упражнение 11.1. Покажите, что для любых 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Lambda^1 E$ и любых векторов $v_1, \dots, v_p \in E$ выполняется равенство

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(v_1, \dots, v_p) = \det (\langle \omega_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^p. \quad (11.2)$$

Заметим, что пространство n -форм на n -мерном пространстве E одномерно. Любая ненулевая n -форма на E является формой объема. Например, значение стандартной формы объема $e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ на наборе из n векторов $(v_1, \dots, v_n)$ равно

$$(e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)(v_1, \dots, v_n) = \det (\langle e_i^*, v_j \rangle)_{i,j=1}^n,$$

ориентированный объем параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, \dots, v_n$.

11.2.2 Дифференциальные k -формы

Дифференциальная k -форма на M есть отображение

$$\omega : q \mapsto \omega_q \in \Lambda^k T_q M, \quad q \in M,$$

гладкое по $q \in M$. Множество всех дифференциальных k -форм на M обозначается через $\Lambda^k M$. Естественно гладкие функции на M считать 0-формами, поэтому $\Lambda^0 M = C^\infty(M)$.

В локальных координатах $(x_1, \dots, x_n)$ на области $O \subset M$ любая дифференциальная k -форма $\omega \in \Lambda^k M$ единственным образом представляется в виде:

$$\omega_x = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad x \in O, \quad a_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(O). \quad (11.3)$$

Любое гладкое отображение

$$F : M \rightarrow N$$

порождает перенос дифференциальных форм

$$\widehat{F} : \Lambda^k N \rightarrow \Lambda^k M$$

следующим образом: для любой дифференциальной k -формы $\omega \in \Lambda^k N$, k -форма $\widehat{F}\omega \in \Lambda^k M$ определяется как

$$(\widehat{F}\omega)_q(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(q)}(F_*v_1, \dots, F_*v_k), \quad q \in M, \quad v_i \in T_q M.$$

Для 0-форм перенос есть просто замена переменных:

$$\widehat{F}a(q) = a \circ F(q), \quad a \in C^\infty(M), \quad q \in M.$$

Отображение $\widehat{F}$ линейно относительно форм и сохраняет внешнее произведение:

$$\widehat{F}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \widehat{F}\omega_1 \wedge \widehat{F}\omega_2.$$

Упражнение 11.2. Докажите правило композиции для переноса дифференциальных форм:

$$\widehat{F_2 \circ F_1} = \widehat{F_1} \circ \widehat{F_2}, \quad (11.4)$$

где $F_1 : M_1 \rightarrow M_2$ и $F_2 : M_2 \rightarrow M_3$ — гладкие отображения.

Отметим, что в операторных обозначениях (когда точки пишутся слева от отображений как $q \circ F$) крышка $\widehat{}$ не изменяет порядка отображений F_1, F_2 в композиции, в отличие от классического обозначения $F(q)$.

Теперь мы можем определить интеграл k -формы по ориентированной k -мерной поверхности. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^k$ есть k -мерная открытая ориентированная область и

$$\Phi : \Pi \rightarrow \Phi(\Pi) \subset M$$

есть диффеоморфизм. Тогда *интеграл* k -формы $\omega \in \Lambda^k M$ по k -мерной ориентированной поверхности $\Phi(\Pi)$ определяется следующим образом:

$$\int_{\Phi(\Pi)} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Pi} \widehat{\Phi} \omega,$$

остается только определить интеграл по Π в правой части. Так как $\widehat{\Phi} \omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$ есть k -форма на $\mathbb{R}^k$, она выражается через стандартную форму объема $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \in \Lambda^k \mathbb{R}^k$:

$$(\widehat{\Phi} \omega)_x = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k, \quad x \in \Pi.$$

Мы положим

$$\int_{\Pi} \widehat{\Phi} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Pi} a(x) dx_1 \dots dx_k,$$

обычный кратный интеграл.

Интеграл $\int_{\Phi(\Pi)} \omega$ определен корректно относительно сохраняющих ориентацию перепараметризаций поверхности $\Phi(\Pi)$. При изменении ориентации интеграл меняет знак.

Понятие интеграла распространяется на произвольные подмногообразия следующим образом. Пусть $N \subset M$ есть k -мерное подмногообразие, и пусть $\omega \in \Lambda^k M$. Рассмотрим покрытие N координатными окрестностями $O_i \subset M$:

$$N = \bigcup_i (N \cap O_i).$$

Возьмем разбиение единицы, подчиненное этому покрытию:

$$\alpha_i \in C^\infty(M), \quad \text{supp } \alpha_i \subset O_i, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \\ \sum_i \alpha_i \equiv 1.$$

Тогда

$$\int_N \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \int_{N \cap O_i} \alpha_i \omega.$$

Определенный таким образом интеграл не зависит от выбора разбиения единицы.

Замечание. Другой возможный подход к определению интеграла дифференциальной формы по подмногообразию основан на триангуляции подмногообразия.

11.3 Внешний дифференциал

Внешний дифференциал функции (т.е. 0-формы) есть 1-форма: если $a \in C^\infty(M) = \Lambda^0 M$, то ее дифференциал

$$d_q a \in T_q^* M$$

есть функционал (производная по направлению)

$$\langle d_q a, v \rangle = v a, \quad v \in T_q M, \quad (11.5)$$

поэтому

$$da \in \Lambda^1 M.$$

По формуле Ньютона-Лейбница, если $\gamma \subset M$ — ориентированная гладкая кривая, соединяющая $q_0 \in M$ с $q_1 \in M$, то

$$\int_\gamma da = a(q_1) - a(q_0).$$

При этом правую часть можно рассматривать как интеграл функции a по ориентированной границе кривой: $\partial\gamma = q_1 - q_0$, поэтому

$$\int_\gamma da = \int_{\partial\gamma} a. \quad (11.6)$$

В нашем изложении формула Ньютона-Лейбница (11.6) является следствием определения (11.5) дифференциала функции. Но можно пойти и обратным путем: если мы постулируем формулу Ньютона-Лейбница (11.6) для любой гладкой кривой $\gamma \subset M$ и перейдем к пределу $q_1 \rightarrow q_0$, то необходимо получим определение (11.5) дифференциала функции.

Этот подход можно использовать для определения дифференциала форм высших степеней. Пусть $\omega \in \Lambda^k M$. Мы определим *внешний дифференциал*

$$d\omega \in \Lambda^{k+1} M$$

как дифференциальную $(k+1)$ -форму, для которой выполняется формула Стокса:

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega \quad (11.7)$$

для $(k+1)$ -мерных подмногообразий с границей $N \subset M$ (для простоты, можно здесь считать N диффеоморфным образом $(k+1)$ -мерного многогранника). Граница ∂N ориентируется репером касательных векторов $e_1, \dots, e_k \in T_q(\partial N)$ так, чтобы репер $e_n, e_1, \dots, e_k \in T_q N$ задавал положительную ориентацию на N , где e_n — внешний вектор нормали к N в q .

Существование формы $d\omega$, удовлетворяющей формуле Стокса (11.7), следует из аддитивности отображения $N \mapsto \int_{\partial N} \omega$ относительно области: если $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \partial N_1 \cap \partial N_2$, то

$$\int_{\partial N} \omega = \int_{\partial N_1} \omega + \int_{\partial N_2} \omega$$

(ориентация границ согласована: в точках пересечения ∂N_1 и ∂N_2 имеют противоположные ориентации). Поэтому интеграл $\int_{\partial N} \omega$ является разновидностью меры относительно N , и значение $(d\omega)_q$ можно восстановить, переходя к пределу в формуле Стокса (11.7), когда подмногообразие N стягивается в точку q .

Напомним некоторые основные свойства внешнего дифференциала. Во-первых, из формулы Стокса следует линейность оператора $d : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k+1} M$. Далее, если $F : M \rightarrow N$ — диффеоморфизм, то

$$d\hat{F}\omega = \hat{F}d\omega, \quad \omega \in \Lambda^k N. \quad (11.8)$$

Действительно, если $W \subset M$, то

$$\int_{F(W)} \omega = \int_W \hat{F}\omega, \quad \omega \in \Lambda^k N,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_W d\hat{F}\omega &= \int_{\partial W} \hat{F}\omega = \int_{F(\partial W)} \omega = \int_{\partial F(W)} \omega = \int_{F(W)} d\omega \\ &= \int_W \hat{F}d\omega, \end{aligned}$$

и равенство (11.8) доказано.

Еще одно фундаментальное свойство внешнего дифференциала выражается равенством

$$d \circ d = 0,$$

следующим из того, что $\partial(\partial N) = \emptyset$ для любого подмногообразия с границей $N \subset M$.

Внешний дифференциал является антидифференцированием:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2, \quad \omega_i \in \Lambda^{k_i} M,$$

это двойственная формула к формуле границы $\partial(N_1 \times N_2)$.

Внешний дифференциал вычисляется в локальных координатах следующим образом: если

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad a_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty,$$

то

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (da_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

эта формула следует из приведенных выше свойств дифференциальных форм.

11.4 Производная Ли дифференциальных форм

Построим инфинитезимальную версию переноса $\hat{P}$ дифференциальных форм потоком P .

Производная Ли дифференциальной формы $\omega \in \Lambda^k M$ вдоль векторного поля $f \in \text{Vec } M$ — это дифференциальная форма $L_f \omega \in \Lambda^k M$, которая определяется следующим образом:

$$L_f \omega \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \widehat{e^{\varepsilon f} \omega}. \quad (11.9)$$

Так как

$$\widehat{e^{tf}(\omega_1 \wedge \omega_2)} = \widehat{e^{tf} \omega_1} \wedge \widehat{e^{tf} \omega_2},$$

производная Ли L_f является дифференцированием алгебры дифференциальных форм:

$$L_f(\omega_1 \wedge \omega_2) = (L_f \omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_f \omega_2.$$

Далее,

$$\widehat{e^{tf} \circ d} = d \circ \widehat{e^{tf}},$$

поэтому

$$L_f \circ d = d \circ L_f.$$

Производная Ли 0-форм есть обычная производная по направлению:

$$L_f a = f a, \quad a \in C^\infty(M),$$

так как

$$\widehat{e^{tf} a} = e^{tf} a$$

есть замена переменных.

Выведем полезную формулу для действия производной Ли на дифференциальные формы любой степени.

Рассмотрим, наряду с внешним дифференциалом

$$d : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k+1} M$$

внутреннее произведение дифференциальной формы ω и векторного поля $f \in \text{Vec } M$:

$$i_f : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k-1} M, \\ (i_f \omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(f, v_1, \dots, v_{k-1}), \quad \omega \in \Lambda^k M, \quad v_i \in T_q M,$$

действующее как подстановка f вместо первого аргумента в ω . По определению, для форм нулевого порядка

$$i_f a = 0, \quad a \in \Lambda^0 M.$$

Внутреннее произведение является антидифференцированием, как и внешний дифференциал:

$$i_f(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_f \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge i_f \omega_2, \quad \omega_i \in \Lambda^{k_i} M.$$

Докажем, что производную Ли дифференциальной формы любой степени можно вычислить по следующей формуле:

$$L_f = d \circ i_f + i_f \circ d, \quad (11.10)$$

которая называется *формулой Кармана*, сокращенно « $L = di + id$ ». В первых, заметим, что правая часть (11.10) имеет нужную степень:

$$d \circ i_f + i_f \circ d : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^k M.$$

Далее, оператор $d \circ i_f + i_f \circ d$ является дифференцированием, так как он получен из двух антидифференцирований. Более того, это дифференцирование коммутирует с дифференциалом:

$$d \circ (d \circ i_f + i_f \circ d) = d \circ i_f \circ d, \\ (d \circ i_f + i_f \circ d) \circ d = d \circ i_f \circ d.$$

Теперь проверим формулу (11.10) на 0-формах: если $a \in \Lambda^0 M$, то

$$(d \circ i_f)a = 0, \\ (i_f \circ d)a = \langle da, f \rangle = fa = L_f a.$$

Итак, равенство (11.10) выполняется на 0-формах. Но установленные выше свойства отображений L_f и $d \circ i_f + i_f \circ d$ и координатное представление (11.3) сводят общий случай k -форм к случаю 0-форм. Формула (11.10) доказана.

Дифференциальное определение (11.9) производной Ли можно проинтегрировать, т.е. справедливо следующее равенство на $\Lambda^k M$:

$$\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau d\tau \right)^\sim = \overrightarrow{\exp} \int_0^t L_{f_\tau} d\tau, \quad (11.11)$$

в следующем смысле. Обозначим поток

$$P_{t_0}^{t_1} = \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t_1} f_\tau d\tau.$$

Семейство операторов на дифференциальных формах

$$\widehat{P}_0^t : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^k M$$

есть единственное решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt} \widehat{P}_0^t = \widehat{P}_0^t \circ L_{f_t}, \quad \widehat{P}_0^t \Big|_{t=0} = \text{Id}, \quad (11.12)$$

аналогичной задачам Коши для потока P_0^t (2.9) и для семейства операторов $\text{Ad } P_0^t$ (2.21), (2.22), и это решение обозначается как

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t L_{f_\tau} d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau d\tau \right)^\wedge.$$

Чтобы проверить дифференциальное уравнение в (11.12), докажем сначала следующее равенство для операторов на формах:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \widehat{P_t^{t+\varepsilon}} \omega = L_{f_t} \omega, \quad \omega \in \Lambda^k M. \quad (11.13)$$

Это равенство очевидно для форм нулевого порядка:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \widehat{P_t^{t+\varepsilon}} a = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} P_t^{t+\varepsilon} a = f_t a = L_{f_t} a, \quad a \in C^\infty(M).$$

Далее, оба оператора $\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \widehat{P_t^{t+\varepsilon}}$ и L_{f_t} коммутируют с d и удовлетворяют правилу Лейбница относительно произведения функции и дифференциальной формы. Тогда равенство (11.13) следует для форм любой степени, как и в доказательстве формулы Картана.

Теперь уравнение в (11.12) легко проверяется:

$$\frac{d}{dt} \widehat{P}_0^t = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \widehat{P_0^{t+\varepsilon}} = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \widehat{P_0^t \circ P_t^{t+\varepsilon}}$$

по правилу композиции (11.4)

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \widehat{P}_0^t \circ \widehat{P_t^{t+\varepsilon}} = \widehat{P}_0^t \circ \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \widehat{P_t^{t+\varepsilon}} \\ &= \widehat{P}_0^t \circ L_{f_t}. \end{aligned}$$

Упражнение 11.3. Докажите единственность решения задачи (11.12).

Для автономного поля $f \in \text{Vec } M$ равенство (11.11) принимает вид

$$\widehat{e^{tf}} = e^{tL_f}.$$

Отметим, что производные Ли дифференциальных форм L_f и векторных полей $(-\text{ad } f)$ в некотором смысле двойственны друг другу, см. равенство (11.14) ниже. То есть функция

$$\langle \omega, X \rangle : q \mapsto \langle \omega_q, X(q) \rangle, \quad q \in M,$$

задает спаривание $\Lambda^1 M$ и $\text{Vec } M$ над $C^\infty(M)$. Тогда равенство

$$\langle \widehat{P}\omega, X \rangle = P \langle \omega, P_* X \rangle, \quad P \in \text{Diff } M, \quad X \in \text{Vec } M, \quad \omega \in \Lambda^1 M,$$

имеет инфинитезимальную версию вида

$$\langle L_Y \omega, X \rangle = Y \langle \omega, X \rangle - \langle \omega, (\text{ad } Y) X \rangle, \quad X, Y \in \text{Vec } M, \quad \omega \in \Lambda^1 M. \quad (11.14)$$

Учитывая формул Картана, легко получаем следующее важное равенство:

$$d\omega(Y, X) = Y \langle \omega, X \rangle - X \langle \omega, Y \rangle - \langle \omega, [Y, X] \rangle, \quad X, Y \in \text{Vec } M, \quad \omega \in \Lambda^1 M. \quad (11.15)$$

11.5 Элементы симплектической геометрии

Как мы видели выше, кокасательное расслоение $T^*M = \cup_{q \in M} T_q^*M$ n -мерного многообразия M является $2n$ -мерным многообразием. Любые локальные координаты $x = (x_1, \dots, x_n)$ на M определяют канонические локальные координаты на T^*M вида $(\xi, x) = (\xi_1, \dots, \xi_n; x_1, \dots, x_n)$, в которых любой ковектор $\lambda \in T_{q_0}^*M$ раскладывается как $\lambda = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i|_{q_0}$.

11.5.1 Форма Лиувилля и симплектическая форма

«Тавтологическая» 1-форма (или 1-форма Лиувилля) на кокасательном пространстве

$$s \in \Lambda^1(T^*M)$$

определяется следующим образом. Пусть $\lambda \in T^*M$ — точка кокасательного расслоения, а $w \in T_\lambda(T^*M)$ — касательный вектор к T^*M в точке λ . Обозначим через π каноническую проекцию из T^*M на M :

$$\begin{aligned} \pi : T^*M &\rightarrow M, \\ \pi : \lambda &\mapsto q, \quad \lambda \in T_q^*M. \end{aligned}$$

Дифференциал проекции π есть линейное отображение

$$\pi_* : T_\lambda(T^*M) \rightarrow T_q M, \quad q = \pi(\lambda).$$

Тавтологическая 1-форма s в точке λ действует на касательный вектор w следующим образом:

$$\langle s_\lambda, w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \lambda, \pi_* w \rangle.$$

То есть мы проецируем вектор $w \in T_\lambda(T^*M)$ в вектор $\pi_* w \in T_q M$, а затем действуем ковектором $\lambda \in T_q^* M$. Таким образом,

$$s_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \circ \pi_*.$$

Название «тавтологическая» объясняется координатным представлением формы s . В канонических координатах (ξ, x) на T^*M имеем:

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i, \\ w &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{11.16}$$

В локальных координатах проекция

$$\pi : (\xi, x) \mapsto x$$

становится линейным отображением, и ее дифференциал действует следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi_* \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \pi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\pi_* w = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

следовательно,

$$\langle s_\lambda, w \rangle = \langle \lambda, \pi_* w \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \beta_i.$$

Но $\beta_i = \langle dx_i, w \rangle$, поэтому форма s имеет в координатах (ξ, x) в точности то же выражение

$$s_\lambda = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i \tag{11.17}$$

что и ковектор λ , см. (11.16). Впрочем, определение формы s не зависит от координат.

Замечание. В механике форма Лиувилля s обозначается через $p dq$.

Рассмотрим внешний дифференциал 1-формы s :

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} ds.$$

Дифференциальная 2-форма $\sigma \in \Lambda^2(T^*M)$ называется *канонической симплектической структурой* на T^*M . В канонических координатах получаем из (11.17):

$$\sigma = \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i. \quad (11.18)$$

Отсюда видно, что форма σ невырождена, т.е. билинейная кососимметрическая форма

$$\sigma_\lambda : T_\lambda(T^*M) \times T_\lambda(T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$$

не имеет ядра:

$$\sigma(w, \cdot) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0, \quad w \in T_\lambda(T^*M).$$

В базисе касательного пространства $T_\lambda(T^*M)$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial \xi_n},$$

форма σ_λ имеет блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Форма σ замкнута:

$$d\sigma = 0$$

так как она точна: $\sigma = ds$, а $d \circ d = 0$.

Замечания. (1) Замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма на $2n$ -мерном многообразии называется *симплектической структурой*. Многообразие с симплектической структурой называется *симплектическим многообразием*. Кокасательное расслоение T^*M с канонической симплектической структурой σ — наиболее важный пример симплектического многообразия.

(2) В механике 2-форма σ известна как форма $dp \wedge dq$.

11.5.2 Гамильтоновы векторные поля

С помощью симплектической структуры $\sigma \in \Lambda^2(T^*M)$ можно построить гамильтонов формализм на T^*M . *Гамильтониан* — это произвольная гладкая функция на кокасательном расслоении:

$$h \in C^\infty(T^*M).$$

Каждому гамильтониану h можно сопоставить *гамильтоново векторное поле*

$$\vec{h} \in \text{Vec}(T^*M)$$

по следующему правилу:

$$\sigma_\lambda(\cdot, \vec{h}) = d_\lambda h, \quad \lambda \in T^*M. \quad (11.19)$$

В терминах внутреннего произведения $i_v \omega(\cdot, \cdot) = \omega(v, \cdot)$, гамильтоново поле — это векторное поле $\vec{h}$, удовлетворяющее равенству

$$i_{\vec{h}} \sigma = -dh.$$

Так как симплектическая форма σ невырождена, отображение

$$w \mapsto \sigma_\lambda(\cdot, w)$$

есть линейный изоморфизм

$$T_\lambda(T^*M) \rightarrow T_\lambda^*(T^*M),$$

поэтому гамильтоново векторное поле $\vec{h}$ в (11.19) существует и единственным образом определяется функцией Гамильтона h .

В канонических координатах (ξ, x) на T^*M имеем

$$dh = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \right),$$

поэтому в силу (11.18)

$$\vec{h} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right), \quad (11.20)$$

Следовательно, *гамильтонова система* ОДУ, соответствующая h ,

$$\dot{\lambda} = \vec{h}(\lambda), \quad \lambda \in T^*M,$$

имеет в канонических координатах следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial h}{\partial \xi_i}, & i = 1, \dots, n, \\ \dot{\xi}_i = -\frac{\partial h}{\partial x_i}, & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Можно рассматривать функции Гамильтона, зависящие от параметра: h_t , $t \in \mathbb{R}$. В этом случае неавтономное гамильтоново векторное поле $\vec{h}_t$, $t \in \mathbb{R}$, определяется так же, как в автономном случае.

Поток гамильтоновой системы сохраняет симплектическую форму σ .

Предложение 11.1. Пусть $\vec{h}_t$ есть неавтономное гамильтоново векторное поле на T^*M . Тогда

$$\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \vec{h}_\tau d\tau \right)^\sim \sigma = \sigma.$$

Доказательство. В силу равенства (11.11) имеем

$$\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \vec{h}_\tau d\tau \right)^\sim = \overrightarrow{\exp} \int_0^t L_{\vec{h}_\tau} d\tau,$$

поэтому утверждение данного предложения можно переписать как

$$L_{\vec{h}_t} \sigma = 0.$$

Но производная Ли легко вычисляется по формуле Картана:

$$L_{\vec{h}_t} \sigma = i_{\vec{h}_t} \circ \underbrace{d\sigma}_{=0} + d \circ \underbrace{i_{\vec{h}_t} \sigma}_{=-dh_t} = -d \circ dh_t = 0.$$

□

Более того, локально справедливо обратное утверждение: если поток сохраняет σ , то он локально гамильтонов. Действительно,

$$\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau d\tau \right)^\sim \sigma = \sigma \Leftrightarrow L_{f_t} \sigma = 0,$$

далее,

$$L_{f_t} \sigma = i_{f_t} \circ \underbrace{d\sigma}_{=0} + d \circ i_{f_t} \sigma,$$

поэтому

$$L_{f_t} \sigma = 0 \Leftrightarrow d \circ i_{f_t} \sigma = 0.$$

Если форма $i_{f_t} \sigma$ замкнута, то она локально точна (лемма Пуанкаре), т.е. существует гамильтониан h_t , для которого локально $f_t = \vec{h}_t$.

По существу, только гамильтоновы потоки сохраняют σ (глобально могут возникать «многозначные гамильтонианы»). Если многообразие M односвязно, то справедливо глобальное утверждение: поток на T^*M гамильтонов тогда и только тогда, когда он сохраняет симплектическую структуру.

Скобка Пуассона гамильтонианов $a, b \in C^\infty(T^*M)$ — это гамильтониан

$$\{a, b\} \in C^\infty(T^*M),$$

который определяется любым из следующих эквивалентных способов:

$$\{a, b\} = \vec{a}b = \langle db, \vec{a} \rangle = \sigma(\vec{a}, \vec{b}) = -\sigma(\vec{b}, \vec{a}) = -\vec{b}a.$$

Очевидно, что скобка Пуассона билинейна и кососимметрична:

$$\{a, b\} = -\{b, a\}.$$

В канонических координатах (ξ, x) на T^*M ,

$$\{a, b\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial \xi_i} \frac{\partial b}{\partial x_i} - \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial \xi_i} \right). \quad (11.21)$$

Правило Лейбница для скобки Пуассона легко следует из определения:

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$$

(здесь bc — обычное поточечное произведение функций b и c).

Симплектоморфизмы кокасательного расслоения сохраняют гамильтоновы векторные поля; действие симплектоморфизма $P \in \text{Diff}(T^*M)$, $\hat{P}\sigma = \sigma$, на гамильтоново векторное поле $\vec{h}$ сводится к действию P на гамильтониан как замена переменных:

$$\text{Ad } P \vec{h} = \overrightarrow{Ph}.$$

Это следует из цепочки

$$\begin{aligned} \sigma(X, \text{Ad } P \vec{h}) &= \hat{P}\sigma(X, \text{Ad } P \vec{h}) = P\sigma(\text{Ad } P^{-1} X, \vec{h}) \\ &= P\langle dh, \text{Ad } P^{-1} X \rangle = X(Ph), \quad X \in \text{Vec}(T^*M). \end{aligned}$$

В частности, гамильтонов поток переводит гамильтоново поле в гамильтоново:

$$\text{Ad } P^t \vec{b}_t = \overrightarrow{P^t b_t}, \quad P^t = \exp \int_0^t \vec{a}_\tau d\tau. \quad (11.22)$$

Инфинитезимально из этого равенства следует тождество Якоби для скобки Пуассона.

Предложение 11.2.

$$\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0, \quad a, b, c \in C^\infty(T^*M). \quad (11.23)$$

Доказательство. Любой симплектоморфизм $P \in \text{Diff}(T^*M)$, $\hat{P}\sigma = \sigma$, сохраняет скобку Пуассона:

$$P\{b, c\} = P\sigma(\vec{b}, \vec{c}) = \hat{P}\sigma(\text{Ad } P \vec{b}, \text{Ad } P \vec{c}) = \sigma(\overrightarrow{Pb}, \overrightarrow{Pc}) = \{Pb, Pc\}.$$

Полагая $P = e^{t\vec{a}}$ и дифференцируя при $t = 0$, получаем тождество Якоби:

$$\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} + \{b, \{a, c\}\}.$$

□

Итак, пространство всех гамильтонианов $C^\infty(T^*M)$ образует алгебру Ли, произведение в которой задается скобкой Пуассона. Соответствие

$$a \mapsto \vec{a}, \quad a \in C^\infty(T^*M), \quad (11.24)$$

есть гомоморфизм из алгебры Ли гамильтонианов в алгебру Ли гамильтоновых векторных полей на M , это вытекает из следующего утверждения.

Следствие 11.1. $\overrightarrow{\{a, b\}} = [\vec{a}, \vec{b}]$ для любых гамильтонианов $a, b \in C^\infty(T^*M)$.

Доказательство. Тождество Якоби можно переписать в виде

$$\{\{a, b\}, c\} = \{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\},$$

то есть

$$\overrightarrow{\{a, b\}} c = \vec{a} \circ \vec{b} c - \vec{b} \circ \vec{a} c = [\vec{a}, \vec{b}] c, \quad c \in C^\infty(T^*M).$$

□

Из координатного представления (11.20) легко видеть, что ядро отображения $a \mapsto \vec{a}$ состоит из постоянных функций, т.е. это — изоморфизм с точностью до констант. С другой стороны, образ этого гомоморфизма содержит далеко не все векторные поля на T^*M . Действительно, векторное поле общего вида на T^*M определяется локально произвольными $2n$ гладкими функциями от $2n$ переменных, в то время как гамильтоново векторное поле определяется всего одной функцией от $2n$ переменных — гамильтонианом.

Теорема 11.1 (Нётер). Функция $a \in C^\infty(T^*M)$ является первым интегралом гамильтоновой системы

$$\dot{\lambda} = \vec{h}(\lambda), \quad \lambda \in T^*M, \quad (11.25)$$

то есть

$$e^{t\vec{h}} a = a \quad t \in \mathbb{R},$$

тогда и только тогда, когда она коммутирует по Пуассону с гамильтонианом:

$$\{a, h\} = 0.$$

Доказательство. $e^{t\vec{h}} a \equiv a \Leftrightarrow 0 = \vec{h} a = \{h, a\}$. □

Следствие 11.2. $e^{t\vec{h}} h = h$, т.е. любой гамильтониан $h \in C^\infty(T^*M)$ есть интеграл соответствующей гамильтоновой системы (11.25).

Далее, из тождества Якоби для скобки Пуассона следует, что множество первых интегралов гамильтоновой системы (11.25) образует алгебру Ли относительно скобки Пуассона.

Следствие 11.3. $\{h, a\} = \{h, b\} = 0 \Rightarrow \{h, \{a, b\}\} = 0$.

Замечание. Построенный гамильтонов формализм обобщается на произвольные симплектические многообразия.

А сейчас мы рассмотрим конструкцию, работающую только на T^*M . Возьмем векторное поле $X \in \text{Vec } M$ и определим функцию Гамильтона

$$X^* \in C^\infty(T^*M),$$

линейную на слоях T_q^*M , следующим образом:

$$X^*(\lambda) = \langle \lambda, X(q) \rangle, \quad \lambda \in T^*M, \quad q = \pi(\lambda).$$

В канонических координатах (ξ, x) на T^*M имеем:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ X^* &= \sum_{i=1}^n \xi_i a_i(x). \end{aligned} \tag{11.26}$$

Из этого координатного представления следует, что

$$\{X^*, Y^*\} = [X, Y]^*, \quad X, Y \in \text{Vec } M,$$

т.е. скобка Пуассона гамильтонианов, линейных на слоях в T^*M , содержит обычную скобку Ли векторных полей на M .

Гамильтоново векторное поле $\overrightarrow{X^*} \in \text{Vec}(T^*M)$, соответствующее гамильтониану X^* , называется *гамильтоновым лифтом* векторного поля $X \in \text{Vec } M$. Из координатных представлений (11.26), (11.20) видно, что

$$\pi_* \left(\overrightarrow{X^*} \right) = X.$$

Перейдем к неавтономным полям. Пусть X_t — неавтономное векторное поле, а

$$P_{\tau, t} = \overrightarrow{\exp} \int_{\tau}^t X_{\theta} d\theta$$

есть соответствующий поток на M . Поток $P = P_{\tau, t}$ действует на M :

$$P : M \rightarrow M, \quad P : q_0 \mapsto q_1,$$

его дифференциал переносит касательные векторы вперед:

$$P_* : T_{q_0} M \rightarrow T_{q_1} M,$$

а сопряженное к нему отображение P^* переносит ковекторы назад:

$$P^* : T_{q_1}^* M \rightarrow T_{q_0}^* M.$$

Имеем поток на ковекторах (т.е. точках кокасательного расслоения):

$$P_{\tau,t}^* : T^*M \rightarrow T^*M.$$

Обозначим через V_t неавтономное векторное поле на T^*M , порождающее поток $P_{\tau,t}^*$:

$$V_t = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} P_{t,t+\varepsilon}^*.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} P_{\tau,t}^* = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} P_{\tau,t+\varepsilon}^* = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} P_{t,t+\varepsilon}^* \circ P_{\tau,t}^* = V_t \circ P_{\tau,t}^*,$$

поэтому поток $P_{\tau,t}^*$ является решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt} P_{\tau,t}^* = V_t \circ P_{\tau,t}^*, \quad P_{\tau,\tau}^* = \text{Id},$$

т.е. это — левая хронологическая экспонента:

$$P_{\tau,t}^* = \overleftarrow{\exp} \int_{\tau}^t V_{\theta} d\theta.$$

Оказывается, имеется простая связь между неавтономным полем V_t и гамильтонианом X_t^* :

$$V_t = -\overrightarrow{X_t^*}. \quad (11.27)$$

Действительно, поток $P_{\tau,t}^*$ сохраняет тавтологическую форму s , поэтому

$$L_{V_t} s = 0.$$

По формуле Картана,

$$i_{V_t} \sigma = -d\langle s, V_t \rangle,$$

т.е. поле V_t гамильтоново:

$$V_t = \overrightarrow{\langle s, V_t \rangle}.$$

Но $\pi_* V_t = -X_t$, следовательно,

$$\langle s, V_t \rangle = -X_t^*,$$

и равенство (11.27) доказано. Учитывая соотношение (2.18) между левой и правой хронологическими экспонентами, получаем

$$P_{\tau,t}^* = \overleftarrow{\exp} \int_{\tau}^t -\overrightarrow{X_{\theta}^*} d\theta = \overrightarrow{\exp} \int_t^{\tau} \overrightarrow{X_{\theta}^*} d\theta.$$

Доказано следующее утверждение.

Предложение 11.3. Пусть X_t — полное неавтономное поле на M . Тогда

$$\left(\overrightarrow{\exp} \int_{\tau}^t X_{\theta} d\theta \right)^* = \overrightarrow{\exp} \int_t^{\tau} \overrightarrow{X_{\theta}^*} d\theta.$$

В частности, для автономных векторных полей $X \in \text{Vec } M$,

$$(e^{tX})^* = e^{-t\overrightarrow{X^*}}.$$

11.5.3 Лагранжевы подпространства

Линейное пространство Σ , на котором задана невырожденная билинейная кососимметричная форма σ , называется *симплектическим пространством*. Например, $\Sigma = T_\lambda(T^*M)$ с канонической симплектической формой $\sigma = \sigma_\lambda$ является симплектическим пространством.

Любое подпространство L симплектического пространства Σ имеет ко-соортогональное дополнение

$$L^\perp = \{x \in \Sigma \mid \sigma(x, L) = 0\}.$$

Подпространство $L \subset \Sigma$ называется *изотропным*, если

$$L \subset L^\perp.$$

В силу невырожденности симплектической формы σ , имеем

$$\dim L^\perp = \operatorname{codim} L.$$

В частности, если подпространство L изотропно, то $\dim L \leq \frac{1}{2} \dim \Sigma$. Изотропные подпространства максимальной размерности:

$$L \subset L^\perp, \dim L = \frac{1}{2} \dim \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad L = L^\perp,$$

называются *лагранжевыми подпространствами*.

Например, в канонических координатах (p, q) на Σ вертикальное подпространство $\{q = 0\}$ и горизонтальное подпространство $\{p = 0\}$ лагранжевы.

Существует стандартный способ построения лагранжева подпространства, содержащего любое заданное изотропное подпространство. Пусть $\Gamma \subset \Sigma$ — изотропное, а $\Lambda \subset \Sigma$ — лагранжево подпространство. Тогда подпространство

$$\Lambda^\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda \cap \Gamma^\perp + \Gamma = (\Lambda + \Gamma) \cap \Gamma^\perp \quad (11.28)$$

лагранжево (проверьте!). Ясно, что

$$\Lambda^\Gamma \supset \Gamma.$$

В частности, любая прямая в Σ содержится в некотором лагранжевом подпространстве.

Глава 12

Принцип максимума Понтрягина

В этой главе мы докажем фундаментальное необходимое условие оптимальности для задач оптимального управления — принцип максимума Понтрягина (ПМП). Чтобы получить бескоординатную формулировку принципа максимума, мы используем технику симплектической геометрии, изложенную в предыдущей главе. Первая классическая версия ПМП была получена Л. С. Понтрягиным и его сотрудниками [15] для задач оптимального управления в евклидовом пространстве.

12.1 Геометрическая постановка и обсуждение принципа максимума

Рассмотрим задачу оптимального управления, поставленную в разделе 10.1 для управляемой системы

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (12.1)$$

с начальным условием

$$q(0) = q_0. \quad (12.2)$$

Определим семейство функций Гамильтона:

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_u(q) \rangle, \quad \lambda \in T_q^*M, \quad q \in M, \quad u \in U.$$

В терминах предыдущего раздела,

$$h_u(\lambda) = f_u^*(\lambda).$$

Зафиксируем произвольный момент времени $t_1 > 0$.

В разделе 10.2 задача оптимального управления была сведена к исследованию границы множеств достижимости. Сформулируем *необходимое условие оптимальности* в этой геометрической постановке.

Теорема 12.1 (ПМП). Пусть $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть допустимое управление, а $\tilde{q}(t) = q_{\tilde{u}}(t)$ — соответствующее решение задачи Коши (12.1), (12.2). Если

$$\tilde{q}(t_1) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1),$$

то существует такая липшицева кривая в кокасательном расслоении

$$\lambda_t \in T_{\tilde{q}(t)}^* M, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

что

$$\lambda_t \neq 0, \quad (12.3)$$

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t), \quad (12.4)$$

$$h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u(\lambda_t) \quad (12.5)$$

для почти всех $t \in [0, t_1]$.

Если $u(t)$ — допустимое управление, а λ_t — липшицева кривая в T^*M , для которой выполняются условия (12.3)–(12.5), то говорят, что пара $(u(t), \lambda_t)$ удовлетворяет ПМП. В этом случае кривая λ_t называется *экстремалью*, а ее проекция $\tilde{q}(t) = \pi(\lambda_t)$ — *экстремальной траекторией*.

Замечание. Если пара $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$ удовлетворяет принципу максимума, то

$$h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = \text{const}, \quad t \in [0, t_1]. \quad (12.6)$$

Действительно, так как допустимое управление $\tilde{u}(t)$ ограничено, максимум в правой части (12.5) можно брать по компакту $\{\tilde{u}(t) \mid t \in [0, t_1]\} = \tilde{U}$. Далее, функция

$$\varphi(\lambda) = \max_{u \in \tilde{U}} h_u(\lambda)$$

липшицева по $\lambda \in T^*M$. Покажем, что производная этой функции равна нулю. Для любого допустимого управления $u(t)$,

$$\varphi(\lambda_t) \geq h_{u(\tau)}(\lambda_t), \quad \varphi(\lambda_\tau) = h_{u(\tau)}(\lambda_\tau),$$

поэтому

$$\frac{\varphi(\lambda_t) - \varphi(\lambda_\tau)}{t - \tau} \geq \frac{h_{u(\tau)}(\lambda_t) - h_{u(\tau)}(\lambda_\tau)}{t - \tau}, \quad t > \tau.$$

Следовательно,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} \varphi(\lambda_t) \geq \{h_{u(\tau)}, h_{u(\tau)}\} = 0$$

если функция $\varphi(\lambda_t)$ дифференцируема в точке τ . Аналогично

$$\frac{\varphi(\lambda_t) - \varphi(\lambda_\tau)}{t - \tau} \leq \frac{h_{u(\tau)}(\lambda_t) - h_{u(\tau)}(\lambda_\tau)}{t - \tau}, \quad t < \tau,$$

поэтому

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} \varphi(\lambda_t) \leq 0.$$

Итак,

$$\frac{d}{dt} \varphi(\lambda_t) = 0,$$

и тождество (12.6) доказано.

Гамильтонова система принципа максимума

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t)}(\lambda_t) \quad (12.7)$$

является расширением исходной системы (12.1) на кокасательное пространство. Действительно, в канонических координатах $\lambda = (\xi, x) \in T^*M$ из гамильтоновой системы получаем

$$\dot{x} = \frac{\partial h_{u(t)}}{\partial \xi} = f_{u(t)}(x).$$

То есть решение λ_t системы (12.7) есть гамильтонов лифт решения $q(t)$ системы (12.1):

$$\pi(\lambda_t) = q_u(t).$$

Прежде чем доказать принцип максимума Понтрягина, обсудим это утверждение.

Дадим эвристическое объяснение того, что кривая ковекторов λ_t естественно возникает при изучении траекторий, приходящих на границу множества достижимости. Пусть

$$q_1 = \tilde{q}(t_1) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1). \quad (12.8)$$

Идея состоит в том, чтобы рассмотреть нормальный ковектор ко множеству достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ вблизи q_1 , более точно — нормальный ковектор к некоторому выпуклому касательному конусу к $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ в q_1 . В силу включения (12.8), этот выпуклый конус должен быть собственным. Поэтому он имеет опорную гиперплоскость, т.е. линейную гиперплоскость в $T_{q_1}M$, которая ограничивает полупространство, содержащее этот конус. Далее, эта опорная гиперплоскость есть ядро некоторого нормального ковектора $\lambda_{t_1} \in T_{q_1}^*M$, $\lambda_{t_1} \neq 0$, см. рис. 12.1. Ковектор λ_{t_1} — аналог множителей Лагранжа.

Чтобы построить всю кривую λ_t , $t \in [0, t_1]$, рассмотрим поток, порожденный управлением $\tilde{u}(\cdot)$:

$$P_{t,t_1} = \overrightarrow{\exp} \int_t^{t_1} f_{\tilde{u}(\tau)} d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Легко видеть, что

$$P_{t,t_1}(\mathcal{A}_{q_0}(t)) \subset \mathcal{A}_{q_0}(t_1), \quad t \in [0, t_1].$$

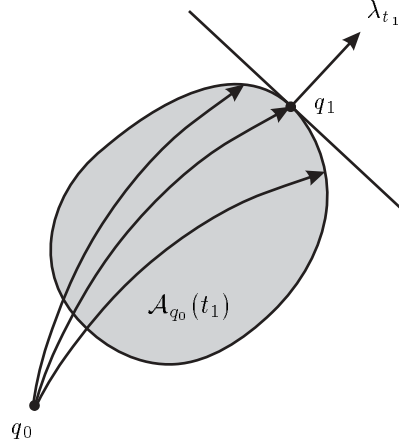


Рис. 12.1: Опорная гиперплоскость и нормальный ковектор ко множеству достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ в точке q_1

Действительно, если точка $q \in \mathcal{A}_{q_0}(t)$ достижима из q_0 вдоль управления $u(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, то точка $P_{t,t_1}(q)$ достижима из q_0 вдоль управления

$$v(\tau) = \begin{cases} u(\tau), & \tau \in [0, t], \\ \tilde{u}(\tau), & \tau \in [t, t_1]. \end{cases}$$

Далее, диффеоморфизм $P_{t,t_1} : M \rightarrow M$ удовлетворяет условию

$$P_{t,t_1}(\tilde{q}(t)) = \tilde{q}(t_1) = q_1, \quad t \in [0, t_1].$$

Поэтому если $\tilde{q}(t) \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}(t)$, то $q_1 \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$. От противного, из включения (12.8) следует, что

$$\tilde{q}(t) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t), \quad t \in [0, t_1].$$

Касательный конус к $\mathcal{A}_{q_0}(t)$ в точке $\tilde{q}(t) = P_{t,t}(q_1)$ имеет касательный ковектор $\lambda_t = P_{t,t_1}^*(\lambda_{t_1})$. По предложению 11.3, кривая λ_t , $t \in [0, t_1]$, есть траектория гамильтонова векторного поля $\vec{h}_{\tilde{u}(t)}$, то есть гамильтоновой системы ПМП.

Несложно получить и условие максимума ПМП. Касательный конус к $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ в q_1 должен содержать инфинитезимальное множество достижимости из точки q_1 :

$$f_U(q_1) - f_{\tilde{u}(t_1)}(q_1),$$

то есть множество векторов, получаемых вариациями управления $\tilde{u}$ вблизи t_1 . Поэтому ковектор λ_{t_1} должен задавать опорную гиперплоскость к этому множеству:

$$\langle \lambda_{t_1}, f_u - f_{\tilde{u}(t_1)} \rangle \leq 0, \quad u \in U.$$

Иными словами,

$$h_u(\lambda_{t_1}) = \langle \lambda_{t_1}, f_u \rangle \leq \langle \lambda_{t_1}, f_{\tilde{u}(t_1)} \rangle = h_{\tilde{u}(t_1)}(\lambda_{t_1}), \quad u \in U.$$

Переносим ковектор λ_{t_1} потоком P_{t, t_1}^* , получаем условие максимума ПМП:

$$h_u(\lambda_t) \leq h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t), \quad u \in U, \quad t \in [0, t_1].$$

Следующее утверждение демонстрирует силу принципа максимума.

Предложение 12.1. *Предположим, что максимизированный гамильтониан принципа максимума*

$$H(\lambda) = \max_{u \in U} h_u(\lambda), \quad \lambda \in T^*M,$$

*определен и C^2 -гладок на $T^*M \setminus \{\lambda = 0\}$.*

Если пара $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$, $t \in [0, t_1]$, удовлетворяет принципу максимума, то

$$\dot{\lambda}_t = \vec{H}(\lambda_t), \quad t \in [0, t_1]. \quad (12.9)$$

Обратно, если липшицева кривая $\lambda_t \neq 0$ является решением гамильтоновой системы (12.9), то можно подобрать допустимое управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, так, чтобы пара $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$ удовлетворяла ПМП.

Иными словами, в благоприятном случае, когда максимизированный гамильтониан H является C^2 -гладким, принцип максимума сводит задачу к исследованию решений всего одной гамильтоновой системы (12.9). С точки зрения размерности, это — лучшее, чего можно ожидать. Действительно, для полномерного множества достижимости ($\dim \mathcal{A}_{q_0}(t_1) = n$) имеем $\dim \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1) = n - 1$, т.е. нам требуется $(n - 1)$ -параметрическое семейство кривых для описания границы $\partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$. С другой стороны, семейство решений гамильтоновой системы (12.9) с начальным условием $\pi(\lambda_0) = q_0$ является n -мерным. Учитывая однородность гамильтониана H :

$$H(c\lambda) = cH(\lambda), \quad c > 0,$$

то есть

$$e^{t\vec{H}}(c\lambda_0) = ce^{t\vec{H}}(\lambda_0), \quad \pi \circ e^{t\vec{H}}(c\lambda_0) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda_0),$$

получаем искомое $(n - 1)$ -мерное семейство кривых.

Докажем предложение 12.1.

Доказательство. Покажем, что если допустимое управление $\tilde{u}(t)$ удовлетворяет условию максимума (12.5), то

$$\vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = \vec{H}(\lambda_t), \quad t \in [0, t_1]. \quad (12.10)$$

По определению максимизированного гамильтониана H ,

$$H(\lambda) - h_{\tilde{u}(t)}(\lambda) \geq 0 \quad \lambda \in T^*M, \quad t \in [0, t_1].$$

С другой стороны, в силу условия максимума ПМП (12.5), вдоль экстремали λ_t это неравенство обращается в равенство:

$$H(\lambda_t) - h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Поэтому

$$d_{\lambda_t} H = d_{\lambda_t} h_{\tilde{u}(t)}, \quad t \in [0, t_1].$$

Но гамильтоново векторное поле получается из дифференциала гамильтониана стандартным линейным преобразованием, поэтому равенство (12.10) доказано.

Обратно, пусть $\lambda_t \neq 0$ есть траектория гамильтоновой системы $\dot{\lambda}_t = \vec{H}(\lambda_t)$. Так же как в доказательстве теоремы Филиппова, выберем допустимое управление $\tilde{u}(t)$, на котором достигается максимум вдоль λ_t :

$$H(\lambda_t) = h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u(\lambda_t).$$

Мы показали выше, что тогда выполняется равенство (12.10). Поэтому пара $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$ удовлетворяет принципу максимума. $\square$

12.2 Доказательство принципа максимума Понтрягина

Начнем с двух вспомогательных утверждений.

Обозначим положительный ортант в $\mathbb{R}^m$ через

$$\mathbb{R}_+^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Лемма 12.1. Пусть вектор-функция $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ липшицева, $F(0) = 0$, и дифференцируема в 0:

$$\exists F'_0 = \left. \frac{dF}{dx} \right|_0.$$

Предположим, что

$$F'_0(\mathbb{R}_+^m) = \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любой окрестности начала координат $O_0 \subset \mathbb{R}^m$ имеем

$$0 \in \text{int } F(O_0 \cap \mathbb{R}_+^m).$$

Замечание. Утверждение предыдущей леммы остается в силе, если заменить ортант $\mathbb{R}_+^m$ на произвольный выпуклый конус $C \subset \mathbb{R}^m$. Приведенное ниже доказательство проходит в этом случае без изменений.

Доказательство. Выберем любые точки $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$, порождающие n -мерный симплекс с центром в нуле:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i = 0.$$

Из сюръективности отображения $F'_0 : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ и выпуклости положительного ортанта $\mathbb{R}_+^m$ легко следует, что ограничение на внутренность $F'_0|_{\text{int } \mathbb{R}_+^m}$ также сюръективно:

$$\exists v_i \in \text{int } \mathbb{R}_+^m \quad \text{такие, что} \quad F'_0 v_i = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Точки $y_0, \dots, y_n$ аффинно независимы в $\mathbb{R}^n$, поэтому их прообразы $v_0, \dots, v_n$ также аффинно независимы в $\mathbb{R}^m$. Среднее арифметическое

$$v = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i$$

принадлежит $\text{int } \mathbb{R}_+^m$ и удовлетворяет равенству

$$F'_0 v = 0.$$

Далее, подпространство

$$W = \text{span}\{v_i - v \mid i = 0, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^m$$

n -мерно. В силу включения $v \in \text{int } \mathbb{R}_+^m$, можно найти n -мерный шар $B_\delta \subset W$ достаточно малого радиуса δ с центром в нуле, такой что

$$v + B_\delta \subset \text{int } \mathbb{R}_+^m.$$

Так как $F'_0(v_i - v) = F'_0 v_i$, имеем $F'_0 W = \mathbb{R}^n$, т.е. линейное отображение $F'_0 : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ обратимо.

Рассмотрим следующее семейство отображений:

$$\begin{aligned} G_\alpha &: B_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in [0, \alpha_0), \\ G_\alpha(w) &= \frac{1}{\alpha} F(\alpha(v + w)), \quad \alpha > 0, \\ G_0(w) &= F'_0 w. \end{aligned}$$

По условию предложения,

$$F(x) = F'_0 x + o(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad x \rightarrow 0,$$

поэтому

$$G_\alpha(w) = F'_0 w + o(1), \quad \alpha \rightarrow 0, \quad w \in B_\delta. \quad (12.11)$$

В силу липшицевости отображения F , все отображения G_α также липшицевы с общей константой. Следовательно, семейство G_α равномерно непрерывно. Равенство (12.11) означает, что

$$G_\alpha \rightarrow G_0, \quad \alpha \rightarrow 0,$$

поточечно, поэтому равномерно.

Следовательно, непрерывное отображение $G_\alpha \circ G_0^{-1} : G_0(B_\delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ равномерно близко к тождественному отображению, а разность $\text{Id} - G_\alpha \circ G_0^{-1}$ равномерно близка к нулевому отображению. Для любого $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, достаточно близкого к началу координат, непрерывное отображение

$$\text{Id} - G_\alpha \circ G_0^{-1} + \tilde{x}$$

переводит множество $G_0(B_\delta)$ в себя. По теореме Брауэра о неподвижной точке, у этого отображения существует неподвижная точка $x \in G_0(B_\delta)$:

$$x - G_\alpha \circ G_0^{-1}(x) + \tilde{x} = x,$$

то есть

$$G_\alpha \circ G_0^{-1}(x) = \tilde{x}.$$

Получаем включение $\text{int } G_\alpha \circ G_0^{-1}(B_\delta) \ni 0$, следовательно, $\text{int } F(\alpha B_\delta) \ni 0$ для малых $\alpha > 0$. $\square$

Начнем построение выпуклой аппроксимации множества достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ в точке $q_1 = \tilde{q}(t_1)$. Возьмем любое допустимое управление $u(t)$ и выразим конечную точку соответствующей траектории по формуле вариаций (2.28):

$$\begin{aligned} q_u(t_1) &= q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} f_{u(\tau)} d\tau = q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} f_{\tilde{u}(\tau)} + (f_{u(\tau)} - f_{\tilde{u}(\tau)}) d\tau \\ &= q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} f_{\tilde{u}(\tau)} d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} (P_\tau^{t_1})_* (f_{u(\tau)} - f_{\tilde{u}(\tau)}) d\tau \\ &= q_1 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} (P_\tau^{t_1})_* (f_{u(\tau)} - f_{\tilde{u}(\tau)}) d\tau. \end{aligned}$$

Введем следующее векторное поле, зависящее от двух параметров:

$$g_{\tau, u} = (P_\tau^{t_1})_* (f_u - f_{\tilde{u}(\tau)}), \quad \tau \in [0, t_1], \quad u \in U. \quad (12.12)$$

Мы показали, что

$$q_u(t_1) = q_1 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} g_{\tau, u(\tau)} d\tau. \quad (12.13)$$

Заметим, что

$$g_{\tau, \tilde{u}(\tau)} \equiv 0, \quad \tau \in [0, t_1].$$

Лемма 12.2. Пусть $\mathcal{T} \subset [0, t_1]$ есть множество точек Лебега управления $\tilde{u}(\cdot)$. Если

$$T_{q_1}M = \text{cone}\{g_{\tau,u}(q_1) \mid \tau \in \mathcal{T}, u \in U\},$$

то

$$q_1 \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}(t_1).$$

Замечание. Множество $\text{cone}\{g_{\tau,u}(q_1) \mid \tau \in \mathcal{T}, u \in U\} \subset T_{q_1}M$ и есть локальная выпуклая аппроксимация множества достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ в точке q_1 .

Напомним, что точка $\tau \in [0, t_1]$ называется *точкой Лебега* функции $u \in L^1[0, t_1]$, если

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{1}{|t - \tau|} \int_{\tau}^t |u(\theta) - u(\tau)| d\theta = 0.$$

В точках Лебега функции u интеграл $\int_0^t u(\theta) d\theta$ дифференцируем и

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t u(\theta) d\theta \right) = u(t).$$

Множество точек Лебега имеет полную меру в области определения $[0, t_1]$. Подробное изложение этого вопроса читатель может найти, например, в [146].

Докажем лемму 12.2.

Доказательство. Можно выбрать векторы

$$g_{\tau_i, u_i}(q_1) \in T_{q_1}M, \quad \tau_i \in \mathcal{T}, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \dots, k,$$

так, чтобы они порождали как положительный выпуклый конус все касательное пространство:

$$\text{cone}\{g_{\tau_i, u_i}(q_1) \mid i = 1, \dots, k\} = T_{q_1}M,$$

и чтобы при этом точки τ_i были различными: $\tau_i \neq \tau_j, i \neq j$. Действительно, если $\tau_i = \tau_j$ для некоторых $i \neq j$, то можно подобрать достаточно близкую точку Лебега $\tau'_j \neq \tau_j$ так, чтобы разность $g_{\tau'_j, u_j}(q_1) - g_{\tau_j, u_j}(q_1)$ была сколь угодно малой. Это возможно, так как для любых $\tau \in \mathcal{T}$ и любых $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|t - \tau|} \text{meas}\{t' \in [\tau, t] \mid |u(t') - u(\tau)| \leq \varepsilon\} \rightarrow 1 \text{ при } t \rightarrow \tau.$$

Будем считать, что $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$.

Определим семейство вариаций управления, совпадающее вблизи точек τ_i с u_i , а вдали от этих точек — с управлением $\tilde{u}(\cdot)$ (такие вариации называются *игольчатыми*).

А именно, для любых $s = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}_+^k$ рассмотрим управление вида

$$u_s(t) = \begin{cases} u_i, & t \in [\tau_i, \tau_i + s_i], \\ \tilde{u}(t), & t \notin \bigcup_{i=1}^k [\tau_i, \tau_i + s_i]. \end{cases} \quad (12.14)$$

При малых s отрезки $[\tau_i, \tau_i + s_i]$ не пересекаются т.к. $\tau_i \neq \tau_j, i \neq j$. По формуле (12.13), конец траектории, соответствующей построенному управлению, выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{u_s}(t_1) &= q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} f_{u_s(t)} dt \\ &= q_1 \circ \overrightarrow{\exp} \int_{\tau_1}^{\tau_1 + s_1} g_{t, u_1} dt \circ \overrightarrow{\exp} \int_{\tau_2}^{\tau_2 + s_2} g_{t, u_2} dt \circ \dots \\ &\quad \circ \overrightarrow{\exp} \int_{\tau_k}^{\tau_k + s_k} g_{t, u_k} dt. \end{aligned}$$

Отображение

$$F : s = (s_1, \dots, s_k) \mapsto q_{u_s}(t_1)$$

липшицево, дифференцируемо при $s = 0$, и

$$\left. \frac{\partial F}{\partial s_i} \right|_{s=0} = g_{\tau_i, u_i}(q_1).$$

По лемме 12.1,

$$F(0) = q_1 \in \text{int } F(O_0 \cap \mathbb{R}_+^k)$$

для любой окрестности $O_0 \subset \mathbb{R}^k$. Но кривая $q_{u_s}(t)$, $t \in [0, t_1]$, является допустимой траекторией при малых $s \in \mathbb{R}_+^k$, поэтому $F(O_0 \cap \mathbb{R}_+^k) \subset \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ и $q_1 \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$. $\square$

Теперь мы можем доказать принцип максимума Понтягина в геометрической формулировке — теорему 12.1.

Доказательство. Предположим, что конец траектории

$$q_1 = \tilde{q}(t_1) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1).$$

По лемме 12.2, начало координат $0 \in T_{q_1} M$ принадлежит границе выпуклого множества $\text{cone}\{g_{t,u}(q_1) \mid t \in \mathcal{T}, u \in U\}$, следовательно, это множество имеет опорную гиперплоскость в нуле:

$$\exists \lambda_{t_1} \in T_{q_1}^* M, \quad \lambda_{t_1} \neq 0,$$

такое, что

$$\langle \lambda_{t_1}, g_{t,u}(q_1) \rangle \leq 0 \quad \forall \text{ п.в. } t \in [0, t_1], \quad u \in U.$$

Учитывая определение (12.12) поля $g_{t,u}$, перепишем это неравенство в следующем виде:

$$\langle \lambda_{t_1}, (P_{t*}^{t_1} f_u)(q_1) \rangle \leq \langle \lambda_{t_1}, (P_{t*}^{t_1} f_{\bar{u}(t)})(q_1) \rangle,$$

т.е.

$$\langle (P_t^{t_1})^* \lambda_{t_1}, f_u(\tilde{q}(t)) \rangle \leq \langle (P_t^{t_1})^* \lambda_{t_1}, f_{\bar{u}(t)}(\tilde{q}(t)) \rangle.$$

Действие потока $P_t^{t_1}$ на ковекторы определяет кривую в кокасательном пространстве:

$$\lambda_t \stackrel{\text{def}}{=} (P_t^{t_1})^* \lambda_{t_1} \in T_{\tilde{q}(t)}^* M, \quad t \in [0, t_1].$$

В терминах этой кривой ковекторов, приведенное выше неравенство можно переписать как

$$\langle \lambda_t, f_u(\tilde{q}(t)) \rangle \leq \langle \lambda_t, f_{\tilde{u}(t)}(\tilde{q}(t)) \rangle.$$

Поэтому вдоль выбранной траектории выполняется условие максимума ПМП (12.5):

$$h_u(\lambda_t) \leq h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) \quad \forall u \in U \quad \forall \text{ п.в. } t \in [0, t_1].$$

По предложению 11.3, кривая λ_t есть траектория неавтономного гамильтонова потока с функцией Гамильтона $f_{\tilde{u}(t)}^* = h_{\tilde{u}(t)}$:

$$\lambda_t = \lambda_{t_1} \circ \left(\overrightarrow{\exp} \int_t^{t_1} f_{\tilde{u}(\theta)} d\theta \right)^* = \lambda_{t_1} \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_1}^t \tilde{h}_{\tilde{u}(\theta)} d\theta,$$

поэтому она удовлетворяет гамильтоновой системе принципа максимума (12.4)

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t).$$

□

12.3 Геометрическая формулировка ПМП для задачи со свободным временем

В предыдущем разделе был доказан принцип максимума Понтрягина для задачи с закрепленным конечным временем t_1 . Теперь рассмотрим случай свободного t_1 .

Теорема 12.2. Пусть $\tilde{u}(\cdot)$ — допустимое управление системы (12.1) такое, что

$$\tilde{q}(t_1) \in \partial(\cup_{|t-t_1|<\varepsilon} \mathcal{A}_{q_0}(t))$$

для некоторых $t_1 > 0$ и $\varepsilon \in (0, t_1)$. Тогда существует такая липшицева кривая

$$\lambda_t \in T_{\tilde{q}(t)}^* M, \quad \lambda_t \neq 0, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

что

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_t &= \vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t), \\ h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) &= \max_{u \in U} h_u(\lambda_t), \\ h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) &= 0 \end{aligned} \tag{12.15}$$

для почти всех $t \in [0, t_1]$.

Замечание. В задачах со свободным временем появляется дополнительная переменная — конечное время t_1 . Для исключения этой переменной добавляется одно условие — равенство (12.15). Это равенство задает одно скалярное ограничение, т.к. из предыдущих двух следует, что $h_{\bar{u}(t)}(\lambda_t) = \text{const}$, см. замечание после теоремы 12.1.

Доказательство. Сведем случай свободного времени к случаю закрепленного времени, расширяя управляемую систему с помощью замены времени. Допустимыми траекториями расширенной системы будут перепараметризации траекторий исходной системы (с сохранением направления траекторий).

Возьмем в качестве нового времени гладкую функцию

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \dot{\varphi} > 0.$$

Выведем дифференциальное уравнение для перепараметризованной траектории:

$$\frac{d}{dt} q_u(\varphi(t)) = \dot{\varphi}(t) f_{u(\varphi(t))}(q_u(\varphi(t))),$$

т.е. искомое уравнение есть

$$\dot{q} = \dot{\varphi}(t) f_{u(\varphi(t))}(q).$$

Теперь рассмотрим, наряду с исходной управляемой системой

$$\dot{q} = f_u(q), \quad u \in U,$$

также расширенную систему вида

$$\dot{q} = v f_u(q), \quad u \in U, \quad |v - 1| < \delta, \quad (12.16)$$

где $\delta = \varepsilon/t_1 \in (0, 1)$. Допустимые управления новой системы суть

$$w(t) = (v(t), u(t)),$$

а управлению $\tilde{u}(\cdot)$ исходной системы соответствует управление расширенной системы

$$\tilde{w}(t) = (1, \tilde{u}(t)).$$

Легко видеть, что включение $\tilde{q}(t_1) \in \partial(\cup_{|t-t_1|<\varepsilon} \mathcal{A}_{q_0}(t))$, означает, что траектория новой системы через точку q_0 , соответствующая управлению $\tilde{w}(\cdot)$, попадает в момент t_1 на границу множества достижимости новой системы за время t_1 . Следовательно, управление $\tilde{w}(t)$ удовлетворяет принципу максимума с закрепленным временем. Применим теорему 12.1 к новой системе (12.16). Эта система имеет гамильтониан $v h_u(\lambda)$. Условие максимума (12.5) записывается как

$$1 \cdot h_{\bar{u}(t)}(\lambda_t) = \max_{u \in U, |v-1|<\delta} v h_u(\lambda_t).$$

При ограничении $u = \tilde{u}(t)$ это условие дает

$$h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = 0,$$

а при ограничении $v = 1$ получаем

$$h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u(\lambda_t).$$

Гамильтоновы системы вдоль $\tilde{w}(\cdot)$ и $\tilde{u}(\cdot)$ совпадают между собой, и теорема доказана. $\square$

12.4 ПМП для задач оптимального управления

Применим принцип максимума в геометрической форме к задачам оптимального управления, начиная с задач с закрепленным временем.

Для управляемой системы

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U, \quad (12.17)$$

с граничными условиями

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad q_0, q_1 \in M \text{ фиксированы}, \quad (12.18)$$

$$t_1 > 0 \text{ закреплено}, \quad (12.19)$$

и функционалом

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t)) dt \quad (12.20)$$

рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u) \rightarrow \min. \quad (12.21)$$

Преобразуем эту задачу как в разделе 10.2. Расширим пространство состояний:

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times M,$$

определим расширенное векторное поле $\hat{f}_u \in \text{Vec}(\mathbb{R} \times M)$:

$$\hat{f}_u(q) = \begin{pmatrix} \varphi(q, u) \\ f_u(q) \end{pmatrix},$$

и получим новую управляемую систему:

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \hat{f}_u(q) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = \varphi(q, u), \\ \dot{q} = f_u(q) \end{cases} \quad (12.22)$$

с граничными условиями

$$\hat{q}(0) = \hat{q}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{q}(t_1) = \begin{pmatrix} J(u) \\ q_1 \end{pmatrix}.$$

Если управление $\tilde{u}(\cdot)$ оптимально для задачи (12.17)–(12.21), то траектория $\hat{q}_{\tilde{u}}(t)$ расширенной системы (12.22), начинающаяся в $\hat{q}_0$, удовлетворяет условию

$$\hat{q}_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial \hat{\mathcal{A}}_{\hat{q}_0}(t_1),$$

где $\hat{\mathcal{A}}_{\hat{q}_0}(t_1)$ — множество достижимости системы (12.22) из точки $\hat{q}_0$ за время t_1 . Поэтому применима теорема 12.1.

Однако принцип максимума в геометрической форме для расширенной системы (12.22) не различает минимумов и максимумов функционала $J(u)$. Чтобы получить условия, справедливые только для минимума, введем новый управляющий параметр v и рассмотрим новую систему:

$$\begin{cases} \dot{y} = \varphi(q, u) + v, \\ \dot{q} = f_u(q), \end{cases} \quad v \geq 0, \quad u \in U. \quad (12.23)$$

Траектория системы (12.23), соответствующая управлениям $\tilde{v}(t) \equiv 0$, $\tilde{u}(t)$, попадает на границу множества достижимости этой системы за время t_1 . Применим теорему 12.1 к системе (12.23). Имеем

$$\begin{aligned} T_{(y,q)}(\mathbb{R} \times M) &= \mathbb{R} \oplus T_q M, \\ T_{(y,q)}^*(\mathbb{R} \times M) &= \mathbb{R} \oplus T_q^* M = \{(\nu, \lambda)\}. \end{aligned}$$

Гамильтониан системы (12.23) имеет вид

$$\hat{h}_{(v,u)}(\nu, \lambda) = \langle \lambda, f_u \rangle + \nu(\varphi + v),$$

а гамильтонова система принципа максимума записывается как

$$\begin{cases} \dot{\nu} = \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} = 0, \\ \dot{y} = \varphi(q, u) + v, \\ \dot{\lambda} = \vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\nu, \lambda). \end{cases} \quad (12.24)$$

Здесь $\vec{h}_u(\nu, \lambda)$ — гамильтоново поле с гамильтонианом

$$h_u(\nu, \lambda) = \langle \lambda, f_u \rangle + \nu\varphi.$$

Первое из уравнений (12.24) означает, что

$$\nu = \text{const}$$

вдоль оптимальной траектории.

Условие максимума имеет вид

$$\langle \lambda_t, f_{\tilde{u}(t)} \rangle + \nu\varphi(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t)) = \max_{u \in U, v \geq 0} (\langle \lambda_t, f_u \rangle + \nu\varphi(\tilde{q}(t), u) + \nu v).$$

Так как этот максимум достигается, имеем

$$\nu \leq 0,$$

поэтому можно положить $\nu = 0$ в правой части условия максимума:

$$\langle \lambda_t, f_{\tilde{u}(t)} \rangle + \nu \varphi(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t)) = \max_{u \in U} (\langle \lambda_t, f_u \rangle + \nu \varphi(\tilde{q}(t), u)).$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 12.3. Пусть управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, оптимально для задачи (12.17)–(12.21):

$$J(\tilde{u}) = \min\{J(u) \mid q_u(t_1) = q_1\}.$$

Определим гамильтониан

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f_u \rangle + \nu \varphi(q, u), \quad \lambda \in T_q^* M, \quad u \in U, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Тогда существует нетривиальная пара:

$$(\nu, \lambda_t) \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \lambda_t \in T_{\tilde{q}(t)}^* M,$$

для которой выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_t &= \vec{h}_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t), \\ h_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t) &= \max_{u \in U} h_u^\nu(\lambda_t) \quad \forall \text{ a.e. } t \in [0, t_1], \\ \nu &\leq 0. \end{aligned}$$

Замечания. (1) Если вместо задачи на минимум (12.21) рассматривается задача на максимум, то предыдущее неравенство для ν нужно обратить:

$$\nu \geq 0.$$

(2) Для задачи со свободным временем t_1 : (12.17), (12.18), (12.20), (12.21), необходимые условия оптимальности ПМП такие же, как в теореме 12.3, плюс одно дополнительное скалярное равенство $h_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t) \equiv 0$ (упражнение).

Для постоянного параметра ν в теореме 12.3 имеются две возможности: (а) если $\nu \neq 0$, то кривая λ_t называется *нормальной экстремалью*. Так как пару (ν, λ_t) можно умножить на любое положительное число, мы можем нормировать $\nu < 0$ и считать, что в нормальном случае $\nu = -1$;

(б) если $\nu = 0$, то λ_t есть *анормальная экстремаль*.

Итак, можно всегда считать, что $\nu = -1$ или 0.

Теперь рассмотрим задачу быстрогодействия:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad q_0, q_1 \text{ фиксированы,} \\ t_1 &= \int_0^{t_1} 1 \, dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Принцип максимума Понтрягина для задачи быстрогодействия имеет следующую форму.

Следствие 12.1. Пусть управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, оптимально по быстродействию. Определим гамильтониан

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_u \rangle, \quad \lambda \in T_q^*M, \quad u \in U.$$

Тогда существует липшицева кривая

$$\lambda_t \in T^*M, \quad \lambda_t \neq 0, \quad t \in [0, t_1],$$

для которой выполняются следующие условия для почти всех $t \in [0, t_1]$:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_t &= \vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t), \\ h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) &= \max_{u \in U} h_u(\lambda_t), \\ h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) &\geq 0. \end{aligned} \tag{12.25}$$

Доказательство. Применим теорему 12.3 и второе замечание после нее, полагая $\varphi \equiv 1$. Отсюда сразу получаем гамильтонову систему и условие максимума для задачи быстродействия. Неравенство (12.25) равносильно условиям $h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) + \nu = 0$ и $\nu \leq 0$.

Наконец, неравенство $\lambda_t \neq 0$ получаем следующим рассуждением: если $\lambda_t = 0$, то $h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = 0$, поэтому $\nu = 0$. Но пара (ν, λ_t) обязана быть нетривиальной, следовательно, $\lambda_t \neq 0$. $\square$

12.5 ПМП для задач с общими граничными условиями

В этом разделе мы докажем версии принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления, в которых граничные точки траекторий принадлежат заданным многообразиям.

Сначала рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{12.26}$$

$$q(0) \in N_0, \quad q(t_1) \in N_1, \tag{12.27}$$

$$t_1 > 0 \text{ закреплено}, \tag{12.28}$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt \rightarrow \min. \tag{12.29}$$

Здесь N_0 и N_1 — заданные погруженные подмногообразия пространства состояний M . То есть граничные точки $q(0)$ и $q(t_1)$ больше не закреплены, как раньше, а принадлежат соответственно подмногообразиям N_0 и N_1 .

Если траектория $\tilde{q}(t)$ оптимальна в этой задаче, то она оптимальна и в задаче с закрепленными граничными точками $\tilde{q}(0)$, $\tilde{q}(t_1)$, рассмотренной в разделе 12.4. Следовательно, для траектории $\tilde{q}(t)$ должно выполняться утверждение теоремы 12.3. Однако теперь требуются дополнительные условия, позволяющие выбрать граничные точки $\tilde{q}(0) \in N_0$ и $\tilde{q}(t_1) \in N_1$. Естественно

ожидать, что такие условия должны определяться $(\dim N_0 + \dim N_1)$ скалярными условиями. И эти условия можно легко сформулировать в гамильтоновых терминах, они называются *условиями трансверсальности*, см. (12.34) ниже.

Теорема 12.4. Пусть управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, оптимально в задаче (12.26)–(12.29). Определим семейство гамильтонианов:

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f_u(q) \rangle + \nu \varphi(q, u), \quad \lambda \in T_q^*M, \quad q \in M, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad u \in U.$$

Тогда существует липшицева кривая $\lambda_t \in T_{\tilde{q}(t)}^*M$, $t \in [0, t_1]$, и число $\nu \in \mathbb{R}$, такие, что:

$$\dot{\lambda}_t = \overrightarrow{h_{\tilde{u}(t)}^\nu}(\lambda_t), \quad (12.30)$$

$$h_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u^\nu(\lambda_t), \quad (12.31)$$

$$(\lambda_t, \nu) \neq (0, 0), \quad t \in [0, t_1], \quad (12.32)$$

$$\nu \leq 0, \quad (12.33)$$

$$\lambda_0 \perp T_{\tilde{q}(0)}N_0, \quad \lambda_{t_1} \perp T_{\tilde{q}(t_1)}N_1. \quad (12.34)$$

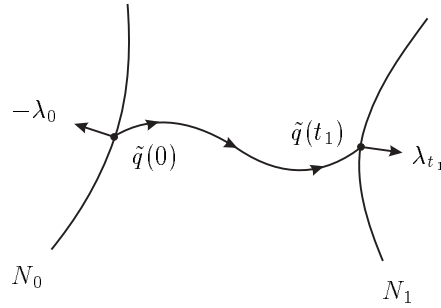


Рис. 12.2: Условия трансверсальности (12.34)

Замечания. (1) Любой линейный функционал на линейном пространстве естественно ограничивается на любое подпространство, поэтому условия трансверсальности (12.34) расшифровываются соответственно так:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0, v \rangle &= 0, & v &\in T_{\tilde{q}(0)}N_0, \\ \langle \lambda_{t_1}, w \rangle &= 0, & w &\in T_{\tilde{q}(t_1)}N_1. \end{aligned}$$

(2) Задача со свободным временем: (12.26), (12.27), (12.29), сводится к случаю закрепленного t_1 так же, как в разделе 12.4, поэтому для такой задачи справедлива предшествующая теорема с дополнительным условием $h_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t) \equiv 0$.

Докажем теорему 12.4.

Доказательство. Схема доказательства ПМП, использованная нами для теорем 12.1, 12.3, применима, после соответствующих модификаций, к гораздо более общим задачам. Ниже мы только укажем, как нужно изменить доказательства этих теорем, чтобы охватить новые граничные условия $q(0) \in N_0$, $q(t_1) \in N_1$.

(1) Сначала рассмотрим частный случай, когда начальная точка закреплена: пусть

$$N_0 = \{q_0\}$$

для некоторой точки $q_0 \in M$.

Как и при доказательстве теоремы 12.3, введем расширенную систему на $\mathbb{R} \times M$:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times M, \\ \hat{f}_u(q) &= \begin{pmatrix} \varphi(q, u) + v \\ f_u(q) \end{pmatrix} \in T_{(y, \hat{q})}(\mathbb{R} \times M) = \mathbb{R} \times T_q M, \\ \frac{d\hat{q}}{dt} &= \hat{f}_u(q) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = \varphi(q, u) + v, \\ \dot{q} = f_u(q), \end{cases} \\ \hat{q}(0) &= \hat{q}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Далее, в случае закрепленной конечной точки $q(t_1)$, необходимое условие оптимальности траектории $q_{\bar{u}}(t)$ было следующим:

$$\hat{q}_1 \in \partial \hat{\mathcal{A}}_{\hat{q}_0}(t_1). \quad (12.36)$$

Здесь $\hat{\mathcal{A}}$ — множество достижимости расширенной системы (12.35) и $\hat{q}_1 = \hat{q}_{\bar{u}}(t_1)$.

Теперь, когда конечное многообразие N_1 больше не является точкой, нужно изменить рассуждение. В некотором смысле мы свеем конечное многообразие к точке, задавая его локально уравнением $\Phi = 0$. Выберем такую субмерсию

$$\Phi : O_{q_{\bar{u}}(t_1)} \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad p = \dim M - \dim N_1,$$

малой окрестности $O_{q_{\bar{u}}(t_1)} \subset M$, что

$$\Phi^{-1}(0) = N_1 \cap O_{q_{\bar{u}}(t_1)}.$$

Далее, расширим субмерсию: определим отображение

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times O_{q_{\bar{u}}(t_1)} \rightarrow \mathbb{R}^{1+p}, \quad \hat{\Phi} \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \Phi(q) \end{pmatrix}.$$

Так как управление $\tilde{u}(t)$ оптимально в нашей задаче (12.26)–(12.29), то

$$\widehat{\Phi}(\widehat{q}_1) \in \partial \widehat{\Phi}(\widehat{\mathcal{A}}_{\widehat{q}_0}(t_1)). \quad (12.37)$$

Поэтому мы заменяем необходимое условие оптимальности (12.36) на (12.37) и возвращаемся к схеме доказательства теорем 12.1, 12.3.

Возьмем любое $k \in \mathbb{N}$ и любую игольчатую вариацию (12.14) оптимального управления:

$$u_s(t), \quad s \in \mathbb{R}_+^k, \quad u_0(t) = \tilde{u}(t), \quad t \in [0, t_1].$$

Определим отображения

$$G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \times M, \quad G(s) = \widehat{q}_{u_s}(t_1) = \widehat{q}_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} \widehat{f}_{u_s(t)} dt, \quad (12.38)$$

$$F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{1+p}, \quad F(s) = \widehat{\Phi}(G(s)) = \widehat{q}_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} \widehat{f}_{u_s(t)} dt \circ \widehat{\Phi}. \quad (12.39)$$

Из включения (12.37) следует, что

$$\widehat{\Phi}(\widehat{q}_1) = F(0) \in \partial F(\mathbb{R}_+^k). \quad (12.40)$$

По лемме 12.1,

$$F'_0(\mathbb{R}_+^k) = \text{cone} \left\{ \left. \frac{\partial F}{\partial s_i} \right|_0 \mid i = 1, \dots, k \right\} \neq \mathbb{R}^{1+p},$$

поэтому существует опорная плоскость, т.е.

$$\exists \widehat{\xi} \in (\mathbb{R}^{1+p})^*, \quad \widehat{\xi} \neq 0,$$

такое, что

$$\left\langle \widehat{\xi}, \left. \frac{\partial F}{\partial s_i} \right|_0 \right\rangle \leq 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (12.41)$$

Вычисляем эту производную по правилу цепочки:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial s_i} \right|_0 = \widehat{\Phi}_* \left. \frac{\partial G}{\partial s_i} \right|_0, \quad (12.42)$$

и переписываем неравенства (12.41) в следующем виде:

$$\left\langle \widehat{\Phi}^* \widehat{\xi}, \left. \frac{\partial G}{\partial s_i} \right|_0 \right\rangle = \left\langle \widehat{\xi}, \widehat{\Phi}_* \left. \frac{\partial G}{\partial s_i} \right|_0 \right\rangle \leq 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (12.43)$$

Затем обозначаем ковектор

$$\widehat{\lambda}_{t_1} = \widehat{\Phi}^* \widehat{\xi} = \begin{pmatrix} \nu \\ \lambda_{t_1} \end{pmatrix} \in T_{\widehat{q}_1}(\mathbb{R} \times M) \quad (12.44)$$

и получаем условия (12.30)–(12.33) в точности как в теореме 12.3. Единственное отличие — в том, что теперь ковектор $\hat{\lambda}_{t_1}$ не может быть произвольным: из равенства (12.44) следует второе из условий трансверсальности (12.34). Действительно, имеем

$$\lambda_{t_1} = \Phi^* \xi, \quad \xi \in (\mathbb{R}^p)^*,$$

поэтому

$$\langle \lambda_{t_1}, T_{q_{\bar{a}}(t_1)} N_1 \rangle = \langle \Phi^* \xi, T_{q_{\bar{a}}(t_1)} N_1 \rangle = \langle \xi, \underbrace{\Phi_* T_{q_{\bar{a}}(t_1)} N_1}_{=0} \rangle = 0.$$

Первое из условий трансверсальности (12.34) сейчас тривиально выполняется, и теорема в случае $N_0 = \{q_0\}$ доказана.

(2) Теперь пусть начальное многообразие N_0 является произвольным погруженным многообразием в M . Построенную выше схему доказательства можно модифицировать, чтобы покрыть и этот случай. Так как теперь начальная точка $q(0)$ не фиксирована, нужно добавить вариации $q(0)$.

Вместо отображений (12.38), (12.39) рассмотрим следующие:

$$\begin{aligned} G : N_0 \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R} \times M, & G(q, s) &= \hat{q} \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} \hat{f}_{u_s(t)} dt, \\ F : N_0 \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^{1+p}, & F(q, s) &= \hat{\Phi}(G(q, s)) = \hat{q} \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} \hat{f}_{u_s(t)} dt \circ \hat{\Phi}, \end{aligned}$$

где $\hat{q} = (0, q) \in \mathbb{R} \times M$. Тогда необходимое условие оптимальности (12.40) заменяется включением

$$F(\tilde{q}(0), 0) \in \partial F(N_0 \times \mathbb{R}_+^k). \quad (12.45)$$

Применим лемму 12.1 к ограничению отображения F на пространство

$$\mathbb{R}^m \cong O_{\tilde{q}(0)} \times \mathbb{R}^k, \quad m = l + k, \quad l = \dim N_0,$$

где $O_{\tilde{q}(0)} \subset N_0$ — малая окрестность точки $\tilde{q}(0)$. Согласно замечанию после леммы 12.1, из включения (12.45) следует, что

$$F'_{(\tilde{q}(0), 0)}(\mathbb{R}^l \oplus \mathbb{R}_+^k) \neq \mathbb{R}^{1+p},$$

т.е. существует ковектор

$$\hat{\xi} \in (\mathbb{R}^{1+p})^*, \quad \hat{\xi} \neq 0, \quad \hat{\xi} = \begin{pmatrix} \nu \\ \xi \end{pmatrix},$$

для которого

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\xi}, \frac{\partial F}{\partial q} v \right\rangle &\leq 0, & v &\in T_{\tilde{q}(0)} N_0, \\ \left\langle \hat{\xi}, \frac{\partial F}{\partial s_i} \right\rangle &\leq 0, & i &= 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (12.46)$$

В первом неравенстве v принадлежит линейному пространству, поэтому оно обращается в равенство:

$$\left\langle \widehat{\xi}, \frac{\partial F}{\partial q} v \right\rangle = 0, \quad v \in T_{\bar{q}(0)} N_0. \quad (12.47)$$

По правилу Лейбница вычислим производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q} \Big|_{(\bar{q}(0), 0)} &: T_{\bar{q}(0)} N_0 \rightarrow \mathbb{R}^{1+p}, \\ \frac{\partial F}{\partial q} \Big|_{(\bar{q}(0), 0)} v &= \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} \widehat{f}_{\bar{u}(t)} dt \circ \widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \circ P^{t_1} \circ \Phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_* P_*^{t_1} v \end{pmatrix}, \quad v \in T_{\bar{q}(0)} N_0. \end{aligned}$$

Здесь мы применили формулу (2.19) к потоку

$$P^{t_1} = \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} f_{\bar{u}(t)} dt.$$

Тогда условия (12.47), (12.46) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \Phi_* P_*^{t_1} v \rangle &= 0, \quad v \in T_{\bar{q}(0)} N_0, \\ \left\langle \widehat{\Phi}^* \widehat{\xi}, \frac{\partial G}{\partial s_i} \Big|_{(\bar{q}(0), 0)} \right\rangle &\leq 0, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Определим, как и раньше, ковектор $\widehat{\lambda}_{t_1} = (\nu, \lambda_{t_1})$ равенством (12.44), тогда утверждения (12.30)–(12.33) данной теоремы и второе из условий трансверсальности (12.34) будут доказаны.

Первое условие трансверсальности также выполняется: равенство (12.48) можно переписать в виде

$$\langle \lambda_{t_1}, P_*^{t_1} v \rangle = 0, \quad v \in T_{\bar{q}(0)} N_0.$$

Но $\lambda_0 = P_{t_1}^* \lambda_{t_1}$, поэтому

$$\langle \lambda_0, v \rangle = \langle P_{t_1}^* \lambda_{t_1}, v \rangle = 0, \quad v \in T_{\bar{q}(0)} N_0.$$

Теорема полностью доказана. $\square$

Рассмотрим еще более общую задачу — со смешанными ограничениями, см. включение (12.50) ниже. Принцип максимума Понтрягина обобщается и на этот случай, как по формулировке, так и по доказательству.

Изучим задачу оптимального управления вида:

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (12.49)$$

$$(q(0), q(t_1)) \in N \subset M \times M, \quad (12.50)$$

$$t_1 > 0 \text{ зафиксировано}, \quad (12.51)$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (12.52)$$

где N — гладкое погруженное подмногообразие в $M \times M$.

Теорема 12.5. Пусть управление $\tilde{u}$ оптимально в задаче (12.49)–(12.52). Тогда выполняются все утверждения теоремы 12.4, кроме ее условий трансверсальности (12.34), которые теперь заменяются условием

$$(-\lambda_0, \lambda_{t_1}) \perp T_{(\bar{q}(0), \bar{q}(t_1))} N. \quad (12.53)$$

Замечания. (1) Мы отождествляем

$$T_{(q_0, q_1)}^*(M \times M) \cong T_{q_0}^* M \oplus T_{q_1}^* M,$$

поэтому условие трансверсальности (12.53) имеет смысл.

(2) Важный частный случай смешанных граничных условий (12.50) есть случай периодических траекторий:

$$q(t_1) = q(0). \quad (12.54)$$

Действительно, в этом случае

$$N = \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(q, q) \mid q \in M\} \subset M \times M, \quad (12.55)$$

диагональ квадрата $M \times M$. Тогда условие трансверсальности (12.53) имеет вид:

$$\langle (-\lambda_0, \lambda_{t_1}), (v, v) \rangle = -\langle \lambda_0, v \rangle + \langle \lambda_{t_1}, v \rangle = 0, \quad v \in T_{q(0)} M = T_{q(t_1)} M,$$

т.е.

$$\lambda_0 = \lambda_{t_1}.$$

Иными словами, оптимальная траектория в задаче с периодическими граничными условиями (12.54) имеет периодический гамильтонов лифт (экстремаль).

Докажем теорему 12.5.

Доказательство. Сведем нашу задачу к случаю раздельных граничных условий, вводя вспомогательную задачу на $M \times M$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{q} = f_u(q), \end{cases} \quad (x, q) \in M \times M, \quad u \in U, \\ (x(0), q(0)) \in \Delta, \quad (x(t_1), q(t_1)) \in N,$$

(диагональ Δ определена в (12.55) выше)

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt \rightarrow \min.$$

Очевидно, что эта задача эквивалентна нашей задаче (12.49)–(12.52). Применим одну из версий ПМП (теорему 12.4) ко вспомогательной задаче. Гамильтониан такой же, как и для исходной задачи:

$$h_u^\nu(\eta, \lambda) = h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f_u(q) \rangle + \nu \varphi(q, u), \quad (\eta, \lambda) \in T^*M \oplus T^*M.$$

Соответствующая гамильтонова система есть

$$\begin{cases} \dot{\eta}_t = 0, \\ \dot{\lambda}_t = \overrightarrow{h_{u(t)}^\nu}(\lambda_t). \end{cases} \quad (12.56)$$

Все утверждения ПМП для задачи со смешанными граничными условиями получаются непосредственно, нужно только проверить условия трансверсальности.

В начальный момент $t = 0$ первое из условий (12.34) имеет вид:

$$\langle (\eta_0, \lambda_0), (v, v) \rangle = \langle \eta_0, v \rangle + \langle \lambda_0, v \rangle = 0, \quad v \in T_{\bar{q}(0)}M,$$

т.е.

$$\eta_0 + \lambda_0 = 0,$$

или, учитывая первое из уравнений (12.56),

$$\eta_{t_1} = -\lambda_0.$$

А в конечный момент $t = t_1$:

$$(\eta_{t_1}, \lambda_{t_1}) \perp T_{(\bar{x}(t_1), \bar{q}(t_1))}N,$$

то есть

$$(-\lambda_0, \lambda_{t_1}) \perp T_{(\bar{q}(0), \bar{q}(t_1))}N,$$

что совпадает с условием трансверсальности (12.53). $\square$

Замечания. (1) Разумеется, если конечное время t_1 свободно, то к утверждениям теоремы 12.5 добавляется дополнительное условие $h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) \equiv 0$.

(2) Принцип максимума Понтрягина выдерживает и дальнейшие обобщения для более широких классов функционалов и граничных условий. После некоторой модификации рассуждений общая схема дает необходимые условия оптимальности для более общих задач.

Глава 13

Примеры задач оптимального управления

В этой главе мы применим принцип максимума Понтрягина для решения конкретных задач оптимального управления.

13.1 Скорейшая остановка поезда на станции

Рассмотрим поезд, движущийся по железной дороге. Задача состоит в том, чтобы привести поезд на станцию и остановить его там за кратчайшее время.

Положение поезда описывается действительной координатой x_1 ; начало отсчета $0 \in \mathbb{R}$ соответствует станции. Будем считать, что поезд движется без трения, а мы управляем ускорением поезда, прикладывая ограниченную по модулю силу. Подберем единицы измерения так, чтобы максимальное по модулю ускорение было единичным.

Получаем управляемую систему

$$\ddot{x}_1 = u, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad |u| \leq 1,$$

или, в стандартной форме,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq 1. \quad (13.1)$$

Для этой системы имеем задачу быстродействия

$$x(0) = x^0, \quad x(t_1) = 0, \quad (13.2)$$

$$t_1 \rightarrow \min. \quad (13.3)$$

Покажем, что теорема Филиппова гарантирует существование оптимальных управлений. Пространство управляющих параметров $U = [-1, 1]$ ком-

пактно, векторные поля в правой части

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}, \quad |u| \leq 1,$$

линейны, а множество допустимых скоростей в точке

$$f(x, U) = \{f(x, u) \mid |u| \leq 1\}$$

выпукло. По следствию 10.2, задача быстрогодействия имеет решение, если начало координат $0 \in \mathbb{R}^2$ достижимо из начальной точки x^0 . Мы покажем ниже, что любую точку $x \in \mathbb{R}^2$ можно соединить с началом координат некоторой экстремальной кривой.

Применим принцип максимума Понтрягина. Введем канонические координаты на кокасательном расслоении:

$$M = \mathbb{R}^2, \\ T^*M = T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2*} \times \mathbb{R}^2 = \left\{ \lambda = (\xi, x) \mid x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \right\}.$$

Зависящий от управления гамильтониан ПМП равен

$$h_u(\xi, x) = (\xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} = \xi_1 x_2 + \xi_2 u,$$

а соответствующая гамильтонова система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial h_u}{\partial \xi}, \\ \dot{\xi} = -\frac{\partial h_u}{\partial x}. \end{cases}$$

В координатах эта система распадается на две независимые подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1. \end{cases} \quad (13.4)$$

Согласно принципу максимума, если управление $\tilde{u}(\cdot)$ оптимально по быстродействию, то гамильтонова система имеет нетривиальное решение $(\xi(t), x(t))$, $\xi(t) \not\equiv 0$, для которого

$$h_{\tilde{u}(t)}(\xi(t), x(t)) = \max_{|u| \leq 1} h_u(\xi(t), x(t)) \geq 0.$$

Из условия максимума заключаем, что если $\xi_2(t) \neq 0$, то $\tilde{u}(t) = \operatorname{sgn} \xi_2(t)$. Заметим, что максимизированный гамильтониан

$$\max_{|u| \leq 1} h_u(\xi, x) = \xi_1 x_2 + |\xi_2|$$

негладок. Поэтому предложение 12.1 неприменимо, но мы сможем описать оптимальные управления непосредственно из принципа максимума, без предварительной максимизации гамильтониана.

Так как

$$\ddot{\xi}_2 = 0,$$

функция ξ_2 линейна:

$$\xi_2(t) = \alpha + \beta t, \quad \alpha, \beta = \text{const},$$

поэтому оптимальное управление имеет вид

$$\tilde{u}(t) = \text{sgn}(\alpha + \beta t).$$

Следовательно, $\tilde{u}(t)$ кусочно постоянно, принимает только экстремальные значения ± 1 , и имеет не более одного переключения (точки разрыва).

Отыщем все траектории $x(t)$, соответствующие таким управлениям и приходящие в нуль. Для управлений $u = \pm 1$ первая из подсистем (13.4) принимает форму

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \pm 1. \end{cases}$$

Траектории этой системы удовлетворяют уравнению

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \pm x_2,$$

это параболы вида

$$x_1 = \pm \frac{x_2^2}{2} + C, \quad C = \text{const}.$$

Найдем сначала траектории из этого семейства, приходящие в нуль без переключений: это две полупараболы

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2}, \quad x_2 < 0, \quad \dot{x}_2 > 0, \quad (13.5)$$

и

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2}, \quad x_2 > 0, \quad \dot{x}_2 < 0, \quad (13.6)$$

для $u = +1$ и -1 соответственно.

Теперь отыщем все экстремальные траектории с одним переключением. Пусть $(x_{1s}, x_{2s}) \in \mathbb{R}^2$ есть точка переключения любой из кривых (13.5), (13.6). Тогда экстремальные траектории с одним переключением, приходящие в начало координат, имеют вид

$$x_1 = \begin{cases} -x_2^2/2 + x_{2s}^2/2 + x_{1s}, & x_2 > x_{2s}, \quad \dot{x}_2 < 0, \\ x_2^2/2 & 0 > x_2 > x_{2s}, \quad \dot{x}_2 > 0, \end{cases} \quad (13.7)$$

и

$$x_1 = \begin{cases} x_2^2/2 - x_{2s}^2/2 + x_{1s}, & x_2 < x_{2s}, \quad \dot{x}_2 > 0, \\ -x_2^2/2 & 0 < x_2 < x_{2s}, \quad \dot{x}_2 < 0. \end{cases} \quad (13.8)$$

Легко видеть, что через любую точку (x_1, x_2) плоскости проходит единственная кривая вида (13.5)–(13.8). Итак, для любой точки плоскости существует единственная экстремальная траектория, переводящая эту точку в нуль. Так как оптимальные траектории существуют, заключаем, что найденные решения оптимальны. Общий вид оптимального синтеза изображен на рис. 13.1.

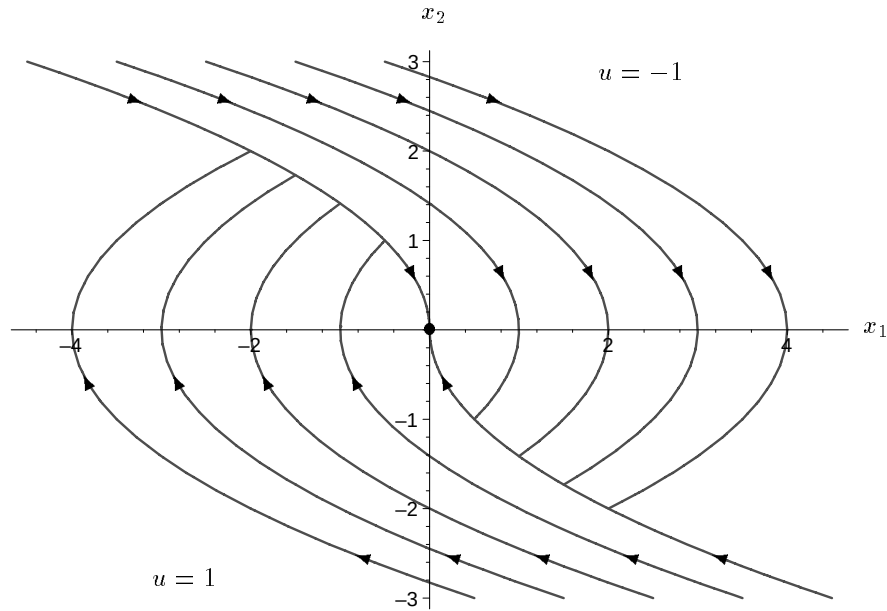


Рис. 13.1: Оптимальный синтез в задаче (13.1)–(13.3)

13.2 Управление линейным осциллятором

Рассмотрим линейный осциллятор, движением которого можно управлять с помощью ограниченной по величине силы. Соответствующая управляемая система (после выбора подходящих единиц измерения) есть

$$\ddot{x}_1 + x_1 = u, \quad |u| \leq 1, \quad x_1 \in \mathbb{R},$$

или в канонической форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad |u| \leq 1, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (13.9)$$

Рассмотрим для этой системы задачу быстродействия

$$x(0) = x^0, \quad x(t_1) = 0, \quad (13.10)$$

$$t_1 \rightarrow \min. \quad (13.11)$$

По теореме Филиппова, оптимальные управления существуют. Как и в предыдущей задаче, применим принцип максимума: функция Гамильтона есть

$$h_u(\xi, x) = \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1 + \xi_2 u, \quad (\xi, x) \in T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2*} \times \mathbb{R}^2,$$

а гамильтонова система записывается как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1. \end{cases}$$

Из условия максимума ПМП получаем

$$\xi_2(t) \tilde{u}(t) = \max_{|u| \leq 1} \xi_2(t) u,$$

поэтому оптимальные управления удовлетворяют условию

$$\tilde{u}(t) = \operatorname{sgn} \xi_2(t) \quad \text{при } \xi_2(t) \neq 0.$$

Для переменной ξ_2 имеем уравнение

$$\ddot{\xi}_2 = -\xi_2,$$

следовательно,

$$\xi_2 = \alpha \sin(t + \beta), \quad \alpha, \beta = \text{const}.$$

Заметим, что $\alpha \neq 0$: действительно, если $\xi_2 \equiv 0$, то $\xi_1 = -\dot{\xi}_2(t) \equiv 0$, поэтому $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)) \equiv 0$, что противоречит принципу максимума. Следовательно,

$$\tilde{u}(t) = \operatorname{sgn}(\alpha \sin(t + \beta)).$$

Из этого равенства получаем полное описание возможной структуры оптимального управления. Интервал между последовательными моментами переключения управления $\tilde{u}(t)$ имеет длину π . Пусть $\tau \in [0, \pi)$ — первая точка переключения $\tilde{u}(t)$. Тогда

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \tilde{u}(0), & t \in [0, \tau) \cup [\tau + \pi, \tau + 2\pi) \cup [\tau + 3\pi, \tau + 4\pi) \cup \dots \\ -\operatorname{sgn} \tilde{u}(0), & t \in [\tau, \tau + \pi) \cup [\tau + 2\pi, \tau + 3\pi) \cup \dots \end{cases}$$

То есть $\tilde{u}(t)$ параметризовано двумя числами: первым моментом переключения $\tau \in [0, \pi)$ и начальным знаком $\operatorname{sgn} \tilde{u}(0) \in \{\pm 1\}$.

Оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ принимает только экстремальные значения ± 1 . Поэтому оптимальные траектории $(x_1(t), x_2(t))$ состоят из кусков, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 \pm 1, \end{cases} \quad (13.12)$$

т.е. из дуг окружностей

$$(x_1 \pm 1)^2 + x_2^2 = C, \quad C = \text{const},$$

проходимых по часовой стрелке.

Опишем все оптимальные траектории, приходящие в начало координат. Пусть γ — любая такая траектория. Если γ не имеет переключений, то это — дуга, содержащаяся в одной из полуокружностей

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \leq 0, \quad (13.13)$$

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \geq 0 \quad (13.14)$$

и проходящая через нуль. Если у γ есть переключения, то последнее переключение может произойти в любой точке этих полуокружностей, кроме нуля. Предположим, что γ имеет последнее переключение на полуокружности (13.13). Тогда часть γ между последним и предпоследним переключениями есть половина окружности $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = C$, проходящая через последнюю точку переключения. Предпоследнее переключение γ происходит на кривой, получающейся вращением полуокружности (13.13) вокруг точки $(-1, 0)$ в плоскости (x_1, x_2) на угол π , т.е. на полуокружности

$$(x_1 + 3)^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \geq 0. \quad (13.15)$$

Для получения геометрического места точек предыдущего переключения γ необходимо повернуть полуокружность (13.15) вокруг точки $(1, 0)$ на угол π ; получаем полуокружность

$$(x_1 - 5)^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \leq 0.$$

Предыдущее переключение γ происходит на полуокружности

$$(x_1 + 7)^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \geq 0,$$

и так далее.

Случай, когда последнее переключение γ происходит на полуокружности (13.14), получается из только что рассмотренного случая центральной симметрией плоскости (x_1, x_2) относительно нуля: $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2)$. Последовательные переключения γ (в обратном порядке, начиная с конца) происходят на полуокружностях

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \geq 0,$$

$$(x_1 - 3)^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \leq 0,$$

$$(x_1 + 5)^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \geq 0,$$

$$(x_1 - 7)^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \leq 0,$$

и т.д. Мы получили кривую переключения в плоскости (x_1, x_2) :

$$\begin{aligned} (x_1 - (2k-1))^2 + x_2^2 &= 1, & x_2 &\leq 0, & k &\in \mathbb{N}, \\ (x_1 + (2k-1))^2 + x_2^2 &= 1, & x_2 &\geq 0, & k &\in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Эта кривая переключения делит плоскость (x_1, x_2) на две части. Любая экстремальная траектория $(x_1(t), x_2(t))$ в верхней части плоскости является решением уравнения (13.12) с -1 во втором уравнении, а в нижней части — решением уравнения (13.12) с $+1$. Для любой точки плоскости (x_1, x_2) существует в точности одна кривая этого семейства, приходящая в начало координат (она имеет форму «спирали» с конечным числом переключений). Так как оптимальные траектории существуют, построенные экстремальные траектории оптимальны.

Задача быстродействия решена: в части плоскости (x_1, x_2) выше кривой переключения (13.16) оптимальное управление есть $\tilde{u} = -1$, а ниже этой кривой $\tilde{u} = +1$. Через любую точку плоскости проходит единственная оптимальная траектория, соответствующая этому правилу оптимального управления. После конечного числа переключений любая оптимальная траектория попадает в начало координат. Общий вид оптимального синтеза изображен на рис. 13.2.

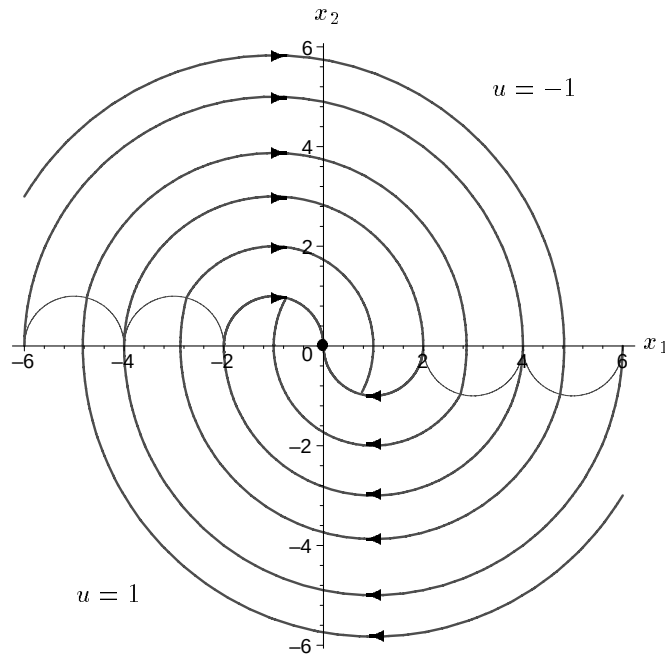


Рис. 13.2: Оптимальный синтез в задаче (13.9)–(13.11)

Теперь мы рассмотрим задачи оптимального управления с той же дина-

микой, что и в предыдущих двух разделах, но с другим функционалом.

13.3 Наиболее экономная остановка поезда

Как и в разделе 13.1, мы управляем движением поезда. Теперь наша цель — в том, чтобы остановить поезд в заданный момент времени с минимальным расходом энергии, которая предполагается пропорциональной интегралу от квадрата ускорения.

Получаем задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$x(0) = x^0, \quad x(t_1) = 0, \quad t_1 \text{ закреплены,}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min.$$

Теорема Филиппова напрямую неприменима, т.к. правая часть системы некомпактна. Впрочем, если выбрать новое время $t \mapsto \frac{1}{2} \int_0^t u^2(\tau) d\tau + C$, можно получить ограниченную правую часть, затем компактифицировать и применить теорему Филиппова. Таким образом можно доказать существование оптимального управления. Общую теорию задач этого класса (линейно-квадратичных) мы построим в главе 16.

Используем принцип максимума для нахождения оптимального управления. Функция Гамильтона есть

$$h_u^\nu(\xi, x) = \xi_1 x_2 + \xi_2 u + \frac{\nu}{2} u^2, \quad (\xi, x) \in \mathbb{R}^{2*} \times \mathbb{R}^2.$$

Вдоль оптимальных траекторий

$$\nu \leq 0, \quad \nu = \text{const}.$$

Из гамильтоновой системы принципа максимума получаем

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1. \end{cases} \quad (13.17)$$

Сначала рассмотрим случай аномальных экстремалей:

$$\nu = 0.$$

Тройка (ξ_1, ξ_2, ν) должна быть ненулевой, поэтому

$$\xi_2(t) \neq 0.$$

Но из условия максимума ПМП следует, что

$$\tilde{u}(t)\xi_2(t) = \max_{u \in \mathbb{R}} u \xi_2(t). \quad (13.18)$$

Так как $\xi_2(t) \neq 0$, максимум выше не достигается. Следовательно, аномальных экстремалей нет.

Рассмотрим нормальный случай: $\nu \neq 0$, можно положить $\nu = -1$. Нормальный гамильтониан равен

$$h_u(\xi, x) = h_u^{-1}(\xi, x) = \xi_1 x_2 + \xi_2 u - \frac{1}{2} u^2.$$

Условие максимума ПМП равносильно тождеству $\frac{\partial h_u}{\partial u} = 0$, поэтому

$$\tilde{u}(t) = \xi_2(t)$$

вдоль оптимальных траекторий. Учитывая систему (13.17), заключаем, что оптимальное управление линейно:

$$\tilde{u}(t) = \alpha t + \beta, \quad \alpha, \beta = \text{const}.$$

Максимизированный гамильтониан

$$H(\xi, x) = \max_u h_u(\xi, x) = \xi_1 x_2 + \frac{1}{2} \xi_2^2$$

гладок. Поэтому оптимальные траектории удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_1 = 0, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1. \end{cases}$$

Для переменной x_1 получаем граничную задачу

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= 0, \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = x_2^0, \quad x_1(t_1) = 0, \quad \dot{x}_1(t_1) = 0. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Для любых (x_1^0, x_2^0) существует в точности одно решение $x_1(t)$ этой задачи — кубический сплайн. Функция $x_2(t)$ находится из уравнения $\dot{x}_2 = \xi_1$.

Итак, через любую начальную точку $x^0 \in \mathbb{R}^2$ проходит единственная экстремальная траектория, попадающая в начало координат. Это кривая $(x_1(t), x_2(t))$, $t \in [0, t_1]$, где $x_1(t)$ — кубический многочлен, удовлетворяющий граничным условиям (13.19), а $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$. В силу существования, эта траектория оптимальна.

13.4 Управление линейным осциллятором с критерием качества

Мы управляем линейным осциллятором, например маятником с малой амплитудой, неограниченной силой u , но учитываем расход энергии, которая измеряется интегралом $\frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2(t) dt$. Задача оптимального управления записывается как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$x(0) = x^0, \quad x(t_1) = 0, \quad t_1 \text{ зафиксированы,}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min.$$

Существование оптимального управления можно доказать так же, как в предыдущем разделе.

Гамильтониан принципа максимума равен

$$h_u^\nu(\xi, x) = \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1 + \xi_2 u + \frac{\nu}{2} u^2.$$

Из соответствующей гамильтоновой системы получаем

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1. \end{cases}$$

Так же, как в предыдущем разделе, показываем, что аномальных экстремалей нет, поэтому можно положить $\nu = -1$. Из условия максимума следует, что

$$\tilde{u}(t) = \xi_2(t).$$

В частности, оптимальное управление есть гармоника:

$$\tilde{u}(t) = \alpha \sin(t + \beta), \quad \alpha, \beta = \text{const}.$$

Система уравнений для экстремальных траекторий

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \alpha \sin(t + \beta) \end{cases}$$

допускает явное решение:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\alpha}{2} t \cos(t + \beta) + a \sin(t + b), \\ x_2(t) &= \frac{\alpha}{2} t \sin(t + \beta) - \frac{\alpha}{2} \cos(t + \beta) + a \cos(t + b), \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{13.20}$$

Упражнение 13.1. Покажите, что граничным условиям удовлетворяет единственная экстремальная траектория вида (13.20).

Оптимальное управление существует, следовательно, эти экстремальные траектории оптимальны.

13.5 Машина Дубинса

В этом разделе мы изучим задачу быстродействия для системы, которая называется *машиной Дубинса*, см. уравнения (13.21) ниже. Первым эту систему рассматривал А.А. Марков в 1887 году [108].

Рассмотрим машину, движущуюся по плоскости. Машина может ехать вперед с постоянной линейной скоростью и одновременно поворачиваться с ограниченной угловой скоростью. Выберем начальное и конечное положение и ориентацию машины на плоскости. Задача состоит в том, чтобы перевести машину из начальной конфигурации в конечную за минимальное время.

Допустимые траектории машины — плоские кривые ограниченной кривизны. Параметризуя кривые длиной дуги, можно поставить данную задачу геометрически. Зафиксируем две точки на плоскости и два единичных вектора, приложенных соответственно в этих точках. Требуется найти кривую на плоскости, выходящую из первой точки с первым вектором скорости и входящую во вторую точку со вторым вектором скорости, имеющую кривизну, ограниченную сверху заданной константой, и кратчайшую среди всех таких кривых.

Замечание. Аналогичная задача с неограниченной кривизной, вообще говоря, не имеет решений. Действительно, точная нижняя грань длин всех кривых, удовлетворяющих граничным условиям без ограничения на кривизну, равна расстоянию между начальной и конечной точками: соединяющий эти точки отрезок можно приблизить гладкими кривыми, удовлетворяющими граничным условиям. Но эта нижняя грань не достигается, если граничные векторы скорости не сонаправлены вектору, соединяющему граничные точки.

После выбора подходящих единиц измерения, получаем задачу быстродействия для нелинейной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos \theta, \\ \dot{x}_2 = \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u, \end{cases} \quad (13.21)$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in S^1, \quad |u| \leq 1,$$

$$x(0), \theta(0), x(t_1), \theta(t_1) \text{ закреплены,}$$

$$t_1 \rightarrow \min.$$

Существование решений следует из теоремы Филиппова. Применяем принцип максимума Понтрягина.

Имеем $(x_1, x_2, \theta) \in M = \mathbb{R}_x^2 \times S_\theta^1$, обозначим через (ξ_1, ξ_2, μ) соответствующие координаты присоединенного вектора. Тогда

$$\lambda = (x, \theta, \xi, \mu) \in T^*M,$$

и зависящий от управления гамильтониан равен

$$h_u(\lambda) = \xi_1 \cos \theta + \xi_2 \sin \theta + \mu u.$$

Из гамильтоновой системы принципа максимума следует, что

$$\dot{\xi} = 0, \quad (13.22)$$

$$\dot{\mu} = \xi_1 \sin \theta - \xi_2 \cos \theta, \quad (13.23)$$

а условия максимума записываются как

$$\mu(t)u(t) = \max_{|u| \leq 1} \mu(t)u. \quad (13.24)$$

Уравнение (13.22) означает, что ξ постоянно вдоль оптимальных траекторий, поэтому правую часть (13.23) можно переписать как

$$\xi_1 \sin \theta - \xi_2 \cos \theta = \alpha \sin(\theta + \beta), \quad \alpha, \beta = \text{const}, \quad \alpha = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \geq 0. \quad (13.25)$$

Итак, из гамильтоновой системы ПМП (13.21)–(13.23) получена система:

$$\begin{cases} \dot{\mu} = \alpha \sin(\theta + \beta), \\ \dot{\theta} = u. \end{cases}$$

Из условия максимума (13.24) следует, что

$$u(t) = \text{sgn } \mu(t) \quad \text{при } \mu(t) \neq 0. \quad (13.26)$$

Если $\alpha = 0$, то $(\xi_1, \xi_2) \equiv 0$ и $\mu = \text{const} \neq 0$, поэтому $u = \text{const} = \pm 1$. Следовательно, кривая $x(t)$ есть дуга окружности радиуса 1.

Пусть $\alpha \neq 0$, тогда из (13.25) получаем $\alpha > 0$. Условия (13.22), (13.23), (13.24) сохраняются при умножении присоединенного вектора (ξ, μ) на любое положительное число. Можно подобрать (ξ, μ) так, что $\alpha = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = 1$. Поэтому далее будем считать, что

$$\alpha = 1.$$

Условие (13.26) означает, что поведение знака функции $\mu(t)$ имеет решающее значение для структуры оптимального управления. Рассмотрим несколько возможностей для $\mu(t)$.

(0) Если функция $\mu(t)$ не обращается в нуль на отрезке $[0, t_1]$, то оптимальное управление постоянно:

$$u(t) = \text{const} = \pm 1, \quad t \in [0, t_1], \quad (13.27)$$

а оптимальная траектория $x(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть дуга окружности. Отметим, что оптимальная траектория не может содержать полной окружности: окружность можно исключить, при этом полученная траектория удовлетворяет граничным условиям и короче исходной. Поэтому управление (13.27) оптимально только при $t_1 < 2\pi$.

Далее можно предполагать, что множество

$$N = \{\tau \in [0, t_1] \mid \mu(\tau) \neq 0\}$$

отлично от всего отрезка $[0, t_1]$. Так как N открыто, оно является объединением открытых интервалов на $[0, t_1]$, плюс, быть может, полуоткрытые интервалы вида $[0, \tau_1)$, $(\tau_2, t_1]$.

(1) Предположим, что множество N содержит интервал вида

$$(\tau_1, \tau_2) \subset [0, t_1], \quad \tau_1 < \tau_2. \quad (13.28)$$

Можно считать, что интервал (τ_1, τ_2) максимален по включению:

$$\mu(\tau_1) = \mu(\tau_2) = 0, \quad \mu|_{(\tau_1, \tau_2)} \neq 0.$$

Из принципа максимума получаем неравенство

$$h_{u(t)}(\lambda(t)) = \cos(\theta(t) + \beta) + \mu(t)u(t) \geq 0.$$

Поэтому

$$\cos(\theta(\tau_1) + \beta) \geq 0.$$

Это неравенство означает, что угол

$$\hat{\theta} = \theta(\tau_1) + \beta$$

удовлетворяет включению

$$\hat{\theta} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$

Рассмотрим сначала случай

$$\hat{\theta} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда $\dot{\mu}(\tau_1) = \sin \hat{\theta} > 0$, поэтому в момент τ_1 управление переключается с -1 на $+1$, поэтому

$$\dot{\theta}(t) = u(t) \equiv 1, \quad t \in (\tau_1, \tau_2).$$

Вычислим расстояние $\tau_2 - \tau_1$. Так как

$$\mu(\tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sin(\hat{\theta} + \tau - \tau_1) d\tau = 0,$$

имеем $\tau_2 - \tau_1 = 2(\pi - \hat{\theta})$, поэтому

$$\tau_2 - \tau_1 \in [\pi, 2\pi). \quad (13.29)$$

В случае

$$\hat{\theta} \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right)$$

включение (13.29) доказывается аналогично, а в случае $\hat{\theta} = 0$ оптимальных управлений нет (кривая $x(t)$ содержит полную окружность, которую можно удалить).

Включение (13.29) означает, что последовательные корни τ_1, τ_2 функции $\mu(t)$ не могут быть сколь угодно близки между собой. Более того, вышеприведенное рассуждение показывает, что в такие моменты τ_i оптимальное управление переключается с одного экстремального значения на другое, и вдоль любой оптимальной траектории расстояние между последовательными переключениями τ_i, τ_{i+1} одно и то же.

Итак, в случае (1) оптимальное управление может быть только следующего вида:

$$u(t) = \begin{cases} \varepsilon, & t \in (\tau_{2k-1}, \tau_{2k}), \\ -\varepsilon, & t \in (\tau_{2k}, \tau_{2k+1}), \end{cases} \quad (13.30)$$

$$\varepsilon = \pm 1,$$

$$\tau_{i+1} - \tau_i = \text{const} \in [\pi, 2\pi), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (13.31)$$

$$\tau_1 \in (0, 2\pi),$$

здесь не указаны значения u на интервалах до первого переключения, $t \in (0, \tau_1)$, и после последнего переключения, $t \in (\tau_n, t_1)$. На таких траекториях управление принимает только экстремальные значения ± 1 , и количество переключений конечно на любом компактном отрезке времени. Такое управление называется *релейным*.

Управления $u(t)$ вида (13.30), (13.31) удовлетворяют принципу максимума для сколь угодно больших t , но они неоптимальны, если количество переключений $n > 3$. Действительно, допустим, что такое управление имеет по крайней мере 4 переключения. Тогда кусок траектории $x(t)$, $t \in [\tau_1, \tau_4]$, есть конкатенация трех дуг окружностей, соответствующих отрезкам времени $[\tau_1, \tau_2]$, $[\tau_2, \tau_3]$, $[\tau_3, \tau_4]$, причем

$$\tau_4 - \tau_3 = \tau_3 - \tau_2 = \tau_2 - \tau_1 \in [\pi, 2\pi).$$

Проведем отрезок

$$\tilde{x}(t), \quad t \in [(\tau_1 + \tau_2)/2, (\tau_3 + \tau_4)/2], \quad \left| \frac{d\tilde{x}}{dt} \right| \equiv 1,$$

общую касательную к первой и третьей окружностям через точки $x((\tau_1 + \tau_2)/2)$ и $x((\tau_3 + \tau_4)/2)$, см. рис. 13.3. Тогда кривая

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \notin [(\tau_1 + \tau_2)/2, (\tau_3 + \tau_4)/2], \\ \tilde{x}(t), & t \in [(\tau_1 + \tau_2)/2, (\tau_3 + \tau_4)/2], \end{cases}$$

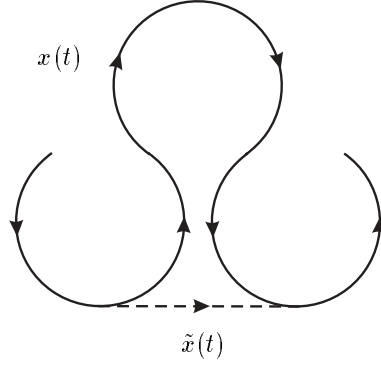


Рис. 13.3: Исключение четырех переключений

есть допустимая траектория, более короткая, чем $x(t)$. Мы доказали, что оптимальное релейное управление не может иметь более трех переключений.

(2) Осталось рассмотреть случай, когда множество N не содержит интервалов вида (13.28). Тогда N состоит из не более двух полуоткрытых интервалов:

$$N = [0, \tau_1) \cup (\tau_2, t_1], \quad \tau_1 \leq \tau_2,$$

где один или оба интервала могут отсутствовать. Если $\tau_1 = \tau_2$, то функция $\mu(t)$ имеет единственный корень на отрезке $[0, t_1]$, и соответствующее оптимальное управление определяется условием (13.26). В противном случае

$$\tau_1 < \tau_2$$

и

$$\mu|_{[0, \tau_1)} \neq 0, \quad \mu|_{[\tau_1, \tau_2]} \equiv 0, \quad \mu|_{(\tau_2, t_1]} \neq 0. \quad (13.32)$$

В этом случае условие максимума ПМП (13.26) не определяет однозначно оптимальное управление $u(t)$, т.к. максимум достигается для более чем одного значения управляющего параметра u . Такое управление называется *особым*. Тем не менее, особое управление в этой задаче можно определить из принципа максимума. Действительно, на интервале (τ_1, τ_2) выполняются следующие тождества:

$$\dot{\mu} = \sin(\theta + \beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta + \beta = \pi k \quad \Rightarrow \quad \theta = \text{const} \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

Следовательно, если оптимальная траектория $x(t)$ имеет особый участок — прямолинейный отрезок — то оптимальное управление переключается только в моменты τ_1 и τ_2 . Тогда

$$u|_{(0, \tau_1)} = \text{const} = \pm 1, \quad u|_{(\tau_2, t_1)} = \text{const} = \pm 1,$$

и вся траектория $x(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть конкатенация дуги окружности радиуса 1

$$x(t), \quad u(t) = \pm 1, \quad t \in [0, \tau_1],$$

прямой

$$x(t), \quad u(t) = 0, \quad t \in [\tau_1, \tau_2],$$

и еще одной дуги окружности радиуса 1

$$x(t), \quad u(t) = \pm 1, \quad t \in [\tau_2, t_1].$$

Итак, оптимальные траектории в данной задаче имеют могут быть одного из следующих двух типов:

(1) конкатенация релейного участка (дуга окружности, $u = \pm 1$), особого участка (отрезок прямой, $u = 0$), и релейного участка, или

(2) конкатенация релейных участков с не более чем тремя переключениями, причем дуги окружностей между переключениями имеют один и тот же центральный угол $\in [\pi, 2\pi)$.

Если граничные точки $x(0)$, $x(t_1)$ достаточно далеки друг от друга, то их можно соединить только траекториями с особым участком. Для таких граничных точек получаем простой алгоритм построения оптимальной траектории. Через каждую из точек $x(0)$ и $x(t_1)$ проведем пару окружностей радиуса 1, касающихся соответственно векторов скорости $\dot{x}(0) = (\cos \theta(0), \sin \theta(0))$ и $\dot{x}(t_1) = (\cos \theta(t_1), \sin \theta(t_1))$. Затем проведем общие касательные к окружностям в $x(0)$ и $x(t_1)$ соответственно, так чтобы направление движения по этим касательным было совместимым с направлением вращения на окружностях, определенным граничными касательными векторами $\dot{x}(0)$ и $\dot{x}(t_1)$, см. рис. 13.4. Наконец, выберем из построенных кривых кратчайшую. Эта кривая и будет оптимальной траекторией.

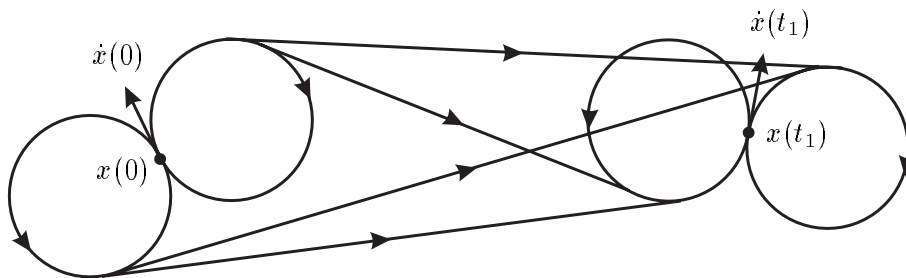


Рис. 13.4: Нахождение кратчайшей кривой для далеких граничных точек

Глава 14

Гамильтоновы системы с выпуклыми гамильтонианами

Хорошо известна теорема о том, что если поверхность уровня гамильтониана выпукла, то она содержит периодическую траекторию соответствующей гамильтоновой системы [143], [148]. В этой главе мы докажем более общий результат с помощью теории оптимального управления для линейных систем.

Теорема 14.1. *Пусть S есть сильно выпуклое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, n четно, и пусть граница множества S является поверхностью уровня гамильтониана $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $v \in \mathbb{R}^n$ существует параллельная вектору v хорда в S , через концы которой проходит некоторая траектория гамильтоновой системы $\dot{x} = \vec{H}(x)$.*

Мы считаем здесь, что на пространстве $\mathbb{R}^n$ задана стандартная симплектическая структура

$$\sigma(x, x) = \langle x, Jx \rangle, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану H , имеет вид $\vec{H} = J \text{grad } H$.

Теорема о периодических траекториях гамильтоновых систем есть частный случай приведенной выше теоремы при $v = 0$. Докажем теорему 14.1.

Доказательство. Не теряя общности, будем считать, что $0 \in \text{int } S$.

Рассмотрим поляру множества S :

$$S^\circ = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{x \in S} \langle u, x \rangle \leq 1\}.$$

Из теоремы отделимости следует, что

$$(S^\circ)^\circ = S, \quad 0 \in \text{int } S^\circ,$$

а S° есть сильно выпуклое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$.

Введем следующую линейную задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & u &\in S^\circ, & x &\in \mathbb{R}^n, \\ x(0) &= a, & x(1) &= b, \\ \int_0^1 \langle x, Ju \rangle dt &\rightarrow \min. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Здесь a и b — любые точки в S° , достаточно близкие к нулю и такие, что вектор $J(b - a)$ параллелен v . По теореме Филиппова эта задача имеет оптимальные решения. Мы используем эти решения для построения искомой траектории гамильтоновой системы на ∂S .

Зависящий от управления гамильтониан принципа максимума имеет вид:

$$h_u^\nu(p, x) = pu + \nu \langle x, Ju \rangle.$$

Покажем сначала, что аномальные траектории не могут быть оптимальными. Пусть $\nu = 0$. Тогда присоединенное уравнение есть $\dot{p} = 0$, поэтому

$$p = p_0 = \text{const}.$$

Условие максимума ПМП записывается как

$$p_0 u(t) = \max_{v \in S^\circ} p_0 v.$$

В силу сильной выпуклости поляры S° , имеем

$$u(t) = \text{const}, \quad u(t) \in \partial S^\circ.$$

Следовательно, аномальные траектории суть прямые со скоростями, отделенными от нуля. Если взять точки a, b достаточно близкими к нулю, то аномальные траектории не смогут удовлетворить граничным условиям.

Поэтому оптимальные траектории нормальны, и можно положить $\nu = -1$. Нормальный гамильтониан равен

$$h_u(p, x) = pu - \langle x, Ju \rangle,$$

а соответствующая гамильтонова система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{p} = Ju, \\ \dot{x} = u. \end{cases}$$

Нормальный гамильтониан можно записать как

$$\begin{aligned} h_u(p, x) &= \langle y, u \rangle, \\ y &= p + Jx, \end{aligned}$$

где вектор y удовлетворяет уравнению

$$\dot{y} = 2Ju.$$

Вдоль нормальной траектории

$$h_{u(t)}(p(t), x(t)) = \langle y(t), u(t) \rangle = \max_{v \in S^\circ} \langle y(t), v \rangle = C = \text{const}. \quad (14.2)$$

Рассмотрим сначала случай $C \neq 0$, иными словами, $C > 0$. Тогда

$$z(t) = \frac{1}{C}y(t) \in (S^\circ)^\circ = S,$$

т.е. $z(t) \in S$. Более того, $z(t) \in \partial S$, а вектор $u(t)$ есть нормаль к ∂S в точке $z(t)$. Следовательно, кривая $z(t)$, с точностью до перепараметризации, является траекторией гамильтонова поля $\vec{H} = J \text{grad } H$. Проверим выполнение граничных условий:

$$\begin{aligned} p(1) - p(0) &= J(x(1) - x(0)), \\ y(1) - y(0) &= 2J(x(1) - x(0)) = 2J(b - a), \\ z(1) - z(0) &= \frac{2}{C}J(b - a). \end{aligned}$$

Поэтому $z(t)$ есть искомая траектория: хорда $z(1) - z(0)$ параллельна вектору v .

Для завершения доказательства покажем, что случай $C = 0$ в (14.2) невозможен. Действительно, если $C = 0$, то $y(t) \equiv 0$, поэтому $u(t) \equiv 0$. Если $a \neq b$, то не выполняются граничные условия для x . Если же $a = b$, то пара $(u(t), x(t)) \equiv (0, 0)$ не реализует минимум функционала (14.1), который может принимать отрицательные значения: для любой допустимой 1-периодической траектории $x(t)$, траектория $\hat{x}(t) = x(1 - t)$ периодична и имеет критерий качества

$$\int_0^1 \langle \hat{x}, J\dot{\hat{x}} \rangle dx = - \int_0^1 \langle x, Ju \rangle dx.$$

□

Глава 15

Линейная задача быстродействия

15.1 Постановка задачи

В этой главе мы изучим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (15.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n \text{ зафиксированы}, \quad (15.2)$$

$$t_1 \rightarrow \min, \quad (15.3)$$

где U — компактный выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^m$, а A и B — постоянные матрицы порядка $n \times n$ и $n \times m$ соответственно. Задача (15.1)–(15.3) называется *линейной задачей быстродействия*.

Многогранник U есть выпуклая оболочка конечного числа точек $a_1, \dots, a_k$ в $\mathbb{R}^m$:

$$U = \operatorname{conv}\{a_1, \dots, a_k\}.$$

Будем считать, что любая точка a_i не принадлежит выпуклой оболочке остальных точек a_j , $j \neq i$, то есть каждая a_i — вершина многогранника U .

Будем далее предполагать, что выполнено следующее *условие общего положения*:

Для любого ребра $[a_i, a_j]$ многогранника U , вектор $e_{ij} = a_j - a_i$ удовлетворяет равенству

$$\operatorname{span}(Be_{ij}, ABe_{ij}, \dots, A^{n-1}Be_{ij}) = \mathbb{R}^n. \quad (15.4)$$

Это условие означает, что ни один вектор Be_{ij} не принадлежит собственному инвариантному подпространству матрицы A . По теореме 3.1, это равносильно управляемости линейной системы $\dot{x} = Ax + Bu$ с пространством управляющих параметров $u \in \mathbb{R}^m$. Выполнения условия (15.4) всегда можно добиться малым шевелением матриц A, B .

Мы рассматривали примеры линейных задач быстрогодействия в разделах 13.1, 13.2. Здесь мы изучим структуру оптимального управления, докажем его единственность, оценим количество переключений.

Существование оптимального управления для любых точек x_0, x_1 таких, что $x_1 \in \mathcal{A}(x_0)$, следует из теоремы Филиппова. Заметим, что аналогичная задача с неограниченным пространством управляющих параметров может не иметь оптимального управления, это легко показать используя линейность системы.

Перед началом изучения линейной задачи быстрогодействия напомним некоторые начальные сведения о многогранниках.

15.2 Геометрия многогранников

Выпуклой оболочкой конечного числа точек $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^m$ называется множество

$$U = \text{conv}\{a_1, \dots, a_k\} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}.$$

Аффинная гиперплоскость в $\mathbb{R}^m$ есть множество вида

$$\Pi = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \langle \xi, u \rangle = c\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{m*} \setminus \{0\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Опорной гиперплоскостью многогранника U называется такая гиперплоскость Π , что

$$\langle \xi, u \rangle \leq c \quad \forall u \in U$$

для ковектора ξ и числа c , определяющих Π , причем это неравенство должно обращаться в равенство в некоторой точке $u \in \partial U$, т.е. $\Pi \cap U \neq \emptyset$.

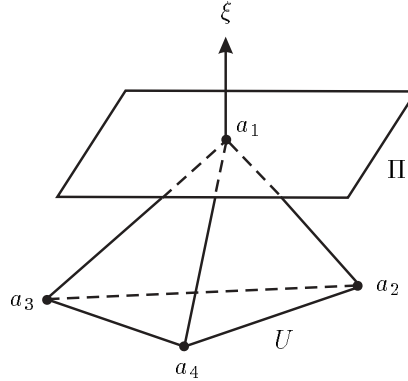


Рис. 15.1: Многогранник U с опорной гиперплоскостью Π

Пересечение любого многогранника $U = \text{conv}\{a_1, \dots, a_k\}$ с любой его опорной гиперплоскостью $\Pi = \{u \mid \langle \xi, u \rangle = c\}$ дает другой многогранник:

$$\begin{aligned} U \cap \Pi &= \text{conv}\{a_{i_1}, \dots, a_{i_l}\}, \\ \langle \xi, a_{i_1} \rangle &= \dots = \langle \xi, a_{i_l} \rangle = c, \\ \langle \xi, a_j \rangle &< c, \quad j \notin \{i_1, \dots, i_l\}. \end{aligned}$$

Такие многогранники $U \cap \Pi$ называются гранями многогранника U . Нульмерные и одномерные грани называются соответственно вершинами и ребрами. Многогранник имеет конечное число граней, каждая из которых есть выпуклая оболочка конечного числа вершин. Грань любой грани есть грань исходного многогранника. Граница многогранника является объединением всех его граней. Это непосредственно следует из теоремы отделимости (или теоремы Хана-Банаха).

15.3 Теорема о релейном управлении

Оптимальное управление в линейной задаче быстрогодействия релейно, т.е. кусочно-постоянно и принимает значения в вершинах многогранника U .

Теорема 15.1. Пусть управление $u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, оптимально для линейной задачи быстрогодействия (15.1)–(15.3). Тогда существует конечное подмножество

$$\mathcal{T} \subset [0, t_1], \quad \#\mathcal{T} < \infty,$$

такое, что

$$u(t) \in \{a_1, \dots, a_k\}, \quad t \in [0, t_1] \setminus \mathcal{T}, \quad (15.5)$$

и ограничение $u(t)|_{t \in [0, t_1] \setminus \mathcal{T}}$ локально постоянно.

Доказательство. Применим принцип максимума Понтрягина к линейной задаче быстрогодействия (15.1)–(15.3). Вектор состояния и сопряженный вектор суть

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n*},$$

а точка сопряженного пространства есть

$$\lambda = (\xi, x) \in \mathbb{R}^{n*} \times \mathbb{R}^n = T^*\mathbb{R}^n.$$

Зависящий от управления гамильтониан равен

$$h_u(\xi, x) = \xi A x + \xi B u$$

(мы умножаем строки на столбцы). Гамильтонова система и условие максимума ПМП имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ \dot{\xi} = -\xi A, \\ \xi(t) \neq 0, \\ \xi(t)Bu(t) = \max_{u \in U} \xi(t)Bu. \end{cases} \quad (15.6)$$

Из гамильтоновой системы следует, что присоединенный вектор

$$\xi(t) = \xi(0)e^{-tA}, \quad \xi(0) \neq 0, \quad (15.7)$$

аналитичен вдоль оптимальной траектории.

Введем в рассмотрение множество индексов, соответствующих вершинам, в которых достигается максимум (15.6):

$$J(t) = \left\{ 1 \leq j \leq k \mid \xi(t)Ba_j = \max_{u \in U} \xi(t)Bu = \max\{\xi(t)Ba_i \mid i = 1, \dots, k\} \right\}.$$

В любой момент t линейная функция $\xi(t)B$ достигает максимума в вершинах многогранника U . Докажем, что в каждый момент, за исключением конечного их числа, этот максимум принимается в единственной вершине.

Определим множество

$$\mathcal{T} = \{t \in [0, t_1] \mid \#J(t) > 1\}.$$

От противного, предположим, что $\mathcal{T}$ бесконечно: существует последовательность разных моментов

$$\{\tau_1, \dots, \tau_n, \dots\} \subset \mathcal{T}.$$

Так как имеется лишь конечное число возможностей для подмножества $J(\tau_n) \subset \{1, \dots, k\}$, можно предположить, не теряя общности, что

$$J(\tau_1) = J(\tau_2) = \dots = J(\tau_n) = \dots$$

Обозначим $J = J(\tau_i)$.

Далее, так как выпуклая оболочка

$$\text{conv}\{a_j \mid j \in J\}$$

является гранью U , существуют такие индексы $j_1, j_2 \in J$, что отрезок $[a_{j_1}, a_{j_2}]$ есть ребро U . Имеем

$$\xi(\tau_i)Ba_{j_1} = \xi(\tau_i)Ba_{j_2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Для вектора $e = a_{j_2} - a_{j_1}$ получаем

$$\xi(\tau_i)Be = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Но $\xi(\tau_i) = \xi(0)e^{-\tau_i A}$ в силу (15.7), поэтому аналитическая функция

$$t \mapsto \xi(0)e^{-tA}Be$$

имеет бесконечное число нулей на отрезке $[0, t_1]$, т.е. она тождественно равна нулю:

$$\xi(0)e^{-tA}Be \equiv 0.$$

Последовательно дифференцируя это тождество при $t = 0$, получаем

$$\xi(0)Be = 0, \quad \xi(0)ABe = 0, \quad \dots, \quad \xi(0)A^{n-1}Be = 0.$$

По условию общего положения (15.4), имеем $\xi(0) = 0$, что противоречит условию (15.7). Поэтому множество $\mathcal{T}$ конечно.

Вне множества $\mathcal{T}$ функция $\xi(t)B$ достигает максимума на U в единственной вершине $a_{j(t)}$, $\{j(t)\} = J(t)$, поэтому оптимальное управление $u(t)$ принимает значение в вершине $a_{j(t)}$. Включение (15.5) доказано. Далее,

$$\xi(t)Ba_{j(t)} > \xi(t)Ba_i, \quad i \neq j(t).$$

Но все функции $t \mapsto \xi(t)Ba_i$ непрерывны, поэтому предшествующее неравенство сохраняется для моментов времени, близких к t . Функция $t \mapsto j(t)$ локально постоянна на $[0, t_1] \setminus \mathcal{T}$, следовательно, оптимальное управление $u(t)$ также локально постоянно на $[0, t_1] \setminus \mathcal{T}$. $\square$

Далее нам понадобится следующее утверждение, доказанное в рассуждении выше.

Следствие 15.1. Пусть функция $\xi(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть ненулевое решение присоединенного уравнения $\dot{\xi} = -\xi A$. Тогда всюду на отрезке $[0, t_1]$, за исключением конечного числа точек, существует единственное управление $u(t) \in U$ такое, что $\xi(t)Bu(t) = \max_{u \in U} \xi(t)Bu$.

15.4 Единственность оптимальных управлений и экстремалей

Теорема 15.2. Пусть конечная точка x_1 достижима из начальной точки x_0 :

$$x_1 \in \mathcal{A}(x_0).$$

Тогда линейная задача быстрогодействия (15.1)–(15.3) имеет единственное решение.

Доказательство. Как мы уже отметили, существование оптимального управления следует из теоремы Филиппова.

Предположим, что существует два оптимальных управления: $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t \in [0, t_1]$. По формуле Коши

$$x(t_1) = e^{t_1 A} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-tA} Bu(t) dt \right),$$

получаем

$$e^{t_1 A} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-tA} B u_1(t) dt \right) = e^{t_1 A} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-tA} B u_2(t) dt \right),$$

поэтому

$$\int_0^{t_1} e^{-tA} B u_1(t) dt = \int_0^{t_1} e^{-tA} B u_2(t) dt. \quad (15.8)$$

Пусть $\xi_1(t) = \xi_1(0)e^{-tA}$ есть присоединенный вектор, соответствующий по принципу максимума управлению $u_1(t)$. Тогда равенство (15.8) можно переписать в виде

$$\int_0^{t_1} \xi_1(t) B u_1(t) dt = \int_0^{t_1} \xi_1(t) B u_2(t) dt. \quad (15.9)$$

По условию максимума ПМП

$$\xi_1(t) B u_1(t) = \max_{u \in U} \xi_1(t) B u,$$

поэтому

$$\xi_1(t) B u_1(t) \geq \xi_1(t) B u_2(t).$$

Но это неравенство вместе с равенством (15.9) означает, что почти всюду на $[0, t_1]$

$$\xi_1(t) B u_1(t) = \xi_1(t) B u_2(t).$$

По следствию 15.1,

$$u_1(t) \equiv u_2(t)$$

почти всюду на $[0, t_1]$. □

Итак, в линейной задаче быстрогодействия оптимальное управление единственно. Обычно, чтобы найти оптимальное управление для заданной пары граничных точек x_0, x_1 , ищут все экстремали $(\xi(t), x(t))$, переводящие x_0 в x_1 , а затем из них выбирают наилучшую. В примерах, рассмотренных в разделах 13.1, 13.2, существовала единственная экстремаль для любой пары x_0, x_1 при $x_1 = 0$. Докажем, что это — общее свойство линейных задач быстрогодействия.

Теорема 15.3. Пусть $x_1 = 0 \in \mathcal{A}(x_0)$ и $0 \in U \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. Тогда существует единственное управление $u(t)$, переводящее x_0 в 0 и удовлетворяющее принципу максимума.

Доказательство. Предположим, что существуют два управления

$$u_1(t), \quad t \in [0, t_1], \quad \text{и} \quad u_2(t), \quad t \in [0, t_2],$$

переводящие x_0 в 0 и удовлетворяющие принципу максимума.

Если $t_1 = t_2$, то из доказательства предыдущей теоремы видно, что $u_1(t) \equiv u_2(t)$ почти всюду, поэтому можно считать, что

$$t_1 > t_2.$$

Из формулы Коши получаем

$$\begin{aligned} e^{t_1 A} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-tA} B u_1(t) dt \right) &= 0, \\ e^{t_2 A} \left(x_0 + \int_0^{t_2} e^{-tA} B u_2(t) dt \right) &= 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\int_0^{t_1} e^{-tA} B u_1(t) dt = \int_0^{t_2} e^{-tA} B u_2(t) dt. \quad (15.10)$$

Согласно ПМП, существует присоединенный вектор $\xi_1(t)$, $t \in [0, t_1]$, такой что

$$\xi_1(t) = \xi_1(0) e^{-tA}, \quad \xi_1(0) \neq 0, \quad (15.11)$$

$$\xi_1(t) B u_1(t) = \max_{u \in U} \xi_1(t) B u. \quad (15.12)$$

Так как $0 \in U$, имеем

$$\xi_1(t) B u_1(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_1]. \quad (15.13)$$

Равенство (15.10) можно переписать как

$$\int_0^{t_1} \xi_1(t) B u_1(t) dt = \int_0^{t_2} \xi_1(t) B u_2(t) dt. \quad (15.14)$$

Принимая во внимание (15.13), получаем

$$\int_0^{t_2} \xi_1(t) B u_1(t) dt \leq \int_0^{t_2} \xi_1(t) B u_2(t) dt. \quad (15.15)$$

Но из условия максимума (15.12) следует, что

$$\xi_1(t) B u_1(t) \geq \xi_1(t) B u_2(t), \quad t \in [0, t_2]. \quad (15.16)$$

Поэтому неравенства (15.15) и (15.16) совместимы только когда

$$\xi_1(t) B u_1(t) = \xi_1(t) B u_2(t), \quad t \in [0, t_2],$$

следовательно, неравенство (15.15) должно обращаться в равенство. Ввиду (15.14), имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \xi_1(t) B u_1(t) dt = 0.$$

Но подынтегральная функция неотрицательна, см. (15.13), поэтому она тождественно равна нулю:

$$\xi_1(t)Bu_1(t) \equiv 0, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Из доказательства теоремы 15.1 следует, что управление $u_1(t)$ релейно, поэтому существует интервал $I \subset [t_1, t_2]$ такой, что

$$u_1(t)|_I \equiv a_j \neq 0.$$

Следовательно,

$$\xi_1(t)Ba_j \equiv 0, \quad t \in I.$$

Но $\xi_1(t)0 \equiv 0$, что противоречит единственности управления, на котором достигается максимум в ПМП, см. следствие 15.1. $\square$

15.5 Переключения оптимального управления

Оценим количество переключений оптимального управления в линейных задачах быстрогодействия. В примерах разделов 13.1, 13.2 мы получили соответственно одно переключение и сколь угодно большое число переключений, хотя и конечное на любом отрезке. Оказывается, в общем случае возможны два типа поведения оптимального управления: неосциллирующий и осциллирующий, в зависимости от того, имеет ли матрица A вещественный спектр или нет. Напомним, что в примере с одним переключением в разделе 13.1 мы имели матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp}(A) = \{0\} \subset \mathbb{R},$$

а в примере со сколь угодно большим числом переключений в разделе 13.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp}(A) = \{\pm i\} \not\subset \mathbb{R}.$$

Мы ограничимся системами со скалярным управлением:

$$\dot{x} = Ax + ub, \quad u \in U = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяющими условию общего положения

$$\text{span}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = \mathbb{R}^n.$$

Множество достижимости такой системы за сколь угодно малое время полномерно. Оценим минимальное число переключений, необходимое для заполнения полномерной области. Оптимальное управление кусочно-постоянно со значениями во множестве $\{\alpha, \beta\}$. Предположим, что траектория выходит из начальной точки x_0 с управлением α . Без переключений можно заполнить

дугу 1-мерной кривой $e^{(Ax+\alpha b)t}x_0$, с одним переключением заполняется кусок 2-мерной поверхности $e^{(Ax+\beta b)t_2} \circ e^{(Ax+\alpha b)t_1}x_0$, с двумя переключениями можно достичь точек на 3-мерной поверхности и т.п. Поэтому для заполнения n -мерной области необходимо как минимум $n - 1$ переключение.

Докажем, что в неосциллирующем случае $n - 1$ переключение оптимального управления всегда достаточно.

Теорема 15.4. *Предположим, что матрица A имеет только вещественные собственные значения:*

$$\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}.$$

Тогда любое оптимальное управление в линейной задаче быстрогодействия (15.1)–(15.3) имеет не более чем $n - 1$ переключение.

Доказательство. Пусть $u(t)$ — оптимальное управление, а $\xi(t) = \xi(0)e^{-tA}$ — соответствующее решение сопряженного уравнения $\dot{\xi} = -\xi A$. Условие максимума ПМП записывается как

$$\xi(t)bu(t) = \max_{u \in [\alpha, \beta]} \xi(t)bu,$$

поэтому

$$u(t) = \begin{cases} \beta & \text{при } \xi(t)b > 0, \\ \alpha & \text{при } \xi(t)b < 0. \end{cases}$$

Следовательно, число переключений управления $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, равно количеству перемен знака функции

$$y(t) = \xi(t)b, \quad t \in [0, t_1].$$

Покажем, что $y(t)$ имеет не более $n - 1$ корня.

Вычислим производные сопряженного вектора:

$$\xi^{(k)}(t) = \xi(0)e^{-tA}(-A)^k.$$

По теореме Кэли, матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению:

$$A^n + c_1 A^{n-1} + \dots + c_n \text{Id} = 0,$$

где

$$\det(t \text{Id} - A) = t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_n,$$

поэтому

$$(-A)^n - c_1(-A)^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n \text{Id} = 0.$$

Следовательно, функция $y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению n -го порядка:

$$y^{(n)}(t) - c_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + (-1)^n c_n y(t) = 0. \quad (15.17)$$

Как хорошо известно (см., например, [137]), любое решение этого уравнения есть квазимногочлен:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^k e^{-\lambda_i t} P_i(t), \\ P_i(t) &\text{ многочлен,} \\ \lambda_i &\neq \lambda_j \text{ при } i \neq j, \end{aligned}$$

где λ_i — собственные значения матрицы A , а степень каждого многочлена P_i меньше кратности соответствующего собственного значения λ_i , поэтому

$$\sum_{i=1}^k \deg P_i \leq n - k.$$

Теперь утверждение данной теоремы следует из приведенной ниже общей леммы. $\square$

Лемма 15.1. *Квазимногочлен*

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} P_i(t), & \sum_{i=1}^k \deg P_i &\leq n - k, \\ \lambda_i &\neq \lambda_j \text{ при } i \neq j, \end{aligned} \quad (15.18)$$

имеет не более $n - 1$ вещественного корня.

Доказательство. Применим индукцию по k .

Если $k = 1$, то квазимногочлен

$$y(t) = e^{\lambda t} P(t), \quad \deg P \leq n - 1,$$

имеет не более $n - 1$ корня.

Докажем шаг индукции для $k > 1$. Обозначим

$$n_i = \deg P_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Пусть квазимногочлен $y(t)$ имеет n вещественных корней. Запишем уравнение

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k-1} e^{\lambda_i t} P_i(t) + e^{\lambda_k t} P_k(t) = 0$$

в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{k-1} e^{(\lambda_i - \lambda_k) t} P_i(t) + P_k(t) = 0. \quad (15.19)$$

Квазимногочлен в левой части имеет n корней. Продифференцируем этот квазимногочлен $(n_k + 1)$ раз, чтобы многочлен $P_k(t)$ исчез. После $(n_k + 1)$ дифференцирований получаем квазимногочлен

$$\sum_{i=1}^{k-1} e^{(\lambda_i - \lambda_k)t} Q_i(t), \quad \deg Q_i \leq \deg P_i,$$

имеющий по теореме Ролля $(n - n_k - 1)$ вещественных корней. Но по предположению индукции максимально возможное число корней этого квазимногочлена равно

$$\sum_{i=1}^{k-1} n_i + k - 2 < n - n_k - 1.$$

Полученное противоречие и доказывает данную лемму. $\square$

Теорема 15.4 полностью доказана: в неосциллирующем случае оптимальное управление имеет не более $n - 1$ переключения на своей области определения (напомним, что $n - 1$ переключение всегда необходимо даже на малых временных отрезках, т.к. множества достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t)$ полномерны для всех $t > 0$).

Для произвольной матрицы A можно получить $(n - 1)$ как оценку сверху для числа переключений на достаточно малых отрезках времени.

Теорема 15.5. *Рассмотрим характеристический многочлен матрицы A :*

$$\det(t \text{Id} - A) = t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_n,$$

и пусть

$$c = \max_{1 \leq i \leq n} |c_i|.$$

Тогда для любого оптимального по быстродействию управления $u(t)$ и любого $\bar{t} \in \mathbb{R}$ отрезок

$$\left[\bar{t}, \bar{t} + \ln \left(1 + \frac{1}{c} \right) \right]$$

содержит не более $(n - 1)$ переключения оптимального управления $u(t)$.

При доказательстве этой теоремы мы воспользуемся следующим общим предложением, которое мы узнали от С. Яковенко.

Лемма 15.2. *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$y^{(n)} + c_1(t)y^{(n-1)} + \dots + c_n(t)y = 0$$

с измеримыми и ограниченными коэффициентами:

$$c_i = \max_{t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]} |c_i(t)|.$$

Если

$$\sum_{i=1}^n c_i \frac{\delta^i}{i!} < 1, \quad (15.20)$$

то любое ненулевое решение $y(t)$ этого уравнения имеет не более $n-1$ корня на отрезке $t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$.

Доказательство. От противного, предположим, что функция $y(t)$ имеет по меньшей мере n корней на отрезке $t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$. По теореме Ролля, производная $\dot{y}(t)$ имеет не менее $n-1$ корня и т.д. Тогда $y^{(n-1)}$ имеет корень $t_{n-1} \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$. Поэтому

$$y^{(n-1)}(t) = \int_{t_{n-1}}^t y^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Пусть $t_{n-2} \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ есть корень $y^{(n-2)}(t)$, тогда

$$y^{(n-2)}(t) = \int_{t_{n-2}}^t d\tau_1 \int_{t_{n-1}}^{\tau_1} y^{(n)}(\tau_2) d\tau_2.$$

Продолжим эту процедуру: проинтегрируем $y^{(n-i+1)}(t)$ от корня $t_{n-i} \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ функции $y^{(n-i)}(t)$ и получим

$$y^{(n-i)}(t) = \int_{t_{n-i}}^t d\tau_1 \int_{t_{n-i+1}}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{\tau_{i-1}} y^{(n)}(\tau_i) d\tau_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \left| y^{(n-i)}(t) \right| &\leq \int_{t_{n-i}}^t d\tau_1 \int_{t_{n-i+1}}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{\tau_{i-1}} \left| y^{(n)}(\tau_i) \right| d\tau_i \\ &\leq \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta} d\tau_1 \int_{\bar{t}}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{\bar{t}}^{\tau_{i-1}} \left| y^{(n)}(\tau_i) \right| d\tau_i \\ &\leq \frac{\delta^i}{i!} \sup_{t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]} \left| y^{(n)}(t) \right|. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i(t) y^{(n-i)}(t) \right| \leq \sum_{i=1}^n |c_i(t)| \left| y^{(n-i)}(t) \right| \leq \sum_{i=1}^n c_i \frac{\delta^i}{i!} \sup_{t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]} \left| y^{(n)}(t) \right|,$$

то есть

$$\left| y^{(n)}(t) \right| \leq \sum_{i=1}^n c_i \frac{\delta^i}{i!} \sup_{t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]} \left| y^{(n)}(t) \right|,$$

что противоречит условию (15.20). Лемма доказана. $\square$

Теперь докажем теорему 15.5.

Доказательство. Как было показано при доказательстве теоремы 15.4, число переключений $u(t)$ не больше числа корней функции $y(t) = \xi(t)b$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (15.17).

Имеем

$$\sum_{i=1}^n |c_i| \frac{\delta^i}{i!} < c(e^\delta - 1) \quad \forall \delta > 0.$$

По лемме 15.2, если

$$c(e^\delta - 1) \leq 1, \tag{15.21}$$

то функция $y(t)$ имеет не больше $n - 1$ вещественного корня на любом отрезке длины δ . Но неравенство (15.21) равносильно следующему:

$$\delta \leq \ln \left(1 + \frac{1}{c} \right),$$

поэтому $y(t)$ имеет не более $n - 1$ корня на любом отрезке длины $\ln \left(1 + \frac{1}{c} \right)$. $\square$

Глава 16

Линейно-квадратичная задача

16.1 Постановка задачи

В этой главе мы рассмотрим чрезвычайно популярный в приложениях класс задач оптимального управления — *линейно-квадратичные задачи*. Такая задача задается линейной системой с квадратичным функционалом качества:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x &\in \mathbb{R}^n, & u &\in \mathbb{R}^m, \\ x(0) &= x_0, & x(t_1) &= x_1, & x_0, x_1, t_1 &\text{закреплены}, \\ J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \langle Ru(t), u(t) \rangle + \langle Px(t), u(t) \rangle + \langle Qx(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Здесь A, B, R, P, Q — постоянные матрицы соответствующих размеров, R и Q симметричны :

$$R^* = R, \quad Q^* = Q,$$

а угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают стандартное скалярное произведение $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно показать, что условие $R \geq 0$ необходимо для существования оптимального управления. Мы не будем здесь касаться случаев вырождения R и предположим, что $R > 0$. Замена переменных $u \mapsto v = R^{1/2}u$ переводит функционал $J(u)$ в функционал того же вида с единичной матрицей вместо R . Поэтому будем далее предполагать, что $R = \text{Id}$. Линейное преобразование обратной связи обнуляет матрицу P (упражнение: найдите это преобразование). Поэтому функционал качества можно записать следующим образом:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} |u(t)|^2 + \langle Qx(t), x(t) \rangle dt.$$

Что касается динамики задачи, будем предполагать, что линейная система управляема:

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n. \quad (16.2)$$

16.2 Существование оптимального управления

Из-за того, что множество управляющих параметров $U = \mathbb{R}^m$ некомпактно, теорема Филиппова неприменима, поэтому существование оптимальных управлений в линейно-квадратичной задаче — нетривиальная задача.

В этой главе в качестве допустимых управлений будем брать интегрируемые с квадратом вектор-функции:

$$u \in L_2^m[0, t_1]$$

и использовать для управлений норму пространства L_2^m :

$$\|u\| = \left(\int_0^{t_1} |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^{t_1} u_1^2(t) + \dots + u_m^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим множество всех допустимых управлений, переводящих начальную точку в конечную:

$$\mathcal{U}(x_0, x_1) = \{u \in L_2^m[0, t_1] \mid x(t_1, u, x_0) = x_1\}.$$

Мы обозначаем через $x(t, u, x_0)$ траекторию системы (16.1), соответствующую допустимому управлению $u \in L_2^m$ и выходящую из точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. В силу формулы Коши, *отображение в конец*

$$u \mapsto x(t_1, u, x_0) = e^{t_1 A} x_0 + \int_0^{t_1} e^{(t_1 - \tau) A} B u(\tau) d\tau$$

есть аффинное отображение из $L_2^m[0, t_1]$ в $\mathbb{R}^n$. Управляемость линейной системы (16.1) означает, что для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $t_1 > 0$ образ отображения в конец совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Подпространство

$$\mathcal{U}(x_0, x_1) \subset L_2^m[0, t_1]$$

аффинно, а подпространство

$$\mathcal{U}(0, 0) \subset L_2^m[0, t_1]$$

линейно, более того,

$$\mathcal{U}(x_0, x_1) = u + \mathcal{U}(0, 0) \quad \text{для любого } u \in \mathcal{U}(x_0, x_1).$$

Естественно ожидать, что существование оптимальных управлений тесно связано с поведением функционала качества $J(u)$ на линейном подпространстве $\mathcal{U}(0, 0)$.

Предложение 16.1. (1) Если существуют такие точки $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, что

$$\inf_{u \in \mathcal{U}(x_0, x_1)} J(u) > -\infty, \quad (16.3)$$

то

$$J(u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}(0, 0).$$

(2) Обратно, если

$$J(u) > 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}(0, 0) \setminus 0,$$

то минимум достигается:

$$\exists \min_{u \in \mathcal{U}(x_0, x_1)} J(u) \quad \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание. Иными словами, неравенство

$$J|_{\mathcal{U}(0,0)} \geq 0$$

необходимо для существования оптимальных управлений хотя бы для одной пары (x_0, x_1) , а строгое неравенство

$$J|_{\mathcal{U}(0,0) \setminus 0} > 0$$

достаточно для существования оптимальных управлений для всех пар (x_0, x_1) .

Для доказательства предложения 16.1 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 16.1. Если $J(v) > 0$ для всех $v \in \mathcal{U}(0, 0) \setminus 0$, то

$$J(v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \text{для некоторого } \alpha > 0 \text{ и всех } v \in \mathcal{U}(0, 0),$$

или, что то же самое,

$$\inf \{J(v) \mid \|v\| = 1, v \in \mathcal{U}(0, 0)\} > 0.$$

Доказательство. Пусть v_n — минимизирующая последовательность функционала $J(v)$ на пространстве $\{\|v\| = 1\} \cap \mathcal{U}(0, 0)$. Замкнутые шары в гильбертовом пространстве слабо компактны, поэтому существует подпоследовательность, слабо сходящаяся в единичном шаре. Сохраняя обозначение v_n для членов этой последовательности, получаем

$$\begin{aligned} v_n &\rightarrow \hat{v} \text{ слабо при } n \rightarrow \infty, & \|\hat{v}\| &\leq 1, & \hat{v} &\in \mathcal{U}(0, 0), \\ J(v_n) &\rightarrow \inf \{J(v) \mid \|v\| = 1, v \in \mathcal{U}(0, 0)\}, & n &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Функционал на последовательности равен

$$J(v_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \langle Qx_n(\tau), x_n(\tau) \rangle d\tau.$$

Так как управления сходятся слабо, соответствующие траектории сходятся сильно:

$$x_n(\cdot) \rightarrow x_{\widehat{v}}(\cdot), \quad n \rightarrow \infty,$$

поэтому

$$J(v_n) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \langle Qx_{\widehat{v}}(\tau), x_{\widehat{v}}(\tau) \rangle d\tau, \quad n \rightarrow \infty.$$

В силу (16.4), исследуемая нижняя грань равна

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \langle Qx_{\widehat{v}}(\tau), x_{\widehat{v}}(\tau) \rangle d\tau = \frac{1}{2} (1 - \|\widehat{v}\|^2) + J(\widehat{v}) > 0.$$

□

Докажем предложение 16.1.

Доказательство. (1) От противного, предположим, что существует такое $v \in \mathcal{U}(0, 0)$, что $J(v) < 0$. Возьмем любое $u \in \mathcal{U}(x_0, x_1)$, тогда $u + sv \in \mathcal{U}(x_0, x_1)$ для любого $s \in \mathbb{R}$.

Пусть $y(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть решение задачи Коши

$$\dot{y} = Ay + Bv, \quad y(0) = 0,$$

и пусть

$$J(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \langle u(\tau), v(\tau) \rangle + \langle Qx(\tau), y(\tau) \rangle d\tau.$$

Тогда квадратичный функционал J на семействе управлений $u + sv$, $s \in \mathbb{R}$, имеет следующий вид:

$$J(u + sv) = J(u) + 2sJ(u, v) + s^2J(v).$$

Так как $J(v) < 0$, то $J(u + sv) \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow \infty$. Полученное противоречие с условием (16.3) завершает доказательство пункта (1).

(2) Напомним, что функционал качества равен

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \langle Qx(\tau), x(\tau) \rangle d\tau.$$

Норма $\|u\|$ полунепрерывна снизу в слабой топологии на L_2^m , а функционал $\int_0^{t_1} \langle Qx(\tau), x(\tau) \rangle d\tau$ слабо непрерывен на L_2^m . Поэтому $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу на L_2^m . Так как шары слабо компактны в L_2^m и аффинное подпространство слабо компактно, достаточно показать, что $J(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$, $u \in \mathcal{U}(x_0, x_1)$.

Зафиксируем произвольное управление $u \in \mathcal{U}(x_0, x_1)$. Тогда любое управление из $\mathcal{U}(x_0, x_1)$ имеет вид $u + v$ для некоторого $v \in \mathcal{U}(0, 0)$. Преобразуем функционал:

$$J(u + v) = J(u) + 2\|v\|J\left(u, \frac{v}{\|v\|}\right) + J(v).$$

Обозначим $J(u) = C_0$. Далее, $\left| J\left(u, \frac{v}{\|v\|}\right) \right| \leq C_1 = \text{const}$ для всех $v \in \mathcal{U}(0, 0) \setminus 0$. Наконец, по лемме 16.1, $J(v) \geq \alpha \|v\|^2$, $\alpha > 0$, для всех $v \in \mathcal{U}(0, 0) \setminus 0$. Следовательно,

$$J(u + v) \geq C_0 - 2\|v\|C_1 + \alpha\|v\|^2 \rightarrow \infty, \quad v \rightarrow \infty, \quad v \in \mathcal{U}(0, 0).$$

Пункт (2) данного предложения доказан. $\square$

Итак, вопрос существования оптимальных управлений в линейно-квадратичной задаче сведен к исследованию ограничения $J|_{\mathcal{U}(0, 0)}$. Мы изучим это ограничение подробнее в разделе 16.4.

16.3 Экстремали

Мы не можем напрямую применить принцип максимума Понтрягина к линейно-квадратичной задаче, так как условия существования оптимальных управлений доказаны нами в L_2^m , в то время как принцип максимума получен только в L_∞^m . Однако предположим на время, что ПМП применим к линейно-квадратичной задаче. Легко написать уравнения для оптимальных управлений и траекторий, вытекающие из ПМП, более того, естественно ожидать, что эти уравнения должны выполняться. Сейчас мы выведем эти уравнения, а после этого обоснуем их.

Итак, выпишем принцип максимума для линейно-квадратичной задачи. Зависящий от управления гамильтониан равен

$$h_u(\xi, x) = \xi Ax + \xi Bu - \frac{\nu}{2}(|u|^2 + \langle Qx, x \rangle), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n*}.$$

Сначала рассмотрим аномальный случай: $\nu = 0$. Согласно ПМП, присоединенный вектор вдоль аномальной экстремали удовлетворяет уравнению $\dot{\xi} = -\xi A$, поэтому $\xi(t) = \xi(0)e^{-tA}$. Из условия максимума следует, что $0 \equiv \xi(t)B = \xi(0)e^{-tA}B$. Дифференцируя это равенство $n-1$ раз и учитывая условие управляемости (16.2), получаем $\xi(0) = 0$. Это противоречит ПМП, поэтому аномальных траекторий не может быть.

В нормальном случае можно предположить $\nu = 1$. Тогда зависящий от управления гамильтониан равен

$$h_u(\xi, x) = \xi Ax + \xi Bu - \frac{1}{2}(|u|^2 + \langle Qx, x \rangle), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n*}.$$

Зависящее от u слагаемое $\xi Bu - \frac{1}{2}|u|^2$ имеет единственный максимум по $u \in \mathbb{R}^m$ в точке, где

$$\frac{\partial h_u}{\partial u} = \xi B - u^* = 0,$$

поэтому

$$u = B^* \xi^*. \quad (16.5)$$

Следовательно, максимизированный гамильтониан равен

$$\begin{aligned} H(\xi, x) &= \max_{u \in \mathbb{R}^m} h_u(\xi, x) = \xi Ax - \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \frac{1}{2} |B^* \xi^*|^2 \\ &= \xi Ax - \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \frac{1}{2} |B\xi|^2. \end{aligned}$$

Функция Гамильтона $H(\xi, x)$ гладкая, поэтому нормальные экстремали суть решения соответствующей гамильтоновой системы

$$\dot{x} = Ax + BB^* \xi^*, \quad (16.6)$$

$$\dot{\xi} = x^* Q - \xi A. \quad (16.7)$$

Покажем теперь, что оптимальные управления и траектории в линейно-квадратичной задаче действительно удовлетворяют уравнениям (16.5)–(16.7). Рассмотрим расширенную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ \dot{y} &= \frac{1}{2} (|u|^2 + \langle Qx, x \rangle), \end{aligned}$$

и соответствующее отображение в конец:

$$F : u \mapsto (x(t_1, u, x_0), y(t_1, u, 0)), \quad F : L_2^m[0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Благодаря формуле Коши, это отображение можно выписать в явном виде:

$$x(t_1, u, x_0) = e^{t_1 A} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-tA} B u(t) dt \right), \quad (16.8)$$

$$y(t_1, u, 0) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} |u(t)|^2 + \langle Qx(t), x(t) \rangle dt. \quad (16.9)$$

Пусть $\tilde{u}(\cdot)$ есть оптимальное управление, а $\tilde{x}(\cdot) = x(\cdot, \tilde{u}, x_0)$ — соответствующая оптимальная траектория, тогда

$$F(\tilde{u}) \in \partial \operatorname{Im} F.$$

По теореме о неявной функции, дифференциал

$$D_{\tilde{u}} F : L_2^m[0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$$

не сюръективен, т.е. существует такой ковектор $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n*} \oplus \mathbb{R}^*$, $(\alpha, \beta) \neq 0$, что

$$(\alpha, \beta) \perp D_{\tilde{u}} F v, \quad v \in L_2^m[0, t_1]. \quad (16.10)$$

Дифференциал отображения в конец находится из явных формул (16.8), (16.9):

$$\begin{aligned} D_{\tilde{u}} F v = & \left(\int_0^{t_1} e^{(t_1-t)A} B v(t) dt, \right. \\ & \left. \int_0^{t_1} \left\langle \tilde{u}(t) + \int_t^{t_1} B^* e^{(\tau-t)A^*} Q \tilde{x}(\tau) d\tau, v(t) \right\rangle dt \right). \end{aligned}$$

Тогда условие ортогональности (16.10) записывается в следующем виде:

$$\int_0^{t_1} \left\langle B^* e^{(t_1-t)A^*} \alpha + \beta \tilde{u}(t) + \beta \int_t^{t_1} B^* e^{(\tau-t)A^*} Q \tilde{x}(\tau) d\tau, v(t) \right\rangle dt = 0, \\ v \in L_2^m[0, t_1],$$

то есть

$$B^* e^{(t_1-t)A^*} \alpha + \beta \tilde{u}(t) + \beta \int_t^{t_1} B^* e^{(\tau-t)A^*} Q \tilde{x}(\tau) d\tau \equiv 0, \quad t \in [0, t_1]. \quad (16.11)$$

Случай $\beta = 0$ невозможен из-за условия (16.2). Обозначим $\gamma = -\alpha/\beta$, тогда равенство (16.11) принимает вид

$$\tilde{u}(t) = B^* \xi^*(t),$$

где

$$\xi(t) = \gamma^* e^{(t_1-t)A} - \int_t^{t_1} \tilde{x}^*(\tau) Q e^{(\tau-t)A} dt. \quad (16.12)$$

Итак, равенства (16.5), (16.6) доказаны. Дифференцируя (16.12), получаем последнее требуемое равенство (16.7).

Итак, мы доказали, что оптимальные траектории в линейно-квадратичной задаче суть проекции нормальных экстремалей принципа максимума (16.6), (16.7), а оптимальные управления удовлетворяют уравнению (16.5). В частности, оптимальные траектории и управления аналитичны.

16.4 Сопряженные точки

В этом разделе мы получим условия существования и единственности оптимальных управлений в зависимости от конечного времени. Поэтому будем записывать минимизируемый функционал в следующем виде:

$$J_t(u) = \frac{1}{2} \int_0^t |u(\tau)|^2 + \langle Qx(\tau), x(\tau) \rangle d\tau.$$

Обозначим

$$\mathcal{U}_t(0, 0) = \{u \in L_2^m[0, t] \mid x(t, u, x_0) = x_1\}, \\ \mu(t) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{J_t(u) \mid u \in \mathcal{U}_t(0, 0), \|u\| = 1\}. \quad (16.13)$$

Мы показали в предложении 16.1, что при $\mu(t) > 0$ задача имеет решение для любых граничных условиях, а при $\mu(t) < 0$ решений нет ни для каких граничных условий. Случай $\mu(t) = 0$ неопределенный. Исследуем подробнее свойства функции $\mu(t)$.

Предложение 16.2. (1) Функция $t \mapsto \mu(t)$ невозрастающая и непрерывная.
 (2) Для любых $t > 0$ справедливы неравенства

$$1 \geq 2\mu(t) \geq 1 - \frac{t^2}{2} e^{2t\|A\|} \|B\|^2 \|Q\|. \quad (16.14)$$

(3) Если $1 > 2\mu(t)$, то нижняя грань в (16.13) достигается, т.е. это — минимум.

Доказательство. (3) Обозначим

$$I_t(u) = \frac{1}{2} \int_0^t \langle Qx(\tau), x(\tau) \rangle d\tau,$$

функционал $I_t(u)$ слабо непрерывен на L_2^m . Заметим, что

$$J_t(u) = \frac{1}{2} + I_t(u) \quad \text{на сфере } \|u\| = 1.$$

Возьмем минимизирующую последовательность функционала $I_t(u)$ на сфере $\{\|u\| = 1\} \cap \mathcal{U}_t(0, 0)$. В силу слабой компактности шара $\{\|u\| \leq 1\}$, из этой последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow \hat{u} \text{ слабо при } n \rightarrow \infty, & \|\hat{u}\| &\leq 1, & \hat{u} &\in \mathcal{U}_t(0, 0), \\ I_t(u_n) &\rightarrow I_t(\hat{u}) = \inf\{I_t(u) \mid \|u\| = 1, u \in \mathcal{U}_t(0, 0)\}, & n &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если $\hat{u} = 0$, то $I_t(\hat{u}) = 0$, поэтому $\mu(t) = \frac{1}{2}$, что противоречит предположению пункта (3).

Следовательно, $\hat{u} \neq 0$, $I_t(\hat{u}) < 0$, и $I_t\left(\frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|}\right) \leq I_t(\hat{u})$. Поэтому $\|\hat{u}\| = 1$, и $J_t(u)$ достигает минимума на сфере $\{\|u\| = 1\} \cap \mathcal{U}_t(0, 0)$ в точке $\hat{u}$.

(2) Пусть $\|u\| = 1$ и $x_0 = 0$. По формуле Коши,

$$x(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau,$$

поэтому

$$|x(t)| \leq \int_0^t e^{(t-\tau)\|A\|} \|B\| \cdot |u(\tau)| d\tau$$

по неравенству Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} &\leq \|u\| \left(\int_0^t e^{(t-\tau)2\|A\|} \|B\|^2 d\tau \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^t e^{(t-\tau)2\|A\|} \|B\|^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку $x(t)$ в J_t , получаем второе неравенство в (16.14).

Первое неравенство в (16.14) получается, если рассмотреть слабо сходящуюся последовательность $u_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, на сфере $\|u_n\| = 1$, $u_n \in \mathcal{U}_t(0, 0)$.

(1) Монотонность $\mu(t)$. Возьмем любое $\hat{t} > t$. Пространство $\mathcal{U}_t(0, 0)$ допускает изометрическое вложение в $\mathcal{U}_{\hat{t}}(0, 0)$ за счет продолжения управлений $u \in \mathcal{U}_t(0, 0)$ нулем:

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{U}_t(0, 0) &\Rightarrow \hat{u} \in \mathcal{U}_{\hat{t}}(0, 0), \\ \hat{u}(\tau) &= \begin{cases} u(\tau), & \tau \leq t, \\ 0, & \tau > t. \end{cases} \end{aligned}$$

Более того,

$$J_{\hat{t}}(\hat{u}) = J_t(u).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \inf \{ J_t(u) \mid u \in \mathcal{U}_t(0, 0), \|u\| = 1 \} \\ &\geq \inf \{ J_{\hat{t}}(\hat{u}) \mid \hat{u} \in \mathcal{U}_{\hat{t}}(0, 0), \|\hat{u}\| = 1 \} = \mu(\hat{t}). \end{aligned}$$

Непрерывность $\mu(t)$: докажем отдельно непрерывность справа и слева.

Непрерывность справа. Пусть $t_n \searrow t$. Можно считать, что $\mu(t_n) < \frac{1}{2}$ (в противном случае $\mu(t_n) = \mu(t) = \frac{1}{2}$), поэтому минимум в (16.13) достигается:

$$\mu(t_n) = \frac{1}{2} + I_{t_n}(u_n), \quad u_n \in \mathcal{U}_{t_n}(0, 0), \quad \|u_n\| = 1.$$

Продолжим функции $u_n \in L_2^m[0, t_n]$ на отрезок $[0, t_1]$ нулем. Выбирая слабо сходящуюся подпоследовательность в единичном шаре, можно предполагать, что

$$u_n \rightarrow u \text{ слабо при } n \rightarrow \infty, \quad u \in \mathcal{U}_t(0, 0), \quad \|u\| \leq 1,$$

поэтому

$$I_{t_n}(u_n) \rightarrow I_t(u) \geq \inf \{ I_t(v) \mid v \in \mathcal{U}_t(0, 0), \|v\| = 1 \}, \quad t_n \searrow t.$$

Тогда

$$\mu(t) \leq \frac{1}{2} + \lim_{t_n \searrow t} I_{t_n}(u_n) = \lim_{t_n \searrow t} \mu(t_n).$$

В силу монотонности μ ,

$$\mu(t) = \lim_{t_n \searrow t} \mu(t_n),$$

и непрерывность справа доказана.

Непрерывность слева. Можно считать, что $\mu(t) < \frac{1}{2}$ (иначе $\mu(\tau) = \mu(t) = \frac{1}{2}$ при $\tau < t$). Поэтому минимум в (16.13) достигается:

$$\mu(t) = \frac{1}{2} + I_t(\hat{u}), \quad \hat{u} \in \mathcal{U}_t(0, 0), \quad \|\hat{u}\| = 1.$$

Для траектории

$$\hat{x}(\tau) = x(\tau, \hat{u}, 0)$$

получаем

$$\hat{x}(\tau) = \int_0^\tau e^{(\tau-\theta)A} B \hat{u}(\theta) d\theta.$$

Обозначим

$$\alpha(\varepsilon) = \|\hat{u}|_{[0, \varepsilon]}\|$$

и заметим, что

$$\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Обозначим шар

$$B_\delta = \{u \in L_2^m \mid \|u\| \leq \delta, u \in \mathcal{U}(0, 0)\}.$$

Очевидно,

$$x(\varepsilon, B_{\alpha(\varepsilon)}, 0) \ni \hat{x}(\varepsilon).$$

Отображение $u \mapsto x(\varepsilon, u, 0)$ из L_2^m в $\mathbb{R}^n$ линейно, а система $\dot{x} = Ax + Bu$ управляема, поэтому $x(\varepsilon, B_{\alpha(\varepsilon)}, 0)$ есть такое выпуклое полномерное множество в $\mathbb{R}^n$, что положительный конус, порожденный этим множеством, совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Поэтому

$$x(\varepsilon, 2B_{\alpha(\varepsilon)}, 0) = 2x(\varepsilon, B_{\alpha(\varepsilon)}, 0) \supset O_{x(\varepsilon, B_{\alpha(\varepsilon)}, 0)}$$

для некоторой окрестности $O_{x(\varepsilon, B_{\alpha(\varepsilon)}, 0)}$ множества $x(\varepsilon, B_{\alpha(\varepsilon)}, 0)$. Далее, существует такой момент $t_\varepsilon > \varepsilon$, что

$$\hat{x}(t_\varepsilon) \in x(\varepsilon, 2B_{\alpha(\varepsilon)}, 0),$$

следовательно,

$$\hat{x}(t_\varepsilon) = x(\varepsilon, v_\varepsilon, 0), \quad \|v_\varepsilon\| \leq 2\alpha(\varepsilon).$$

Можно считать, что $t_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим следующее семейство управлений, аппроксимирующее $\hat{u}$:

$$u_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} v_\varepsilon(\tau), & 0 \leq \tau \leq \varepsilon, \\ \hat{u}(\tau + t_\varepsilon - \varepsilon), & \varepsilon < \tau \leq t + \varepsilon - t_\varepsilon. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\in \mathcal{U}_{t+\varepsilon-t_\varepsilon}(0, 0), \\ \|\hat{u} - u_\varepsilon\| &\rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Но $t + \varepsilon - t_\varepsilon < t$ и функция μ невозрастающая, поэтому она непрерывна слева.

Непрерывность справа доказана выше, следовательно, μ непрерывна. $\square$

Докажем, что функция μ не может иметь более одного корня.

Предложение 16.3. Если $\mu(t) = 0$ для некоторого $t > 0$, то $\mu(\tau) < 0$ для всех $\tau > t$.

Доказательство. Пусть $\mu(t) = 0$, $t > 0$. По предложению 16.2, нижняя грань в (16.13) достигается на некотором управлении $\hat{u} \in \mathcal{U}_t(0, 0)$, $\|\hat{u}\| = 1$:

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \min\{J_t(u) \mid u \in \mathcal{U}_t(0, 0), \|u\| = 1\} \\ &= J_t(\hat{u}) = 0.\end{aligned}$$

Тогда

$$J_t(u) \geq J_t(\hat{u}) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_t(0, 0),$$

т.е. управление $\hat{u}$ оптимально, следовательно, удовлетворяет принципу максимума. Существует решение $(\xi(\tau), x(\tau))$, $\tau \in [0, t]$, гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{\xi} = x^*Q - \xi A, \\ \dot{x} = Ax + BB^*\xi^*, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$x(0) = x(t) = 0,$$

и

$$u(\tau) = B^*\xi^*(\tau), \quad \tau \in [0, t].$$

Мы доказали, что для любого корня t функции μ любое управление $u \in \mathcal{U}_t(0, 0)$, $\|u\| = 1$, для которого $J_t(u) = 0$, удовлетворяет ПМП.

Докажем, что $\mu(\tau) < 0$ для всех $\tau > t$. От противного, предположим, что функция μ обращается в нуль в некоторый момент $t' > t$. В силу монотонности μ ,

$$\mu|_{[t, t']} \equiv 0.$$

Следовательно, управление

$$u'(\tau) = \begin{cases} \hat{u}(\tau), & \tau \leq t, \\ 0, & \tau \in [t, t'], \end{cases}$$

удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}u' &\in \mathcal{U}_{t'}(0, 0), \quad \|u'\| = 1, \\ J_{t'}(u') &= 0.\end{aligned}$$

Поэтому u' удовлетворяет ПМП, то есть

$$u'(\tau) = B^*\xi'^*(\tau), \quad \tau \in [0, t'],$$

есть аналитическая функция. Но $u'|_{[t, t']} \equiv 0$, поэтому $u' \equiv 0$, что противоречит равенству $\|u'\| = 1$. $\square$

Было бы желательно получить способ решения уравнения $\mu(t) = 0$, не требующий процедуры минимизации в (16.13). Это возможно в терминах следующего понятия.

Определение 16.1. Точка $t > 0$ называется *сопряженной* точке 0 для рассматриваемой линейно-квадратичной задачи, если существует такое нетривиальное решение $(\xi(\tau), x(\tau))$ гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{\xi} = x^*Q - \xi A, \\ \dot{x} = Ax + BB^*\xi^* \end{cases}$$

что $x(0) = x(t) = 0$.

Предложение 16.4. Функция μ обращается в нуль в точке $t > 0$ тогда и только тогда, когда t есть ближайшая к 0 сопряженная точка.

Доказательство. Пусть $\mu(t) = 0$, $t > 0$. Во-первых, t есть сопряженная точка, это было показано в доказательстве предложения 16.3.

Пусть $t' > 0$ есть сопряженная точка. Вычислим функционал $J_{t'}$ на соответствующем управлении $u(\tau) = B^*\xi^*(\tau)$, $\tau \in [0, t']$:

$$\begin{aligned} J_{t'}(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{t'} \langle B^*\xi^*(\tau), B^*\xi^*(\tau) \rangle + \langle Qx(\tau), x(\tau) \rangle d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t'} \langle BB^*\xi^*(\tau), \xi^*(\tau) \rangle + \langle Qx(\tau), x(\tau) \rangle d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t'} \xi(\tau)(\dot{x}(\tau) - Ax(\tau)) + x^*(\tau)Qx(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t'} (\xi\dot{x} + \dot{\xi}x) d\tau \\ &= \frac{1}{2} (\xi(t')x(t') - \xi(0)x(0)) = 0. \end{aligned}$$

Итак, $\mu(t') \leq J_{t'}\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = 0$. Теперь утверждение следует из того, что функция μ невозрастающая. $\square$

Первая (ближайшая к нулю) сопряженная точка определяет существование и единственность оптимального управления в линейно-квадратичной задаче.

До первой сопряженной точки оптимальное управление существует и единственно для любых граничных условий (если бы существовало два оптимальных управления, то их разность порождала бы сопряженную точку).

В первой сопряженной точке получаем существование и неединственность для некоторых граничных условий и несуществование для других граничных условий.

А после первой сопряженной точки задача не имеет оптимальных решений ни для каких граничных условий.

Глава 17

Достаточные условия оптимальности, уравнение Гамильтона-Якоби и динамическое программирование

17.1 Достаточные условия оптимальности

Принцип максимума Понтрягина — универсальное и сильное необходимое условие оптимальности, однако теория достаточных условий оптимальности далеко не так полна. В этой главе мы рассмотрим подход к достаточным условиям оптимальности, обобщающий поля экстремалей классического вариационного исчисления.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U, \quad (17.1)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad q_0, q_1, t_1 \text{ закреплены}, \quad (17.2)$$

$$\int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt \rightarrow \min. \quad (17.3)$$

Зависящий от управления гамильтониан принципа максимума в нормальном случае равен

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_u(q) \rangle - \varphi(q, u), \quad \lambda \in T^*M, \quad q = \pi(\lambda) \in M, \quad u \in U.$$

Предположим, что максимизированный гамильтониан

$$H(\lambda) = \max_{u \in U} h_u(\lambda) \quad (17.4)$$

определен и гладок на T^*M . Можно предполагать гладкость H не всюду, а только на открытой области $O \subset T^*M$ и соответственно модифицировать полученные далее результаты. Но для упрощения изложения мы будем считать, что $O = T^*M$. Тогда траектории гамильтоновой системы

$$\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$$

суть экстремали задачи (17.1)–(17.3). Будем предполагать, что гамильтоново поле $\vec{H}$ полно.

17.1.1 Интегральный инвариант

Рассмотрим сначала общую конструкцию, которая сыграет ключевую роль при доказательстве достаточных условий оптимальности.

Зафиксируем произвольную гладкую функцию

$$a \in C^\infty(M).$$

График дифференциала da есть гладкое подмногообразие в T^*M :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \{d_q a \mid q \in M\} \subset T^*M, \\ \dim \mathcal{L}_0 &= \dim M = n.\end{aligned}$$

Трансляции $\mathcal{L}_0$ с помощью потока гамильтонова поля

$$\mathcal{L}_t = e^{t\vec{H}}(\mathcal{L}_0)$$

суть гладкие n -мерные подмногообразия в T^*M , а график отображения $t \mapsto \mathcal{L}_t$,

$$\mathcal{L} = \{(\lambda, t) \mid \lambda \in \mathcal{L}_t, 0 \leq t \leq t_1\} \subset T^*M \times \mathbb{R}$$

есть гладкое $(n+1)$ -мерное подмногообразие в $T^*M \times \mathbb{R}$.

Рассмотрим 1-форму

$$s - H dt \in \Lambda^1(T^*M \times \mathbb{R}).$$

Напомним, что s — это тавтологическая 1-форма на T^*M , $s_\lambda = \lambda \circ \pi_*$, а ее дифференциал есть каноническая симплектическая структура на T^*M , $ds = \sigma$. В механике форма $s - H dt = p dq - H dt$ называется *интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана* на расширенном фазовом пространстве $T^*M \times \mathbb{R}$.

Предложение 17.1. *Форма $(s - H dt)|_{\mathcal{L}}$ точна.*

Доказательство. Докажем сначала, что эта форма замкнута:

$$0 = d(s - H dt)|_{\mathcal{L}} = (\sigma - dH \wedge dt)|_{\mathcal{L}}. \quad (17.5)$$

(1) Зафиксируем $\mathcal{L}_t = \mathcal{L} \cap \{t = \text{const}\}$ и рассмотрим ограничение формы $\sigma - dH \wedge dt$ на $\mathcal{L}_t$. Имеем

$$(\sigma - dH \wedge dt)|_{\mathcal{L}_t} = \sigma|_{\mathcal{L}_t}$$

так как $dt|_{\mathcal{L}_t} = 0$. Напомним, что $\widehat{e^{t\vec{H}} \sigma} = \sigma$, поэтому

$$\sigma|_{\mathcal{L}_t} = \left(\widehat{e^{t\vec{H}} \sigma} \right) \Big|_{\mathcal{L}_0} = \sigma|_{\mathcal{L}_0} = ds|_{\mathcal{L}_0}.$$

Но $s|_{\mathcal{L}_0} = d(a \circ \pi)|_{\mathcal{L}_0}$, следовательно,

$$ds|_{\mathcal{L}_0} = d \circ d(a \circ \pi)|_{\mathcal{L}_0} = 0.$$

Мы доказали, что $(\sigma - dH \wedge dt)|_{\mathcal{L}_t} = 0$.

(2) Многообразие $\mathcal{L}$ есть образ гладкого отображения

$$(\lambda, t) \mapsto \left(e^{t\vec{H}} \lambda, t \right),$$

поэтому касательный вектор к $\mathcal{L}$, трансверсальный многообразию $\mathcal{L}_t$, есть

$$\vec{H}(\lambda) + \frac{\partial}{\partial t} \in T_{(\lambda, t)} \mathcal{L}.$$

Поэтому

$$T_{(\lambda, t)} \mathcal{L} = T_{(\lambda, t)} \mathcal{L}_t \oplus \mathbb{R} \left(\vec{H}(\lambda) + \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Для завершения доказательства подставим вектор $\vec{H}(\lambda) + \frac{\partial}{\partial t}$ в качестве первого аргумента в $\sigma - dH \wedge dt$ и покажем, что результат равен нулю. Получаем:

$$\begin{aligned} i_{\vec{H}} \sigma &= -dH, \quad i_{\frac{\partial}{\partial t}} \sigma = 0, \\ i_{\vec{H}}(dH \wedge dt) &= \underbrace{(i_{\vec{H}} dH)}_{=0} \wedge dt - dH \wedge \underbrace{(i_{\vec{H}} dt)}_{=0} = 0, \\ i_{\frac{\partial}{\partial t}}(dH \wedge dt) &= \underbrace{(i_{\frac{\partial}{\partial t}} dH)}_{=0} \wedge dt - dH \wedge \underbrace{(i_{\frac{\partial}{\partial t}} dt)}_{=1} = -dH, \end{aligned}$$

следовательно,

$$i_{\vec{H} + \frac{\partial}{\partial t}}(\sigma - dH \wedge dt) = -dH + dH = 0.$$

Мы доказали, что форма $(s - H dt)|_{\mathcal{L}}$ замкнута.

(3) Покажем, что эта форма точна, т.е.

$$\int_{\gamma} s - H dt = 0 \tag{17.6}$$

для любой замкнутой кривой

$$\gamma : \tau \mapsto (\lambda(\tau), t(\tau)) \in \mathcal{L}, \quad \tau \in [0, 1].$$

Кривая γ гомотопна кривой

$$\gamma_0 : \tau \mapsto (\lambda(\tau), 0) \in \mathcal{L}_0, \quad \tau \in [0, 1].$$

Так как форма $(s - H dt)|_{\mathcal{L}}$ точна, по формуле Стокса получаем

$$\int_{\gamma} s - H dt = \int_{\gamma_0} s - H dt.$$

Но интеграл по замкнутой кривой $\gamma_0 \subset \mathcal{L}_0$ вычисляется просто:

$$\int_{\gamma_0} s - H dt = \int_{\gamma_0} s = \int_{\gamma_0} d(a \circ \pi) = 0.$$

Равенство (17.6) доказано, т.е. форма $(s - H dt)|_{\mathcal{L}}$ точна. $\square$

17.1.2 Задача с закрепленным временем

Докажем достаточные условия оптимальности для задачи (17.1)–(17.3).

Теорема 17.1. *Предположим, что ограничение проекции $\pi|_{\mathcal{L}_t}$ является диффеоморфизмом для всех $t \in [0, t_1]$. Тогда для любого $\lambda_0 \in \mathcal{L}_0$ нормальная экстремальная траектория*

$$\tilde{q}(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda_0), \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

реализует строгий минимум функционала качества $\int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt$ среди всех допустимых траекторий $q(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, системы (17.1) с теми же граничными условиями:

$$q(0) = \tilde{q}(0), \quad q(t_1) = \tilde{q}(t_1). \quad (17.7)$$

Замечания. (1) В условиях теоремы не требуется проверка существования оптимального управления.

(2) Если все предположения (гладкость H , продолжаемость траекторий поля $\vec{H}$ на весь временной отрезок $[0, t_1]$, диффеоморфность ограничения $\pi|_{\mathcal{L}_t}$) выполняются в собственной открытой области $O \subset T^*M$, то утверждение теоремы 17.1 можно модифицировать и получить локальную оптимальность траектории $\tilde{q}(\cdot)$ в $\pi(O)$. Мы оставляем эти модификации читателю в виде упражнения.

Докажем теорему 17.1.

Доказательство. Кривая $\tilde{q}(t)$ есть проекция нормальной экстремали

$$\tilde{\lambda}_t = e^{t\vec{H}}(\lambda_0).$$

Пусть $\tilde{u}(t)$ — допустимое управление, максимизирующее гамильтониан вдоль этой экстремали:

$$H(\tilde{\lambda}_t) = h_{\tilde{u}(t)}(\tilde{\lambda}_t).$$

С другой стороны, пусть $q(t)$ — допустимая траектория системы (17.1), порожденная каким-нибудь управлением $u(t)$ и удовлетворяющая граничным условиям (17.7). Сравним значение функционала качества на парах $(\tilde{q}, \tilde{u})$ и (q, u) .

Так как $\pi : \mathcal{L}_t \rightarrow M$ есть диффеоморфизм, траекторию $\{q(t) \mid 0 \leq t \leq t_1\} \subset M$ можно поднять до гладкой кривой $\{\lambda(t) \mid 0 \leq t \leq t_1\} \subset T^*M$:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad \exists! \lambda(t) \in \mathcal{L}_t \quad \text{такое, что} \quad \pi(\lambda(t)) = q(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt &= \int_0^{t_1} \langle \lambda(t), f_{u(t)}(q(t)) \rangle - h_{u(t)}(\lambda(t)) dt \\ &\geq \int_0^{t_1} \langle \lambda(t), \dot{q}(t) \rangle - H(\lambda(t)) dt \\ &= \int_0^{t_1} \langle s_{\lambda(t)}, \dot{\lambda}(t) \rangle - H(\lambda(t)) dt \\ &= \int_{\gamma} s - H dt, \end{aligned} \tag{17.8}$$

где

$$\gamma : t \mapsto (\lambda(t), t) \in \mathcal{L}, \quad t \in [0, t_1].$$

По предложению 17.1, форма $(s - H dt)|_{\mathcal{L}}$ точна. Поэтому интеграл формы $(s - H dt)|_{\mathcal{L}}$ по кривой зависит только от конечных точек этой кривой. Кривые γ и

$$\tilde{\gamma} : t \mapsto (\tilde{\lambda}_t, t) \in \mathcal{L}, \quad \tilde{\lambda}_t = e^{t\tilde{H}}(\lambda_0), \quad t \in [0, t_1],$$

имеют одни и те же граничные точки (см. рис. 17.1), поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} s - H dt &= \int_{\tilde{\gamma}} s - H dt = \int_0^{t_1} \langle \tilde{\lambda}_t, \dot{\tilde{q}}(t) \rangle - H(\tilde{\lambda}_t) dt \\ &= \int_0^{t_1} \langle \tilde{\lambda}_t, f_{\tilde{u}(t)}(\tilde{q}(t)) \rangle - h_{\tilde{u}(t)}(\tilde{\lambda}_t) dt \\ &= \int_0^{t_1} \varphi(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t)) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt \geq \int_0^{t_1} \varphi(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t)) dt, \tag{17.9}$$

то есть траектория $\tilde{q}(t)$ оптимальна.

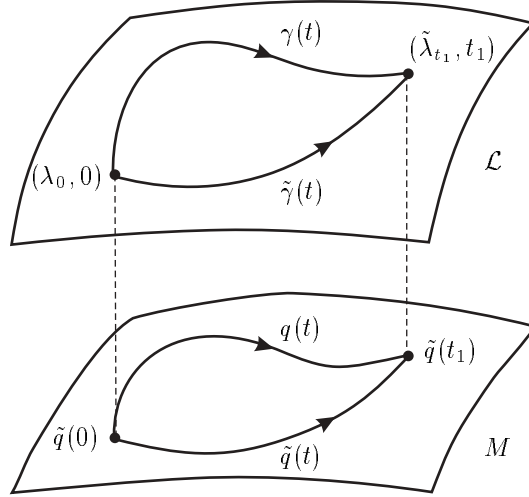


Рис. 17.1: Доказательство теоремы 17.1

Осталось доказать, что пара $(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t))$ доставляет строгий минимум, т.е. что неравенство (17.9) строгое.

Для фиксированной точки $q \in M$ будем записывать кокасательные векторы как $\lambda = (p, q)$, где p суть координаты ковектора λ в T_q^*M . Гамильтонианы $h_u(p, q)$ аффинно зависят от p , поэтому их максимум $H(p, q)$ является выпуклым по p . Любой вектор $\xi \in T_q M$ такой, что

$$\langle p, \xi \rangle = \max_{u \in U} \langle p, f_u(q) \rangle$$

определяет опорную гиперплоскость к надграфику отображения $p \mapsto H(p, q)$. В силу гладкости H по p , эта опорная гиперплоскость единственна, и максимум в (17.4) достигается на единственном касательном векторе. $q(t) \neq \tilde{q}(t)$, то неравенство (17.8) становится строгим, также как и неравенство (17.9). Теорема доказана. $\square$

Достаточные условия оптимальности теоремы 17.1 даются в терминах многообразий $\mathcal{L}_t$, которые в свою очередь определяются функцией a и потоком гамильтонова поля $\tilde{H}$. Оптимальность нормальной экстремальной траектории $\tilde{q}(t)$, $t \in [0, t_1]$, будет доказана, если удастся подобрать функцию $a \in C^\infty(M)$, для которой проекции $\pi : \mathcal{L}_t \rightarrow M$, $t \in [0, t_1]$, суть диффеоморфизмы.

При $t = 0$ проекция $\pi : \mathcal{L}_0 \rightarrow M$ является диффеоморфизмом. Поэтому при малых $t > 0$ любая функция $a \in C^\infty(M)$ порождает многообразия $\mathcal{L}_t$, диффеоморфно проецирующиеся на M , по крайней мере в пределах любого компакта $K \Subset M$. Таким образом получаем достаточные условия оптимальности для малых дуг экстремальных траекторий.

Следствие 17.1. *Для любого компакта $K \Subset M$, содержащего нормальную экстремальную траекторию*

$$\tilde{q}(t) = \pi \circ e^{t\tilde{H}}(\lambda_0), \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

существует такое $t'_1 \in (0, t_1]$, что дуга

$$\tilde{q}(t), \quad 0 \leq t \leq t'_1,$$

оптимальна относительно всех траекторий, содержащихся в K и удовлетворяющих таким же граничным условиям.

Во многих задачах можно подобрать достаточно большой компакт $K \supset \tilde{q}$ так, чтобы функционал J был отделен от нуля снизу на всех траекториях, покидающих K (так будет, например, если $\varphi(q, u) > 0$). Тогда малые дуги траекторий $\tilde{q}$ оптимальны глобально.

17.1.3 Задача со свободным временем

Для задач с интегральным критерием и свободным конечным временем t_1 справедливо достаточное условие оптимальности, аналогичное теореме 17.1, см. ниже теорему 17.2.

Напомним, что все нормальные экстремали в задаче со свободным временем лежат на поверхности нулевого уровня $H^{-1}(0)$ максимизированного гамильтониана H . Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Предложение 17.2. *Предположим, что 0 есть регулярное значение ограничения $H|_{\mathcal{L}_0}$, то есть $d_\lambda H|_{T_\lambda \mathcal{L}_0} \neq 0$ для всех $\lambda \in \mathcal{L}_0 \cap H^{-1}(0)$. Тогда отображение*

$$\Phi : \mathcal{L}_0 \cap H^{-1}(0) \times \mathbb{R} \rightarrow T^*M, \quad \Phi(\lambda_0, t) = e^{t\tilde{H}}(\lambda_0),$$

является погружением, а $\widehat{\Phi}s$ — точной формой.

Доказательство. Во-первых, регулярность нулевого значения отображения $H|_{\mathcal{L}_0}$ означает, что $\mathcal{L}_0 \cap H^{-1}(0)$ есть гладкое многообразие. Тогда точность формы $\widehat{\Phi}s$ легко следует из предложения 17.1. Чтобы доказать, что Φ — погружение, достаточно показать, что вектор $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\lambda_0, t) = \tilde{H}(\lambda_t)$, $\lambda_t = \Phi(\lambda_0, t)$, не касается образа пересечения $\mathcal{L}_0 \cap H^{-1}(0)$ при диффеоморфизме $e^{t\tilde{H}} : T^*M \rightarrow T^*M$ для всех $\lambda_0 \in \mathcal{L}_0 \cap H^{-1}(0)$. Заметим, что $e^{t\tilde{H}}(\mathcal{L}_0 \cap H^{-1}(0)) = \mathcal{L}_t \cap H^{-1}(0)$. Мы докажем немного больше, чем требуется, а именно, что $\tilde{H}(\lambda_t)$ не касается многообразия $\mathcal{L}_t$.

Из предложения 17.1 следует, что $\sigma|_{\mathcal{L}_t} = ds|_{\mathcal{L}_t} = 0$. Поэтому достаточно показать, что форма $(i_{\tilde{H}}\sigma)|_{\mathcal{L}_t}$ не обращается в нуль в точке λ_t . Напомним, что гамильтонов поток $e^{t\tilde{H}}$ сохраняет как σ , так и $\tilde{H}$. В частности,

$$(i_{\tilde{H}}\sigma)|_{\mathcal{L}_t} = \widehat{e^{t\tilde{H}}}((i_{\tilde{H}}\sigma)|_{\mathcal{L}_0}) = -\widehat{e^{t\tilde{H}}}(dH|_{\mathcal{L}_0}).$$

Отображение $\widehat{e^{t\tilde{H}}}$ обратимо. Поэтому достаточно показать, что $dH|_{\mathcal{L}_0}$ не обращается в нуль в точке λ_0 . Но это утверждение — условие нашей теоремы! $\square$

Теперь получим достаточные условия оптимальности для задачи со свободным временем.

Теорема 17.2. Пусть W — такая область в $\mathcal{L}_0 \cap H^{-1}(0) \times \mathbb{R}$, что ограничение

$$\pi \circ \Phi|_W : W \rightarrow M$$

является диффеоморфизмом W на область в M , и пусть

$$\tilde{\lambda}_t = e^{t\tilde{H}}(\tilde{\lambda}_0), \quad t \in [0, t_1],$$

есть такая нормальная экстремаль, что $(\tilde{\lambda}_0, t) \in W$ для всех $t \in [0, t_1]$. Тогда экстремальная траектория $\tilde{q}(t) = \pi(\tilde{\lambda}_t)$ (вместе с соответствующим управлением $\tilde{u}(t)$) реализует строгий минимум функционала $\int_0^\tau \varphi(q(t), u(t)) dt$ среди таких допустимых траекторий, что $q(t) \in \pi \circ \Phi(W)$ для всех $t \in [0, \tau]$, $q(0) = \tilde{q}(0)$, $q(\tau) = \tilde{q}(t_1)$, $\tau > 0$.

Доказательство. Положим $\mathcal{L} = \Phi(W)$, тогда отображение $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \pi(\mathcal{L})$ есть диффеоморфизм, а форма $s|_{\mathcal{L}}$ точна. Пусть $q(t)$, $t \in [0, \tau]$, есть допустимая траектория, порожденная управлением $u(t)$, содержащаяся в $\pi(\mathcal{L})$ и удовлетворяющая граничным условиям $q(0) = \tilde{q}(0)$, $q(\tau) = \tilde{q}(t_1)$. Тогда $q(t) = \pi(\lambda(t))$, $0 \leq t \leq \tau$, где $t \mapsto \lambda(t)$ — такая гладкая кривая в $\mathcal{L}$, что $\lambda(0) = \tilde{\lambda}_0$, $\lambda(\tau) = \tilde{\lambda}_{t_1}$.

Получаем $\int_{\lambda(\cdot)} s = \int_{\tilde{\lambda}} s$. Далее,

$$\int_{\tilde{\lambda}} s = \int_0^{t_1} \langle \tilde{\lambda}_t, \dot{\tilde{q}}(t) \rangle dt = \int_0^{t_1} \langle \tilde{\lambda}_t, f_{\tilde{u}(t)}(\tilde{q}(t)) \rangle dt = \int_0^{t_1} \varphi(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t)) dt.$$

Последнее равенство следует из того, что

$$\langle \tilde{\lambda}(t), f_{\tilde{u}(t)}(\tilde{q}(t)) \rangle - \varphi(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t)) = H(\tilde{\lambda}(t)) = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda(\cdot)} s &= \int_0^\tau \langle \lambda(t), \dot{q}(t) \rangle dt = \int_0^\tau h_{u(t)}(\lambda(t)) dt + \int_0^\tau \varphi(q(t), u(t)) dt \\ &\leq \int_0^\tau \varphi(q(t), u(t)) dt. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из цепочки $\max_{u \in U} h_u(\lambda(t)) = H(\lambda(t)) = 0$. Более того, это неравенство становится строгим, если кривая $t \mapsto \lambda(t)$ не является решением уравнения $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$, т.е. если она не совпадает с $\tilde{\lambda}(t)$. Итак,

$$\int_0^{t_1} \varphi(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t)) dt \leq \int_0^{\tau} \varphi(q(t), u(t)) dt,$$

причем это неравенство строгое, если q отлично от $\tilde{q}$. $\square$

17.2 Уравнение Гамильтона-Якоби

Будем предполагать, что условия теоремы 17.1 выполняются. Как было показано при доказательстве этой теоремы, форма $(s - H dt)|_{\mathcal{L}}$ точна, поэтому она равна дифференциалу некоторой функции:

$$(s - H dt)|_{\mathcal{L}} = dg, \quad g : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (17.10)$$

В силу взаимной однозначности проекции $\pi : \mathcal{L}_t \rightarrow M$, можно отождествить $(\lambda, t) \in \mathcal{L}_t \times \mathbb{R} \subset \mathcal{L}$ с $(q, t) \in M \times \mathbb{R}$ и определить g как функцию на $M \times \mathbb{R}$:

$$g = g(q, t).$$

Чтобы выяснить смысл функции g в нашей задаче оптимального управления, рассмотрим экстремаль

$$\tilde{\lambda}_t = e^{t\vec{H}}(\lambda_0)$$

и кривую

$$\tilde{\gamma} \subset \mathcal{L}, \quad \tilde{\gamma} : t \mapsto (\tilde{\lambda}_t, t),$$

так же как в теореме 17.1. Тогда

$$\int_{\tilde{\gamma}} s - H dt = \int_0^{t_1} \varphi(\tilde{q}(\tau), \tilde{u}(\tau)) d\tau, \quad (17.11)$$

где $\tilde{q}(t) = \pi(\tilde{\lambda}_t)$ — экстремальная траектория, а $\tilde{u}(t)$ — управление, максимизирующее гамильтониан $h_u(\lambda)$ вдоль $\tilde{\lambda}_t$. Равенства (17.10) и (17.11) означают, что

$$g(\tilde{q}(t), t) = g(q_0, 0) + \int_0^t \varphi(\tilde{q}(\tau), \tilde{u}(\tau)) d\tau,$$

т.е. $g(q, t) - g(q_0, 0)$ есть оптимальное качество движения между точками q_0 и q за время t . Начальное значение для g можно выбрать в форме

$$g(q_0, 0) = a(q_0), \quad q_0 \in M. \quad (17.12)$$

Действительно, при $t = 0$ определение (17.11) функции g записывается как

$$dg|_{t=0} = (s - H dt)|_{\mathcal{L}_0} = s|_{\mathcal{L}_0} = da,$$

что совместимо с (17.12).

Уравнение (17.10) можно переписать как уравнение в частных производных для g . В локальных координатах на M и T^*M получаем

$$q = x \in M, \quad \lambda = (\xi, x) \in T^*M, \quad g = g(x, t).$$

Тогда уравнение (17.10) записывается как

$$(\xi dx - H(\xi, x) dt)|_{\mathcal{L}} = dg(x, t),$$

то есть

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \xi, \\ \frac{\partial g}{\partial t} = -H(\xi, x). \end{cases}$$

Эту систему можно объединить в одно нелинейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + H\left(\frac{\partial g}{\partial x}, x\right) = 0, \quad (17.13)$$

которое называется *уравнением Гамильтона-Якоби*. Итак, оптимальное качество $g(x, t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби (17.13) с начальным условием (17.12).

Характеристическая система для уравнения в частных производных (17.13) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \\ \dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{d}{dt}g(x(t), t) = \xi \dot{x} - H. \end{cases}$$

Первые два уравнения образуют гамильтонову систему $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$ для нормальных экстремалей. То есть решение задачи оптимального управления (17.1)–(17.3) приводит к методу характеристик для уравнения Гамильтона-Якоби для оптимального качества.

17.3 Динамическое программирование

Уравнение Гамильтона-Якоби для оптимального качества можно вывести и непосредственно, минуя принцип максимума Понтрягина, благодаря идее, восходящей еще к Гюйгенсу и составляющее основу метода *динамического программирования* Беллмана, см. [3]. Для этого необходимо предположить, что оптимальное качество $g(q, t)$ существует и C^1 -гладко.

Пусть оптимальная траектория переводит точку q_0 в точку q за время t . Применим постоянное управление u на временном отрезке $[t, t + \delta t]$ и обозначим траекторию, выходящую из точки q , через $q_u(\tau)$, $\tau \in [t, t + \delta t]$. Так как $q_u(t + \delta t)$ — конечная точка допустимой траектории, начинающейся в q_0 , выполняется следующее неравенство для оптимального качества:

$$g(q_u(t + \delta t), t + \delta t) \leq g(q, t) + \int_t^{t+\delta t} \varphi(q_u(\tau), u) d\tau.$$

Разделим на δt :

$$\frac{1}{\delta t} (g(q_u(t + \delta t), t + \delta t) - g(q, t)) \leq \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} \varphi(q_u(\tau), u) d\tau$$

и перейдем к пределу при $\delta t \rightarrow 0$:

$$\left\langle \frac{\partial g}{\partial q}, f_u(q) \right\rangle + \frac{\partial g}{\partial t} \leq \varphi(q, u).$$

Получаем неравенство

$$\frac{\partial g}{\partial t} + h_u \left(\frac{\partial g}{\partial q}, q \right) \leq 0, \quad u \in U. \quad (17.14)$$

Пуст теперь $(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t))$ есть оптимальная пара. Пусть $t > 0$ — точка Лебега управления $\tilde{u}$. Возьмем любое $\delta t \in (0, t)$. Любой участок оптимальной траектории оптимален, поэтому $\tilde{q}(t - \delta t)$ есть конечная точка оптимальной траектории, также как и $\tilde{q}(t)$. Поэтому оптимальное качество g удовлетворяет равенству:

$$g(\tilde{q}(t), t) = g(\tilde{q}(t - \delta t), t - \delta t) + \int_{t-\delta t}^t \varphi(\tilde{q}(\tau), \tilde{u}(\tau)) d\tau.$$

Повторяем наше рассуждение:

$$\frac{1}{\delta t} (g(\tilde{q}(t), t) - g(\tilde{q}(t - \delta t), t - \delta t)) = \frac{1}{\delta t} \int_{t-\delta t}^t \varphi(\tilde{q}(\tau), \tilde{u}(\tau)) d\tau,$$

переходим к пределу $\delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + h_{\tilde{u}(t)} \left(\frac{\partial g}{\partial q}, q \right) = 0. \quad (17.15)$$

Это равенство вместе с неравенством (17.14) означает, что

$$h_{\tilde{u}(t)} \left(\frac{\partial g}{\partial q}, q \right) = \max_{u \in U} h_u \left(\frac{\partial g}{\partial q}, q \right).$$

Обозначим

$$H(\xi, q) = \max_{u \in U} h_u(\xi, q)$$

и запишем (17.15) как уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + H\left(\frac{\partial g}{\partial q}, q\right) = 0.$$

Поэтому производная оптимального качества $\frac{\partial g}{\partial q}$ равна импульсу ξ вдоль оптимальной траектории $\tilde{q}(t)$.

Мы не касаемся здесь обширной теории обобщенных негладких решений уравнения Гамильтона-Якоби для гладких и негладких гамильтонианов.

Глава 18

Гамильтоновы системы для геометрических задач оптимального управления

18.1 Гамильтоновы системы на тривиализованном кокасательном расслоении

18.1.1 Мотивация

Рассмотрим управляемую систему, которая описывается конечным набором векторных полей на многообразии M :

$$\dot{q} = f_u(q), \quad u \in \{1, \dots, k\}, \quad q \in M. \quad (18.1)$$

Построим параметризацию кокасательного расслоения T^*M , согласованную с этой системой. Сначала выберем базис в касательных пространствах T_qM из полей $f_u(q)$ и их повторных скобок Ли:

$$T_qM = \text{span}(f_1(q), \dots, f_n(q)),$$

мы предполагаем, что система имеет полный ранг. Получаем специальные координаты в касательных пространствах:

$$\begin{aligned} \forall v \in T_qM \quad v &= \sum_{i=1}^n \xi_i f_i(q), \\ (\xi_1, \dots, \xi_n) &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Поэтому любой касательный вектор к M представляется набором

$$(\xi_1, \dots, \xi_n; q), \quad (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q \in M,$$

т.е. получена своего рода параметризация касательного расслоения $TM = \cup_{q \in M} T_q M$. Можно построить координаты на TM выбирая локальные координаты в M , но такой выбор будет внешним по отношению к нашей системе, и мы будем работать на M без каких-либо координат.

Имея ввиду гамильтонову систему принципа максимума, перейдем к кокасательному расслоению. Построим двойственный базис в T^*M : выберем такие дифференциальные формы

$$\omega_1, \dots, \omega_n \in \Lambda^1 M,$$

что

$$\langle \omega_i, f_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда в кокасательных пространствах возникают специальные координаты:

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in T_q^* M \quad \lambda &= \sum_{i=1}^n \eta_i \omega_{iq}, \\ (\eta_1, \dots, \eta_n) &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Получаем параметризацию кокасательного расслоения:

$$\lambda \mapsto (\eta_1, \dots, \eta_n; q), \quad (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q \in M.$$

В обозначениях раздела 11.5,

$$\eta_i = f_i^*(\lambda) = \langle \lambda, f_i(q) \rangle$$

есть линейный на слоях гамильтониан, соответствующий полю f_i . Канонические координаты на T^*M возникают точно так же из коммутирующих векторных полей $f_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, соответствующих локальным координатам $(x_1, \dots, x_n)$ на M . Следовательно, в (единственно интересном для теории управления) случае некоммутирующих полей f_i «координаты» $(\eta_1, \dots, \eta_n; q)$ на T^*M не являются каноническими.

Наша цель — записать гамильтонову систему в этих нестандартных координатах на T^*M , или в каких-нибудь других естественных координатах, согласованных с изучаемой управляемой системой.

18.1.2 Тривиализация T^*M

Пусть M — гладкое многообразие размерности n , и пусть E — n -мерное векторное пространство. Предположим, что задана *тривиализация* кокасательного расслоения T^*M , т.е. такой диффеоморфизм

$$\Phi : E \times M \rightarrow T^*M,$$

что:

(1) диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
E \times M & \xrightarrow{\Phi} & T^*M \\
\downarrow & & \downarrow \pi \\
M & \xlongequal{\quad} & M
\end{array}$$

коммутативна, т.е.

$$\pi \circ \Phi(e, q) = q, \quad e \in E, \quad q \in M,$$

(2) для любых $q \in M$ отображение

$$e \mapsto \Phi(e, q), \quad e \in E,$$

есть линейный изоморфизм векторных пространств:

$$\Phi(\cdot, q) : E \rightarrow T_q^*M.$$

Пространство E отождествляется с любым слоем T_q^*M , т.е. оно является типичным слоем кокасательного расслоения T^*M .

Фиксируя вектор $e \in E$, получаем дифференциальную форму на M :

$$\Phi_e \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(e, \cdot) \in \Lambda^1 M.$$

В предыдущем разделе мы имели

$$\begin{aligned}
E &= \{(\eta_1, \dots, \eta_n)\} = \mathbb{R}^n, \\
\Phi(e, q) &= \sum_{i=1}^n \eta_i \omega_{iq},
\end{aligned}$$

но сейчас мы не фиксируем базис в E .

18.1.3 Симплектическая форма на $E \times M$

Чтобы записать гамильтонову систему на $E \times M \cong T^*M$, вычислим симплектическую форму $\hat{\Phi}\sigma$ на $E \times M$. Начнем с формы Лиувилля

$$s \in \Lambda^1(T^*M)$$

и вычислим ее перенос

$$\hat{\Phi}s \in \Lambda^1(E \times M).$$

Касательные и кокасательные пространства естественно отождествляются с прямыми произведениями:

$$\begin{aligned}
T_{(e,q)}(E \times M) &\cong T_e E \oplus T_q M \cong E \oplus T_q M, \\
T_{(e,q)}^*(E \times M) &\cong T_e^* E \oplus T_q^* M \cong E^* \oplus T_q^* M.
\end{aligned}$$

Любое векторное поле $V \in \text{Vec}(E \times M)$ есть сумма вертикальной и горизонтальной частей:

$$V = V_v + V_h, \quad V_v(e, q) \in E, \quad V_h(e, q) \in T_q M.$$

Аналогично, любая дифференциальная форма

$$\omega \in \Lambda^1(E \times M)$$

есть сумма вертикальной и горизонтальной частей:

$$\omega = \omega_v + \omega_h, \quad \omega_v(e, q) \in E^*, \quad \omega_h(e, q) \in T_q^* M.$$

Вертикальная часть ω_v равна нулю на горизонтальных касательных векторах, а горизонтальная часть ω_h — на вертикальных касательных векторах.

В частности, векторные поля и дифференциальные формы на M (быть может, зависящие от $e \in E$) можно рассматривать как горизонтальные векторные поля и дифференциальные формы на $E \times M$:

$$\begin{aligned} T_q M &= 0 \oplus T_q M \subset T_{(e, q)}(E \times M), \\ T_q^* M &= 0 \oplus T_q^* M \subset T_{(e, q)}^*(E \times M). \end{aligned}$$

Вычислим значение формы $\widehat{\Phi}s$ на касательном векторе $(\xi, v) \in T_e E \oplus T_q M$:

$$\langle \widehat{\Phi}s, (\xi, v) \rangle = \langle s_{\Phi(e, q)}, \Phi_*(\xi, v) \rangle = \langle s_{\Phi(e, q)}, (\Phi_*\xi, v) \rangle = \langle \Phi(e, q), v \rangle.$$

Поэтому

$$(\widehat{\Phi}s)_{(e, q)} = \Phi(e, q), \quad (18.2)$$

где Φ — правая часть (18.2), рассматриваемая как горизонтальная форма на $E \times M$.

Далее, вычислим перенос стандартной симплектической формы:

$$\widehat{\Phi}\sigma = \widehat{\Phi}ds = d\widehat{\Phi}s = d\Phi.$$

Напомним, что дифференциал формы $\omega \in \Lambda^1(N)$ может быть вычислен по формуле (11.15):

$$d\omega(W_1, W_2) = W_1\langle \omega, W_2 \rangle - W_2\langle \omega, W_1 \rangle - \langle \omega, [W_1, W_2] \rangle, \quad W_1, W_2 \in \text{Vec } N. \quad (18.3)$$

В нашем случае $N = E \times M$ выберем пробные векторы вида

$$W_i = (\xi_i, V_i) \in \text{Vec}(E \times M), \quad i = 1, 2,$$

где $\xi_i = \text{const} \in E$ — постоянные векторные поля и $V_i \in \text{Vec } M$ — горизонтальные векторные поля. В силу (18.3),

$$\begin{aligned} d\Phi((\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2)) \\ = (\xi_1, V_1)\langle \Phi(\cdot, \cdot), V_2 \rangle - (\xi_2, V_2)\langle \Phi(\cdot, \cdot), V_1 \rangle - \langle \Phi(\cdot, \cdot), [V_1, V_2] \rangle \end{aligned}$$

так как $[(\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2)] = [V_1, V_2]$. Далее,

$$((\xi_1, V_1)\langle\Phi(\cdot, \cdot), V_2\rangle)_{(e, \cdot)} = (\xi_1\langle\Phi(\cdot, \cdot), V_2\rangle + V_1\langle\Phi(\cdot, \cdot), V_2\rangle)_{(e, \cdot)}$$

учитывая, что Φ линейно по e

$$= \langle\Phi_{\xi_1}, V_2\rangle + V_1\langle\Phi_e, V_2\rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d\Phi((\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2))_{(e, \cdot)} = \\ \langle\Phi_{\xi_1}, V_2\rangle - \langle\Phi_{\xi_2}, V_1\rangle + V_1\langle\Phi_e, V_2\rangle - V_2\langle\Phi_e, V_1\rangle - \langle\Phi_e, [V_1, V_2]\rangle. \end{aligned}$$

Обозначим два первые слагаемые через

$$\tilde{\Phi}((\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2)) = \langle\Phi_{\xi_1}, V_2\rangle - \langle\Phi_{\xi_2}, V_1\rangle,$$

и применим формулу (18.3) к горизонтальной форме Φ_e :

$$d\Phi_e(V_1, V_2) = V_1\langle\Phi_e, V_2\rangle - V_2\langle\Phi_e, V_1\rangle - \langle\Phi_e, [V_1, V_2]\rangle.$$

В результате получаем выражение для переноса симплектической формы:

$$\widehat{\Phi}\sigma_{(e, \cdot)}((\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2)) = \tilde{\Phi}((\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2)) + d\Phi_e(V_1, V_2), \quad (18.4)$$

то есть

$$\widehat{\Phi}\sigma_{(e, \cdot)} = \tilde{\Phi} + d\Phi_e.$$

Замечание. В случае канонических координат можно взять пробные векторные поля $V_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, тогда получаем $d\Phi_e = 0$.

18.1.4 Гамильтонова система на $E \times M$

Формула (18.4) описывает симплектическую структуру $\widehat{\Phi}\sigma$ на $E \times M$. Вычислим теперь гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану

$$h \in C^\infty(E \times M).$$

Можно рассматривать h как семейство функций на M , параметризованное векторами из E :

$$h_e = h(e, \cdot) \in C^\infty(M), \quad e \in E.$$

Разложим искомое гамильтоново векторное поле в сумму вертикальной и горизонтальной частей:

$$\begin{aligned} \vec{h} &= X + Y, \\ X &= X(e, q) \in E, \\ Y &= Y(e, q) \in T_q M. \end{aligned}$$

По определению гамильтонова поля,

$$i_{X+Y}\widehat{\Phi}\sigma = -dh. \quad (18.5)$$

Преобразуем обе части этого равенства:

$$\begin{aligned} -dh &= \underbrace{-\frac{\partial h}{\partial e}}_{\in E^*} - \underbrace{dh_e}_{\in T^*M}, \\ i_{X+Y}|_e \widehat{\Phi}\sigma &= i_{X+Y}|_e (\tilde{\Phi} + d\Phi_e) = i_{(X,Y)}|_e \tilde{\Phi} + i_{(X,Y)}|_e d\Phi_e \\ &= \underbrace{\langle \Phi_X, \cdot \rangle}_{\in T^*M} - \underbrace{\langle \Phi, Y \rangle}_{\in E^*} + \underbrace{i_Y d\Phi_e}_{\in T^*M}. \end{aligned}$$

Приравняем друг другу вертикальные части (18.5):

$$\langle \Phi, Y \rangle = \frac{\partial h}{\partial e}, \quad (18.6)$$

из этого уравнения можно найти горизонтальную часть Y гамильтонова поля $\vec{h}$. Действительно, у линейного изоморфизма

$$\Phi(\cdot, q) : E \rightarrow T_q^*M$$

существует двойственное отображение

$$\Phi^*(\cdot, q) : T_q M \rightarrow E^*.$$

Тогда уравнение (18.6) можно записать как

$$\Phi^*(\cdot, q)Y = \frac{\partial h}{\partial e}(e, q),$$

а затем разрешить относительно Y :

$$Y = \Phi^{*-1} \frac{\partial h}{\partial e}.$$

Чтобы найти вертикальную часть X поля $\vec{h}$, приравняем друг другу горизонтальные части (18.5):

$$\Phi_X + i_Y d\Phi_e = -dh_e,$$

перепишем как

$$\Phi_X = -i_Y d\Phi_e - dh_e,$$

и решим это уравнение относительно X :

$$X = -\Phi^{-1}(i_Y d\Phi_e + dh_e).$$

Следовательно, гамильтонова система на $E \times M$, соответствующая гамильтониану h , имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{q} = \Phi^{*-1} \frac{\partial h}{\partial e}, \\ \dot{e} = -\Phi^{-1}(i_q d\Phi_e + dh_e). \end{cases} \quad (18.7)$$

Запишем теперь эту систему с использованием координат в кокасательных и касательных пространствах (координаты на M мы не используем).

Выберем базис в E :

$$E = \text{span}(e_1, \dots, e_n),$$

тогда векторы $u \in E$ представляются как

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i.$$

Получаем

$$\Phi(u, \cdot) = \Phi\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \cdot\right) = \sum_{i=1}^n u_i \omega_i,$$

где

$$\omega_i = \Phi_{e_i} \in \Lambda^1(M), \quad i = 1, \dots, n,$$

суть базисные 1-формы на M . Далее, внешние произведения

$$\omega_i \wedge \omega_j \in \Lambda^2(M), \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

образуют базис в пространстве 2-форм на M . Разложим дифференциалы в этом базисе:

$$d\omega_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j,$$

где коэффициенты суть гладкие функции

$$c_{ij}^k \in C^\infty(M), \quad i, j, k = 1, \dots, n,$$

кососимметрические по нижним индексам:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k.$$

Коэффициенты c_{ij}^k называются структурными константами (хотя они, вообще говоря, и непостоянны). Мы проясним этот термин и дадим простой рецепт их вычисления ниже в предложении 18.1.

Выберем репер в $T_q M$, двойственный реперу $\omega_1, \dots, \omega_n$:

$$\begin{aligned} V_1, \dots, V_n &\in \text{Vec } M, \\ \langle \omega_i, V_j \rangle &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Запишем нашу гамильтонову систему (18.7) во введенных координатах. Функция Гамильтона есть

$$h \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times M),$$

$$h = h(u_1, \dots, u_n, q), \quad (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q \in M.$$

В силу того, что

$$\langle \Phi^*(V_i), e_j \rangle = \langle \Phi_{e_j}, V_i \rangle = \langle \omega_j, V_i \rangle = \delta_{ij},$$

получаем

$$\Phi^*(V_i) = e_i^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где единственная единица — i -ая компонента. Следовательно, горизонтальная часть поля $\vec{h}$ раскладывается по горизонтальным полям следующим образом:

$$Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial u_i} V_i.$$

Рассмотрим вертикальную часть поля $\vec{h}$:

$$X = -\Phi^{-1}(i_Y d\Phi_u + dh_u).$$

Второе слагаемое легко вычислить, так как

$$dh_u = \sum_{i=1}^n (V_i h_u) \omega_i,$$

это разложение проверяется на базисных векторных полях V_i . А первое слагаемое имеет вид

$$-\Phi^{-1} i_Y d\Phi_u = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{1}{2} u_k c_{ij}^k \left(\frac{\partial h}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial u_i} - \frac{\partial h}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_j} \right),$$

мы оставляем проверку читателю в качестве упражнения.

Итак, гамильтонова система в подвижных реперах $(V_1, \dots, V_n)$ и $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{q} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial u_i} V_i, \\ \dot{u}_i = -V_i h_u + \sum_{j,k=1}^n u_k c_{ij}^k \frac{\partial h}{\partial u_j}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Замечание. Эта система становится особенно простой (треугольной), если гамильтониан не зависит от точек на базе:

$$\frac{\partial h}{\partial q} = 0.$$

Вертикальная подсистема упрощается еще больше, когда

$$c_{ij}^k = \text{const}, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Оба эти условия выполняются для инвариантных задач на группах Ли, которые мы рассмотрим в следующих разделах.

Структурные константы c_{ij}^k легко выражаются в терминах скобок Ли базисных векторных полей.

Предложение 18.1. Пусть векторные поля $V_1, \dots, V_n \in \text{Vec } M$ образуют двойственный репер к реперу 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Lambda^1(M)$:

$$\langle \omega_i, V_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Равенство

$$d\omega_k = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j, \quad k = 1, \dots, n,$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$[V_i, V_j] = - \sum_{k=1}^n c_{ij}^k V_k, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Равенство для $d\omega_k$ можно переписать в следующем виде:

$$\langle d\omega_k, (V_i, V_j) \rangle = c_{ij}^k, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Левая часть вычисляется по формуле (18.3):

$$\langle d\omega_k, (V_i, V_j) \rangle = \underbrace{V_i \langle \omega_k, V_j \rangle}_{=0} - \underbrace{V_j \langle \omega_k, V_i \rangle}_{=0} - \langle \omega_k, [V_i, V_j] \rangle,$$

и утверждение доказано. $\square$

Если коэффициенты c_{ij}^k постоянны, то пространство, натянутое на векторные поля $V_1, \dots, V_n$, образует конечномерную алгебру Ли, и числа c_{ij}^k называются *структурными константами* этой алгебры Ли. Как было отмечено выше, для векторных полей общего вида $c_{ij}^k \neq \text{const}$.

18.2 Группы Ли

Пространства состояний многих интересных задач в геометрии, механике и приложениях часто являются не просто гладкими многообразиями, а группами Ли, в частности, группами преобразований. Многообразие с групповой структурой называется *группой Ли*, если групповые операции гладкие. Кокасательное расслоение группы Ли имеет естественную тривиализацию. Мы развиваем подход предыдущего раздела и изучаем задачи оптимального управления на группах Ли.

18.2.1 Примеры групп Ли

Наиболее важные примеры групп Ли — это группы линейных преобразований конечномерных векторных пространств.

Группа всех невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ называется *общей линейной группой*:

$$\mathrm{GL}(n) = \{X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \det X \neq 0\}.$$

Линейные преобразования $\mathbb{R}^n$, сохраняющие объем, образуют *специальную линейную группу*:

$$\mathrm{SL}(n) = \{X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \det X = 1\}.$$

Для этих групп используются также обозначения $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$ соответственно. *Ортогональная группа* состоит из всех линейных преобразований, сохраняющих евклидову структуру:

$$\mathrm{O}(n) = \{X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid X^*X = \mathrm{Id}\},$$

а ортогональные преобразования, сохраняющие ориентацию, образуют *специальную ортогональную группу*:

$$\mathrm{SO}(n) = \{X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid X^*X = \mathrm{Id}, \det X = 1\}.$$

Можно также рассматривать комплексную и эрмитову версии этих групп:

$$\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n), \quad \mathrm{SL}(\mathbb{C}^n), \quad \mathrm{U}(n), \quad \mathrm{SU}(n),$$

для этого в приведенных выше определениях нужно заменить $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{C}^n$. Каждая из этих групп реализуется как подгруппа соответствующей вещественной или ортогональной группы. А именно, общую линейную группу $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ и *унитарную группу* $\mathrm{U}(n)$ можно рассматривать соответственно как подгруппы $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2n})$ и $\mathrm{O}(2n)$, коммутирующие с умножением на мнимую единицу:

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \mid A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \det^2 A + \det^2 B \neq 0 \right\} \\ \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2n}), \end{aligned}$$

$$U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \mid A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \right. \\ \left. AA^* + BB^* = \text{Id}, BA^* - AB^* = 0 \right\} \subset GL(\mathbb{C}^n) \cap O(2n).$$

Специальная линейная группа $SL(\mathbb{C}^n)$ и *специальная унитарная группа* $SU(n)$ реализуются следующим образом:

$$SL(\mathbb{C}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \mid A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \det(A + iB) = 1 \right\} \subset SL(\mathbb{R}^{2n}),$$

$$SU(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \mid A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \right. \\ \left. AA^* + BB^* = \text{Id}, BA^* - AB^* = 0, \det(A + iB) = 1 \right\} \\ = U(n) \cap SL(\mathbb{C}^n) \subset SO(2n).$$

Группы Ли линейных преобразований называются *линейными группами Ли*. Эти группы часто возникают в качестве пространств состояний управляемых систем: например, $SO(n)$ возникает при исследовании вращающихся конфигураций. Для таких систем можно рассматривать, как обычно, задачи управляемости и оптимального управления.

18.2.2 Теорема Ли для линейных групп Ли

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\dot{X} = XA, \quad X \in M = GL(N), \quad A \in \mathcal{A} \subset \mathfrak{gl}(N), \quad (18.8)$$

где $\mathcal{A}$ — произвольное подмножество $\mathfrak{gl}(N)$, пространства всех вещественных $N \times N$ матриц. Вычислим орбиты этой системы. Системы вида (18.8) называются *левоинвариантными*: они сохраняются при умножении слева на любую постоянную матрицу $Y \in GL(N)$.

Отметим, что решение дифференциального уравнения с постоянной матрицей A

$$\dot{X} = XA$$

задается матричной экспонентой:

$$X(t) = X(0)e^{tA}.$$

Скобка Ли левоинвариантных векторных полей левоинвариантна:

$$[XA, XB] = X[A, B], \quad (18.9)$$

это следует из координатного представления коммутатора (упражнение).

Замечание. Вместо левоинвариантных систем $\dot{X} = XA$, можно рассматривать *правоинвариантные* системы: $\dot{X} = CX$. Эти формы эквивалентны и переводятся одна в другую переходом к обратным матрицам. Однако скобка Ли правоинвариантных векторных полей имеет вид

$$[CX, DX] = [D, C]X,$$

эта формула менее удобна, чем (18.9).

Вернемся к управляемой системе (18.8). По теореме об орбите, проходящая через единицу орбита $\mathcal{O}_{\text{Id}}(\mathcal{A})$ есть погруженное подмногообразие в $\text{GL}(N)$. Более того, по определению, орбита представляется с помощью композиции потоков:

$$\mathcal{O}_{\text{Id}}(\mathcal{A}) = \{\text{Id} \circ e^{t_1 A_1} \circ \dots \circ e^{t_k A_k} \mid t_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}\}$$

поэтому и через произведение матричных экспонент

$$= \{e^{t_1 A_1} \cdot \dots \cdot e^{t_k A_k} \mid t_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Следовательно, орбита $\mathcal{O}_{\text{Id}}(\mathcal{A})$ — подгруппа в $\text{GL}(N)$. Далее, в доказательстве теоремы об орбите мы показали, что точка $q \circ e^{t_1 A_1} \circ \dots \circ e^{t_k A_k}$ зависит от $(t_1, \dots, t_k)$ непрерывно в «сильной» топологии орбиты, а потому и гладко.

Подведем итоги. Мы показали, что орбита, проходящая через единицу, удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) $\mathcal{O}_{\text{Id}}(\mathcal{A})$ есть погруженное подмногообразие $\text{GL}(N)$,
- (2) $\mathcal{O}_{\text{Id}}(\mathcal{A})$ есть подгруппа в $\text{GL}(N)$,
- (3) групповые операции $(X, Y) \mapsto XY$, $X \mapsto X^{-1}$ в $\mathcal{O}_{\text{Id}}(\mathcal{A})$ гладкие.

Иными словами, орбита $\mathcal{O}_{\text{Id}}(\mathcal{A})$ являются *подгруппой Ли* группы $\text{GL}(N)$.

Касательные пространства к орбите легко вычисляются с помощью аналитической версии теоремы об орбите (система (18.8) вещественно аналитична):

$$\begin{aligned} T_{\text{Id}}\mathcal{O}_{\text{Id}}(\mathcal{A}) &= \text{Lie}(\mathcal{A}), \\ T_X\mathcal{O}_{\text{Id}}(\mathcal{A}) &= X \text{Lie}(\mathcal{A}). \end{aligned} \tag{18.10}$$

Орбита левоинвариантной системы (18.8), проходящая через любую точку $X \in \text{GL}(N)$, получается левыми сдвигами орбиты, проходящей через единицу:

$$\mathcal{O}_X(\mathcal{A}) = \{X e^{t_1 A_1} \dots e^{t_k A_k} \mid t_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}\} = X \mathcal{O}_{\text{Id}}(\mathcal{A}).$$

Выше мы рассматривали систему (18.8), заданную произвольным подмножеством $\mathcal{A} \subset \mathfrak{gl}(N)$. Если ограничиться подалгебрами Ли

$$\mathcal{A} = \text{Lie}(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{gl}(N),$$

то легко видеть, что доказано следующее предложение: каждой подалгебре Ли $\mathcal{A} \subset \mathfrak{gl}(N)$ соответствует такая связная подгруппа Ли $M \subset \mathrm{GL}(N)$, что $T_{\mathrm{Id}}M = \mathcal{A}$. Здесь $M = \mathcal{O}_{\mathrm{Id}}\mathcal{A}$. Покажем теперь, что это соответствие обратимо.

Пусть M есть связная подгруппа Ли группы $\mathrm{GL}(N)$, т.е.:

- (1) M есть связное погруженное подмногообразие $\mathrm{GL}(N)$,
- (2) M образует группу относительно матричного произведения,
- (3) групповые операции $(X, Y) \mapsto XY$, $X \mapsto X^{-1}$ суть гладкие отображения в M .

Тогда $\mathrm{Id} \in M$. Рассмотрим касательное пространство

$$T_{\mathrm{Id}}M = \left\{ A = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Gamma_t \mid \Gamma_t \in M, \Gamma_t \text{ гладкая}, \Gamma_0 = \mathrm{Id} \right\}.$$

Так как $M \subset \mathrm{GL}(N) \subset \mathfrak{gl}(N)$, получаем

$$T_{\mathrm{Id}}M \subset \mathfrak{gl}(N).$$

Далее,

$$A \in T_{\mathrm{Id}}M, X \in M \Rightarrow XA \in T_XM$$

так как вектор

$$XA = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X\Gamma_t$$

есть скорость кривой $X\Gamma_t$, где $A = \dot{\Gamma}_0$. Следовательно, для любого $A \in T_{\mathrm{Id}}M$ векторное поле XA тождественно касается многообразия M . Поэтому на M корректно определена следующая управляемая система:

$$\dot{X} = XA, \quad X \in M, \quad A \in T_{\mathrm{Id}}M.$$

Эта система имеет полный ранг. Пространство состояний M связно, поэтому оно совпадает с орбитой $\mathcal{O}_{\mathrm{Id}}$ этой системы, проходящей через единицу. Но касательное пространство к орбите уже вычислено, см. (18.10), поэтому

$$T_{\mathrm{Id}}M = T_{\mathrm{Id}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Id}}) = \mathrm{Lie}(T_{\mathrm{Id}}M).$$

То есть $T_{\mathrm{Id}}M$ есть подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{gl}(N)$. Мы доказали следующее классическое предложение.

Теорема 18.1 (Ли). *Существует такое взаимно однозначное соответствие между подалгебрами Ли $\mathcal{A} \subset \mathfrak{gl}(N)$ и связными подгруппами Ли $M \subset \mathrm{GL}(N)$, что $T_{\mathrm{Id}}M = \mathcal{A}$.*

Мы показали, что теорема Ли для линейных алгебр и групп Ли следует из теоремы об орбите: связные группы Ли суть орбиты левоинвариантных систем, задающихся подалгебрами Ли, а подалгебры Ли суть касательные пространства к подгруппам Ли в единице.

18.2.3 Абстрактные группы Ли

Абстрактная группа Ли есть абстрактное гладкое многообразие (не вложенное ни в какое объемлющее пространство), одновременно являющееся группой, с гладкими групповыми операциями. Справедлива теорема Адо [140], согласно которой любая конечномерная алгебра Ли изоморфна подалгебре Ли алгебры $\mathfrak{gl}(N)$. Аналогичное утверждение для групп Ли неверно: любая группа Ли может быть представлена как подгруппа Ли группы $GL(N)$ только локально, но, вообще говоря, не глобально. Однако важнейшие свойства линейных групп Ли обобщаются на абстрактные группы Ли.

А именно, пусть M есть группа Ли. Для любой точки $q \in M$, умножение слева на q :

$$\bar{q} : M \rightarrow M, \quad \bar{q}(x) = qx, \quad x \in M,$$

есть диффеоморфизм многообразия M . Любой касательный вектор

$$v \in T_{\text{Id}}M$$

можно перенести в любую точку $q \in M$ левым сдвигом $\bar{q}$:

$$V(q) = \bar{q}_*v \in T_qM, \quad q \in M,$$

в результате чего возникает левоинвариантное векторное поле на M :

$$V \in \text{Vec } M, \quad \bar{q}_*V = V, \quad q \in M.$$

Имеется взаимно однозначное соответствие между левоинвариантными векторными полями на M и касательными векторами к M в единице:

$$V \mapsto V(\text{Id}) = v.$$

Левые сдвиги на M сохраняют потоки левоинвариантных векторных полей на M , а потому и потоки их коммутаторов. Следовательно, левоинвариантные векторные поля на группе Ли M образуют алгебру Ли, которая называется алгеброй Ли группы Ли M . Поэтому и касательное пространство $T_{\text{Id}}M$ есть алгебра Ли.

Так же как в линейном случае, можно доказать теорему Ли о взаимно однозначном соответствии между подгруппами Ли группы Ли M и подалгебрами Ли ее алгебры Ли $\mathcal{A}$.

18.3 Гамильтоновы системы на группах Ли

18.3.1 Тривиализация кокасательного расслоения группы Ли

Пусть $M \subset GL(N)$ — подгруппа Ли. Обозначим через $\mathcal{M}$ соответствующую подалгебру Ли:

$$\mathcal{M} = T_{\text{Id}}M \subset \mathfrak{gl}(N).$$

Кокасательное расслоение группы Ли M имеет тривиализацию вида

$$\Phi : \mathcal{M}^* \times M \rightarrow T^*M,$$

где $\mathcal{M}^*$ есть сопряженное пространство алгебры Ли $\mathcal{M}$. Сначала опишем сопряженное отображение

$$\Phi^* : TM \rightarrow \mathcal{M} \times M.$$

Напомним, что $T_q M = qT_{\text{Id}} M = q\mathcal{M}$ для любого $q \in M$. Положим

$$\Phi^* : qa \mapsto (a, q), \quad a \in \mathcal{M}, \quad q \in M, \quad qa \in T_q M. \quad (18.11)$$

То есть значение левоинвариантного векторного поля qa в точке q отображается в пару, состоящую из значения этого поля в единице и точки q . Сама же тривиализация Φ имеет вид:

$$\Phi : (x, q) \mapsto \bar{x}_q, \quad x \in \mathcal{M}^*, \quad q \in M, \quad \bar{x}_q \in T_q^* M, \quad (18.12)$$

где $\bar{x}$ — левоинвариантная 1-форма на M , в единице совпадающая с x :

$$\langle \bar{x}_q, qa \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, a \rangle.$$

18.3.2 Гамильтонова система на $\mathcal{M}^* \times M$

Гамильтонова система, соответствующая функции Гамильтона

$$h = h(x, q) \in C^\infty(\mathcal{M}^* \times M)$$

была вычислена в разделе 18.1, см. (18.7):

$$\begin{cases} \dot{q} = \Phi^{-1*} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \dot{x} = -\Phi^{-1}(dh_x + i_{\dot{q}} d\Phi_x). \end{cases} \quad (18.13)$$

Учитывая определение (18.11) отображения Φ^* , первое уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\dot{q} = q \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Здесь $\frac{\partial h}{\partial x}$ — вертикальная часть формы $dh \in \Lambda^1(\mathcal{M}^* \times M)$, то есть

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, q) \in (\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}, \quad (x, q) \in \mathcal{M}^* \times M.$$

Чтобы найти $\dot{x}$, вычислим действие дифференциала $d\bar{x} = d\Phi_x$ на левоинвариантных векторных полях по формуле (11.15):

$$d\bar{x}(qa, qb) = (qa) \underbrace{\langle x, b \rangle}_{=\text{const}} - (qb) \underbrace{\langle x, a \rangle}_{=\text{const}} - \langle x, [a, b] \rangle = -\langle x, [a, b] \rangle.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}i_q d\Phi_x &= \Phi^{-1}i_{q \frac{\partial h}{\partial x}} d\bar{x} = - \left\langle x, \left[\frac{\partial h}{\partial x}, \cdot \right] \right\rangle = - \left\langle x, \left(\text{ad} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \cdot \right\rangle \\ &= - \left\langle \left(\text{ad} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^* x, \cdot \right\rangle = - \left(\text{ad} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^* x.\end{aligned}$$

Поэтому гамильтонова система (18.13) принимает следующую форму:

$$\begin{cases} \dot{q} = q \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \dot{x} = \left(\text{ad} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^* x - \Phi^{-1} dh_x. \end{cases} \quad (18.14)$$

Напомним, что dh_x есть горизонтальная часть формы dh , поэтому

$$(dh_x)_q \in T_q^* M, \quad (x, q) \in \mathcal{M}^* \times M,$$

и

$$\Phi^{-1} dh_x \in \mathcal{M}^*.$$

Система (18.14) описывает гамильтонову систему для произвольной группы Ли и любой функции Гамильтона h .

В случае коммутативных групп Ли (возникающем в тривиализации T^*M , порожденной локальными координатами на M), первое слагаемое во втором уравнении (18.14) исчезает, и мы получаем обычную форму гамильтоновой системы в канонических координатах:

$$\begin{cases} \dot{q} = q \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \dot{x} = -\Phi^{-1} dh_x. \end{cases}$$

В случае левоинвариантного гамильтониана:

$$h = h(x),$$

гамильтонова система (18.14) становится треугольной:

$$\begin{cases} \dot{q} = q \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \dot{x} = \left(\text{ad} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^* x. \end{cases} \quad (18.15)$$

Здесь второе уравнение не содержит q . Поэтому в левоинвариантных задачах управления, где гамильтониан принципа максимума h левоинвариантен, можно сначала независимо решать уравнение для вертикальных координат x , а затем переходить к горизонтальному уравнению для q .

18.3.3 Компактные группы Ли

Гамильтонова система (18.15) упрощается еще более в случае компактных групп Ли.

Пусть M есть компактная подгруппа Ли группы $GL(N)$. Тогда M можно рассматривать как подгруппу Ли ортогональной группы $O(N)$. Действительно, можно выбрать евклидову структуру $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathbb{R}^N$, инвариантную относительно всех преобразований из M :

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad v, w \in \mathbb{R}^N, \quad A \in M \subset GL(N).$$

Такую структуру можно получить из любой евклидовой структуры $g(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R}^N$ усреднением по $A \in M$ с помощью формы объема $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$, где ω_i суть базисные левоинвариантные формы на M :

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \int_M \gamma_{v,w} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n, \\ \gamma_{v,w}(A) &= g(Av, Aw), \quad A \in M. \end{aligned}$$

Поэтому будем предполагать, что все элементы M суть ортогональные $N \times N$ матрицы, а касательное пространство к M в единице состоит из кососимметрических матриц:

$$\mathcal{M} = T_{\text{Id}} M \subset T_{\text{Id}} O(N) = \text{so}(N) = \{a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \mid a^* + a = 0\}.$$

На $\text{so}(N)$ имеется инвариантное скалярное произведение, которое определяется следующим образом:

$$\langle a, b \rangle = -\text{tr} ab, \quad a, b \in \text{so}(N).$$

Инвариантность этого произведения означает, что

$$\langle e^{t \text{ad } c} a, e^{t \text{ad } c} b \rangle = \langle a, b \rangle, \quad a, b, c \in \text{so}(N), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (18.16)$$

то есть оператор

$$\text{Ad } e^{tc} = e^{t \text{ad } c} : \text{so}(N) \rightarrow \text{so}(N)$$

ортогонален относительно этого произведения. Равенство (18.16) есть следствие инвариантности следа:

$$\begin{aligned} \langle e^{t \text{ad } c} a, e^{t \text{ad } c} b \rangle &= \langle (\text{Ad } e^{tc})a, (\text{Ad } e^{tc})b \rangle = \langle e^{tc} a e^{-tc}, e^{tc} b e^{-tc} \rangle \\ &= -\text{tr}(e^{tc} a e^{-tc} e^{tc} b e^{-tc}) = -\text{tr}(e^{tc} a b e^{-tc}) = -\text{tr}(ab) \\ &= \langle a, b \rangle. \end{aligned}$$

Знак минус в определении инвариантного скалярного произведения на $\text{so}(N)$ обеспечивает положительную определенность произведения. Это легко видеть в координатах: если

$$\begin{aligned} a &= (a_{ij}), & b &= (b_{ij}) \in \text{so}(N), \\ a_{ij} &= -a_{ji}, & b_{ij} &= -b_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

то

$$-\operatorname{tr}(ab) = -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}b_{ji} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}b_{ij}.$$

Норма на $\mathfrak{so}(N)$ определяется естественным образом:

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}, \quad a \in \mathfrak{so}(N).$$

Инфинитезимальная версия свойства инвариантности (18.16) легко получается дифференцированием при $t = 0$:

$$\langle [c, a], b \rangle + \langle a, [c, b] \rangle = 0, \quad a, b, c \in \mathfrak{so}(N). \quad (18.17)$$

То есть все операторы

$$\operatorname{ad} c : \mathfrak{so}(N) \rightarrow \mathfrak{so}(N), \quad c \in \mathfrak{so}(N),$$

кососимметричны относительно инвариантного скалярного произведения. Равенство (18.17) есть многомерное обобщение свойства векторного и скалярного произведения в $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{so}(3)$.

Так как $\mathcal{M} \subset \mathfrak{so}(N)$, инвариантное скалярное произведение определено и на алгебре Ли $\mathcal{M}$. Тогда сопряженное пространство $\mathcal{M}^*$ можно отождествить с алгеброй Ли $\mathcal{M}$ с помощью скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^*, \quad a \mapsto \langle a, \cdot \rangle.$$

В терминах этого отождествления, оператор $(\operatorname{ad} a)^*$, $a \in \mathcal{M}$, принимает вид:

$$(\operatorname{ad} a)^* : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad (\operatorname{ad} a)^* = -\operatorname{ad} a.$$

В случае компактной группы Ли M гамильтонова система (18.15) для инвариантного гамильтониана $h = h(a)$ определена на $\mathcal{M} \times M$ и записывается как

$$\begin{cases} \dot{q} = q \frac{\partial h}{\partial a}, \\ \dot{a} = \left[a, \frac{\partial h}{\partial a} \right]. \end{cases} \quad (18.18)$$

Мы применим эту формулу в следующей главе для решения нескольких геометрических задач оптимального управления.

Глава 19

Примеры задач оптимального управления на компактных группах Ли

19.1 Риманова задача

Пусть M — компактная группа Ли. Инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathcal{M} = T_{\text{Id}}M$ определяет левоинвариантную риманову структуру на M :

$$\langle qu, qv \rangle_q \stackrel{\text{def}}{=} \langle u, v \rangle, \quad u, v \in \mathcal{M}, \quad q \in M, \quad qu, qv \in T_q M.$$

Поэтому в каждом касательном пространстве $T_q M$ имеется скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$. Для любой липшицевой кривой

$$q : [0, 1] \rightarrow M$$

ее риманова длина определяется как интеграл скорости:

$$l = \int_0^1 |\dot{q}(t)| dt, \quad |\dot{q}| = \sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle}.$$

Задача состоит в том, чтобы для любой заданной пары точек $q_0, q_1 \in M$ найти кратчайшую кривую в M , соединяющую q_0 с q_1 .

Соответствующая задача оптимального управления ставится следую-

щим образом:

$$\dot{q} = qu, \quad q \in M, \quad u \in \mathcal{M}, \quad (19.1)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(1) = q_1, \quad (19.2)$$

$$q_0, q_1 \in M \text{ закреплены}, \quad (19.3)$$

$$l(u) = \int_0^1 |u(t)| dt \rightarrow \min.$$

Сначала докажем существование оптимальных управлений. Параметризуя траектории управляемой системы (19.1) длиной дуги, мы видим, что задача с неограниченным управлением $u \in \mathcal{M}$ на фиксированном отрезке $t \in [0, 1]$ эквивалентна задаче с компактным пространством управляющих параметров $U = \{|u| = 1\}$ и свободным конечным временем. После этого можно расширить пространство управляющих параметров до $U = \{|u| \leq 1\}$, чтобы множество допустимых скоростей $f_U(q)$ стало выпуклым. Тогда из теоремы Филиппова следует существование оптимальных управлений в полученной, а потому и в исходной задаче.

По неравенству Коши-Буняковского,

$$(l(u))^2 = \left(\int_0^1 |u(t)| dt \right)^2 \leq \int_0^1 |u(t)|^2 dt,$$

более того, равенство имеет место только при $|u(t)| \equiv \text{const}$. Следовательно, риманова задача $l \rightarrow \min$ эквивалентна задаче

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(t)|^2 dt \rightarrow \min. \quad (19.4)$$

Функционал J удобнее, чем l , так как J гладок и его экстремали — автоматически кривые с постоянной скоростью. Далее будем рассматривать задачу с функционалом J : (19.1)–(19.4). Гамильтониан принципа максимума для этой задачи равен

$$h_u^\nu(a, q) = \langle \bar{a}_q, qu \rangle + \frac{\nu}{2} |u|^2 = \langle a, u \rangle + \frac{\nu}{2} |u|^2.$$

Условие максимума ПМП имеет вид:

$$h_{u(t)}^\nu(a(t), q(t)) = \max_{v \in \mathcal{M}} (\langle a(t), v \rangle + \frac{\nu}{2} |v|^2), \quad \nu \leq 0.$$

(1) Анормальный случай: $\nu = 0$.

Из условия максимума следует, что $a(t) \equiv 0$. Это противоречит ПМП, так как пара (ν, a) должна быть отличной от нуля. Поэтому анормальных экстремалей в данной задаче нет.

(2) Нормальный случай: $\nu = -1$.

Условие максимума дает $u(t) \equiv a(t)$, поэтому максимизированный гамильтониан гладок:

$$H(a) = \frac{1}{2} |a|^2.$$

Заметим, что гамильтониан H инвариантен (не зависит от q), что является следствием левоинвариантности задачи.

Оптимальные траектории суть проекции решений гамильтоновой системы, соответствующей H . Эта гамильтонова система имеет вид (см. (18.18)):

$$\begin{cases} \dot{q} = qa, \\ \dot{a} = [a, a] = 0. \end{cases}$$

Поэтому оптимальные траектории — левые сдвиги однопараметрических подгрупп в M :

$$q(t) = q_0 e^{ta}, \quad a \in \mathcal{M},$$

напомним, что оптимальные решения существуют. В частности, для случая $q_0 = \text{Id}$ получаем, что любая точка $q_1 \in M$ может быть представлена в виде

$$q_1 = e^a, \quad a \in \mathcal{M}.$$

То есть любой элемент q_1 компактной алгебры Ли M имеет логарифм a в алгебре Ли $\mathcal{M}$.

19.2 Субриманова задача

Модифицируем предыдущую задачу. Как и раньше, будем искать кратчайшую кривую между фиксированными точками q_0, q_1 в компактной группе Ли M . Но теперь допустимые скорости $\dot{q}$ несвободны: они должны касаться левоинвариантного распределения (коранга 1) на M . То есть мы зададим левоинвариантное поле касательных гиперплоскостей на M , и скорость $\dot{q}(t)$ должна принадлежать гиперплоскости, приложенной в точке $q(t)$. Задача нахождения кратчайшей кривой, касающейся данного распределения, называется *субримановой задачей*, см. рис. 19.1.

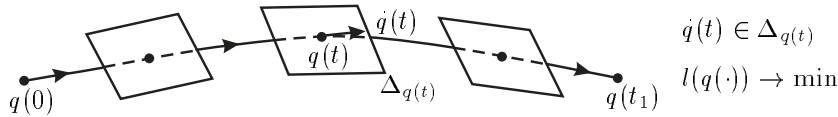


Рис. 19.1: Субриманова задача

Чтобы сформулировать соответствующую задачу оптимального управления, выберем любой элемент $b \in \mathcal{M}$, $|b| = 1$. Тогда множество допустимых скоростей в единице есть гиперплоскость

$$U = b^\perp = \{u \in \mathcal{M} \mid \langle u, b \rangle = 0\}.$$

Замечание. В случае $M = \text{SO}(3)$, это ограничение на скорости означает, что мы фиксируем прямую b в твердом теле и разрешаем только вращения тела вокруг любой оси u , ортогональной прямой b .

Задача оптимального управления ставится следующим образом.

$$\begin{aligned}\dot{q} &= qu, & q &\in M, & u &\in U, \\ q(0) &= q_0, & q(1) &= q_1, \\ q_0, q_1 &\in M \text{ закреплены,} \\ l(u) &= \int_0^1 |u(t)| dt \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Так же как в римановой задаче, теорема Филиппова обеспечивает существование оптимальных управлений, и задача минимизации длины эквивалентна задаче

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(t)|^2 dt \rightarrow \min.$$

Гамильтониан принципа максимума такой же, как в предыдущей задаче:

$$h_u^\nu(a, q) = \langle a, u \rangle + \frac{\nu}{2} |u|^2,$$

но условие максимума отличается, т.к. теперь множество U меньше, чем раньше:

$$h_{u(t)}^\nu(a(t), q(t)) = \max_{v \in b^\perp} (\langle a(t), v \rangle + \frac{\nu}{2} |v|^2).$$

Рассмотрим сначала нормальный случай: $\nu = -1$. Из правила множителей Лагранжа получаем, что максимум

$$\max_{v \in b^\perp} h_v^{-1}(a, q)$$

достигается на векторе

$$v_{\max} = a - \langle a, b \rangle b,$$

ортогональной проекции вектора a на $U = b^\perp$. Максимизированный гамильтониан гладок:

$$H(a) = \frac{1}{2} (|a|^2 - \langle a, b \rangle^2),$$

и гамильтонова система для нормальных экстремалей имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{q} = q(a - \langle a, b \rangle b), \\ \dot{a} = \langle a, b \rangle [b, a]. \end{cases}$$

Второе уравнение имеет первый интеграл

$$\langle a, b \rangle = \text{const},$$

что легко проверить дифференцированием в силу этого уравнения:

$$\frac{d}{dt}\langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle \langle [b, a], b \rangle$$

по инвариантности скалярного произведения

$$= -\langle a, b \rangle \langle a, [b, b] \rangle = 0.$$

Следовательно, уравнение для a можно переписать как

$$\dot{a} = \langle a_0, b \rangle [b, a] = \text{ad}(\langle a_0, b \rangle b) a,$$

где $a_0 = a(0)$. Это линейное дифференциальное уравнение легко решается:

$$a(t) = e^{t \text{ad}(\langle a_0, b \rangle b)} a_0.$$

Теперь рассмотрим уравнение для q :

$$\dot{q} = q \left(e^{t \text{ad}(\langle a_0, b \rangle b)} a_0 - \langle a_0, b \rangle b \right)$$

так как $e^{t \text{ad}(\langle a_0, b \rangle b)} b = b$

$$= q e^{t \text{ad}(\langle a_0, b \rangle b)} (a_0 - \langle a_0, b \rangle b). \quad (19.5)$$

Это уравнение можно проинтегрировать с помощью формулы вариации. Действительно, по формуле (2.29) получаем:

$$e^{t(f+g)} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t e^{\tau \text{ad} f} g d\tau \circ e^{tf},$$

то есть

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t e^{\tau \text{ad} f} g d\tau = e^{t(f+g)} \circ e^{-tf} \quad (19.6)$$

для любых векторных полей f и g . Полагая

$$f = \langle a_0, b \rangle b, \quad g = a_0 - \langle a_0, b \rangle b,$$

решаем уравнение (19.5):

$$q(t) = q_0 e^{ta_0} e^{-t \langle a_0, b \rangle b}. \quad (19.7)$$

Следовательно, нормальные траектории суть произведения двух однопараметрических групп.

Рассмотрим аномальный случай: $\nu = 0$. Гамильтониан

$$h_u^0(a, q) = \langle a, u \rangle, \quad u \perp b,$$

достигает максимума только если

$$a(t) = \alpha(t)b, \quad \alpha(t) \in \mathbb{R}. \quad (19.8)$$

Но второе уравнение гамильтоновой системы записывается как

$$\dot{a} = [a, u], \quad (19.9)$$

поэтому

$$\langle \dot{a}, a \rangle = \langle [a, u], a \rangle = -\langle u, [a, a] \rangle = 0,$$

то есть $\dot{a} \perp a$. В сочетании с (19.8) это означает, что

$$a(t) = \text{const} = \alpha b, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (19.10)$$

Отметим, что $\alpha \neq 0$, так как пара $(\nu, a(t))$ должна быть отличной от нуля. Из равенств (19.9) и (19.10) следует, что аномальные экстремальные управления $u(t)$ удовлетворяют соотношению

$$[u(t), b] = 0.$$

То есть $u(t)$ принадлежит подалгебре Ли

$$H_b = \{c \in \mathcal{M} \mid [c, b] = 0\} \subset \mathcal{M}.$$

Для векторов $b \in \mathcal{M}$ общего положения подалгебра H_b есть подалгебра Картана в $\mathcal{M}$, поэтому H_b абелева. В этом случае первое уравнение гамильтоновой системы

$$\dot{q} = qu$$

содержит только взаимно коммутирующие управления:

$$u(\tau) \in H_b \quad \Rightarrow \quad [u(\tau_1), u(\tau_2)] = 0,$$

и это уравнение легко решается:

$$q(t) = q_0 e^{\int_0^t u(\tau) d\tau}. \quad (19.11)$$

Обратно, все траектории вида (19.11) с $u(\tau) \in H_b$, $\tau \in [0, t]$, аномальны: они являются проекциями аномальных экстремалей $(q(t), a(t))$ с $a(t) = \alpha b$ для любых $\alpha \neq 0$.

Приведем элементарное объяснение рассуждения с подалгеброй Картана в случае $\mathcal{M} = \mathfrak{so}(n)$. Любую кососимметрическую матрицу $b \in \mathfrak{so}(n)$ можно привести заменой переменных к диагональной форме:

$$TbT^{-1} = \begin{pmatrix} i\alpha_1 & & & & \\ & -i\alpha_1 & & & \\ & & i\alpha_2 & & \\ & & & -i\alpha_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (19.12)$$

для некоторого $T \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$. Но замены переменных (даже комплексные) не влияют на коммутативность:

$$[c, b] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [TcT^{-1}, TbT^{-1}] = 0,$$

поэтому подалгебру H_b можно вычислить, используя новые координаты:

$$H_b = T^{-1}H_{TbT^{-1}}T.$$

Кососимметрические матрицы $b \in \text{so}(n)$ общего положения имеют разные собственные значения, поэтому для матриц b общего положения диагональная матрица (19.12) имеет разные диагональные элементы. Для таких b алгебру Ли $H_{TbT^{-1}}$ легко найти. Действительно, коммутатор диагональной матрицы

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

с любой матрицей $c = (c_{ij})$ вычисляется следующим образом:

$$(\text{ad } b) c = ((\beta_i - \beta_j)c_{ij}).$$

Если диагональная матрица b имеет простой спектр:

$$\beta_i - \beta_j \neq 0, \quad i \neq j,$$

то алгебра Ли H_b состоит из диагональных матриц вида (19.12), следовательно, H_b абелева.

Итак, для матрицы $b \in \text{so}(n)$ с разными собственными значениями (т.е. для матрицы $b \in \text{so}(n)$ общего положения) алгебра Ли $H_{TbT^{-1}}$ абелева, поэтому H_b также абелева.

Возвращаясь к нашей субримановой задаче, подведем итоги: мы вычислили все нормальные экстремальные кривые (19.7) и описали аномальные экстремальные кривые (19.11) для элементов $b \in \mathcal{M}$ общего положения.

Упражнение 19.1. Рассмотрим более общую субриманову задачу, которая ставится так же, как изученная в этом разделе, но теперь пространством управляющих параметров $U \subset \mathcal{M}$ будет любое линейное подпространство, ортогональное дополнение которого $U^\perp$ относительно инвариантного скалярного произведения есть подалгебра Ли:

$$[U^\perp, U^\perp] \subset U^\perp. \quad (19.13)$$

Докажите, что нормальные экстремали в этой задаче суть произведения двух однопараметрических групп (как и в рассмотренном выше случае коранга один):

$$a_\perp = \text{const}, \quad (19.14)$$

$$a_U(t) = e^{t \text{ad } a_\perp} a_U^0, \quad a_U^0 = a_U(0), \quad (19.15)$$

$$q(t) = q_0 e^{ta} e^{-ta_\perp}, \quad (19.16)$$

где $a = a_U + a_\perp$ есть разложение вектора $a \in \mathcal{M}$, соответствующее разбиению $\mathcal{M} = U \oplus U^\perp$. Мы используем это утверждение при решении следующей задачи.

19.3 Управление квантовыми системами

Этот раздел основан на работе У. Боскаина, Т. Шамбриона и Ж.-П. Готье [103].

Рассмотрим трехуровневую квантовую систему, которая описывается уравнением Шредингера (в системе единиц с $\hbar = 1$):

$$i\dot{\psi} = H\psi, \quad (19.17)$$

где $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^3$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, есть волновая функция и

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & \Omega_1 & 0 \\ \bar{\Omega}_1 & E_2 & \Omega_2 \\ 0 & \bar{\Omega}_2 & E_3 \end{pmatrix} \quad (19.18)$$

есть гамильтониан. Здесь $E_1 < E_2 < E_3$ — постоянные уровни энергии системы и $\Omega_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — управления, описывающие воздействие внешнего поля. Управления связаны с физическими параметрами уравнениями $\Omega_j(t) = \mu_j \mathcal{F}_j(t)/2$, $j = 1, 2$, где $\mathcal{F}_j$ — внешнее поле, а μ_j — спаривания (внутренние свойства квантовой системы), о которых мы предполагаем что спариваются только уровни j и $j + 1$.

Эту конечномерную задачу можно рассматривать как редукцию бесконечномерной задачи. А именно, начнем с гамильтониана, равного сумме сноса H_0 и потенциала $V(t)$ (соответствующего управляющим лазерам). Снос предполагается диагональным с собственными значениями (уровнями энергии) $E_1 < E_2 < E_3 < \dots$. В этом спектральном разрешении H_0 мы считаем, что управление $V(t)$ спаривает только уровни энергии E_1, E_2 и E_2, E_3 . Задача, спроецированная на собственные пространства, соответствующие E_1, E_2, E_3 , полностью расщепляется и описывается гамильтонианом (19.18).

Задача оптимального управления ставится следующим образом. Предположим, что в начальный момент $t = 0$ состояние системы принадлежит собственному пространству, соответствующему нижнему уровню энергии E_1 . Требуется определить управления Ω_1, Ω_2 , переводящие систему в конечный момент времени $t = t_1$ в собственное пространство, соответствующее E_3 , с минимальным значением функционала (энергии в дальнейшем):

$$J = \int_0^T (|\Omega_1(t)|^2 + |\Omega_2(t)|^2) dt.$$

С физической точки зрения, эту задачу можно рассматривать либо с произвольными управлениями $\Omega_i(t) \in \mathbb{C}$, либо с управлениями «в резонансе»:

$$\Omega_j(t) = u_j(t)e^{i(\omega_j t + \alpha_j)}, \quad \omega_j = E_{j+1} - E_j, \quad (19.19)$$

$$u_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha_j \in [-\pi, \pi], \quad j = 1, 2. \quad (19.20)$$

В дальнейшем мы называем вторую задачу минимизации энергии J , которая в этом случае сводится к

$$\int_0^{t_1} (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt, \quad (19.21)$$

«вещественно-резонансной» задачей. Первую задачу (с произвольными комплексными управлениями) будем называть «общей комплексной» задачей.

Так как гамильтониан (19.18) самосопряжен: $H^* = H$, уравнение Шредингера (19.17) корректно определено на единичной сфере

$$S_{\mathbb{C}} = S^5 = \{\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 = 1\}.$$

Источник и цель, т.е. начальное и конечное многообразия в общей комплексной задаче суть соответственно окружности

$$S_{\mathbb{C}}^d = \{(e^{i\varphi}, 0, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{T}_{\mathbb{C}}^d = \{(0, 0, e^{i\varphi}) \mid \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

Смысл метки $(^d)$ мы разъясним ниже.

Итак, общая комплексная задача ставится следующим образом:

$$\begin{aligned} i\dot{\psi} &= H\psi, & \psi &\in S^5, & \Omega_1, \Omega_2 &\in \mathbb{C}, \\ \psi(0) &\in S_{\mathbb{C}}^d, & \psi(t_1) &\in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}^d, \\ \int_0^{t_1} (|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2) dt &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

где гамильтониан H задается уравнением (19.18).

Для вещественно-резонансного случая имеем управляемую систему (19.17) с гамильтонианом (19.18), допустимыми управлениями (19.19), (19.20) и функционалом (19.21). Естественные пространство состояний, источник и цель для этой задачи мы определим ниже.

19.3.1 Исключение сноса

Выполним замену переменных, преобразующую аффинную по управлению систему (19.17), (19.18) в линейную по управлению систему, как в общем комплексном, так и в вещественно-резонансном случае.

Для $\Omega \in \mathbb{C}$ обозначим через $M_j(\Omega)$ и $N_j(\Omega)$ матрицы порядка n :

$$\begin{aligned} M_j(\Omega)_{k,l} &= \delta_{j,k} \delta_{j+1,l} \Omega + \delta_{j+1,k} \delta_{j,l} \overline{\Omega} \\ N_j(\Omega)_{k,l} &= \delta_{j,k} \delta_{j+1,l} \Omega - \delta_{j+1,k} \delta_{j,l} \overline{\Omega}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (19.22)$$

где δ — символ Кронекера: $\delta_{i,j} = 1$ при $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ при $i \neq j$. Пусть $\Delta = \text{diag}(E_1, E_2, E_3)$, $\omega_j = E_{j+1} - E_j$, $j = 1, 2$. Мы рассмотрим последовательно общую комплексную задачу:

$$i\dot{\psi} = H\psi, \quad H = \Delta + \sum_{j=1}^2 M_j(\Omega_j), \quad \Omega_j \in \mathbb{C},$$

и вещественно-резонансную задачу:

$$i\dot{\psi} = H\psi, \quad H = \Delta + \sum_{j=1}^2 M_j(e^{i(\omega_j t + \alpha_j)} u_j), \quad u_j, \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

В обоих случаях, сначала применим замену переменных $\psi = e^{-it\Delta}\Lambda$ и получим:

$$i\dot{\Lambda} = \sum_{j=1}^2 (\text{Ad } e^{it\Delta} M_j(\Omega_j)) \Lambda = \sum_{j=1}^2 M_j(e^{-it\omega_j} \Omega_j) \Lambda.$$

Источник $\mathcal{S}$ и цель $\mathcal{T}$ сохраняются этой первой заменой переменных.

Общий комплексный случай

В этом случае выполняем зависящую от времени и сохраняющую функционал замену управлений:

$$e^{-it\omega_j} \Omega_j = i\tilde{\Omega}_j.$$

После этого задача приобретает форму (с заменой обозначений $\Lambda \rightarrow \psi$, $\tilde{\Omega}_j \rightarrow u_j$):

$$\dot{\psi} = \sum_{j=1}^2 N_j(u_j) \psi = \tilde{H}_{\mathbb{C}} \psi, \quad u_j \in \mathbb{C}, \quad (19.23)$$

$$\int_0^{t_1} (|u_1|^2 + |u_2|^2) dt \rightarrow \min, \quad (19.24)$$

$$\psi(0) \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^d, \quad \psi(t_1) \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}^d, \quad (19.25)$$

где

$$\tilde{H}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & u_1(t) & 0 \\ -\bar{u}_1(t) & 0 & u_2(t) \\ 0 & -\bar{u}_2(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.26)$$

Отметим, что матрицы $N_j(1), N_j(i)$ порождают $\mathfrak{su}(3)$ как алгебру Ли. Функционал и связь между управлениями до и после исключения сноса суть следующие:

$$J = \int_0^{t_1} (|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2) dt, \quad (19.27)$$

$$\Omega_1(t) = u_1(t) e^{i[(E_2 - E_1)t + \pi/2]}, \quad (19.28)$$

$$\Omega_2(t) = u_2(t) e^{i[(E_3 - E_2)t + \pi/2]}. \quad (19.29)$$

Вещественно-резонансный случай

В этом случае $\Omega_j = u_j e^{i(\omega_j t + \alpha_j)}$, и мы получаем:

$$i\dot{\Lambda} = \sum_{j=1}^2 M_j (e^{i\alpha_j} u_j) \Lambda, \quad u_j \in \mathbb{R}.$$

Выполним еще одну диагональную линейную замену переменных:

$$\Lambda = e^{iL} \phi, \quad L = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \lambda_j \in \mathbb{R},$$

после которой получаем:

$$i\dot{\phi} = \sum_{j=1}^2 M_j \left(e^{i(\alpha_j + \lambda_{j+1} - \lambda_j)} u_j \right) \phi.$$

Выберем такие параметры λ_j , что $e^{i(\alpha_j + \lambda_{j+1} - \lambda_j)} = i$, тогда уравнение переписывается в виде:

$$\dot{\phi} = \sum_{j=1}^2 N_j(u_j) \phi, \quad u_j \in \mathbb{R}. \quad (19.30)$$

Источник и цель также сохраняются этой заменой переменных. Отметим, что матрицы $N_1(1)$, $N_2(1)$ в (19.30) порождают $\mathfrak{so}(3)$ как алгебру Ли. Поэтому орбита системы (19.30), проходящая через точки $(\pm 1, 0, 0)$, есть вещественная сфера S^2 . Следовательно (используя умножение справа на $e^{i\varphi}$), заключаем, что орбита, проходящая через точки $(\pm e^{i\varphi}, 0, 0)$, есть множество $S^2 e^{i\varphi}$. Поэтому (после замены обозначения $\phi \rightarrow \psi$) вещественно-резонансная задача корректно определена на вещественной сфере

$$S_{\mathbb{R}} = S^2 = \{ \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |\psi|^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 1 \},$$

следующим образом:

$$\dot{\psi} = \sum_{j=1}^2 N_j(u_j) \psi = \tilde{H}_{\mathbb{R}} \psi, \quad \psi \in S^2, \quad u_j \in \mathbb{R}, \quad (19.31)$$

$$\int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min, \quad (19.32)$$

$$\psi(0) \in \{(\pm 1, 0, 0)\}, \quad \psi(t_1) \in \{(0, 0, \pm 1)\}, \quad (19.33)$$

где

$$\tilde{H}_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & u_1(t) & 0 \\ -u_1(t) & 0 & u_2(t) \\ 0 & -u_2(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.34)$$

Функционал, как и раньше, задается формулой (19.27), а соотношение между управлениями до и после устранения сноса имеет вид:

$$\begin{aligned}\Omega_j(t) &= u_j(t) e^{i(\omega_j t + \alpha_j)}, & \omega_j &= E_{j+1} - E_j, \\ u_j : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \alpha_j &\in [-\pi, \pi], \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

Мы будем далее использовать метки $(\mathbb{C})$ и $(\mathbb{R})$ для обозначения соответственно общей комплексной и вещественно-резонансной задач. Если эти метки в формуле опущены, это означает, что формула справедлива как для общей комплексной, так и для вещественно-резонансной задач. В этих обозначениях:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^d &= \{(e^{i\varphi}, 0, 0)\}, & \mathcal{T}_{\mathbb{C}}^d &= \{(0, 0, e^{i\varphi})\}, \\ \mathcal{S}_{\mathbb{R}}^d &= \{(\pm 1, 0, 0)\}, & \mathcal{T}_{\mathbb{R}}^d &= \{(0, 0, \pm 1)\}.\end{aligned}$$

19.3.2 Подъем задач на группы Ли

Задачи (19.23)–(19.25) и (19.31)–(19.33) на сферах $S_{\mathbb{C}} = S^5$ и $S_{\mathbb{R}} = S^2$ естественно поднимаются до правоинвариантных задач на группах Ли $M_{\mathbb{C}} = \text{SU}(3)$ и $M_{\mathbb{R}} = \text{SO}(3)$ соответственно. Поднятая задача имеет вид

$$\dot{q} = \tilde{H}q, \quad q \in M. \quad (19.35)$$

Обозначим проекции

$$\pi_{\mathbb{C}} : \text{SU}(3) \rightarrow S^5, \quad \pi_{\mathbb{R}} : \text{SO}(3) \rightarrow S^2,$$

которые обе определяются как

$$q \mapsto q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. матрица переводится в свой первый столбец. Будем называть задачи (19.35) на группах Ли M задачами наверху, а задачи (19.23), (19.31) на сферах S задачами внизу. Мы обозначаем задачу наверху (upstairs) меткой $(^u)$ параллельно с меткой $(^d)$ для задач внизу (downstairs).

Вычислим теперь граничные условия для задач наверху. Обозначим соответствующие источники и цели:

$$\mathcal{S}^u = \pi^{-1}(\mathcal{S}^d), \quad \mathcal{T}^u = \pi^{-1}(\mathcal{T}^d).$$

Источник $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^u$ состоит из матриц $q \in \text{SU}(3)$ с первым столбцом в $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^d$:

$$q = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right), \quad \alpha \in \text{U}(1), \quad A \in \text{U}(2), \quad \det q = 1.$$

Обозначим подгруппу в $SU(3)$, состоящую из таких матриц, через $S(U(1) \times U(2))$. То есть цель наверху в общей комплексной задаче есть подгруппа

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^u = S(U(1) \times U(2)).$$

Далее, матрица

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

отображает $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^d$ на $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}^d$, поэтому

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C}}^u = \hat{q} \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^u = \hat{q} S(U(1) \times U(2)).$$

Аналогично, в вещественном случае источник наверху есть

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}^u = S(O(1) \times O(2)),$$

подгруппа в $SO(3)$, состоящая из матриц

$$q = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right), \quad \alpha \in O(1), \quad A \in O(2), \quad \det q = 1,$$

а цель есть

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}}^u = \hat{q} \mathcal{S}_{\mathbb{R}}^u = \hat{q} S(O(1) \times O(2)).$$

Итак, мы можем сформулировать задачи наверху. Вещественная задача наверху имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \tilde{H}_{\mathbb{R}} q = (u_1 X_1 + u_2 X_2) q, \quad q \in SO(3), \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \\ q(0) &\in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}^u, \quad q(t_1) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}^u, \\ \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt &\rightarrow \min, \end{aligned} \quad (19.36)$$

где

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.37)$$

Заметим, что вещественная задача наверху есть правоинвариантная субриманова задача на компактной группе Ли $SO(3)$ с пространством управляющих параметров $U \subset \mathfrak{so}(3)$ коранга один, такую задачу мы рассматривали в разделе 19.2. В нашей вещественной задаче

$$U = \text{span}(X_1, X_2), \quad U^\perp = \text{span}(X_3), \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, репер (19.37) ортонормален относительно инвариантного скалярного произведения

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY), \quad X, Y \in \mathfrak{so}(3).$$

Комплексная задача наверху ставится следующим образом:

$$\dot{q} = \tilde{H}_{\mathbb{C}} q = (u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 Y_1 + u_4 Y_2) q, \quad q \in \mathrm{SU}(3), \quad u_j \in \mathbb{R}, \quad (19.38)$$

$$q(0) \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^u, \quad q(t_1) \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}^u, \\ \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) dt \rightarrow \min.$$

Здесь X_1 и X_2 задаются формулами (19.37) и

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Пространство управляющих параметров есть

$$U = \operatorname{span}(X_1, X_2, Y_1, Y_2).$$

Отметим, что его ортогональное дополнение равно

$$U^{\perp} = \operatorname{span}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4),$$

где

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ Z_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

причем легко проверить, что $U^{\perp}$ — подалгебра Ли. Итак, общая комплексная задача имеет форму, рассмотренную в упражнении 19.1. Распределение правоинвариантно, а репер (X_1, X_2, Y_1, Y_2) ортонормален в метрике

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY), \quad X, Y \in \mathfrak{su}(3).$$

Задачи наверху и внизу связаны между собой следующим образом. Для любой траектории наверху $q(t) \in M$, удовлетворяющей граничным условиям в M , ее проекция $\psi(t) = \pi(q(t)) \in S$ есть траектория системы внизу, удовлетворяющая граничным условиям в S . И обратно, любую траекторию

внизу $\psi(t)$ с граничными условиями можно поднять до траектории наверху $q(t)$ с соответствующими граничными условиями (эта $q(t)$ есть фундаментальная матрица системы внизу). Задачи наверху и внизу имеют один и тот же функционал качества. Поэтому решения задачи оптимального управления внизу суть проекции решений наверху.

19.3.3 Управляемость

Множество управляющих параметров U в обеих задачах наверху (19.38), (19.36) удовлетворяет свойству $[U, U] = U^\perp$, поэтому

$$U + [U, U] = \mathcal{M} = T_{\text{Id}}M. \quad (19.39)$$

Системы наверху имеют полный ранг и симметричны, поэтому они вполне управляемы на соответствующих группах Ли $\text{SU}(3)$, $\text{SO}(3)$. Переходя к проекциям π , получаем, что обе задачи внизу (19.23), (19.31) вполне управляемы на соответствующих сферах S^5 , S^2 .

19.3.4 Экстремали

Задачи наверху имеют форму, рассмотренную в разделе 19.2 и упражнении 19.1, только они правоинвариантны, а не левоинвариантны. Поэтому нормальные экстремали задаются формулами (19.14)–(19.16), в которых умножение слева заменено умножением справа:

$$\begin{aligned} a_\perp &= \text{const}, \\ a_U(t) &= e^{-t \text{ad } a_\perp} a_U^0, \quad a_U^0 = a_U(0), \\ q(t) &= e^{-ta_\perp} e^{ta} q_0, \end{aligned} \quad (19.40)$$

для любых $a_\perp \in U^\perp$, $a_U^0 \in U$. Геодезические параметризуются длиной дуги тогда и только тогда, когда

$$\langle a_U^0, a_U^0 \rangle = 1. \quad (19.41)$$

Равенство (19.39) означает, что в задачах наверху векторные поля в правой части и их скобки Ли первого порядка заполняют все касательное пространство. Такие управляемые системы называются 2-порождающими. В главе 20 мы докажем, что в таких задачах строго аномальные геодезические (т.е. траектории, являющиеся проекциями аномальных экстремалей, но не проекциями нормальных экстремалей) не оптимальны, см. рассуждение перед примером 20.1. Поэтому далее мы не рассматриваем аномальные экстремали.

19.3.5 Условия трансверсальности

Для того, чтобы отобрать геодезические, удовлетворяющие граничным условиям, проанализируем условия трансверсальности наверху.

Условия трансверсальности принципа максимума на T^*M , соответствующие граничным условиям

$$q(0) \in \mathcal{S}, \quad q(t_1) \in \mathcal{T}, \quad \mathcal{S}, \mathcal{T} \subset M,$$

имеют следующий вид:

$$\langle \lambda_0, T_{q(0)} \mathcal{S} \rangle = \langle \lambda_{t_1}, T_{q(t_1)} \mathcal{T} \rangle = 0. \quad (19.42)$$

Используя тривиализацию (18.12) кокасательного расслоения T^*M , перепишем условия трансверсальности (19.42) для экстремали $(x(t), q(t)) \in M^* \times M$ в форме:

$$\langle x(0), q(0)^{-1} T_{q(0)} \mathcal{S} \rangle = \langle x(t_1), q(t_1)^{-1} T_{q(t_1)} \mathcal{T} \rangle = 0.$$

Здесь угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают действие ковектора на вектор. Условия трансверсальности для экстремали $(a(t), q(t)) \in \mathcal{M} \times M$ имеют вид:

$$\langle a(0), q(0)^{-1} T_{q(0)} \mathcal{S} \rangle = \langle a(t_1), q(t_1)^{-1} T_{q(t_1)} \mathcal{T} \rangle = 0,$$

где угловые скобки обозначают инвариантное скалярное произведение в $\mathcal{M}$.

Для правоинвариантной задачи условия трансверсальности записываются в терминах правых сдвигов:

$$\langle a(0), (T_{q(0)} \mathcal{S}) q(0)^{-1} \rangle = \langle a(t_1), (T_{q(t_1)} \mathcal{T}) q(t_1)^{-1} \rangle = 0. \quad (19.43)$$

Следующие особенности условий трансверсальности для рассматриваемых задач наверху облегчают их анализ.

Лемма 19.1. (1) *Условия трансверсальности в источнике требуются только в единице.*

(2) *Из условий трансверсальности в источнике следуют условия трансверсальности в цели.*

Доказательство. Пункт (1) следует из того, что задача правоинвариантна и источник $\mathcal{S}^u$ есть подгруппа.

Пункт (2). Пусть $\lambda_t \in T_{q(t)}^* M$ есть такая нормальная экстремаль для задачи наверху, что $q(0) = \text{Id}$. Пусть выполняются условия трансверсальности в источнике:

$$\langle \lambda_0, T_{\text{Id}} \mathcal{S}^u \rangle = 0.$$

Докажем условия трансверсальности в цели:

$$\langle \lambda_{t_1}, T_{q(t_1)} \mathcal{T}^u \rangle = 0. \quad (19.44)$$

Отметим прежде всего, что в силу включения $q(t_1) \in \mathcal{T}^u = \hat{q} \mathcal{S}^u$ получаем $\hat{q}^{-1} q(t_1) \in \mathcal{S}^u$ и

$$\mathcal{T}^u = \hat{q} \mathcal{S}^u = \hat{q} (\hat{q}^{-1} q(t_1)) \mathcal{S}^u = q(t_1) \mathcal{S}^u.$$

Условия трансверсальности в цели (19.44) записываются в виде:

$$\langle \lambda_{t_1}, T_{q(t_1)}(q(t_1)S^u) \rangle = 0.$$

Для завершения доказательства покажем, что функция

$$I(t) = \langle \lambda_t, T_{q(t)}(q(t)S^u) \rangle, \quad t \in [0, t_1],$$

постоянна. Обозначим касательное пространство $S = T_{\text{Id}}S^u$. Получаем:

$$\begin{aligned} I(t) &= \langle \lambda_t, q(t)S \rangle = \langle x(t), q(t)Sq(t)^{-1} \rangle \\ &= \langle x(t), (\text{Ad } q(t))S \rangle = \langle a(t), (\text{Ad } q(t))S \rangle \\ &= \left\langle (\text{Ad } e^{-ta_\perp})a(0), (\text{Ad } e^{-ta_\perp})(\text{Ad } e^{-ta^{(0)}})S \right\rangle \end{aligned}$$

по инвариантности скалярного произведения

$$\begin{aligned} &= \left\langle a(0), (\text{Ad } e^{-ta^{(0)}})S \right\rangle = \left\langle (\text{Ad } e^{-ta^{(0)}})a(0), S \right\rangle = \langle a(0), S \rangle \\ &= I(0). \end{aligned}$$

То есть $I(t) \equiv \text{const}$, и пункт (2) данной леммы доказан. $\square$

19.3.6 Оптимальные геодезические наверху и внизу

По аналогии с N_1 , N_2 (см. формулу (19.22)), определим $N_{1,3}$ следующим образом:

$$N_{1,3}(a_3 e^{i\theta_3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 e^{i\theta_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_3 e^{-i\theta_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим в вещественно-резонансном случае

$$a_U^0 = a_1 N_1(1) + a_2 N_2(1), \quad a_\perp = a_3 N_{1,3}(1).$$

В общем комплексном случае положим

$$a_U^0 = N_1(a_1 e^{i\theta_1}) + N_2(a_2 e^{i\theta_2}), \quad a_\perp = a_4 Z_3 + a_5 Z_4 + N_{1,3}(a_3 e^{i\theta_3}).$$

Здесь $a_i \in \mathbb{R}$ и $\theta_i \in [-\pi, \pi]$.

Вещественно-резонансный случай

Предложение 19.1. В вещественно-резонансном случае условие трансверсальности в единице в источнике $\langle a, T_{\text{Id}}S_{\mathbb{R}}^u \rangle = 0$ означает, что $a_2 = 0$.

Доказательство. В силу того, что

$$T_{\text{Id}}S_{\mathbb{R}}^u = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{array} \right), \quad \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

уравнение $\langle a, T_{\text{Id}}S_{\mathbb{R}}^u \rangle = 0$ удовлетворяется для всех $\beta \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $a_2 = 0$. $\square$

Из предложения 19.1 и условия (19.41) получаем ко векторы, которые нужно использовать в формуле (19.40):

$$a^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & a_3 \\ \mp 1 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.45)$$

Предложение 19.2. *Геодезические (19.40) с начальным условием $q(0) = \text{Id}$ и матрицей a вида (19.45) достигают цели $T_{\mathbb{R}}^u$ за кратчайшее время (равное длине пути) $|t|$ тогда и только тогда, когда $a_3 = \pm 1/\sqrt{3}$. Более того, 4 геодезические (соответствующие $a^{\pm}$ и знакам $\pm$ в a_3) имеют одну и ту же длину и достигают цели за время*

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi.$$

Доказательство. Вычисляя $q(t) = e^{-a_{\perp} t} e^{(a_{\perp} + a_V^0) t}$ для матрицы a , заданной формулой (19.45), и вспоминая, что

$$\psi(t) = q(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

получаем квадрат третьей компоненты волновой функции:

$$(\psi_3(t))^2 = \frac{(\cos(t a_3) \sin(t \gamma) a_3 \gamma - \cos(t \gamma) \sin(t a_3) \gamma^2)^2}{\gamma^4}, \quad (19.46)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + a_3^2}.$$

Доказательство данного предложения завершает следующая лемма. $\square$

Лемма 19.2. *Если $f_a = \cos(ta) \sin(t\sqrt{1+a^2}) \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} - \cos(t\sqrt{1+a^2}) \sin(ta)$, то $|f_a| \leq 1$. Более того, $|f_a| = 1$ тогда и только тогда, когда $\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}} = \left| \frac{1}{2k} + \frac{k'}{k} \right| < 1$, $k \neq 0$ и $t = \frac{k\pi}{\sqrt{1+a^2}}$. В частности, наименьшее $|t|$ получается при $k = \pm 1$, $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t = \frac{\pm \pi \sqrt{3}}{2}$.*

Доказательство. Положим $\lambda = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$, $\theta = t\sqrt{1+a^2}$, тогда

$$\begin{aligned} f_a(t) &= \lambda \cos(\lambda\theta) \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\lambda\theta) \\ &= \langle (\lambda \cos(\lambda\theta), \sin(\lambda\theta)), (\sin(\theta), -\cos(\theta)) \rangle \\ &= \langle v_1, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

Оба v_1, v_2 имеют норму ≤ 1 и $|f_a| \leq 1$. Поэтому для $|f_a| = 1$ необходимо, чтобы $|v_1| = |v_2| = 1$, $v_1 = \pm v_2$. Получаем $\cos(\lambda\theta) = 0$ и $\cos(\theta) = \pm 1$. Поэтому $\theta = k\pi$, $\lambda\theta = \frac{\pi}{2} + k'\pi$, $\lambda = \frac{1}{2k} + \frac{k'}{k}$. Следовательно, $\left| \frac{1}{2k} + \frac{k'}{k} \right| = \lambda < 1$. Обратно,

выберем k, k' , удовлетворяющие этому условию, и $\theta = k\pi$. Тогда $\cos(\theta) = \pm 1$, $\sin(\lambda\theta) = \pm 1$, $f_a(t) = \pm 1$. Имеем $|t| = \frac{k\pi}{\sqrt{1+a^2}}$, причем наименьшее $|t|$ получается для $k = \pm 1$ (если $k = 0$, то $\theta = 0$ и $f_a(t) = 0$). Более того, $\left|\frac{1}{2k} + \frac{k'}{k}\right| < 1$ возможно только для $(k, k') = (1, 0)$ или $(1, -1)$ или $(-1, 0)$ или $(-1, -1)$. Во всех случаях $|\lambda| = \frac{1}{2}$, $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, и $t = \pm \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. $\square$

Зафиксируем для определенности знак $-$ в (19.45) и $a_3 = +1/\sqrt{3}$. Получаем следующие выражения для трех компонент волновой функции:

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^3, \\ \psi_2(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right), \\ \psi_3(t) &= -\sin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^3.\end{aligned}$$

Отметим, что эта кривая не является окружностью на S^2 .

Управления можно найти из следующих выражений:

$$u_1 = (\dot{q}q^{-1})_{1,2}, \quad u_2 = (\dot{q}q^{-1})_{2,3}.$$

Получаем:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= -\cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), \\ u_2(t) &= \sin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

Из условий (19.19)–(19.20) (гипотеза резонанса) получаем внешние поля:

$$\begin{aligned}\Omega_1(t) &= -\cos\left(t/\sqrt{3}\right) e^{i(\omega_1 t + \alpha_1)}, \\ \Omega_2(t) &= \sin\left(t/\sqrt{3}\right) e^{i(\omega_2 t + \alpha_2)}.\end{aligned}$$

Отметим, что фазы α_1, α_2 произвольны.

Общий комплексный случай

Предложение 19.3. Для общей комплексной задачи условия трансверсальности в единице в источнике $\langle a, T_{\text{Id}} S_{\mathbb{C}}^u \rangle = 0$ означают, что $a_2 = a_4 = a_5 = 0$.

Доказательство. В силу того, что

$$T_{\text{Id}} S_{\mathbb{C}}^u = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} i\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & i(\alpha_2 - \alpha_1) & \beta_1 + i\beta_2 \\ 0 & -\beta_1 + i\beta_2 & -i\alpha_2 \end{array} \right), \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

уравнение $\langle a, T_{\text{Id}} S_{\mathbb{C}}^u \rangle = 0$ удовлетворяется для всех $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $a_2 = a_4 = a_5 = 0$. $\square$

Поэтому в формуле (19.40) нужно использовать ковектор

$$a^{(\theta_1, \theta_3)} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} & a_3 e^{i\theta_3} \\ -e^{-i\theta_1} & 0 & 0 \\ -a_3 e^{-i\theta_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.47)$$

Предложение 19.4. *Геодезические (19.40) с $q(0) = \text{Id}$, для которых a задается формулой (19.47), достигают цели $T_{\mathbb{C}}^u$ за кратчайшее время (совпадающее с длиной дуги) $|t|$ тогда и только тогда, когда $a_3 = \pm 1/\sqrt{3}$. Более того, все геодезические двухпараметрического семейства, соответствующего $\theta_1, \theta_3 \in [-\pi, \pi]$, имеют одну и ту же длину:*

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi.$$

Доказательство. Явное выражение для $|\psi_3|^2$ дается правой частью формулы (19.46). Утверждение доказывается так же, как предложение 19.2. $\square$

Три компоненты волновой функции и оптимальное управление выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^3, \\ \psi_2(t) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) e^{-i\theta_1}, \\ \psi_3(t) &= -\sin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^3 e^{-i\theta_3}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \cos\left(t/\sqrt{3}\right) e^{i\theta_1}, \\ u_2(t) &= -\sin\left(t/\sqrt{3}\right) e^{i(\theta_3 - \theta_1)}. \end{aligned}$$

Отметим, что все геодезические семейства, описанного в предложении 19.4, имеют ту же длину, что и 4 геодезические, описанные в предложении 19.2. Отсюда следует, что использование комплексных гамильтонианов (19.26) вместо вещественных (19.34) не позволяет уменьшить функционал (19.27). Доказано следующее утверждение.

Предложение 19.5. *Для трехуровневой задачи с комплексными управлениями из оптимальности следует резонанс. Более точно, управления Ω_1, Ω_2 оптимальны тогда и только тогда, когда они имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \cos(t/\sqrt{3}) e^{i[(E_2 - E_1)t + \varphi_1]}, \\ \Omega_2(t) &= \sin(t/\sqrt{3}) e^{i[(E_3 - E_2)t + \varphi_2]}, \end{aligned}$$

где φ_1, φ_2 суть две произвольные фазы. Здесь конечное время t_1 выбрано так, чтобы субримановы геодезические были параметризованы длиной дуги, и оно равно $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

19.4 Задача быстрогодействия на $SO(3)$

Рассмотрим твердое тело в $\mathbb{R}^3$, которое может вращаться вокруг некоторой оси, закрепленной в теле. В каждый момент времени ориентация тела в $\mathbb{R}^3$ определяет ортогональное преобразование $q \in SO(3)$. Мы будем минимизировать длину кривой в $SO(3)$, соответствующей движению тела. Выберем натуральный параметр (длину дуги) t , тогда кривая $q = q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{q} = qf,$$

где

$$f \in \mathfrak{so}(3), \quad |f| = 1,$$

есть единичный вектор угловой скорости, соответствующий фиксированной оси вращения в теле. Эта кривая — однопараметрическая подгруппа в $SO(3)$:

$$q(t) = q(0)e^{tf},$$

и очевидно, что управляемость на $SO(3)$ невозможна.

Чтобы расширить возможности движения в $SO(3)$, выберем теперь две линейно независимые оси в теле:

$$f, g \in \mathfrak{so}(3), \quad |f| = |g| = 1, \quad f \wedge g \neq 0,$$

и предположим, что тело может вращаться вокруг этих осей в определенных направлениях. Поучаем управляемую систему

$$\dot{q} = \begin{cases} qf \\ qg \end{cases},$$

управляемую на $SO(3)$:

$$\text{Lie}(qf, qg) = \text{span}(qf, qg, q[f, g]) = q\mathfrak{so}(3) = T_q SO(3).$$

Для упрощения обозначений, выберем такие векторы

$$a, b \in \mathfrak{so}(3),$$

что

$$f = a + b, \quad g = a - b.$$

Тогда управляемая система записывается как

$$\dot{q} = q(a \pm b).$$

Мы хотим найти кратчайшее вращение тела, переводящее начальную ориентацию q_0 в конечную конфигурацию q_1 . Соответствующая задача оптимального управления имеет вид:

$$\begin{aligned} q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} |\dot{q}| dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Так как $|\dot{q}| = |a \pm b| = 1$, эта задача эквивалентна задаче быстрогодействия:

$$t_1 \rightarrow \min.$$

Отметим, что

$$\langle a, b \rangle = \langle (f + g)/2, (f - g)/2 \rangle = 0. \quad (19.48)$$

Более того, за счет изменения масштаба времени можно добиться, чтобы

$$|a| = 1. \quad (19.49)$$

Переходя к овыпуклению, получаем окончательную формулировку задачи:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= q(a + ub), & u &\in [-1, 1], & q &\in \text{SO}(3), \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ t_1 &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

где $a, b \in \text{so}(3)$ — заданные векторы, удовлетворяющие равенствам (19.48), (19.49). Исследуем эту задачу быстрогодействия.

По принципу максимума, если пара $(u(\cdot), q(\cdot))$ оптимальна, то существует такая липшицева кривая $x(t) \in \text{so}(3)$, что:

$$\begin{cases} \dot{q} = q(a + u(t)b), \\ \dot{x} = [x, a + u(t)b], \\ h_{u(t)}(x(t)) = \langle x(t), a + u(t)b \rangle = \max_{|v| \leq 1} \langle x(t), a + vb \rangle \geq 0, \end{cases}$$

более того,

$$h_{u(t)}(x(t)) = \text{const}.$$

Условие максимума для функции

$$v \mapsto \langle x(t), a + vb \rangle = \langle x(t), a \rangle + v \langle x(t), b \rangle, \quad v \in [-1, 1],$$

легко разрешается, если *функция переключения*

$$x \mapsto \langle x, b \rangle, \quad x \in \mathcal{M},$$

не обращается в нуль в точке $x(t)$. Действительно, в этом случае оптимальное управление может принимать только экстремальные значения ± 1 :

$$\langle x(t), b \rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = \text{sgn} \langle x(t), b \rangle.$$

Если функция переключения имеет только изолированные корни на некотором временном отрезке, то соответствующее управление $u(t)$ принимает

на этом отрезке только экстремальные значения. Более того, моменты времени, в которые $u(t)$ переключается с одного экстремального значения на другое, изолированы. Такое управление называется *релейным*.

Исследуем структуру оптимальных управлений. Возьмем любую экстремаль, для которой кривая $x(t)$ удовлетворяет начальному условию

$$\langle x(0), b \rangle \neq 0.$$

Тогда дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = [x, a \pm b], \quad \pm = \operatorname{sgn} \langle x(0), b \rangle$$

выполняется при $t > 0$ до тех пор, пока функция переключения $\langle x(t), b \rangle$ остается отличной от нуля. На этом временном отрезке

$$x(t) = e^{-t \operatorname{ad}(a \pm b)} x(0).$$

Исследуем поведение функции переключения $\langle x(t), b \rangle$. Заметим, что ее производные не зависят от управления:

$$\frac{d}{dt} \langle x(t), b \rangle = \langle [x(t), a + u(t)b], b \rangle = -\langle x(t), [a, b] \rangle.$$

Если функция переключения обращается в нуль:

$$\langle x(t), b \rangle = 0$$

в точке, где

$$\langle x(t), [a, b] \rangle \neq 0,$$

то соответствующее управление переключается, т.е. изменяет свое значение с $+1$ на -1 или с -1 на $+1$. Для того чтобы выяснить, какие последовательности переключений оптимального управления возможны, удобно ввести координаты на алгебре Ли $\mathcal{M}$.

В силу равенств (19.48), (19.49), скобка Ли $[a, b]$ удовлетворяет условиям

$$[a, b] \perp a, \quad [a, b] \perp b, \quad |[a, b]| = |b|,$$

это следует из свойств векторного произведения в $\mathbb{R}^3$. Поэтому можно выбрать такой ортонормированный базис

$$\mathfrak{so}(3) = \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3),$$

что

$$a = e_2, \quad b = \nu e_3, \quad [a, b] = \nu e_1, \quad \nu > 0.$$

В этом базисе точки переключения принадлежат горизонтальной плоскости $\operatorname{span}(e_1, e_2)$.

Пусть $x(\tau_0)$ — точка переключения, т.е. $t = \tau_0$ есть положительный корень функции $\langle x(t), b \rangle$. Пусть в этой точке управление переключается с

+1 на -1 (случай переключения с -1 на $+1$ полностью аналогичен, мы покажем это ниже). Тогда

$$\langle \dot{x}(\tau_0), b \rangle = -\langle \dot{x}(\tau_0), [a, b] \rangle \leq 0,$$

поэтому

$$\langle x(\tau_0), e_1 \rangle \geq 0.$$

Далее, так как гамильтониан принципа максимума неотрицателен, получаем

$$h_{u(\tau_0)}(x(\tau_0)) = \langle x(\tau_0), a \rangle = \langle x(\tau_0), e_2 \rangle \geq 0.$$

Поэтому точка $x(\tau_0)$ лежит в первом квадранте плоскости $\text{span}(e_1, e_2)$:

$$x(\tau_0) \in \text{cone}(e_1, e_2).$$

Пусть $x(\tau_1)$ — следующая после τ_0 точка переключения. Управление имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0], \\ -1, & t \in [\tau_0, \tau_1], \end{cases}$$

а кривая $x(t)$ между переключениями является дугой окружности, полученной вращением точки $x(\tau_0)$ вокруг вектора $a - b = e_2 - \nu e_3$:

$$x(t) = e^{-t \text{ad}(a-b)} x(\tau_0), \quad t \in [\tau_0, \tau_1].$$

Точки переключения $x(\tau_0)$, $x(\tau_1)$ удовлетворяют равенствам:

$$\begin{aligned} \langle x(\tau_0), e_3 \rangle &= \langle x(\tau_1), e_3 \rangle = 0, \\ \langle x(\tau_0), e_2 \rangle &= \langle x(\tau_1), e_2 \rangle = h_{u(\tau_0-\varepsilon)}(x(\tau_0 - \varepsilon)), \\ |x(\tau_0)| &= |x(\tau_1)|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\langle x(\tau_0), e_1 \rangle = -\langle x(\tau_1), e_1 \rangle,$$

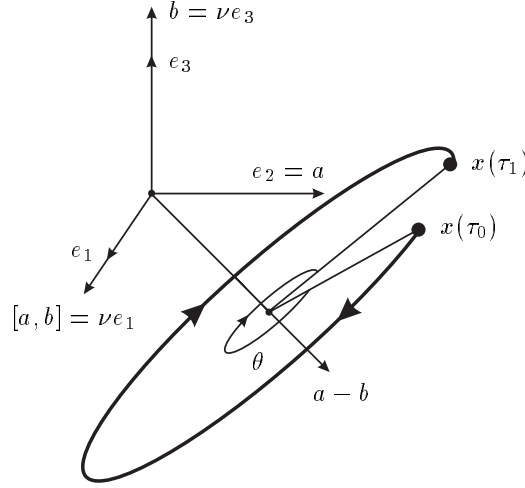
т.е. $x(\tau_1)$ есть отражение $x(\tau_0)$ относительно плоскости $\text{span}(e_2, e_3)$. Геометрически легко видеть, что угол поворота θ от $x(\tau_0)$ до $x(\tau_1)$ вокруг $a - b$ ограничен следующим образом:

$$\theta \in [\pi, 2\pi],$$

см. рис. 19.2. Экстремальные значения θ достигаются, когда точка $x(\tau_0)$ лежит на границе конуса $\text{cone}(e_1, e_2)$:

$$\begin{aligned} x(\tau_0) \in \mathbb{R}_+ e_1 &\Rightarrow \theta = \pi, \\ x(\tau_0) \in \mathbb{R}_+ e_2 &\Rightarrow \theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Во втором случае точка $x(t)$, также как и точка $q(t)$, совершает полный поворот на угол 2π . Такая дуга не может быть частью оптимальной траектории:

Рис. 19.2: Оценка угла поворота θ

ее можно исключить с уменьшением конечного времени t_1 . Следовательно, угол между двумя переключениями есть

$$\theta \in [\pi, 2\pi).$$

Пусть $x(\tau_2)$ — следующее после $x(\tau_1)$ переключение. Поведение управления после переключения $x(\tau_1)$ с -1 на $+1$ аналогично поведению после $x(\tau_0)$. Действительно, наша задача быстрогодействия допускает симметрию

$$b \mapsto -b.$$

После замены базиса

$$e_3 \mapsto -e_3, \quad e_1 \mapsto -e_1, \quad e_2 \mapsto e_2$$

кривая $x(t)$ сохраняется, но теперь она переключается в точке $x(\tau_1)$ с $+1$ на -1 . Этот случай уже был изучен, поэтому угол поворота от $x(\tau_1)$ до $x(\tau_2)$ опять равен θ , более того, $x(\tau_2) = x(\tau_0)$. Следующая точка переключения есть $x(\tau_3) = x(\tau_1)$, и так далее.

Поэтому структура релейных оптимальных траекторий довольно проста. Такие траектории содержат некоторое количество точек переключения. Между этими точками переключения вектор $x(t)$ поворачивается попеременно вокруг векторов $a + b$ и $a - b$ на угол $\theta \in [\pi, 2\pi)$, постоянный вдоль каждой релейной траектории. Перед первым переключением и после последнего переключения вектор $x(t)$ может повернуться соответственно на углы θ_0 и θ_1 , $0 < \theta_0, \theta_1 \leq \theta$. Система всех оптимальных релейных траекторий

параметризована тремя непрерывными параметрами $\theta_0, \theta, \theta_1$ и двумя дискретными параметрами: количеством переключений и начальным управлением $\text{sgn}\langle x(0), b \rangle$.

Оптимальная траектория может не быть релейной только если в точке $x(\tau_0)$, соответствующей первому неотрицательному корню уравнения $\langle x(t), b \rangle = 0$, выполняются равенства

$$\langle x(\tau_0), b \rangle = \langle x(\tau_0), [a, b] \rangle = 0.$$

Тогда

$$x(\tau_0) = \mu e_2, \quad \mu \neq 0.$$

Могут быть две возможности:

- (1) либо функция переключения $\langle x(t), b \rangle$ принимает ненулевые значения для некоторых $t > \tau_0$ и сколь угодно близких к τ_0 ,
- (2) либо

$$\langle x(t), b \rangle \equiv 0, \quad t \in [\tau_0, \tau_0 + \varepsilon], \quad (19.50)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

Начнем с первой возможности. Из анализа релейных траекторий следует, что моменты переключения не могут накапливаться к τ_0 справа: угол поворота между двумя последовательными переключениями $\theta \geq \pi$. Поэтому в случае (1) имеем

$$\langle x(t), b \rangle > 0, \quad t \in [\tau_0, \tau_0 + \delta],$$

для некоторого $\delta > 0$. То есть τ_0 — момент переключения. Так как $x(\tau_0) \in \mathbb{R}e_1$, угол поворота до следующей точки переключения есть $\theta = 2\pi$, что неоптимально. Поэтому в случае (1) оптимальных траекторий нет.

Рассмотрим случай (2). Продифференцируем тождество (19.50) дважды по t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x(t), b \rangle &= -\langle x(t), [a, b] \rangle \equiv 0, \\ \frac{d}{dt} \langle x(t), [a, b] \rangle &= \langle [x(t), a + u(t)b], [a, b] \rangle = u(t) \langle [x(t), b], [a, b] \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Тогда $x(t) = \mu(t)e_2$, $t \in [\tau_0, \tau_0 + \varepsilon]$, поэтому

$$u(t) \langle [a, b], [a, b] \rangle = 0,$$

то есть

$$u(t) \equiv 0, \quad t \in [\tau_0, \tau_0 + \varepsilon].$$

Это управление не определяется непосредственно из принципа максимума (мы нашли его с помощью дифференцирования). Такое управление называется *особым*.

Оптимальные траектории, содержащие особую дугу (соответствующую управлению $u(t) \equiv 0$) могут иметь дугу с $u \equiv \pm 1$ перед особой дугой с углом поворота вокруг $a \pm b$ меньше чем 2π ; такая дуга может быть и после особого участка. Поэтому может быть четыре типа оптимальных траекторий, содержащих особую дугу:

$$+ 0 +, \quad + 0 -, \quad - 0 +, \quad - 0 -.$$

Семейство таких траекторий параметризовано тремя непрерывными параметрами (углом поворота на соответствующих дугах) и двумя дискретными параметрами (знаками на начальном и конечном отрезках).

Итак, мы описали структуру всех возможных оптимальных траекторий: релейных и стратегий с особым участком. Множества точек в $SO(3)$, достижимых с помощью таких стратегий, трехмерны, и объединение этих множеств покрывает всю группу $SO(3)$. Но легко видеть, что достаточно длинные траектории, следующие любой из двух стратегий, неоптимальны: эти два множества в $SO(3)$ пересекаются. Более того, каждая из стратегий пересекается сама с собой. Для того, чтобы определить оптимальную траекторию для каждой точки в $SO(3)$, необходимо исследовать взаимодействие двух стратегий и пересечение траекторий, следующих одной и той же стратегии. Эта интересная задача остается открытой.

Отметим, что структура оптимальных траекторий в этой левоинвариантной задаче быстрого действия на $SO(3)$ похожа на структуру оптимальных траекторий для машины Дубинса (раздел 13.5). Это сходство неслучайно: задачу о машине Дубинса можно сформулировать как левоинвариантную задачу быстрого действия на группе изометрий плоскости.

Глава 20

Условия оптимальности второго порядка

20.1 Гессиан

В этой главе мы получим необходимые условия оптимальности второго порядка для задач управления. Как известно, геометрически исследование оптимальности сводится к изучению границы множеств достижимости (см. раздел 10.2). Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U = \text{int } U \subset \mathbb{R}^m, \quad (20.1)$$

где пространство состояний M есть, как обычно, гладкое многообразие, а пространство управляющих параметров U открыто (по существу, это означает, что мы изучаем оптимальные управления, не выходящие на границу U , хотя аналогичную теорию для релейных управлений также можно построить). Множество достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ системы (20.1) есть образ отображения в конце

$$F_{t_1} : u(\cdot) \mapsto q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} f_{u(t)} dt.$$

Траектория $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, называется *геометрически оптимальной* для системы (20.1), если в она попадает на границу множества достижимости в момент t_1 :

$$q(t_1) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1).$$

Необходимые условия для этого включения даются принципом максимума Понтрягина. Часть утверждений ПМП можно рассматривать как условия оптимальности первого порядка (мы увидим это позже). Сейчас же мы хотим найти условия оптимальности второго порядка.

Рассмотрим задачу в общей постановке. Пусть

$$F : \mathcal{U} \rightarrow M$$

есть гладкое отображение, где $\mathcal{U}$ — открытое подмножество банахова пространства, а M — гладкое n -мерное многообразие (обычно у нас $\mathcal{U}$ будет пространством допустимых управлений $L_\infty([0, t_1], U)$, а $F = F_{t_1}$ — отображением в конец управляемой системы). Первый дифференциал

$$D_u F : T_u \mathcal{U} \rightarrow T_{F(u)} M$$

корректно определен независимо от координат. Для второго дифференциала это не так. Действительно, рассмотрим случай, когда u есть регулярная точка F , то есть дифференциал $D_u F$ сюръективен. По теореме о неявной функции, отображение F становится линейным в подходящих координатах в $\mathcal{U}$ и M , поэтому инвариантно определенного второго дифференциала нет. В общем случае корректно определенной независимо от координат является только некоторая часть второго дифференциала.

Дифференциал гладкого отображения $F : \mathcal{U} \rightarrow M$ можно определить с помощью производной первого порядка

$$D_u F v = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} F(\varphi(\varepsilon)) \quad (20.2)$$

вдоль кривой $\varphi : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathcal{U}$ с начальными условиями

$$\varphi(0) = u \in \mathcal{U}, \quad \dot{\varphi}(0) = v \in T_u \mathcal{U}.$$

В локальных координатах эта производная вычисляется как

$$\frac{dF}{du} \dot{\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(0).$$

В других координатах $\tilde{q}$ на M производная (20.2) вычисляется как

$$\frac{d\tilde{F}}{du} \dot{\varphi} = \frac{d\tilde{q}}{dq} \frac{dF}{du} \dot{\varphi}.$$

Координатное представление первой производной (20.2) преобразуется при заменах координат как касательный вектор к M — оно умножается на матрицу Якоби $\frac{d\tilde{q}}{dq}$.

Вторая производная

$$\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} F(\varphi(\varepsilon)), \quad (20.3)$$

$$\varphi(0) = u \in \mathcal{U}, \quad \dot{\varphi}(0) = v \in T_u \mathcal{U},$$

вычисляется как

$$\frac{d^2 F}{du^2}(\dot{\varphi}, \dot{\varphi}) + \frac{dF}{du} \ddot{\varphi}.$$

Правило преобразования второй производной по направлению при заменах координат имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{F}}{d u^2}(\dot{\varphi}, \dot{\varphi}) + \frac{d \tilde{F}}{d u} \ddot{\varphi} = \frac{d \tilde{q}}{d q} \left[\frac{d^2 F}{d u^2}(\dot{\varphi}, \dot{\varphi}) + \frac{d F}{d u} \ddot{\varphi} \right] \\ + \frac{d^2 \tilde{q}}{d q^2} \left(\frac{d F}{d u} \dot{\varphi}, \frac{d F}{d u} \dot{\varphi} \right). \end{aligned} \quad (20.4)$$

Вторая производная (20.3) преобразуется как касательный вектор в $T_{F(u)}M$, только если $\dot{\varphi} = v \in \text{Ker } D_u F$, т.е. если слагаемое (20.4) обращается в нуль. Более того, она определяется значениями u и v только по модулю подпространства $\text{Im } D_u F$, порожденного слагаемым $\frac{d F}{d u} \ddot{\varphi}$.

Поэтому инвариантно определенным является квадратичное отображение

$$\begin{aligned} \text{Ker } D_u F \rightarrow T_{F(u)}M / \text{Im } D_u F, \\ v \mapsto \left. \frac{d^2}{d \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} F(\varphi(\varepsilon)) \mod \text{Im } D_u F. \end{aligned} \quad (20.5)$$

После этого предварительного обсуждения, перейдем к формальным определениям.

Гессиан гладкого отображения $F : \mathcal{U} \rightarrow M$ в точке $u \in \mathcal{U}$ есть билинейное отображение

$$\text{Hess}_u F : \text{Ker } D_u F \times \text{Ker } D_u F \rightarrow \text{Coker } D_u F = T_{F(u)}M / \text{Im } D_u F. \quad (20.6)$$

В частности, в регулярной точке $\text{Coker } D_u F = 0$, поэтому $\text{Hess}_u F = 0$. Гессиан определяется следующим образом. Пусть

$$v, w \in \text{Ker } D_u F$$

и

$$\lambda \in (\text{Im } D_u F)^\perp \subset T_{F(u)}^*M.$$

Чтобы определить значение

$$\lambda \text{Hess}_u F(v, w),$$

возьмем векторные поля

$$V, W \in \text{Vec } \mathcal{U}, \quad V(u) = v, \quad W(u) = w,$$

и функцию

$$a \in C^\infty(M), \quad d_{F(u)}a = \lambda.$$

Тогда

$$\lambda \text{Hess}_u F(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} V \circ W (a \circ F)|_u. \quad (20.7)$$

Покажем, что правая часть не зависит от выбора V , W и a . Первая производная Ли есть

$$W(a \circ F) = \langle d_{F(\cdot)} a, F_* W(\cdot) \rangle,$$

и вторая производная Ли $V \circ W(a \circ F)|_u$ не зависит от вторых производных a , так как $F_* W(u) = 0$. Более того, очевидно, что вторая производная Ли зависит только от значения V в u , но не от производных V в u . Чтобы доказать то же самое для поля W , покажем, что правая часть определения гессиана симметрична по V и W :

$$\begin{aligned} (W \circ V(a \circ F) - V \circ W(a \circ F))|_u &= [W, V](a \circ F)|_u = \underbrace{d_{F(u)} a \circ D_u F}_{=\lambda} [W, V](u) \\ &= 0, \end{aligned}$$

так как $\lambda \perp \text{Im } D_u F$. Мы показали, что отображение $\text{Hess}_u F$, заданное равенством (20.7), определено независимо от выбора координат, как это указано в (20.6).

Упражнение 20.1. Покажите, что квадратичное отображение (20.5), определенное с помощью второй производной по направлению, совпадает с $\text{Hess}_u F(v, v)$.

Если разрешить только линейные замены переменных в $\mathcal{U}$, возможно определить полный *второй дифференциал*

$$D_u^2 F : \text{Ker } D_u F \times \text{Ker } D_u F \rightarrow T_{F(u)} M$$

так же, как гессиан (20.7), но для произвольного ковектора:

$$\lambda \in T_{F(u)}^* M,$$

и постоянных векторных полей:

$$V \equiv v, \quad W \equiv w.$$

Гессиан есть часть второго дифференциала, не зависящая от выбора линейной структуры в прообразе.

Упражнение 20.2. Вычислите гессиан ограничения $F|_{f^{-1}(0)}$ гладкого отображения F на поверхность уровня гладкой функции f . Рассмотрите ограничение гладкого отображения $F : \mathcal{U} \rightarrow M$ на гладкую гиперповерхность $S = f^{-1}(0)$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $df \neq 0$, и пусть $u \in S$ — регулярная точка F . Докажите, что гессиан отображения вычисляется следующим образом:

$$\lambda \text{Hess}_u (F|_S) = \lambda D_u^2 F - d_u^2 f, \quad \lambda \perp \text{Im } D_u F|_S, \quad \lambda \in T_{F(u)}^* M \setminus \{0\},$$

где ковектор λ нормализован так, что

$$\lambda D_u F = d_u f.$$

20.2 Локальная открытость отображений

Отображение $F : \mathcal{U} \rightarrow M$ называется *локально открытым* в точке $u \in \mathcal{U}$, если

$$F(u) \in \text{int } F(O_u)$$

для любой окрестности $O_u \subset \mathcal{U}$ of u . В противном случае, т.е. когда

$$F(u) \in \partial F(O_u)$$

для некоторой окрестности O_u , точка u называется *локально геометрически оптимальной* для F .

Точка $u \in \mathcal{U}$ называется *локально конечномерно оптимальной* для отображения F , если для любого гладкого конечномерного подмногообразия $S \subset \mathcal{U}$, $u \in S$, точка u локально геометрически оптимальна для ограничения $F|_S$.

20.2.1 Критические точки коранга один

Коранг критической точки u гладкого отображения F по определению равен корангу дифференциала $D_u F$:

$$\text{corank } D_u F = \text{codim Im } D_u F.$$

В дальнейшем мы будем часто рассматривать критические точки коранга один. В этом случае множитель Лагранжа

$$\lambda \in (\text{Im } D_u F)^\perp, \quad \lambda \neq 0,$$

определен однозначно с точностью до ненулевого множителя и отображение

$$\lambda \text{Hess}_u F : \text{Ker } D_u F \times \text{Ker } D_u F \rightarrow \mathbb{R}$$

есть просто квадратичная форма (в случае $\text{corank } D_u F > 1$ приходится рассматривать семейство квадратичных форм).

Сформулируем условия локальной открытости отображения F в критической точке u коранга один в терминах квадратичной формы $\lambda \text{Hess}_u F$.

Теорема 20.1. Пусть $F : \mathcal{U} \rightarrow M$ есть непрерывное отображение, имеющее гладкие ограничения на конечномерные подмногообразия в $\mathcal{U}$. Пусть $u \in \mathcal{U}$ — критическая точка F коранга один, и пусть $\lambda \in (\text{Im } D_u F)^\perp$, $\lambda \neq 0$.

- (1) Если квадратичная форма $\lambda \text{Hess}_u F$ знакопеременна, то F локально открыто в u .
- (2) Если форма $\lambda \text{Hess}_u F$ отрицательна (или положительна), то точка u локально конечномерно оптимальна для F .

Замечание. Квадратичная форма локально открыта в нуле тогда и только тогда, когда она знакопеременна.

Доказательство. Утверждения теоремы локальны, поэтому выберем локальные координаты в $\mathcal{U}$ и M , центрированные соответственно в u и $F(u)$, и будем считать, что $\mathcal{U}$ — банахово пространство, а $M = \mathbb{R}^n$.

(1) Рассмотрим разложение в прямую сумму в прообразе:

$$T_u \mathcal{U} = E \oplus \text{Ker } D_u F, \quad \dim E = n - 1, \quad (20.8)$$

и соответствующее разложение в образе:

$$T_{F(u)} M = \text{Im } D_u F \oplus V, \quad \dim V = 1. \quad (20.9)$$

Квадратичная форма $\lambda \text{Hess}_u F$ знакопеременна, т.е. она принимает значения обоих знаков на $\text{Ker } D_u F$. Поэтому можно выбрать такие векторы

$$v, w \in \text{Ker } D_u F,$$

что

$$\lambda F''_u(v, v) = 0, \quad \lambda F''_u(v, w) \neq 0,$$

мы обозначаем через F' , F'' производные вектор-функции F в локальных координатах. Действительно, пусть квадратичная форма $Q = \lambda F''_u$ принимает значения противоположных знаков на некоторых $v_0, w \in \text{Ker } D_u F$. В силу непрерывности Q , существует ненулевой вектор $v \in \text{span}(v_0, w)$, на котором $Q(v, v) = 0$. Более того, легко видеть, что $Q(v, w) \neq 0$.

Так как первый дифференциал задает изоморфизм

$$D_u F = F'_u : E \rightarrow \text{Im } D_u F = \lambda^\perp,$$

существует такой вектор $x_0 \in E$, что

$$F'_u x_0 = -\frac{1}{2} F''_u(v, v).$$

Введем следующее семейство отображений:

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : E \times \mathbb{R} &\rightarrow M, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \\ \Phi_\varepsilon(x, y) &= F(\varepsilon^2 v + \varepsilon^3 y w + \varepsilon^4 x_0 + \varepsilon^5 x), \quad x \in E, y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

заметим, что

$$\text{Im } \Phi_\varepsilon \subset \text{Im } F$$

для малых ε . Поэтому достаточно доказать открытость Φ_ε . Из формулы Тейлора

$$\Phi_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^5 (F'_u x + y F''_u(v, w)) + O(\varepsilon^6), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

следует, что семейство $\frac{1}{\varepsilon^5} \Phi_\varepsilon$ гладко по параметру ε в точке $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ это семейство задает сюръективное линейное отображение. По теореме о

неявной функции, отображения $\frac{1}{\varepsilon^5}\Phi_\varepsilon$ суть субмерсии, потому они локально открыты при малых $\varepsilon > 0$. Следовательно, отображение F также локально открыто в точке u .

(2) Возьмем любое гладкое конечномерное подмногообразие $S \subset \mathcal{U}$, $u \in S$. Так же как в (20.8), (20.9), рассмотрим разложения в прообразе:

$$S \cong T_u S = L \oplus \text{Ker } D_u F|_S,$$

и в образе:

$$\begin{aligned} M &\cong T_{F(u)} M = \text{Im } D_u F|_S \oplus W, \\ \dim W &= k = \text{corank } D_u F|_S \geq 1. \end{aligned}$$

Так как дифференциал $D_u F : E \rightarrow \text{Im } D_u F$ задает изоморфизм, по теореме о неявной функции можно выбрать такие координаты (x, y) в S и координаты в M , что отображение F принимает форму

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix}, \quad x \in L, \quad y \in \text{Ker } D_u F|_S.$$

Далее, можно выбрать такие координаты $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ в W , что

$$\lambda F(x, y) = \varphi_1(x, y).$$

Выпишем условия данной теоремы в этих координатах. Так как $\text{Im } D_u F|_S \cap W = \{0\}$, получаем

$$D_{(0,0)} \varphi_1 = 0.$$

Далее, условие отрицательности формы $\lambda \text{Hess}_u F$ записывается как

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right|_{(0,0)} < 0.$$

Тогда функция

$$\varphi_1(0, y) < 0 \quad \text{при малых } y.$$

Поэтому отображение $F|_S$ не является локально открытым в точке u . $\square$

Справедливо следующее предложение, гораздо более сильное, чем предыдущее.

Теорема 20.2 (Обобщенная лемма Морса). Пусть $u \in \mathcal{U}$ есть такая критическая точка коранга один гладкого отображения $F : \mathcal{U} \rightarrow M$, что квадратичная форма $\text{Hess}_u F$ невырождена. Тогда существуют локальные координаты в $\mathcal{U}$ и M , в которых F имеет только члены первого и второго порядков:

$$\begin{aligned} F(x, v) &= D_u F x + \frac{1}{2} \text{Hess}_u F(v, v), \\ (x, v) &\in \mathcal{U} \cong E \oplus \text{Ker } D_u F. \end{aligned}$$

Мы не доказываем эту теорему, так как не будем ее использовать в дальнейшем.

20.2.2 Критические точки произвольного коранга

Необходимое условие локальной открытости пункта (1) теоремы 20.1 обобщается для критических точек произвольного коранга.

Напомним, что *положительным (отрицательным) индексом* квадратичной формы Q называется максимальная размерность положительного (отрицательного) подпространства формы Q :

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_+ Q &= \max \left\{ \dim L \mid Q|_{L \setminus \{0\}} > 0 \right\}, \\ \operatorname{ind}_- Q &= \max \left\{ \dim L \mid Q|_{L \setminus \{0\}} < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 20.3. Пусть $F : \mathcal{U} \rightarrow M$ есть непрерывное отображение, имеющее гладкие ограничения на конечномерные подмногообразия. Пусть $u \in \mathcal{U}$ — критическая точка F коранга m . Если

$$\operatorname{ind}_- \lambda \operatorname{Hess}_u F \geq m \quad \forall \lambda \perp \operatorname{Im} D_u F, \quad \lambda \neq 0,$$

то отображение F локально открыто в точке u .

Доказательство. Утверждение теоремы локально, поэтому можно выбрать координаты и считать, что $\mathcal{U}$ — банахово пространство, $u = 0$, $M = \mathbb{R}^n$ и $F(0) = 0$.

Более того, можно считать, что пространство $\mathcal{U}$ конечномерно, сейчас мы докажем это. Для любого $\lambda \perp \operatorname{Im} D_u F$, $\lambda \neq 0$, существует такое подпространство

$$E_\lambda \subset \mathcal{U}, \quad \dim E_\lambda = m,$$

что

$$\lambda \operatorname{Hess}_u F|_{E_\lambda \setminus \{0\}} < 0.$$

Будем брать λ на единичной сфере

$$S^{m-1} = \left\{ \lambda \in (\operatorname{Im} D_u F)^\perp \mid |\lambda| = 1 \right\}.$$

Для любого $\lambda \in S^{m-1}$ существует такая окрестность $O_\lambda \subset S^{m-1}$, $\lambda \in O_\lambda$, что $E_{\lambda'} = E_\lambda$ для любых $\lambda' \in O_\lambda$, это легко следует из непрерывности формы $\lambda' \operatorname{Hess}_u F$ на единичной сфере в E_λ . Выберем конечное покрытие:

$$S^{m-1} = \bigcup_{i=1}^N O_{\lambda_i}.$$

Тогда ограничение F на конечномерное подпространство $\sum_{i=1}^N E_{\lambda_i}$ удовлетворяет условиям данной теоремы. Поэтому можно предполагать, что $\mathcal{U}$ конечномерно. Но тогда теорема следует из приведенных далее лемм 20.1 и 20.2. $\square$

Лемма 20.1. Пусть $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть гладкое отображение, и пусть $F(0) = 0$. Предположим, что квадратичное отображение

$$Q = \text{Hess}_0 F : \text{Ker } D_0 F \rightarrow \text{Coker } D_0 F$$

имеет регулярный нуль:

$$\exists v \in \text{Ker } D_0 F \text{ т.ч. } Q(v) = 0, \quad D_v Q \text{ сюръективно.}$$

Тогда отображение F имеет регулярные нули сколь угодно близко к началу координат в $\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Слегка модифицируем рассуждение, использованное при доказательстве пункта (1) теоремы 20.1. Разложим прообраз первого дифференциала:

$$\mathbb{R}^N = E \oplus \text{Ker } D_0 F, \quad \dim E = n - m,$$

тогда ограничение

$$D_0 F : E \rightarrow \text{Im } D_0 F$$

взаимно однозначно. Равенство $Q(v) = \text{Hess}_0 F(v) = 0$ означает, что

$$F_0''(v, v) \in \text{Im } D_0 F.$$

Тогда существует такое $x_0 \in E$, что

$$F_0' x_0 = -\frac{1}{2} F_0''(v, v).$$

Определим семейство отображений

$$\Phi_\varepsilon(x, y) = F(\varepsilon^2 v + \varepsilon^3 y + \varepsilon^4 x_0 + \varepsilon^5 x), \quad x \in E, \quad y \in \text{Ker } D_0 F.$$

Первые четыре производные Φ_ε обращаются в нуль при $\varepsilon = 0$, поэтому получаем тейлоровское разложение

$$\frac{1}{\varepsilon^5} \Phi_\varepsilon(x, y) = F_0' x + F_0''(v, y) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Затем рассуждаем так же, как в теореме 20.1. Семейство $\frac{1}{\varepsilon^5} \Phi_\varepsilon$ гладко и линейно сюръективно при $\varepsilon = 0$. По теореме о неявной функции, отображения $\frac{1}{\varepsilon^5} \Phi_\varepsilon$ суть субмерсии при малых $\varepsilon > 0$, поэтому они имеют регулярные нули в любой окрестности начала координат в $\mathbb{R}^N$. Следовательно, отображение F также имеет регулярные нули сколь угодно близко к началу координат в $\mathbb{R}^N$. $\square$

Лемма 20.2. Пусть $Q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть такое квадратичное отображение, что

$$\text{ind}_- \lambda Q \geq m \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{m*}, \quad \lambda \neq 0.$$

Тогда отображение Q имеет регулярный нуль.

Доказательство. Можно предполагать, что у квадратичной формы Q нет ядра:

$$Q(v, \cdot) \neq 0 \quad \forall v \neq 0. \quad (20.10)$$

Если это не так, профакторизуем по ядру Q . Так как $D_v Q = 2Q(v, \cdot)$, условие (20.10) означает, что $D_v Q \neq 0$ при $v \neq 0$.

Теперь докажем лемму индукцией по m .

В случае $m = 1$ утверждение очевидно: знакопеременная квадратичная форма имеет регулярный нуль.

Шаг индукции: докажем утверждение леммы для произвольного $m > 1$ в предположении, что она доказана для всех значений меньше m .

(1) Предположим сначала, что $Q^{-1}(0) \neq \{0\}$. Возьмем такое $v \neq 0$, что $Q(v) = 0$. Если v — регулярная точка Q , то утверждение данной леммы доказано. Поэтому предположим, что v — критическая точка Q . Так как $D_v Q \neq 0$, имеем

$$\text{rank } D_v Q = k, \quad 0 < k < m.$$

Рассмотрим гессиан отображения Q :

$$\text{Hess}_v Q : \text{Ker } D_v Q \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}.$$

Второй дифференциал квадратичного отображения равен удвоенному этому отображению, поэтому

$$\lambda \text{Hess}_v Q = 2 \lambda Q|_{\text{Ker } D_v Q}.$$

Далее, так как $\text{ind}_- \lambda Q \geq m$ и $\text{codim Ker } D_v Q = k$, получаем

$$\text{ind}_- \lambda \text{Hess}_v Q = \text{ind}_- \lambda Q|_{\text{Ker } D_v Q} \geq m - k.$$

По предположению индукции, квадратичное отображение $\text{Hess}_v Q$ имеет регулярный нуль. Применяя лемму 20.1 к отображению Q , заключаем, что Q также имеет регулярный нуль. Утверждение данной леммы в случае (1) доказано.

(2) Теперь рассмотрим второй случай: $Q^{-1}(0) = \{0\}$.

(2.a) Очевидно, что $\text{Im } Q$ есть замкнутый конус.

(2.b) Более того, можно считать, что $\text{Im } Q \setminus \{0\}$ открыт. Действительно, предположим, что существует

$$x = Q(v) \in \partial \text{Im } Q, \quad x \neq 0.$$

Тогда v — критическая точка Q , и точно так же, как в случае (1), из предположения индукции для $\text{Hess}_v Q$ следует, что $\text{Hess}_v Q$ имеет регулярный нуль. По лемме 20.1, Q локально открыто в точке v и $Q(v) \in \text{int Im } Q$. Поэтому будем далее предполагать, что множество $\text{Im } Q \setminus \{0\}$ открыто. Вместе с пунктом (a) это означает, что Q сюръективно.

(2.с) Покажем теперь, что это свойство приводит к противоречию, что и докажет данную лемму.

Гладкое отображение

$$\frac{Q}{|Q|} : S^{N-1} \rightarrow S^{m-1}, \quad v \mapsto \frac{Q(v)}{|Q(v)|}, \quad v \in S^{N-1},$$

сюръективно. По теореме Сарда, оно имеет регулярное значение. Пусть $x \in S^{m-1}$ есть регулярное значение отображения $Q/|Q|$.

Далее рассуждаем следующим образом. Найдем наименьшее $a > 0$, для которого

$$Q(v) = ax, \quad v \in S^{N-1},$$

и применим условия оптимальности к соответствующему решению v_0 , чтобы показать, что $\text{ind}_- \lambda Q \leq m - 1$, противоречие.

Рассмотрим следующую конечномерную задачу оптимизации со связями:

$$a \rightarrow \min, \quad Q(v) = ax, \quad a > 0, \quad v \in S^{N-1}. \quad (20.11)$$

Очевидно, что эта задача имеет решение, пусть пара (v_0, a_0) реализует минимум. Выпишем условия оптимальности первого и второго порядка для задачи (20.11). Существуют такие множители Лагранжа

$$(\nu, \lambda) \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in T_{a_0 x}^* \mathbb{R}^m,$$

что функция Лагранжа

$$\mathcal{L}(\nu, \lambda, a, v) = \nu a + \lambda(Q(v) - ax)$$

удовлетворяет условиям стационарности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} &= \nu - \lambda x = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \Big|_{(v_0, a_0)} &= \lambda D_{v_0} Q|_{S^{N-1}} = 0. \end{aligned} \quad (20.12)$$

Так как v_0 есть регулярная точка отображения $Q/|Q|$, имеем $\nu \neq 0$, поэтому можно положить

$$\nu = 1.$$

Тогда необходимые условия оптимальности для задачи (20.11) записываются как

$$\lambda \text{Hess}_{v_0} Q|_{S^{N-1}} \geq 0. \quad (20.13)$$

Напомним, что гессиан ограничения отображения отличен от ограничения гессиана этого отображения, см. упражнение 20.2 выше.

Упражнение 20.3. Докажите, что

$$\lambda(\text{Hess}_v Q|_{S^{N-1}})(u) = 2(\lambda Q(u) - |u|^2 \lambda Q(v)),$$

$$v \in S^{N-1}, \quad u \in \text{Ker } D_v Q|_{S^{N-1}}.$$

Следовательно, из неравенства (20.13) следует, что

$$\lambda Q(u) - |u|^2 \lambda Q(v_0) \geq 0, \quad u \in \text{Ker } D_{v_0} Q|_{S^{N-1}},$$

поэтому

$$\lambda Q(u) \geq |u|^2 \lambda Q(v_0) = |u|^2 a_0 \lambda x = |u|^2 a_0 \nu = |u|^2 a_0 > 0,$$

то есть

$$\lambda Q(u) \geq 0, \quad u \in \text{Ker } D_{v_0} Q|_{S^{N-1}}.$$

Более того, так как $v_0 \notin T_{v_0} S^{N-1}$, получаем

$$\lambda Q|_L \geq 0, \quad L = \text{Ker } D_{v_0} Q|_{S^{N-1}} \oplus \mathbb{R}v_0.$$

Теперь вычислим размерность неотрицательного подпространства L квадратичной формы λQ . Так как v_0 — регулярное значение $\frac{Q}{|Q|}$, имеем

$$\dim \text{Im } D_{v_0} \frac{Q}{|Q|} = m - 1.$$

Поэтому $\text{Im } D_{v_0} Q|_{S^{N-1}}$ может иметь размерность m или $m - 1$. Но v_0 — критическая точка $Q|_{S^{N-1}}$, поэтому

$$\dim \text{Im } D_{v_0} Q|_{S^{N-1}} = m - 1$$

и

$$\dim \text{Ker } D_{v_0} Q|_{S^{N-1}} = N - 1 - (m - 1) = N - m.$$

Следовательно, $\dim L = N - m + 1$, поэтому $\text{ind}_- \lambda Q \leq m - 1$, что противоречит условию данной леммы.

Поэтому случай (с) невозможен, и шаг индукции данной леммы доказан. $\square$

Теорема 20.3 полностью доказана.

20.3 Дифференцирование отображения в конец

В этом разделе мы вычислим дифференциал и гессиан отображения в конец для управляемой системы

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f_u(q), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad U = \text{int } U, \quad q \in M, \\ q(0) &= q_0, \\ u(\cdot) &\in \mathcal{U} = L_\infty([0, t_1], U), \end{aligned} \quad (20.14)$$

с правой частью $f_u(q)$, гладкой по (u, q) . Мы исследуем отображение в конец

$$\begin{aligned} F_{t_1} &: \mathcal{U} \rightarrow M, \\ F_{t_1} &: u(\cdot) \mapsto q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} f_{u(t)} dt \end{aligned}$$

в окрестности фиксированного допустимого управления

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}.$$

Так же как в доказательстве принципа максимума (см. раздел 12.2), из формулы вариаций следует разложение потока:

$$F_{t_1}(u) = q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} g_{t,u(t)} dt \circ P_{t_1},$$

где

$$\begin{aligned} P_t &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t f_{\tilde{u}(\tau)} d\tau, \\ g_{t,u} &= P_{t*}^{-1}(f_u - f_{\tilde{u}(t)}). \end{aligned}$$

Далее, введем промежуточное отображение

$$\begin{aligned} G_{t_1} &: \mathcal{U} \rightarrow M, \\ G_{t_1} &: u \mapsto q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} g_{t,u(t)} dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$F_{t_1}(u) = P_{t_1}(G_{t_1}(u)),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} D_{\tilde{u}} F_{t_1} &= P_{t_1*} D_{\tilde{u}} G_{t_1}, \\ \text{Hess}_{\tilde{u}} F_{t_1} &= P_{t_1*} \text{Hess}_{\tilde{u}} G_{t_1}, \end{aligned}$$

поэтому дифференцирование F_{t_1} сводится к дифференцированию G_{t_1} . Мы вычислим производные отображения G_{t_1} с помощью асимптотического разложения хронологической экспоненты:

$$\begin{aligned} a(G_{t_1}(u)) &= q_0 \circ \left(\text{Id} + \int_0^{t_1} g_{\tau,u(\tau)} d\tau + \iint_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t_1} g_{\tau_2,u(\tau_2)} \circ g_{\tau_1,u(\tau_1)} d\tau_1 d\tau_2 \right) a \\ &\quad + O(\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty}^3). \end{aligned} \quad (20.15)$$

Введем еще несколько обозначений:

$$\begin{aligned} g'_\tau &= \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{\bar{u}(\tau)} g_{\tau,u}, \\ g''_\tau &= \left. \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}(\tau)} g_{\tau,u}, \\ h_u(\lambda) &= \langle \lambda, f_u(q) \rangle, \quad \lambda \in T_q^* M, \\ h'_\tau &= \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{\bar{u}(\tau)} h_u, \\ h''_\tau &= \left. \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}(\tau)} h_u. \end{aligned}$$

Тогда дифференциал (первая вариация) отображения G_{t_1} равен

$$(D_{\bar{u}} G_{t_1})v = q_0 \circ \int_0^{t_1} g'_t v(t) dt, \quad v = v(\cdot) \in T_{\bar{u}} \mathcal{U}.$$

Управление $\tilde{u}$ есть критическая точка F_{t_1} (или, что эквивалентно, G_{t_1}) тогда и только тогда, когда существует такой множитель Лагранжа

$$\lambda_0 \in T_{q_0}^* M, \quad \lambda_0 \neq 0,$$

что

$$\lambda_0 (D_{\bar{u}} G_{t_1})v = 0 \quad \forall v \in T_{\bar{u}} \mathcal{U},$$

то есть

$$\lambda_0 g'_t(q_0) = 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Переносим ковектор λ_0 вдоль исследуемой траектории

$$q(t) = q_0 \circ P_t,$$

получаем кривую ковекторов

$$\lambda_t = P_t^{*-1} \lambda_0 = \lambda_0 P_{t*}^{-1} \in T_{q(t)}^* M,$$

являющуюся траекторией гамильтоновой системы

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{\bar{u}(t)}(\lambda_t), \quad t \in [0, t_1],$$

см. предложение 11.3. Тогда

$$\lambda_0 g'_t(q_0) = \lambda_0 P_{t*}^{-1} \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{\bar{u}(t)} f_u(q(t)) = h'_t(\lambda_t).$$

Мы показали, что $\tilde{u}$ есть критическая точка отображения в конец F_{t_1} тогда и только тогда, когда существует такая кривая ковекторов

$$\lambda_t \in T_{q(t)}^* M, \quad \lambda_t \neq 0, \quad t \in [0, t_1],$$

что

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t), \quad (20.16)$$

$$\left. \frac{\partial h_u}{\partial u} \right|_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = 0, \quad t \in [0, t_1]. \quad (20.17)$$

В частности, любая понтрягинская экстремаль есть критическая точка отображения в конец. Из принципа максимума Понтрягина следуют условия оптимальности первого порядка (20.16), (20.17). Отметим, что ПМП содержит больше, чем эти условия: согласно ПМП, гамильтониан $h_u(\lambda_t)$ не только критичен, как в (20.17), но достигает максимума вдоль оптимального управления $\tilde{u}(t)$. Обратимся к условиям второго порядка.

Из асимптотического разложения (20.15) следует выражение для второго дифференциала:

$$\begin{aligned} & D_{\tilde{u}}^2 G_{t_1}(v, w) a \\ &= q_0 \circ \left(\int_0^{t_1} g''_{\tau}(v(\tau), w(\tau)) d\tau + 2 \iint_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t_1} (g'_{\tau_2} v(\tau_2)) \circ g'_{\tau_1} w(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \right) a, \end{aligned}$$

где $a \in C^\infty(M)$ и

$$v, w \in \text{Ker } D_{\tilde{u}} G_{t_1} = \text{Ker } D_{\tilde{u}} F_{t_1},$$

то есть

$$q_0 \circ \int_0^{t_1} g'_t v(t) dt = q_0 \circ \int_0^{t_1} g'_t w(t) dt = 0.$$

Преобразуем эту формулу для второй вариации с помощью следующего разложения на симметричную и кососимметричную части.

Упражнение 20.4. Пусть X_τ — неавтономное векторное поле на M . Тогда

$$\begin{aligned} & \iint_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t} X_{\tau_2} \circ X_{\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t X_\tau d\tau \circ \int_0^t X_\tau d\tau + \frac{1}{2} \iint_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t} [X_{\tau_2}, X_{\tau_1}] d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Полагая $X_t = g'_t v(t)$ и учитывая, что $q_0 \circ \int_0^{t_1} g'_t v(t) dt = 0$, получаем:

$$q_0 \circ \iint_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t_1} X_{\tau_2} \circ X_{\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 = \frac{1}{2} q_0 \circ \iint_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t_1} [X_{\tau_2}, X_{\tau_1}] d\tau_1 d\tau_2,$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
D_u^2 G_{t_1}(v, w) a &= q_0 \circ \left(\int_0^{t_1} g''_\tau(v(\tau), w(\tau)) d\tau + \int \int_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t_1} [g'_{\tau_2} v(\tau_2), g'_{\tau_1} w(\tau_1)] d\tau_1 d\tau_2 \right) a \\
&= q_0 \circ \left(\int_0^{t_1} g''_\tau(v(\tau), w(\tau)) d\tau + \int_0^{t_1} \left[\int_0^{\tau_1} g'_{\tau_2} v(\tau_2) d\tau_2, g'_{\tau_1} w(\tau_1) \right] d\tau_1 \right) a.
\end{aligned}$$

Первый член удобно выражается в гамильтоновых терминах, так как

$$\lambda_0 g_{\tau, u} = \lambda_0 P_{\tau*}^{-1}(f_u - f_{\tilde{u}(\tau)}) = h_u(\lambda_\tau) - h_{\tilde{u}(\tau)}(\lambda_\tau).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\lambda_{t_1} D_u^2 F_{t_1}(v, w) &= \lambda_0 D_u^2 G_{t_1}(v, w) \\
&= \int_0^{t_1} h''_\tau(\lambda_\tau)(v(\tau), w(\tau)) d\tau + \int_0^{t_1} \lambda_0 \left[\int_0^{\tau_1} g'_{\tau_2} v(\tau_2) d\tau_2, g'_{\tau_1} w(\tau_1) \right] d\tau_1.
\end{aligned} \tag{20.18}$$

Для того, чтобы записать и второй член этого выражения в гамильтоновых терминах, вычислим линейный на слоях гамильтониан, соответствующий векторному полю $g'_\tau v$:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 g'_\tau v &= \left\langle \lambda_0, P_{\tau*}^{-1} \frac{\partial}{\partial u} f_u v \right\rangle = \left\langle P_\tau^{*-1} \lambda_0, \frac{\partial}{\partial u} f_u v \right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \langle P_\tau^{*-1} \lambda_0, f_u \rangle v = \frac{\partial}{\partial u} h_u \circ P_\tau^{*-1}(\lambda_0) v,
\end{aligned}$$

где производные по u берутся при $u = \tilde{u}(\tau)$. Вводя гамильтониан

$$h_{u, \tau}(\lambda) = h_u(P_\tau^{*-1}(\lambda)),$$

можно записать второй член выражения (20.18) для второй вариации в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} \int_0^{\tau_1} \lambda_0 [g'_{\tau_2} v(\tau_2), g'_{\tau_1} w(\tau_1)] d\tau_2 d\tau_1 \\
&= \int_0^{t_1} \int_0^{\tau_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} h_{u, \tau_2} v(\tau_2), \frac{\partial}{\partial u} h_{u, \tau_1} w(\tau_1) \right\} (\lambda_0) d\tau_2 d\tau_1 \\
&= \int_0^{t_1} \int_0^{\tau_1} \sigma_{\lambda_0} \left(\frac{\partial}{\partial u} \overrightarrow{h_{u, \tau_2}} v(\tau_2), \frac{\partial}{\partial u} \overrightarrow{h_{u, \tau_1}} w(\tau_1) \right) d\tau_2 d\tau_1.
\end{aligned} \tag{20.19}$$

Здесь производные $\frac{\partial}{\partial u} h_{u, \tau_i}$ и $\frac{\partial}{\partial u} \overrightarrow{h_{u, \tau_i}}$ берутся при $u = \tilde{u}(\tau_i)$.

20.4 Необходимые условия оптимальности

Применим полученные результаты о второй вариации и докажем необходимые условия геометрической оптимальности экстремальной траектории системы (20.1).

20.4.1 Условие Лежандра

Зафиксируем допустимое управление $\tilde{u}$, являющееся критической точкой коранга $m \geq 1$ отображения в конец F_{t_1} . Для простоты, будем предполагать, что $\tilde{u}(\cdot)$ кусочно гладко. Возьмем любой множитель Лагранжа

$$\lambda_0 \in (\text{Im } D_{\tilde{u}} F_{t_1})^\perp \setminus \{0\},$$

тогда

$$\lambda_t = P_t^{*-1} \lambda_0 = \lambda_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \vec{h}_{\tilde{u}(\tau)} d\tau, \quad t \in [0, t_1],$$

есть траектория гамильтоновой системы принципа максимума. Введем обозначение для соответствующей квадратичной формы, вычисляющей гессииан отображения в конец в (20.18):

$$Q : T_{\tilde{u}} \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$Q(v) = \int_0^{t_1} h''_\tau(\lambda_\tau)(v(\tau), v(\tau)) d\tau + \int_0^{t_1} \lambda_0 \left[\int_0^{\tau_1} g'_{\tau_2} v(\tau_2) d\tau_2, g'_{\tau_1} v(\tau_1) \right] d\tau_1.$$

Тогда равенство (20.18) записывается как

$$\lambda_{t_1} \text{Hess}_{\tilde{u}} F_{t_1}(v, v) = Q(v), \quad v \in \text{Ker } D_{\tilde{u}} F_{t_1}.$$

По теореме 20.3, если управление $\tilde{u}$ локально геометрически оптимально (т.е. отображение в конец F_{t_1} не является локально открытым в $\tilde{u}$), то существует такой множитель Лагранжа λ_0 , что соответствующая форма Q удовлетворяет условию

$$\text{ind}_- Q|_{\text{Ker } D_{\tilde{u}} F_{t_1}} < m = \text{corank } D_{\tilde{u}} F_{t_1}. \quad (20.20)$$

Ядро дифференциала $D_{\tilde{u}} F_{t_1}$ определяется конечным числом скалярных линейных уравнений:

$$\text{Ker } D_{\tilde{u}} F_{t_1} = \left\{ v \in T_{\tilde{u}} \mathcal{U} \mid q_0 \circ \int_0^{t_1} g'_t v(t) dt = 0 \right\},$$

то есть оно имеет конечную коразмерность в $T_{\tilde{u}} \mathcal{U}$. Поэтому из неравенства (20.20) следует, что

$$\text{ind}_- Q < +\infty$$

для соответствующей экстремали λ_t . Если взять экстремаль $-\lambda_t$, проецирующуюся в ту же экстремальную кривую $q(t)$, то получим форму Q конечного положительного индекса. Поэтому из локальной геометрической оптимальности $\tilde{u}$ следует конечность положительного индекса формы Q для некоторого множителя Лагранжа λ_0 .

Предложение 20.1. Если квадратичная форма Q имеет конечный положительный индекс, то вдоль соответствующей экстремали λ_t выполняется следующее неравенство:

$$h_t''(\lambda_t)(v, v) \leq 0, \quad t \in [0, t_1], \quad v \in \mathbb{R}^m. \quad (20.21)$$

Неравенство (20.21) называется *условием Лежандра*.

В частности, если траектория $q(t)$ локально геометрически оптимальна, то условие Лежандра выполняется для некоторой экстремали λ_t , $\pi(\lambda_t) = q(t)$. Впрочем, необходимость условия Лежандра для оптимальности непосредственно следует из условия максимума ПМП (упражнение). Но далее нам понадобится более сильное утверждение об индексе Q , сформулированное в предложении 20.1.

Отметим еще раз, что при изучении геометрической оптимальности все знаки можно обратить: умножая λ_t на -1 , получаем квадратичную форму с $\text{ind}_- Q < +\infty$ и противоположное условие Лежандра $h_t''(\lambda_t)(v, v) \geq 0$. Конечно, это относится и к последующим условиям, связанным с геометрической оптимальностью.

Докажем предложение 20.1.

Доказательство. Возьмем произвольную гладкую вектор-функцию

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{supp } v \subset [0, 1],$$

и введем семейство вариаций вида:

$$v_{\bar{\tau}, \varepsilon}(\tau) = v\left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{\varepsilon}\right), \quad \bar{\tau} \in [0, t_1], \quad \varepsilon > 0.$$

Отметим, что вектор-функция $v_{\bar{\tau}, \varepsilon}$ сосредоточена на отрезке $[\bar{\tau}, \bar{\tau} + \varepsilon]$. Найдем асимптотику формы Q на введенном семействе:

$$\begin{aligned} Q(v_{\bar{\tau}, \varepsilon}) &= \varepsilon \int_0^1 h_{\bar{\tau} + \varepsilon s}''(\lambda_{\bar{\tau} + \varepsilon s})(v(s), v(s)) ds \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_0^1 \lambda_0 \left[\int_0^1 g'_{\bar{\tau} + \varepsilon s_2} v(s_2) ds_2, g'_{\bar{\tau} + \varepsilon s_1} v(s_1) \right] ds_1 \\ &= \varepsilon \int_0^1 h_{\bar{\tau}}''(\lambda_{\bar{\tau}})(v(s), v(s)) ds + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (20.22)$$

где $O(\varepsilon^2)$ равномерно по v в норме L_∞ .

Предположим, от противного, что

$$h_{\bar{\tau}}''(\lambda_{\bar{\tau}})(v, v) > 0$$

для некоторого $\bar{\tau} \in [0, t_1]$, $v \in \mathbb{R}^m$. В главных осях квадратичная форма становится суммой квадратов:

$$h_{\bar{\tau}}''(\lambda_{\bar{\tau}})(v, v) = \sum_{i=1}^m \alpha_{\bar{\tau}}^i (v^i)^2$$

где по меньшей мере один коэффициент

$$\alpha_{\bar{\tau}}^i > 0.$$

Выберем вектор-функцию v вида

$$v(s) = \begin{pmatrix} v^1(s) \\ \vdots \\ v^i(s) \\ \vdots \\ v^m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ v^i(s) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

с единственной ненулевой компонентой $v^i(s)$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$, $Q(v_{\bar{\tau}, \varepsilon}) > 0$. Но при любых фиксированных $\bar{\tau}$ и ε пространство вектор-функций $v_{\bar{\tau}, \varepsilon}$ бесконечномерно. Поэтому квадратичная форма Q имеет бесконечный положительный индекс. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

20.4.2 Регулярные экстремали

Мы доказали, что условие Лежандра необходимо для конечности положительного индекса квадратичной формы Q . Соответствующее достаточное условие дается *усиленным условием Лежандра*:

$$\begin{aligned} h_t''(\lambda_t)(v, v) &< -\alpha|v|^2, \quad t \in [0, t_1], \quad v \in \mathbb{R}^m, \\ \alpha &> 0. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Экстремаль, удовлетворяющая усиленному условию Лежандра, называется *регулярной* (отметим, что это определение относится только в случае открытого пространства управляющих параметров U , когда условие Лежандра связано с максимальнойностью h_u).

Предложение 20.2. *Если λ_t , $t \in [0, t_1]$, есть регулярная экстремаль, то:*

- (1) *для любого $\tau \in [0, t_1]$ существует такое $\varepsilon > 0$, что форма Q отрицательна на пространстве $L_\infty^m[\tau, \tau + \varepsilon]$,*
- (2) *форма Q имеет конечный положительный индекс на пространстве $T_{\bar{u}}U = L_\infty^m[0, t_1]$.*

Доказательство. (1) Разложим форму Q :

$$\begin{aligned} Q(v) &= Q_1(v) + Q_2(v), \\ Q_1(v) &= \int_0^{t_1} h_\tau''(\lambda_\tau)(v(\tau), v(\tau)) d\tau, \\ Q_2(v) &= \int_0^{t_1} \lambda_0 \left[\int_0^{\tau_1} g'_{\tau_2} v(\tau_2) d\tau_2, g'_{\tau_1} v(\tau_1) \right] d\tau_1 \\ &= \int_0^{t_1} \sigma_{\lambda_0} \left(\int_0^{\tau_1} \frac{\partial}{\partial u} \overrightarrow{h_{u, \tau_2}} v(\tau_2), \frac{\partial}{\partial u} \overrightarrow{h_{u, \tau_1}} v(\tau_1) \right) d\tau_2 d\tau_1. \end{aligned}$$

В силу непрерывности $h''_\tau(\lambda_\tau)$ по τ , из усиленного условия Лежандра следует, что

$$Q_1 \left(v|_{[\tau, \tau+\varepsilon]} \right) < -\frac{\alpha}{2} \varepsilon \|v\|_{L_2}^2$$

при малых $\varepsilon > 0$. То же рассуждение, что и в (20.22), доказывает, что член Q_1 доминирует на малых отрезках:

$$Q_2 \left(v|_{[\tau, \tau+\varepsilon]} \right) = O(\varepsilon^2) \|v\|_{L_2}^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

поэтому

$$Q \left(v|_{[\tau, \tau+\varepsilon]} \right) < 0$$

для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и всех $v \in L_\infty^m[0, t_1]$, $v \neq 0$.

(2) Покажем, что форма Q отрицательна на любом подпространстве $L_\infty^m[0, t_1]$ конечной коразмерности, отсюда следует, что $\text{ind}_+ Q < \infty$.

Такое же рассуждение, как и примененное при доказательстве пункта (1), показывает, что любая точка $\tau \in [0, t_1]$ может быть покрыта таким отрезком $[\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$, что форма Q отрицательна на пространстве $L_\infty^m[\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$. Выберем такие точки $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = t_1$, что Q отрицательна на пространствах $L_\infty^m[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, \dots, N$. Определим следующее подпространство конечной коразмерности в $L_\infty^m[0, t_1]$:

$$L = \left\{ v \in L_\infty^m[0, t_1] \mid \lambda_0 \circ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \frac{\partial}{\partial u} \overrightarrow{h_{u, \tau}} v(\tau) d\tau = 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}.$$

Для любого $v \in L$, $v \neq 0$,

$$Q(v) = \sum_{i=1}^N Q \left(v|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]} \right) < 0.$$

Поэтому L есть искомое отрицательное подпространство конечной коразмерности квадратичной формы Q . Следовательно, форма Q имеет конечный положительный индекс. $\square$

Предложения 20.1 и 20.2 устанавливают связь знакоопределенности формы $h''_\tau(\lambda_t)$ с знакоопределенностью формы Q , поэтому в случае коранга один с локальной геометрической оптимальностью управления $\tilde{u}$ (через теорему 20.1). Условие Лежандра необходимо для конечности $\text{ind}_+ Q$, а потому и для локальной геометрической оптимальности $\tilde{u}$. С другой стороны, усиленное условие Лежандра достаточно для отрицательности Q на малых отрезках, поэтому для локальной конечномерной оптимальности $\tilde{u}$ на малых отрезках. Отметим, что гораздо более сильный результат получается из теории полей экстремалей (раздел 17.1). Действительно, при усиленном условии Лежандра максимизированный гамильтониан принципа максимума гладок, и следствие 17.1 дает локальную оптимальность на малых отрезках (в топологии $C([0, t_1], M)$, а потому и в $L_\infty([0, t_1], U)$, и в топологии сходимости на конечномерных подмногообразиях в $\mathcal{U}$).

20.4.3 Особые экстремали

Рассмотрим теперь случай, когда вторая производная гамильтониана h_u обращается в нуль тождественно вдоль экстремали, в частности, случай аффинных по управлению систем $\dot{q} = f_0(q) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(q)$. Итак, будем предполагать, что экстремаль λ_t удовлетворяет тождеству

$$h_t''(\lambda_t) \equiv 0, \quad t \in [0, t_1]. \quad (20.24)$$

Такая экстремаль называется *вполне особой*. Как и в случае регулярных экстремалей, это определение относится только к случаю открытого множества управляющих параметров U .

Для вполне особой экстремали выражение для гессиана (20.18) принимает форму:

$$\lambda_{t_1} \text{Hess}_{\bar{u}} F_{t_1}(v_1, v_2) = \lambda_0 \int_0^{t_1} \left[\int_0^{\tau_1} g'_{\tau_2} v_1(\tau_2) d\tau_2, g'_{\tau_1} v_2(\tau_1) \right] d\tau_1.$$

Чтобы найти доминирующий член гессиана (сосредоточенный на диагонали $\tau_1 = \tau_2$), проинтегрируем по частям. Обозначим

$$w_i(\tau) = \int_{\tau}^{t_1} v_i(s) ds, \\ \dot{g}'_{\tau} = \frac{d}{d\tau} g'_{\tau}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \lambda_{t_1} \text{Hess}_{\bar{u}} F_{t_1}(v_1, v_2) \\ &= \lambda_0 \left(\int_0^{t_1} \left[-g'_{\tau_1} w_1(\tau_1) + g'_0 w_1(0) + \int_0^{\tau_1} \dot{g}'_{\tau_2} w_1(\tau_2) d\tau_2, g'_{\tau_1} v_2(\tau_1) \right] d\tau_1 \right) \\ &= \lambda_0 \left(- \int_0^{t_1} [g'_{\tau} w_1(\tau), g'_{\tau} v_2(\tau)] d\tau + [g'_0 w_1(0), g'_0 w_2(0)] \right. \\ & \quad + \left[g'_0 w_1(0), \int_0^{t_1} \dot{g}'_{\tau} w_2(\tau) d\tau \right] + \int_0^{t_1} [\dot{g}'_{\tau} w_1(\tau), g'_{\tau} w_2(\tau)] d\tau \\ & \quad \left. + \int_0^{t_1} \left[\dot{g}'_{\tau_2} w_1(\tau_2), \int_{\tau_2}^{t_1} \dot{g}'_{\tau_1} w_2(\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau_2 \right). \end{aligned} \quad (20.25)$$

Проинтегрируем по частям также условие допустимости $q_0 \circ \int_0^{t_1} g'_t v_i(t) dt = 0$:

$$q_0 \circ \left(\int_0^{t_1} \dot{g}'_t w_i(t) dt + g'_0 w_i(0) \right) = 0. \quad (20.26)$$

Далее мы будем брать вариации v_i , подчиненные ограничению

$$w_i(0) = \int_0^{t_1} v_i(t) dt = 0, \quad i = 1, 2.$$

Предположим, что функции $v(s)$, использованные при построении семейства $v_{\bar{\tau}, \varepsilon}(\tau) = v\left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{\varepsilon}\right)$, удовлетворяют равенству

$$\int_0^1 v(s) ds = 0,$$

тогда первообразная

$$w(s) = \int_0^s v(s') ds'$$

также сосредоточена на отрезке $[0, 1]$. Тогда последний член в выражении гессиана (20.25) обращается в нуль, и равенство (20.26) сводится к следующему:

$$q_0 \circ \int_0^{t_1} \dot{g}'_t w_i(t) dt = 0.$$

Асимптотика гессиана на семействе $v_{\bar{\tau}, \varepsilon}$ имеет вид:

$$\lambda_{t_1} \text{Hess}_{\bar{u}} F_{t_1}(v_{\bar{\tau}, \varepsilon}, v_{\bar{\tau}, \varepsilon}) = Q(v_{\bar{\tau}, \varepsilon}) = \varepsilon^2 \lambda_0 \int_0^1 [g'_{\bar{\tau}} w(s), g'_{\bar{\tau}} v(s)] ds + O(\varepsilon^3).$$

Исследование этого доминирующего члена приводит к необходимым условиям оптимальности.

Предложение 20.3. Пусть λ_t , $t \in [0, t_1]$, есть вполне особая экстремаль. Если квадратичная форма $Q = \lambda_{t_1} \text{Hess}_{\bar{u}} F_{t_1}$ имеет конечный положительный индекс, то

$$\lambda_0 [g'_t v_1, g'_t v_2] = 0 \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_1]. \quad (20.27)$$

Равенство (20.27) называется *условием Гоха*. Его можно также записать следующим образом:

$$\lambda_t \left[\frac{\partial f_u}{\partial u} v_1, \frac{\partial f_u}{\partial u} v_2 \right] = 0,$$

или в гамильтоновой форме:

$$\left\{ \frac{\partial h_u}{\partial u_i}, \frac{\partial h_u}{\partial u_j} \right\} (\lambda_t) = \sigma_{\lambda_t} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \vec{h}_u, \frac{\partial}{\partial u_j} \vec{h}_u \right) = 0, \\ i, j = 1, \dots, m, \quad t \in [0, t_1].$$

Как и раньше, производные по u вычисляются при $u = \tilde{u}(t)$.

Докажем предложение 20.3.

Доказательство. Возьмем такую гладкую вектор-функцию $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, сосредоточенную на отрезке $[0, 2\pi]$, что $\int_0^{2\pi} v(s) ds = 0$, и построим, как раньше, вариацию управлений

$$v_{\bar{\tau}, \varepsilon}(\tau) = v\left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{\varepsilon}\right).$$

Получаем

$$Q(v_{\bar{\tau}, \varepsilon}) = \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \lambda_0 [g'_{\bar{\tau}} w(s), g'_{\bar{\tau}} v(s)] ds + O(\varepsilon^3) \|v\|_{L_2}^2,$$

где $w(s) = \int_0^s v(s') ds'$. Доминирующий член есть интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \lambda_0 [g'_{\bar{\tau}} w(s), g'_{\bar{\tau}} v(s)] ds &= \int_0^{2\pi} \omega(w(s), v(s)) ds, \\ \omega(x, y) &= \lambda_0 [g'_{\bar{\tau}} x, g'_{\bar{\tau}} y], \quad x, y \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (20.28)$$

заметим, что билинейная кососимметричная форма ω входит в условие Гоха (20.27). Чтобы доказать предложение, покажем, что если $\omega \neq 0$, то доминирующий член гессиана (20.28) имеет положительное подпространство сколь угодно большой размерности.

Пусть $\omega \neq 0$ для некоторого $\bar{\tau} \in [0, t_1]$, тогда $\text{rank } \omega = 2l > 0$ и существуют координаты в $\mathbb{R}^m$, в которых форма ω имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \sum_{i=1}^l (x^i y^{i+l} - x^{i+l} y^i), \\ x &= \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Возьмем вектор-функцию v вида

$$\begin{aligned} v(s) &= \begin{pmatrix} v^1(s) \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ v^{l+1}(s) \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ v^1(s) &= \sum_{k>0} \xi_k \cos ks, \quad v^{l+1}(s) = \sum_{k>0} \eta_k \sin ks. \end{aligned}$$

Подставляя $v(s)$ в (20.28), получаем:

$$\int_0^{2\pi} \omega(w(s), v(s)) ds = -2\pi \sum_{k>0} \frac{1}{k} \xi_k \eta_k.$$

Очевидно, что эта форма имеет положительное подпространство бесконечной размерности.

Для сколь угодно большого N можно найти N -мерное положительное пространство L_N формы (20.28). Существует такое $\varepsilon_N > 0$, что $Q(v_{\bar{\tau}, \varepsilon_N}) > 0$ для любых $v \in L_N$. Поэтому $\text{ind}_+ Q = \infty$. Полученное противоречие доказывает условие Гоха. $\square$

Упражнение 20.5. Покажите, что условие Гоха выполняется не только для кусочно-гладких, но и для измеримых ограниченных экстремальных управлений $\tilde{u}$ в точках Лебега.

Условие Гоха дает сильные ограничения на вполне особое оптимальное управление $\tilde{u}$. Для вполне особой экстремали первые два члена в (20.25) обращаются в нуль по условию Гоха. Более того, при условии $w(0) = 0$ третий член в (20.25) также равен нулю. Тогда выражение для гессиана (20.25) сводится к следующим двум слагаемым:

$$\begin{aligned} \lambda_{t_1} \text{Hess}_{\tilde{u}} F_{t_1}(v, v) &= Q(v) \\ &= \lambda_0 \left(\int_0^{t_1} [\dot{g}'_{\tau} w(\tau), g'_{\tau} w(\tau)] d\tau + \int_0^{t_1} \left[\dot{g}'_{\tau_2} w(\tau_2), \int_{\tau_2}^{t_1} \dot{g}'_{\tau_1} w(\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau_2 \right). \end{aligned} \quad (20.29)$$

Предположим, что квадратичная форма Q имеет конечный положительный индекс. С помощью того же рассуждения, что и в предложении 20.1, доказываем еще одно поточечное условие:

$$\lambda_0 [\dot{g}'_t v, g'_t v] \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_1]. \quad (20.30)$$

Это неравенство называется *обобщенным условием Лежандра*.

Заметим, что обобщенное условие Лежандра можно переписать в гамильтоновых терминах:

$$\{ \{ h_{\tilde{u}(t)}, h'_t v \}, h'_t v \} (\lambda_t) + \{ h''_t(\dot{\tilde{u}}(t), v), h'_t v \} (\lambda_t) \leq 0, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_1].$$

Это легко следует из равенств:

$$\begin{aligned} g'_t v &= P_{t*}^{-1} \frac{\partial f_u}{\partial u} v = \text{Ad } P_t \frac{\partial f_u}{\partial u} v, \\ \dot{g}'_t v &= \frac{d}{dt} \exp \int_0^t \text{ad } f_{\tilde{u}(\tau)} d\tau \frac{\partial f_u}{\partial u} v \\ &= P_{t*}^{-1} \left[f_{\tilde{u}(t)}, \frac{\partial f_u}{\partial u} v \right] + P_{t*}^{-1} \frac{\partial^2 f_u}{\partial u^2} (\dot{\tilde{u}}(t), v). \end{aligned}$$

Сильная версия (20.31) обобщенного условия Лежандра играет во вполне особом случае такую же роль, как усиленное условие Лежандра в регулярном случае.

Предложение 20.4. Пусть экстремаль λ_t вполне особа, удовлетворяет условию Гоха, усиленному обобщенному условию Лежандра:

$$\begin{aligned} \{ \{ h_{\tilde{u}(t)}, h'_t v \}, h'_t v \} (\lambda_t) + \{ h''_t(\dot{\tilde{u}}(t), v), h'_t v \} (\lambda_t) &\leq -\alpha |v|^2, \\ v \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_1], \end{aligned} \quad (20.31)$$

для некоторого $\alpha > 0$, и следующему условию невырожденности:

$$\text{линейное отображение } \frac{\partial f_u(q_0)}{\partial u} \Big|_{\bar{u}(0)} : \mathbb{R}^m \rightarrow T_{q_0}M \text{ инъективно.} \quad (20.32)$$

Тогда квадратичная форма $Q|_{\text{Ker } D_{\bar{u}} F_t}$ отрицательна на малых отрезках и имеет конечный положительный индекс на $L_\infty^m[0, t_1]$.

Доказательство. Это предложение доказывается аналогично утверждению 20.2. В разложении (20.25) первые два слагаемые обращаются в нуль по условию Гоха, а четвертый член отрицателен и доминирует на малых отрезках. Третий член мал на коротких отрезках, так как

$$q_0 \circ g'_0 w_1(0) = \frac{\partial f_u(q_0)}{\partial u} \Big|_{\bar{u}(0)} w_1(0),$$

а условие (20.32) позволяет выразить $w_1(0)$ через интеграл $\int_0^{t_1} w_1(\tau) d\tau$ на ядре $D_{\bar{u}} F_{t_1}$, определенном равенством (20.26). $\square$

Мы будем называть экстремаль, удовлетворяющую всем условиям предложения 20.4, *хорошей особой экстремалью*.

20.4.4 Необходимые условия

Суммируя результаты этого раздела, получаем следующие необходимые условия для того, чтобы квадратичная форма Q имела конечный положительный индекс.

Теорема 20.4. Пусть кусочно-гладкое управление $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть критическая точка отображения в конец F_{t_1} . Пусть ковектор $\lambda_{t_1} \in T_{F_{t_1}(\bar{u})}^* M$ является множителем Лагранжа:

$$\lambda_{t_1} D_{\bar{u}} F_{t_1} = 0, \quad \lambda_{t_1} \neq 0.$$

Если квадратичная форма Q имеет конечный положительный индекс, то:

(I) траектория λ_t гамильтоновой системы принципа максимума

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_t &= \vec{h}_{\bar{u}(t)}(\lambda_t), \\ h_u(\lambda) &= \langle \lambda, f_u(q) \rangle, \end{aligned}$$

удовлетворяет равенству

$$h'_t(\lambda_t) = 0, \quad t \in [0, t_1],$$

(II.1) выполняется условие Лежандра:

$$h''_t(\lambda_t)(v, v) \leq 0, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_1].$$

(II.2) Если экстремаль λ_t вполне особая:

$$h_t''(\lambda_t)(v, v) \equiv 0, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_1],$$

то выполняются условие Гоха:

$$\{h_t'v_1, h_t'v_2\}(\lambda_t) \equiv 0, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_1], \quad (20.33)$$

и обобщенное условие Лежандра:

$$\begin{aligned} \{ \{h_{\tilde{u}(t)}, h_t'v\}, h_t'v \}(\lambda_t) + \{ h_t''(\dot{\tilde{u}}(t), v), h_t'v \}(\lambda_t) \leq 0, \\ v \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_1]. \end{aligned} \quad (20.34)$$

Замечание. Если гамильтониан h_u зависит от u аффинно (аффинные по управлению системы), то второе слагаемое в обобщенном условии Лежандра (20.34) обращается в нуль.

Напомним, что соответствующие достаточные условия конечности индекса второй вариации даются в предложениях 20.2 и 20.4.

Комбинируя теоремы 20.4 и 20.3, получаем следующие необходимые условия оптимальности.

Следствие 20.1. Если кусочно-гладкое управление $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$ локально геометрически оптимально для управляемой системы (20.14), тогда вдоль соответствующей экстремали λ_t выполняются условия первого порядка (I) и второго порядка (II.1), (II.2) теоремы 20.4.

20.5 Приложения

В этом разделе мы применим полученные условия оптимальности второго порядка к конкретным задачам.

20.5.1 Анормальные субримановы геодезические

Рассмотрим субриманову задачу:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \sum_{i=1}^m u_i f_i(q), \quad q \in M, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m, \\ q(0) &= q_0, \quad q(1) = q_1, \\ J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^m u_i^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 |u|^2 dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Исследование оптимальности эквивалентно изучению границы множества достижимости для расширенной системы

$$\begin{cases} \dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(q), & q \in M, \\ \dot{y} = \frac{1}{2}|u|^2, & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Гамильтониан равен

$$h_u(\lambda, \nu) = \sum_{i=1}^m u_i \langle \lambda, f_i(q) \rangle + \frac{\nu}{2} |u|^2, \quad \lambda \in T^*M, \quad \nu \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}.$$

Параметр ν постоянен вдоль любой геодезической (экстремали). Если $\nu \neq 0$ (нормальный случай), то экстремальное управление можно определить из принципа максимума. Далее будем рассматривать аномальный случай:

$$\nu = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_u(\lambda) &= h_u(\lambda, 0) = \sum_{i=1}^m u_i h_i(\lambda), \\ h_i(\lambda) &= \langle \lambda, f_i(q) \rangle, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

В аномальном случае условие максимума ПМП непосредственно не определяет управления (аномальные экстремали вполне особые). Из этого условия следует, что аномальные экстремали λ_t удовлетворяют, вдобавок к гамильтоновой системе

$$\dot{\lambda}_t = \sum_{i=1}^m u_i(t) \vec{h}_i(\lambda_t),$$

следующим тождествам:

$$h_i(\lambda_t) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Применим условия второго порядка. Как мы уже отмечали, условие Лежандра вырождается. Условие Гоха принимает форму:

$$\{h_i, h_j\}(\lambda_t) \equiv 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Если аномальная экстремаль λ_t проецируется в оптимальную траекторию $q(t)$, то в любой точке q этой траектории существует такой ковектор

$$\lambda \in T_q^*M, \quad \lambda \neq 0,$$

что

$$\begin{aligned} \langle \lambda, f_i(q) \rangle &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \langle \lambda, [f_i, f_j](q) \rangle &= 0, \quad i, j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Следовательно, если

$$\text{span}(f_i(q), [f_i, f_j](q)) = T_q M, \quad (20.35)$$

то через точку q не проходят локально оптимальные строго аномальные траектории. Экстремальная траектория называется *строго аномальной*, если она является проекцией аномальной экстремали и не является проекцией нормальной экстремали. Отметим, что в случае $\text{co}\text{rank} > 1$ экстремальные траектории могут быть аномальными, но не строго аномальными (т.е. могут быть аномальными и нормальными одновременно): могут существовать два множителя Лагранжа $(\lambda, 0)$ и $(\lambda', \nu \neq 0)$. Малые дуги таких траекторий всегда локально оптимальны в силу гладкости нормального гамильтониана $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m h_i^2$ (см. следствие 17.1).

Распределения $\text{span}(f_i(q))$, удовлетворяющие условию (20.35), называются *2-порождающими*. Например, левоинвариантные распределения полного ранга, возникающие в субримановой задаче на компактной группе Ли в разделе 19.2 и упражнении 19.1, являются 2-порождающими, поэтому в этих задачах нет строго аномальных траекторий.

Пример 20.1. Рассмотрим следующую левоинвариантную субриманову задачу на $\text{GL}(n)$ с естественным критерием:

$$\dot{Q} = QV, \quad Q \in \text{GL}(n), \quad V = V^*, \quad (20.36)$$

$$J(V) = \frac{1}{2} \int_0^1 \text{tr } V^2 dt \rightarrow \min. \quad (20.37)$$

Упражнение 20.6. Покажите, что нормальные экстремали в этой задаче суть произведения двух однопараметрических подгрупп. (Указание: повторите рассуждение раздела 19.2.) Отсюда следует, что любая невырожденная матрица может быть представлена в виде произведения двух экспонент $e^{V} e^{(V-V^*)/2}$. Заметим, что не любая невырожденная матрица представляется в виде одной экспоненты e^V .

В задаче (20.36), (20.37) имеется много аномальных экстремалей, но они не могут быть оптимальными. Действительно, распределение, заданное правой частью этой системы, 2-порождающее. Действительно,

$$[QV_1, QV_2] = Q[V_1, V_2],$$

причем если матрицы V_i симметричны, то их коммутатор $[V_1, V_2]$ кососимметричен. Более того, любая кососимметричная матрица может быть получена таким образом. Но любая $n \times n$ матрица есть сумма симметричной и кососимметричной матриц. Поэтому распределение $\{QV \mid V^* = V\}$ 2-порождающее, и строго аномальные экстремальные траектории неоптимальны.

20.5.2 Локальная управляемость билинейных систем

Рассмотрим *билинейную* управляемую систему вида

$$\dot{x} = Ax + uBx + vb, \quad u, v \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (20.38)$$

Мы интересуемся, когда эта система *локально управляема* в начале координат, т.е.

$$0 \in \text{int } \mathcal{A}_0(t) \quad \forall t > 0.$$

Отрицание необходимых условий геометрической оптимальности дает достаточные условия локальной управляемости. Применим к нашей системе условия второго порядка следствия 20.1. Предположим, что

$$0 \in \partial \mathcal{A}_0(t) \text{ для некоторого } t > 0.$$

Тогда траектория $x(t) \equiv 0$ геометрически оптимальна, поэтому она удовлетворяет принципу максимума. Зависящий от управления гамильтониан равен

$$h_{u,v}(p, x) = pAx + upBx + vpb, \quad \lambda = (p, x) \in T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n*} \times \mathbb{R}^n.$$

Вертикальная часть гамильтоновой системы вдоль траектории $x(t)$ имеет вид:

$$\dot{p} = -pA, \quad p \in \mathbb{R}^{n*}. \quad (20.39)$$

Из принципа максимума следует, что

$$p(\tau)b = p(0)e^{-A\tau}b \equiv 0, \quad \tau \in [0, t],$$

то есть

$$p(0)A^i b = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (20.40)$$

для некоторого ковектора $p(0) \neq 0$, поэтому

$$\text{span}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq \mathbb{R}^n.$$

Переходим к условиям второго порядка. Условие Лежандра вырождается, так как система аффинна по управлению, а условие Гоха принимает форму:

$$p(\tau)Bb \equiv 0, \quad \tau \in [0, t].$$

Дифференцируя это тождество в силу гамильтоновой системы (20.39), получаем, вдобавок к (20.40), дополнительные ограничения на $p(0)$:

$$p(0)A^i Bb = 0, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Обобщенное условие Лежандра вырождается.

Итак, неравенство

$$\text{span}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b, Bb, ABb, \dots, A^{n-1}Bb) \neq \mathbb{R}^n$$

необходимо для геометрической оптимальности траектории $x(t) \equiv 0$. Иными словами, равенство

$$\text{span}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b, Bb, ABb, \dots, A^{n-1}Bb) = \mathbb{R}^n$$

достаточно для локальной управляемости билинейной системы (20.38) в начале координат.

20.6 Системы со скалярным управлением

В этом разделе мы применим условия оптимальности первого и второго порядка к простейшему (и наиболее сложному для управления) случаю систем со скалярным управлением:

$$\dot{q} = f_0(q) + uf_1(q), \quad u \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}, \quad q \in M. \quad (20.41)$$

Система аффинна по управлению, и условие Лежандра автоматически выполняется. Далее, управление одномерно, поэтому условие Гоха тривиально. Впрочем, обобщенное условие Лежандра работает (мы выпишем его ниже). Сначала применим принцип максимума Понтрягина. Введем линейные на слоях кокасательного расслоения гамильтонианы

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i(q) \rangle, \quad i = 0, 1,$$

тогда гамильтониан системы равен

$$h_u(\lambda) = h_0(\lambda) + uh_1(\lambda).$$

Мы будем рассматривать экстремали, соответствующие управлению

$$u(t) \in (\alpha, \beta). \quad (20.42)$$

Гамильтонова система ПМП имеет вид

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_0(\lambda_t) + u(t)\vec{h}_1(\lambda_t), \quad (20.43)$$

а условие максимума сводится к тождеству

$$h_1(\lambda_t) \equiv 0. \quad (20.44)$$

Экстремали λ_t липшицевы, поэтому предыдущее тождество можно дифференцировать:

$$\dot{h}_1(\lambda_t) = \frac{d}{dt}h_1(\lambda_t) = \{h_0 + u(t)h_1, h_1\}(\lambda_t) = \{h_0, h_1\}(\lambda_t) \equiv 0. \quad (20.45)$$

Равенства (20.44), (20.45), выполняющиеся тождественно вдоль любой экстремали λ_t , которая удовлетворяет (20.42), не позволяют определить соответствующее управление $u(t)$. Чтобы получить равенство, содержащее $u(t)$, продолжаем дифференцировать:

$$\begin{aligned} \ddot{h}_1(\lambda_t) &= \{h_0 + u(t)h_1, \{h_0, h_1\}\}(\lambda_t) \\ &= \{h_0, \{h_0, h_1\}\}(\lambda_t) + u(t)\{h_1, \{h_0, h_1\}\}(\lambda_t) \equiv 0. \end{aligned}$$

Введем обозначение для гамильтонианов:

$$h_{i_1 i_2 \dots i_k} = \{h_{i_1}, \{h_{i_2}, \dots, \{h_{i_{k-1}}, h_{i_k}\} \dots \}\}, \quad i_j \in \{0, 1\}.$$

тогда любая экстремаль λ_t с ограничением (20.42) удовлетворяет тождествам

$$h_1(\lambda_t) = h_{01}(\lambda_t) \equiv 0, \quad (20.46)$$

$$h_{001}(\lambda_t) + u(t)h_{101}(\lambda_t) \equiv 0. \quad (20.47)$$

Если $h_{101}(\lambda_t) \neq 0$, то экстремальное управление $u = u(\lambda_t)$ определяется однозначно точкой λ_t :

$$u(\lambda_t) = -\frac{h_{001}(\lambda_t)}{h_{101}(\lambda_t)}. \quad (20.48)$$

Заметим, что условие регулярности $h_{101}(\lambda_t) \neq 0$ тесно связано с обобщенным условием Лежандра. Действительно, для гамильтониана $h_u = h_0 + uh_1$ обобщенное условие Лежандра принимает вид

$$\{\{h_0 + uh_1, h_1\}, h_1\}(\lambda_t) = -h_{101}(\lambda_t) \leq 0,$$

то есть

$$h_{101}(\lambda_t) \geq 0.$$

Если же это неравенство становится строгим, то управление определяется соотношением (20.48).

Предположим, что $h_{101}(\lambda_t) \neq 0$ и подставим управление $u(\lambda) = -h_{001}(\lambda)/h_{101}(\lambda)$, определяемое равенством (20.48), в гамильтонову систему (20.43):

$$\dot{\lambda} = \vec{h}_0(\lambda) + u(\lambda)\vec{h}_1(\lambda). \quad (20.49)$$

Любая экстремаль, на которой выполняются условия (20.42) и $h_{101}(\lambda_t) \neq 0$, есть траектория этой системы.

Лемма 20.3. *Многообразие*

$$\{\lambda \in T^*M \mid h_1(\lambda) = h_{01}(\lambda) = 0, h_{101}(\lambda) \neq 0\} \quad (20.50)$$

инвариантно для системы (20.49).

Доказательство. Прежде всего заметим, что условие регулярности $h_{101}(\lambda) \neq 0$ гарантирует, что условия (20.50) определяют гладкое многообразие, так как $d_\lambda h_1$ и $d_\lambda h_{01}$ линейно независимы. Введем гамильтониан

$$\varphi(\lambda) = h_0(\lambda) + u(\lambda)h_1(\lambda).$$

Соответствующее гамильтоново векторное поле

$$\vec{\varphi}(\lambda) = \vec{h}_0(\lambda) + u(\lambda)\vec{h}_1(\lambda) + h_1(\lambda)\vec{u}(\lambda)$$

совпадает с полем (20.49) на многообразии $\{h_1 = h_{01} = 0\}$, поэтому достаточно показать, что $\vec{\varphi}$ касается этого многообразия.

Вычислим производные вдоль поля $\vec{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= \{h_0 + uh_1, h_1\} = h_{01} - (\vec{h}_1 u) h_1, \\ \dot{h}_{01} &= \{h_0 + uh_1, h_{01}\} = \underbrace{h_{001} + uh_{101}}_{\equiv 0} - (\vec{h}_{01} u) h_1 = -(\vec{h}_{01} u) h_1.\end{aligned}$$

Линейная система с переменными коэффициентами для $h_1(t) = h_1(\lambda_t)$, $h_{01}(t) = h_{01}(\lambda_t)$

$$\begin{cases} \dot{h}_1(t) = h_{01}(t) - (\vec{h}_1 u)(\lambda_t) h_1(t), \\ \dot{h}_{01}(t) = -(\vec{h}_{01} u)(\lambda_t) h_1(t) \end{cases}$$

имеет единственное решение. Поэтому для начальных условий $h_1(0) = h_{01}(0) = 0$ получаем решение $h_1(t) = h_{01}(t) \equiv 0$. Следовательно, многообразие (20.50) инвариантно для поля $\vec{\varphi}(\lambda)$, а потому и для поля (20.49). $\square$

Теперь опишем все экстремали системы (20.41), удовлетворяющие условиям (20.42) и $h_{101} \neq 0$. Любая такая экстремаль принадлежит многообразию $\{h_1 = h_{01} = 0\}$, и через любую точку λ_0 этого многообразия, удовлетворяющую граничным условиям на управление:

$$u(\lambda_0) = -\frac{h_{001}(\lambda_0)}{h_{101}(\lambda_0)} \in (\alpha, \beta),$$

проходит единственная такая экстремаль — траектория λ_t системы (20.49).

В задачах, рассмотренных в главах 13 и 18 (машина Дубинса, вращение вокруг двух осей в $SO(3)$), все особые экстремали возникали именно таким образом. В общем случае $h_{101} \neq 0$, и все экстремали, удовлетворяющие (20.42), могут быть изучены, как это сделано выше. Но в некоторых важных примерах гамильтониан h_{101} может обращаться в нуль. Например, рассмотрим механическую систему с управляемой силой:

$$\ddot{y} = g(y) + ub, \quad y, b \in \mathbb{R}^n, \quad u \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R},$$

или в стандартной форме:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = g(y_1) + ub. \end{cases}$$

Векторные поля в правой части равны

$$\begin{aligned}f_0 &= y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + g(y_1) \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ f_1 &= b \frac{\partial}{\partial y_2},\end{aligned}$$

поэтому

$$h_{101}(\lambda) = \langle \lambda, \underbrace{[f_1, [f_0, f_1]]}_{\equiv 0} \rangle \equiv 0.$$

Более общо, h_{101} также обращается в нуль для систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \ddot{y} = g(x, y) + ub, \end{cases} \quad x \in M, \quad y, b \in \mathbb{R}^n, \quad u \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}. \quad (20.51)$$

Интересный пример системы такого рода — *машина Дубинса с управлением угловым ускорением*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos \theta, \\ \dot{x}_2 = \sin \theta, \\ \dot{\theta} = y, \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in S^1, \quad y \in \mathbb{R}, \quad |u| \leq 1.$$

Имея ввиду такую мотивацию, рассмотрим теперь случай, когда

$$h_{101}(\lambda) \equiv 0. \quad (20.52)$$

Тогда равенство (20.47) не содержит $u(t)$, и мы продолжим дифференцирование, чтобы получить уравнение, определяющее управление:

$$h_1^{(3)}(\lambda_t) = \dot{h}_{001}(\lambda_t) = h_{0001}(\lambda_t) + u(t)h_{1001}(\lambda_t) \equiv 0.$$

Оказывается, сомножитель при $u(t)$ тождественно обращается в нуль при условии (20.52):

$$\begin{aligned} h_{1001} &= \{h_1, \{h_0, \{h_0, h_1\}\}\} = \underbrace{\{\{h_1, h_0\}, \{h_0, h_1\}\}}_{=0} + \{h_0, \{h_1, \{h_0, h_1\}\}\} \\ &= \{h_0, h_{101}\} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому получаем, в дополнение к (20.46), (20.47) и (20.52), еще одно тождество без $u(t)$:

$$h_{0001}(\lambda_t) \equiv 0.$$

Продолжим дифференцирование:

$$h_1^{(4)}(\lambda_t) = \dot{h}_{0001}(\lambda_t) = h_{00001}(\lambda_t) + u(t)h_{10001}(\lambda_t) \equiv 0. \quad (20.53)$$

Для машины Дубинса с управлением угловым ускорением $h_{10001}(\lambda_t) \neq 0$, и в случае общего положения (в классе систем (20.51)) это также верно. При условии $h_{10001}(\lambda_t) \neq 0$ можно выразить управление в виде $u = u(\lambda)$ из уравнения (20.53) и найти все экстремали так же, как в случае $h_{101}(\lambda_t) \neq 0$.

Упражнение 20.7. Покажите, что для машины Дубинса с управлением угловым ускорением особые траектории суть прямые на плоскости (x_1, x_2) :

$$x_1 = x_1^0 + t \cos \theta_0, \quad x_2 = x_2^0 + t \sin \theta_0, \quad \theta = \theta_0, \quad y = 0.$$

Впрочем, эта система устроена по-новому. Появляется новый тип оптимального управления, когда управление имеет бесконечное число переключений на компактных временных интервалах.

Для стандартной машины Дубинса (с управлением угловой скоростью) особые траектории могут сопрягаться с релейными траекториями следующим образом:

$$u(t) = \pm 1, \quad t < \bar{t}; \quad u(t) = 0, \quad t > \bar{t}, \quad (20.54)$$

или

$$u(t) = 0, \quad t < \bar{t}; \quad u(t) = \pm 1, \quad t > \bar{t}. \quad (20.55)$$

Покажем, что при управлении угловым ускорением такие управления не могут быть оптимальны.

Приведенное ниже рассуждение показывает, как наши методы могут применяться в ситуациях, не покрываемых формальной теорией. В ходе этого рассуждения мы докажем предложение 20.5, сформулированное на стр. 337.

Рассмотрим задачу быстрогодействия для нашей системы со скалярным управлением (20.41). Докажем, что не существует оптимальных по быстродействию траекторий, содержащих особый участок, за которым следует релейный участок. От противного, предположим, что такая траектория $q(t)$ существует. Рассмотрим сужение этой траектории на особый и релейный участки:

$$\begin{aligned} q(t), \quad & t \in [0, t_1], \\ u(t) \in (\alpha, \beta), \quad & t \in [0, \bar{t}], \\ u(t) = \gamma \in \{\alpha, \beta\}, \quad & t \in [\bar{t}, t_1]. \end{aligned}$$

Пусть λ_t — экстремаль, соответствующая экстремальной траектории $q(t)$. Предположим, что такая экстремаль единственна с точностью до ненулевого множителя (в типичном случае это так). Перепараметризуя управление (т.е. выбирая $u - u(\bar{t} - 0)$ в качестве нового управления), получаем

$$u(\bar{t} - 0) = 0, \quad \alpha < 0 < \beta,$$

без изменения структуры скобок Ли. Заметим, что сейчас мы изучаем оптимальную по быстродействию траекторию, а не геометрически оптимальную, как раньше. Впрочем, гамильтониан ПМП $h_u = h_0 + uh_1$ для задачи быстрогодействия такой же, как для геометрической задачи, поэтому проведенный выше анализ особых экстремалей применим. По сути, ниже мы докажем, что особый и релейный участки не могут сопрягаться не только на оптимальной по быстродействию траектории, но также и на оптимальной по медленнодействию или геометрически оптимальной траектории.

Мы предполагаем, что поля f_0, f_1 удовлетворяют тождеству

$$[f_1, [f_0, f_1]] \equiv 0,$$

а экстремаль λ_t удовлетворяет неравенству

$$h_{10001}(\lambda_{\bar{t}}) \neq 0.$$

Так как $u(\bar{t} - 0) = 0$, из равенства (20.53) следует, что $h_{00001}(\lambda_{\bar{t}}) = 0$.

Из условия максимума ПМП следует, что

$$h_{u(t)}(\lambda_t) = h_0(\lambda_t) + u(t)h_1(\lambda_t) \geq h_0(\lambda_t),$$

то есть вдоль всей экстремали

$$u(t)h_1(\lambda_t) \geq 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Но на особом участке $h_1(\lambda_t) \equiv 0$, поэтому

$$u(t)h_1(\lambda_t) \equiv 0, \quad t \in [0, \bar{t}].$$

Первая отличная от нуля производная функции $u_1(t)h_1(\lambda_t)$ при $t = \bar{t} + 0$ положительна. Имея ввиду что $u(t) \equiv \gamma$ на особом участке $t \in [\bar{t}, t_1]$, мы вычислим эту производную. Так как $h_1(\lambda_{\bar{t}}) = h_{01}(\lambda_{\bar{t}}) = h_{001}(\lambda_{\bar{t}}) = h_{0001}(\lambda_{\bar{t}}) = h_{1001}(\lambda_{\bar{t}}) = 0$, первые три производные обращаются в нуль:

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} \right|_{t=\bar{t}+0} u(t)h_1(\lambda_t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Поэтому четвертая производная неотрицательна:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4}{dt^4} \right|_{t=\bar{t}+0} u(t)h_1(\lambda_t) &= \gamma(h_{00001}(\lambda_{\bar{t}}) + \gamma h_{10001}(\lambda_{\bar{t}})) \\ &= \gamma^2 h_{10001}(\lambda_{\bar{t}}) \geq 0. \end{aligned}$$

Так как $\gamma^2 > 0$, получаем

$$h_{10001}(\lambda_{\bar{t}}) > 0. \quad (20.56)$$

Сейчас мы используем это неравенство с тем, чтобы получить противоречие через теорию второй вариации.

Напомним выражение (20.29) для гессиана отображения в конец:

$$\begin{aligned} &\lambda_t \text{Hess}_u F_t(v) \\ &= \int_0^t \lambda_0 [\dot{g}'_\tau, g'_\tau] w^2(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \lambda_0 [\dot{g}'_{\tau_2}, \dot{g}'_{\tau_1}] w(\tau_2)w(\tau_1) d\tau_2 d\tau_1. \end{aligned} \quad (20.57)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w(\tau) &= \int_\tau^t v(\theta) d\theta, \quad w(0) = 0, \\ g'_\tau &= P_{\tau*}^{-1} f_1, \\ \dot{g}'_\tau &= P_{\tau*}^{-1} [f_0, f_1], \\ P_\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau f_{u(\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Первый член в выражении для гессиана (20.57) обращается в нуль:

$$\lambda_0 [\dot{g}'_\tau, g'_\tau] = -h_{101}(\lambda_\tau) \equiv 0.$$

Дважды интегрируя второй член по частям, получаем:

$$\lambda_t \text{Hess}_u F_t(v) = \int_0^t \lambda_0 [\ddot{g}'_\tau, \dot{g}'_\tau] \eta^2(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \lambda_0 [\ddot{g}'_{\tau_2}, \ddot{g}'_{\tau_1}] \eta(\tau_2) \eta(\tau_1) d\tau_2 d\tau_1, \quad (20.58)$$

где

$$\begin{aligned} \ddot{g}'_\tau &= P_{\tau*}^{-1}[f_0, [f_0, f_1]], \\ \eta(\tau) &= \int_0^\tau w(\tau_1) d\tau_1, \quad \eta(t) = 0. \end{aligned}$$

Первый член в (20.58) доминирует на игольчатых вариациях $v = v_{\bar{t}, \varepsilon}$:

$$\lambda_{\bar{t}} \text{Hess}_u F_{\bar{t}}(v_{\bar{t}, \varepsilon}) = \varepsilon^4 \lambda_0 [\ddot{g}'_{\bar{t}}, \dot{g}'_{\bar{t}}] + O(\varepsilon^5),$$

вычислим главный член в гамильтоновой форме:

$$\begin{aligned} \lambda_0 [\ddot{g}'_{\bar{t}}, \dot{g}'_{\bar{t}}] &= \lambda_{\bar{t}} [[f_0, [f_0, f_1]], [f_0, f_1]] = \{h_{001}, h_{01}\}(\lambda_{\bar{t}}) = \{\{h_1, h_0\}, h_{001}\}(\lambda_{\bar{t}}) \\ &= \{h_1, \{h_0, h_{001}\}\}(\lambda_{\bar{t}}) - \{h_0, \underbrace{\{h_1, h_{001}\}}_{=h_{1001} \equiv 0}\}(\lambda_{\bar{t}}) = h_{10001}(\lambda_{\bar{t}}). \end{aligned}$$

В силу неравенства (20.56),

$$\lambda_{\bar{t}} \text{Hess}_u F_{\bar{t}}(v_0) > 0,$$

где

$$v_0 = v_{\bar{t}, \varepsilon}$$

для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Это означает, что

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} a \circ F_{\bar{t}}(u + sv_0) = \lambda_{\bar{t}} \text{Hess}_u F_{\bar{t}}(v_0) > 0$$

для любой функции $a \in C^\infty(M)$, $a(q(\bar{t})) = 0$, $d_{q(\bar{t})}a = \lambda_{\bar{t}}$. Тогда

$$a \circ F_{\bar{t}}(u + sv_0) = \frac{s^2}{2} \lambda_{\bar{t}} \text{Hess}_u F_{\bar{t}}(v_0) + O(s^3), \quad s \rightarrow 0,$$

т.е. кривая $F_{\bar{t}}(u + \sqrt{s}v_0)$ является гладкой при $s = +0$ и имеет касательный вектор

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=+0} F_{\bar{t}}(u + \sqrt{s}v_0) &= \xi_0, \\ \langle \lambda_{\bar{t}}, \xi_0 \rangle &> 0. \end{aligned} \quad (20.59)$$

Итак, вариация оптимального управления u в направлении v_0 порождает касательный вектор ξ_0 ко множеству достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(\bar{t})$, принадлежащий подпространству $\langle \lambda_{\bar{t}}, \cdot \rangle > 0$ в $T_{q(\bar{t})}M$.

Так как экстремальная траектория $q(t)$ есть проекция единственной, с точностью до скалярного множителя, экстремали λ_t , то управление u является критической точкой коранга один отображения в конец:

$$\dim \operatorname{Im} D_u F_{\bar{t}} = \dim M - 1 = n - 1.$$

Это означает, что существуют вариации управления, порождающие гиперплоскость касательных векторов к $\mathcal{A}_{q_0}(\bar{t})$:

$$\begin{aligned} \exists v_1, \dots, v_{n-1} \in T_u \mathcal{U} \quad \text{такие, что} \\ \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} F_{\bar{t}}(u + s v_i) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \operatorname{span}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \operatorname{Im} D_u F_{\bar{t}}. \end{aligned}$$

Итак, вариации $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ управления u на особом участке порождают неотрицательное подпространство ковектора $\lambda_{\bar{t}}$:

$$\begin{aligned} u_s = u + \sqrt{s_0} v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i, \quad s = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \left. \frac{\partial}{\partial s_i} \right|_{s=0} F_{\bar{t}}(u_s) = \xi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \mathbb{R}_+ \xi_0 + \operatorname{span}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \{ \langle \lambda_{\bar{t}}, \cdot \rangle \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Добавим игольчатую вариацию на релейном участке. Так как управление $u(t)$, $t \in [\bar{t}, t_1]$, неособое, заключаем, что функция переключения $h_1(\lambda_t) \not\equiv 0$, $t \in [\bar{t}, t_1]$. Выберем любой момент

$$\bar{t}_1 \in (\bar{t}, t_1) \text{ такой, что } h_1(\lambda_{\bar{t}_1}) \neq 0.$$

Добавим игольчатую вариацию, сосредоточенную на малых отрезках вблизи $\bar{t}_1$:

$$u_{s,\varepsilon}(t) = \begin{cases} u_s(t), & t \in [0, \bar{t}], \\ u(t) = \gamma, & t \in [\bar{t}, \bar{t}_1] \cup [\bar{t}_1 + \varepsilon, t_1], \\ 0, & t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_1 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Игольчатая вариация порождает касательный вектор

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{(\varepsilon, s) = (+0, 0)} F_{t_1}(u_{s,\varepsilon}) = -\gamma \left[\left(P_{t_1}^{t_1} \right)_* f_1 \right] (q(t_1)), \\ P_{\tau}^t = \overrightarrow{\exp} \int_{\tau}^t f_{u(\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

эта производная вычисляется как в доказательстве принципа максимума, см. лемму 12.2. Определим расположение вектора

$$\eta_n = -\gamma \left[\left(P_{\bar{t}_1}^{t_1} \right)_* f_1 \right] (q(t_1))$$

относительно гиперплоскости $\text{Im } D_u F_{t_1}$:

$$\langle \lambda_{t_1}, \eta_n \rangle = -\gamma \langle \lambda_{\bar{t}_1}, f_1 \rangle = -\gamma h_1(\lambda_{\bar{t}_1}).$$

Так как $h_1(\lambda_{\bar{t}_1}) \neq 0$, то из принципа максимума следует, что $\gamma h_1(\lambda_{\bar{t}_1}) = u(\bar{t}_1) h_1(\lambda_{\bar{t}_1}) > 0$, поэтому

$$\langle \lambda_{t_1}, \eta_n \rangle < 0.$$

Перенесем касательные векторы ξ_i , $i = 0, \dots, n-1$, из $q(\bar{t})$ в $q(t_1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\varepsilon, s) = (0, 0)} F_{t_1}(u_{s, \varepsilon}) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\varepsilon, s) = (0, 0)} P_{\bar{t}}^{t_1}(F_{\bar{t}}(u_s)) \\ &= \left(P_{\bar{t}}^{t_1} \right)_* \xi_i = \eta_i, \quad i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Неравенство (20.59) переносится в неравенство

$$\langle \lambda_{t_1}, \eta_0 \rangle = \langle \lambda_{\bar{t}}, \xi_0 \rangle > 0$$

помимо этого, конечно,

$$\langle \lambda_{t_1}, \eta_i \rangle = \langle \lambda_{\bar{t}}, \xi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Неравенство $\langle \lambda_{t_1}, \eta_n \rangle < 0$ означает, что игольчатая вариация на релейном участке порождает касательный вектор в полупространстве $\langle \lambda_{t_1}, \cdot \rangle < 0$, дополненном к полупространству $\langle \lambda_{t_1}, \cdot \rangle \geq 0$, порожденному вариациями на особом участке.

Подведем итоги. Отображение

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M, \quad F(s, \varepsilon) = F_{t_1}(u_{s, \varepsilon}),$$

удовлетворяет условию

$$D_{(0,0)} F(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+ \eta_0 + \text{span}(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) + \mathbb{R}_+ \eta_n = T_{q(t_1)} M.$$

По лемме 12.1 и замечанию после нее, отображение F локально открыто в точке $(s, \varepsilon) = (0, 0)$. Поэтому образ отображения $F_{t_1}(u_{s, \varepsilon})$ содержит окрестность конечной точки $q(t_1)$. По непрерывности, $q(t_1)$ остается в образе $F_{t_1-\delta}(u_{s, \varepsilon})$ для достаточно малых $\delta > 0$. Иными словами, точка $q(t_1)$ достижима из q_0 за время $t_1 - \delta$, т.е. траектория $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, неоптимальна по быстродействию, противоречие.

Мы доказали, что оптимальная по быстродействию траектория $q(t)$ не может содержать особого участка, за которым следует релейный участок. Аналогично, особый участок не может следовать за релейным.

Получаем следующее утверждение о возможной структуре оптимального управления.

Предложение 20.5. Пусть векторные поля в правой части управляемой системы (20.41) удовлетворяют тождеству

$$[f_1, [f_0, f_1]] = 0. \quad (20.60)$$

Пусть оптимальная по быстродействию траектория $q(t)$ этой системы является проекцией единственной, с точностью до скалярного множителя, экстремали λ_t , и пусть $h_{10001}(\lambda_t) \neq 0$. Тогда траектория $q(t)$ не может содержать особого участка и релейного участка, прилегающих друг к другу.

Замечание. В этом рассуждении оптимальные по быстродействию управления можно заменить оптимальными по медленнодействию или геометрически оптимальными управлениями.

Что происходит вблизи особых траекторий при условии (20.60)? Предположим, что особая траектория оптимальна (как прямые для задачи Дубинса с управлением угловым ускорением). Заметим, что оптимальное управление существует, поэтому функция качества всюду определена. Для граничных условий, достаточно близких к особой траектории, есть два возможных типа оптимального управления:

- (1) либо оно совершает бесконечное число переключений на компактном временном отрезке, прилежащем к особому участку, так что оптимальная траектория «сходит» к особой траектории с бесконечным числом переключений,
- (2) либо оптимальное управление релейно, но число переключений бесконечно возрастает, когда конечная точка приближается к особой траектории.

В случае (1) говорят, что имеет место явление *Фуллера*. Оказывается, что явление Фуллера действительно возникает в задаче Дубинса с управлением угловым ускорением, см. рис. 20.1. Приведенные выше рассуждения подсказывают, что это явление — не патология, но неизбежность для некоторых классов систем (в частности, в приложениях). Это явление можно наблюдать, останавливая теннисный мячик между столом и опускающейся ракеткой. Теория явления Фуллера описана в книге [18]. Из этой теории следует, что в задаче Дубинса с управлением угловым ускорением действительно реализуется альтернатива (1).

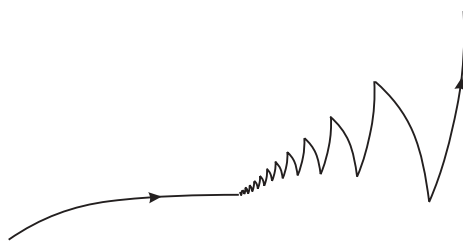


Рис. 20.1: Сопряжение особого участка и участка с явлением Фуллера

Глава 21

Уравнение Якоби

В главе 20 установлено, что знак квадратичной формы $\lambda_t \text{Hess}_{\tilde{u}} F_t$ связан с оптимальностью экстремального управления $\tilde{u}$. При естественных предположениях вторая вариация отрицательна на малых отрезках. Теперь мы хотим найти момент времени, когда эта квадратичная форма перестает быть отрицательной. Мы выведем дифференциальное уравнение (уравнение Якоби), которое позволяет найти такой момент (сопряженное время). Более того, мы дадим необходимые и достаточные условия оптимальности в этих терминах.

Напомним выражение (20.18) для квадратичной формы Q , $\lambda_t \text{Hess}_{\tilde{u}} F_t = Q|_{\text{Ker } D_{\tilde{u}} F_t}$, полученное в разделе 20.3:

$$Q(v) = \int_0^t h''_{\tau}(v(\tau)) d\tau + \int_0^t \lambda_0 \left[\int_0^{\tau_1} g'_{\tau_2} v(\tau_2) d\tau_2, g'_{\tau_1} v(\tau_1) \right] d\tau_1.$$

Продолжим форму Q с пространства L_{∞} на L_2 по непрерывности.

Мы будем рассматривать семейство задач на отрезках $[0, t]$, $t \in [0, t_1]$, поэтому введем соответствующие множества допустимых управлений:

$$\mathcal{U}_t = \{u \in L_2([0, t_1], U) \mid u(\tau) = 0 \text{ при } \tau > t\},$$

и пространства вариаций управлений:

$$\mathcal{V}_t = T_{\tilde{u}} \mathcal{U}_t = \{v \in L_2^m[0, t_1] \mid v(\tau) = 0 \text{ при } \tau > t\} \cong L_2^m[0, t].$$

Обозначим вторую вариацию на соответствующем отрезке через

$$Q_t = Q|_{\mathcal{V}_t}.$$

Заметим, что семейство пространств $\mathcal{V}_t$ упорядочено по включению:

$$t' < t'' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_{t'} \subset \mathcal{V}_{t''},$$

а семейство форм Q_t согласовано с этим порядком:

$$Q_{t'} = Q_{t''}|_{\mathcal{V}_{t'}}.$$

В частности,

$$Q_{t''} < 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{t'} < 0.$$

Обозначим момент времени, когда формы Q_t перестают быть отрицательными:

$$t_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ t \in (0, t_1] \mid Q_t|_{K_t} < 0 \},$$

где

$$K_t = \left\{ v \in \mathcal{V}_t \mid q_0 \circ \int_0^t g'_\tau v(\tau) d\tau = 0 \right\}$$

есть замыкание пространства $\text{Ker } D_{\bar{u}}F_t$ в L_2 . Если квадратичная форма $Q_t|_{K_t}$ отрицательна для всех $t \in (0, t_1]$, то по определению $t_* = +\infty$.

21.1 Регулярный случай: вывод уравнения Якоби

Предложение 21.1. Пусть λ_t — регулярная экстремаль, для которой $t_* \in (0, t_1]$. Тогда квадратичная форма $Q_{t_*}|_{K_{t_*}}$ вырождена.

Доказательство. По усиленному условию Лежандра, норма

$$\|v\|_{h''} = \left(\int_0^{t_*} -h''_\tau(v(\tau)) d\tau \right)^{1/2}$$

эквивалентна стандартной L_2^m -норме. Тогда

$$\begin{aligned} Q_{t_*} &= \int_0^{t_*} h''_\tau(v(\tau)) d\tau + \int_0^{t_*} \lambda_0 \left[\int_0^{\tau_1} g'_{\tau_2} v(\tau_2) d\tau_2, g'_{\tau_1} v(\tau_1) \right] d\tau_1 \\ &= -\|v\|_{h''}^2 + \langle Rv, v \rangle, \end{aligned}$$

где R — компактный оператор в $L_2^m[0, t_*]$.

Сначала докажем, что квадратичная форма Q_{t_*} неположительна на ядре K_{t_*} . От противного, предположим, что существует такое $v \in \mathcal{V}_{t_*}$, что

$$Q_{t_*}(v) > 0, \quad v \in K_{t_*}.$$

Линейное отображение $D_{\bar{u}}F_{t_*}$ имеет конечномерный образ, поэтому

$$\mathcal{V}_{t_*} = K_{t_*} \oplus E, \quad \dim E < \infty.$$

Семейство $D_{\bar{u}}F_t$ слабо непрерывно по t , поэтому оператор $D_{\bar{u}}F_{t_*-\varepsilon}|_E$ обратим и

$$\mathcal{V}_{t_*} = K_{t_*-\varepsilon} \oplus E$$

при малых $\varepsilon > 0$. Рассмотрим соответствующее разложение

$$v = v_\varepsilon + x_\varepsilon, \quad v_\varepsilon \in K_{t_* - \varepsilon}, \quad x_\varepsilon \in E.$$

Тогда $x_\varepsilon \rightarrow 0$ слабо при $\varepsilon \rightarrow 0$, поэтому $x_\varepsilon \rightarrow 0$ сильно в силу конечномерности E . Следовательно, $v_\varepsilon \rightarrow v$ сильно при $\varepsilon \rightarrow 0$. Далее, $Q_{t_* - \varepsilon}(v_\varepsilon) = Q_{t_*}(v_\varepsilon) \rightarrow Q_{t_*}(v)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ так как квадратичные формы Q_t непрерывны. Итак, $Q_{t_* - \varepsilon}(v_\varepsilon) > 0$ при малых $\varepsilon > 0$, что противоречит определению t_* . Мы доказали, что

$$Q_{t_*}|_{K_{t_*}} \leq 0. \quad (21.1)$$

Теперь покажем, что

$$\exists v \in K_{t_*}, \quad v \neq 0, \quad \text{такое, что} \quad Q_{t_*}(v) = 0.$$

С помощью рассуждения, аналогичного использованному при доказательстве предложения 16.2 (при изучении сопряженных точек в линейно-квадратичной задаче), показываем, что функция

$$\mu(t) = \sup \{Q_t(v) \mid v \in K_t, \|v\|_{h''} = 1\} \quad (21.2)$$

удовлетворяет следующим свойствам: $\mu(t)$ не убывает, верхняя грань в (21.2) достигается, и $\mu(t)$ непрерывна справа.

Неравенство (21.1) означает, что $\mu(t_*) \leq 0$. Если $\mu(t_*) < 0$, то $\mu(t_* + \varepsilon) < 0$ при малых $\varepsilon > 0$, что противоречит определению t_* . Поэтому $\mu(t_*) = 0$, более того, существует такое

$$v \in K_{t_*}, \quad \|v\|_{h''} = 1,$$

что

$$Q_{t_*}(v) = 0.$$

Учитывая неположительность квадратичной формы Q_{t_*} , заключаем, что элемент $v \neq 0$ принадлежит ядру квадратичной формы $Q_{t_*}|_{K_{t_*}}$. $\square$

Предложение 21.1 мотивирует введение следующего важного понятия. Момент $t_c \in (0, t_1]$ называется *сопряженным временем* (для начального момента $t = 0$) вдоль регулярной экстремали λ_t , если квадратичная форма $Q_{t_c}|_{K_{t_c}}$ вырождена. Отметим, что по предложению 20.2 формы $Q_t|_{K_t}$ отрицательны при малых $t > 0$, поэтому малые дуги регулярных экстремалей не содержат сопряженных точек: для них $t_* > 0$. Предложение 21.1 означает, что момент t_* , когда квадратичные формы $Q_t|_{K_t}$ перестают быть отрицательными, является первым сопряженным временем.

Начинаем вывод дифференциального уравнения, позволяющего находить сопряженное время для регулярной экстремальной пары $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$. Симплектическое пространство

$$\Sigma = T_{\lambda_0}(T^*M)$$

будет пространством состояний этого уравнения. Введем семейство отображений

$$J_t : \mathbb{R}^m \rightarrow \Sigma,$$

$$J_t v = \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\bar{u}(t)} \overrightarrow{h_{u,t}} v.$$

В этих терминах билинейная форма Q_t записывается как

$$Q_t(v_1, v_2) = \int_0^t h''_\tau(v_1(\tau), v_2(\tau)) dt + \iint_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t} \sigma(J_{\tau_2} v_1(\tau_2), J_{\tau_1} v_2(\tau_1)) d\tau_1 d\tau_2, \quad (21.3)$$

см. (20.18), (20.19). Рассмотрим форму Q_t на подпространстве

$$K_t = \text{Ker } D_{\bar{u}} F_t = \left\{ v_i \in \mathcal{V}_t \mid \int_0^t J_\tau v_i(\tau) d\tau \in \Pi_0 \right\}, \quad (21.4)$$

где

$$\Pi_0 = T_{\lambda_0}(T_{q_0}^* M) \subset \Sigma$$

есть вертикальное подпространство.

Вариация управления $v \in \mathcal{V}_t$ удовлетворяет включению

$$v \in \text{Ker} (Q_t|_{K_t})$$

тогда и только тогда, когда линейная форма $Q_t(v, \cdot)$ аннулирует подпространство $K_t \subset \mathcal{V}_t$. Так как вертикальное подпространство $\Pi_0 \subset \Sigma$ лагранжево, равенство (21.4) можно переписать следующим образом:

$$K_t = \left\{ v_i \in \mathcal{V}_t \mid \sigma \left(\int_0^t J_\tau v_i(\tau) d\tau, \nu \right) = 0 \quad \forall \nu \in \Pi_0 \right\}.$$

То есть аннулятор подпространства $K_t \subset \mathcal{V}_t$ совпадает со следующим конечномерным пространством линейных форм на $\mathcal{V}_t$:

$$\left\{ \int_0^t \sigma(J_\tau \cdot, \nu) d\tau \mid \nu \in \Pi_0 \right\}. \quad (21.5)$$

Итак, получаем, что $v \in \text{Ker} (Q_t|_{K_t})$ тогда и только тогда, когда форма $Q_t(v, \cdot)$ на $\mathcal{V}_t$ принадлежит подпространству (21.5). То есть $v \in \text{Ker} (Q_t|_{K_t})$ тогда и только тогда, когда существует такое $\nu \in \Pi_0$, что

$$Q_t(v, \cdot) = \int_0^t \sigma(J_\tau \cdot, \nu) d\tau. \quad (21.6)$$

Преобразуем равенство форм (21.6):

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma(J_\tau \cdot, \nu) d\tau &= \int_0^t h''_\tau(v(\tau), \cdot) d\tau + \iint_{0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq t} \sigma(J_{\tau_2} v(\tau_2), J_{\tau_1} \cdot) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^t h''_\tau(v(\tau), \cdot) d\tau + \int_0^t \sigma \left(\int_0^\tau J_\theta v(\theta) d\theta, J_\tau \cdot \right) d\tau. \end{aligned}$$

Это равенство форм означает, что подынтегральные выражения должны совпадать друг с другом:

$$\sigma(J_\tau \cdot, \nu) = h''_\tau(v(\tau), \cdot) + \sigma \left(\int_0^\tau J_\theta v(\theta) d\theta, J_\tau \cdot \right), \quad \tau \in [0, t]. \quad (21.7)$$

В терминах кривой в пространстве Σ

$$\eta_\tau = \int_0^\tau J_\theta v(\theta) d\theta + \nu, \quad \tau \in [0, t], \quad (21.8)$$

равенство форм (21.7) можно переписать следующим образом:

$$h''_\tau(v(\tau), \cdot) + \sigma(\eta_\tau, J_\tau \cdot) = 0, \quad \tau \in [0, t]. \quad (21.9)$$

Из усиленного условия Лежандра следует, что линейное отображение

$$h''_\tau : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m*}$$

невырождено (мы обозначаем здесь и ниже линейное отображение в сопряженное пространство тем же символом, что и соответствующее квадратичное отображение), поэтому определено обратное отображение:

$$(h''_\tau)^{-1} : \mathbb{R}^{m*} \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Тогда равенство (21.9) записывается как

$$v(\tau) + (h''_\tau)^{-1} \sigma(\eta_\tau, J_\tau \cdot) = 0, \quad \tau \in [0, t]. \quad (21.10)$$

Получаем следующее утверждение.

Теорема 21.1. Пусть λ_t , $t \in [0, t_1]$, есть регулярная экстремаль. Момент $t \in (0, t_1]$ является сопряженным временем тогда и только тогда, когда существует непостоянное решение η_τ уравнения Якоби

$$\dot{\eta}_\tau = J_\tau (h''_\tau)^{-1} \sigma(J_\tau \cdot, \eta_\tau), \quad \tau \in [0, t], \quad (21.11)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\eta_0 \in \Pi_0, \quad \eta_t \in \Pi_0. \quad (21.12)$$

Уравнение Якоби (21.11) есть линейная неавтономная гамильтонова система на Σ :

$$\dot{\eta}_\tau = \vec{b}_\tau(\eta_\tau) \quad (21.13)$$

с квадратичным гамильтонианом

$$b_\tau(\eta) = -\frac{1}{2} (h''_\tau)^{-1} (\sigma(J_\tau \cdot, \eta), \sigma(J_\tau \cdot, \eta)), \quad \eta \in \Sigma,$$

где $(h''_\tau)^{-1}$ — квадратичная форма на $\mathbb{R}^{m*}$.

Доказательство. Мы уже доказали, что существование $v \in \text{Ker } Q_t|_{K_t}$ равносильно существованию решения η_τ уравнения Якоби, удовлетворяющего граничным условиям (21.12).

Если $v \equiv 0$, то $\eta_\tau \equiv \text{const}$ в силу (21.8). Следовательно, если $\eta_\tau \equiv \text{const}$, то $J_\tau v(\tau) = \dot{\eta}_\tau \equiv 0$. В силу (21.3), вторая вариация принимает форму

$$Q_t(v) = \int_0^t h''_\tau(v(\tau)) d\tau < -\alpha \|v\|_{L_2}^2 \quad \text{для некоторого } \alpha > 0.$$

Но $v \in \text{Ker } Q_t$, поэтому $Q_t(v) = 0$, следовательно, $v \equiv 0$. Поэтому ненулевые v соответствуют непостоянным η_τ и обратно.

Остается доказать, что b_τ — функция Гамильтона для уравнения Якоби (21.11). Обозначим

$$A_\tau(\eta) = (h''_\tau)^{-1} \sigma(J_\tau \cdot, \eta) \in \mathbb{R}^m, \quad \eta \in \Sigma,$$

тогда уравнение Якоби записывается как

$$\dot{\eta}_\tau = J_\tau A_\tau(\eta_\tau),$$

то есть мы должны доказать, что

$$J_\tau A_\tau(\eta) = \vec{b}_\tau(\eta), \quad \eta \in \Sigma. \quad (21.14)$$

Так как

$$b_\tau(\eta) = -\frac{1}{2} \left\langle \sigma(J_\tau \cdot, \eta), (h''_\tau)^{-1} \sigma(J_\tau \cdot, \eta) \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle \sigma(J_\tau \cdot, \eta), A_\tau(\eta) \rangle,$$

получаем

$$\langle d_\eta b_\tau, \xi \rangle = -\langle \sigma(J_\tau \cdot, \xi), A_\tau(\eta) \rangle = \sigma(\xi, J_\tau A_\tau(\eta)).$$

Поэтому равенство (21.14) доказано, как и вся теорема. $\square$

21.2 Особый случай: вывод уравнения Якоби

В этом разделе мы выведем уравнение Якоби для хорошей особой экстремальной пары $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$.

В отличие от регулярного случая, в особом случае вторая вариация может быть невырожденной в момент t_* , когда она перестает быть отрицательной. Для того, чтобы построить теорию сопряженных точек для особого случая, мы произведем замену переменных в форме Q_t . Обозначим, как и раньше, интегралы

$$w_i(\tau) = \int_{\tau}^t v_i(s) ds, \quad i = 1, 2,$$

и обозначим билинейную форму, входящую в обобщенное неравенство Лежандра:

$$l_t(w_1, w_2) = \sigma(\dot{J}_t w_1, J_t w_2), \quad w_i \in \mathbb{R}^m.$$

Для хорошей особой экстремали выражение для второй вариации (20.25) записывается как

$$\begin{aligned} Q_t(v_1, v_2) = \int_0^t l_{\tau}(w_1(\tau), w_2(\tau)) d\tau + \int_0^t \sigma \left(\dot{J}_{\tau} w_1(\tau), \int_{\tau}^t \dot{J}_{\theta} w_2(\theta) d\theta \right) d\tau \\ + \sigma \left(J_0 w_1(0), \int_0^t \dot{J}_{\tau} w_2(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Условие допустимости (20.26) для вариаций управления $v_i(\cdot)$ можно записать следующим образом:

$$\int_0^t \dot{J}_{\tau} w(\tau) d\tau + J_0 w(0) \in \Pi_0. \quad (21.15)$$

Отображение

$$v(\cdot) \mapsto (w(\cdot), w(0)) \in L_2^m \times \mathbb{R}^m$$

имеет всюду плотный образ в $L_2^m \times \mathbb{R}^m$, и гессиан Q_t вместе с условием допустимости (21.15) продолжаются на $L_2^m \times \mathbb{R}^m$ по непрерывности.

Обозначим

$$\gamma = J_0 w(0) \in \Gamma_0$$

и рассмотрим продолженную форму

$$\begin{aligned} Q_t(w_1, w_2) = \int_0^t l_{\tau}(w_1(\tau), w_2(\tau)) d\tau + \int_0^t \sigma \left(\dot{J}_{\tau} w_1(\tau), \int_{\tau}^t \dot{J}_{\theta} w_2(\theta) d\theta \right) d\tau \\ + \sigma \left(\gamma_1, \int_0^t \dot{J}_{\tau} w_2(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

на пространстве

$$\int_0^t \dot{J}_{\tau} w(\tau) d\tau + \gamma \in \Pi_0. \quad (21.16)$$

Тогда так же, как в регулярном случае, получаем, что ограничение квадратичной формы $Q_t(w)$ на пространство (21.16) вырождено в момент $t = t_*$.

Момент t , удовлетворяющий этому свойству, называется *сопряженным временем* для хорошей особой экстремали λ_t .

Аналогично регулярному случаю, сейчас мы выведем гамильтоново уравнение Якоби для определения сопряженного времени на хороших особых экстремалих, хотя функция Гамильтона и граничные условия сейчас будут отличными от полученных для регулярного случая.

Пусть $t \in (0, t_1]$ — сопряженное время, то есть пусть форма $Q_t(w_1, w_2)$ имеет нетривиальное ядро на пространстве (21.16). Тогда существует такая пара

$$(w, \gamma) \in L_2^m[0, t] \times \Gamma_0, \quad \int_0^t \dot{J}_\tau w(\tau) d\tau + \gamma \in \Pi_0,$$

что линейная форма на пространстве $L_2^m[0, t] \times \Gamma_0$

$$\begin{aligned} Q_t(\cdot, w) = \int_0^t l_\tau(\cdot_{L_2}, w(\tau)) d\tau + \int_0^t \sigma \left(\dot{J}_\tau \cdot_{L_2}, \int_\tau^t \dot{J}_\theta w(\theta) d\theta \right) d\tau \\ + \sigma \left(\cdot_{\Gamma_0}, \int_0^t \dot{J}_\tau w(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (21.17)$$

аннулирует допустимое пространство (21.16). В свою очередь, аннулятор допустимого пространства (21.16) есть пространство линейных форм

$$\int_0^t \sigma \left(\dot{J}_\tau \cdot_{L_2}, \nu \right) d\tau + \sigma(\cdot_{\Gamma_0}, \nu), \quad \nu \in \Pi_0.$$

Поэтому, подобно регулярному случаю, существует такое $\nu \in \Pi_0$, что

$$Q_t(\cdot, w) = \int_0^t \sigma \left(\dot{J}_\tau \cdot_{L_2}, \nu \right) d\tau + \sigma(\cdot_{\Gamma_0}, \nu).$$

В силу представления (21.17), предыдущее равенство форм расщепляется:

$$\begin{aligned} l_\tau(\cdot_{\mathbb{R}^m}, w(\tau)) + \sigma \left(\dot{J}_\tau \cdot_{\mathbb{R}^m}, \int_\tau^t \dot{J}_\theta w(\theta) d\theta \right) &= \sigma \left(\dot{J}_\tau \cdot_{\mathbb{R}^m}, \nu \right), \quad \tau \in [0, t], \\ \sigma \left(\cdot_{\Gamma_0}, \int_0^t \dot{J}_\tau w(\tau) d\tau \right) &= \sigma(\cdot_{\Gamma_0}, \nu). \end{aligned}$$

То есть

$$l_\tau w(\tau) = -\sigma \left(\dot{J}_\tau \cdot_{\mathbb{R}^m}, \int_\tau^t \dot{J}_\theta w(\theta) d\theta - \nu \right), \quad (21.18)$$

$$\sigma \left(\cdot_{\Gamma_0}, \int_0^t \dot{J}_\tau w(\tau) d\tau - \nu \right) = 0. \quad (21.19)$$

В терминах кривой в пространстве $\Sigma = T_{\lambda_0}(T^*M)$

$$\eta_\tau = \int_\tau^t \dot{J}_\theta w(\theta) d\theta - \nu, \quad \tau \in [0, t], \quad (21.20)$$

равенства (21.18), (21.19) принимают форму

$$\begin{aligned} l_\tau w(\tau) &= -\sigma \left(\dot{J}_\tau \cdot \mathbb{R}^m, \eta_\tau \right), \quad \tau \in [0, t], \\ \sigma(\Gamma_0, \eta_0) &= 0. \end{aligned} \quad (21.21)$$

Последнее равенство означает, что η_0 принадлежит косоортогональному дополнению $\Gamma_0^\perp$. С другой стороны, $\eta_0 \in \Gamma_0 + \Pi_0$, сравните определение (21.20) с (21.16). То есть

$$\eta_0 \in (\Pi_0 + \Gamma_0) \cap \Gamma_0^\perp = \Pi_0^{\Gamma_0}.$$

Напомним, что $\Pi_0^{\Gamma_0}$ есть лагранжево пространство в симплектическом пространстве Σ , содержащее изотропное подпространство Γ_0 , см. определение (11.28). Заметим, что условие Гоха

$$\sigma(J_t v_1, J_t v_2) \equiv 0, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_1]$$

означает, что подпространства

$$\Gamma_t = \text{span}\{J_t v \mid v \in \mathbb{R}^m\} \subset \Sigma$$

изотропны. Получаем граничные условия для кривой η_τ :

$$\eta_0 \in \Pi_0^{\Gamma_0}, \quad \eta_t \in \Pi_0. \quad (21.22)$$

Более того, равенство (21.21) дает дифференциальное уравнение для η_τ :

$$\dot{\eta}_\tau = -\dot{J}_\tau w(\tau) = \dot{J}_\tau l_\tau^{-1}(\sigma(\dot{J}_\tau \cdot, \eta_\tau)), \quad \tau \in [0, t]. \quad (21.23)$$

Аналогично регулярному случаю, получаем, что это уравнение гамильтоново с гамильтонианом

$$\hat{b}_\tau(\eta) = -\frac{1}{2} l_\tau^{-1}(\sigma(\dot{J}_\tau \cdot, \eta), \sigma(\dot{J}_\tau \cdot, \eta)), \quad \eta \in \Sigma.$$

Линейное неавтономное уравнение (21.23) называется *уравнением Якоби* для вполне особого случая.

Следующее предложение доказывается так же, как теорема 21.1 для регулярного случая.

Теорема 21.2. Пусть λ_t — хорошая особая экстремаль. Момент $t \in (0, t_1]$ является сопряженным временем тогда и только тогда, когда существует непостоянное решение η_τ уравнения Якоби

$$\dot{\eta}_\tau = \dot{J}_\tau l_\tau^{-1} \left(\sigma(\dot{J}_\tau \cdot, \eta_\tau) \right), \quad \tau \in [0, t], \quad (21.24)$$

с граничными условиями

$$\eta_0 \in \Pi_0^{\Gamma_0}, \quad \eta_t \in \Pi_0. \quad (21.25)$$

Уравнение Якоби (21.24) гамильтоново:

$$\dot{\eta}_\tau = \vec{b}_\tau(\eta_\tau) \quad (21.26)$$

с неавтономной квадратичной функцией Гамильтона

$$\hat{b}_\tau(\eta) = -\frac{1}{2} l_\tau^{-1} \left(\sigma(\dot{J}_\tau \cdot, \eta), \sigma(\dot{J}_\tau \cdot, \eta) \right), \quad \eta \in \Sigma.$$

В следующем утверждении приведен первый интеграл уравнения (21.23), он может быть полезен при изучении уравнения Якоби в особом случае.

Лемма 21.1. Для любого постоянного вектора $v \in \mathbb{R}^m$ функция $\sigma(\eta, J_\tau v)$ есть первый интеграл уравнения Якоби (21.23).

Доказательство. Требуется показать, что

$$\sigma(\dot{\eta}_\tau, J_\tau v) + \sigma(\eta_\tau, \dot{J}_\tau v) \equiv 0 \quad (21.27)$$

для решения η_τ уравнения (21.23). Первое слагаемое вычисляется с помощью уравнения Якоби:

$$\begin{aligned} \sigma(\dot{\eta}_\tau, J_\tau v) &= -\langle d_{\eta_\tau} \hat{b}_\tau, J_\tau v \rangle \\ &= l_\tau^{-1} \left(\sigma(\dot{J}_\tau \cdot, J_\tau v), \sigma(\dot{J}_\tau \cdot, \eta_\tau) \right) \end{aligned}$$

где l_τ^{-1} — билинейная форма

$$= \left\langle \sigma(\dot{J}_\tau \cdot, \eta_\tau), l_\tau^{-1} \sigma(\dot{J}_\tau \cdot, J_\tau v) \right\rangle$$

где l_τ^{-1} — линейное отображение в сопряженное пространство

$$= \left\langle \sigma(\dot{J}_\tau \cdot, \eta_\tau), v \right\rangle = -\sigma(\eta_\tau, \dot{J}_\tau v),$$

и равенство (21.27) доказано. $\square$

В частности, эта лемма означает, что

$$\eta_0 \in \Gamma_0^\angle \Leftrightarrow \eta_\tau \in \Gamma_\tau^\angle,$$

то есть поток уравнения Якоби сохраняет семейство пространств $\Gamma_\tau^\angle$. Так как это уравнение гамильтоново, его поток сохраняет также и семейство Γ_τ . Следовательно, граничные условия (21.22) можно переписать в другой форме:

$$\eta_0 \in \Pi_0, \quad \eta_t \in \Pi_0^{\Gamma_t}.$$

21.3 Необходимые условия оптимальности

Предложение 21.2. Пусть $(\tilde{y}, \lambda_t)$ — экстремальная пара коранга один. Предположим, что λ_t — регулярная или хорошая особая экстремаль. Пусть $t_* \in (0, t_1]$. Тогда:

- (1) Либо для любого непостоянного решения η_t , $t \in [0, t_*]$, уравнения Якоби (21.13) или (21.26), удовлетворяющего граничным условиям (21.12) или (21.25) продолжение

$$\bar{\eta}_t = \begin{cases} \eta_t, & t \in [0, t_*], \\ \eta_{t_*}, & t \in [t_*, t_1], \end{cases} \quad (21.28)$$

удовлетворяет уравнению Якоби на $[0, t_1]$,

- (2) либо управление $\tilde{y}$ не является локально геометрически оптимальным на $[0, t_1]$.

Доказательство. Предположим, что условие (1) не выполняется, и докажем, что тогда справедливо условие (2). Возьмем любое ненулевое $v \in \text{Ker}(Q_{t_*}|_{K_{t_*}})$ и пусть η_t , $t \in [0, t_*]$, есть соответствующее непостоянное решение уравнения Якоби с граничными условиями. Рассмотрим продолжение v нулем:

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} v(t), & t \in [0, t_*], \\ 0, & t \in [t_*, t_1]. \end{cases}$$

и соответствующее продолжение константой $\bar{\eta}_t$ как в (21.28). Так как $\bar{\eta}_t$ не удовлетворяет уравнению Якоби на $[0, t_1]$, имеем $\bar{v} \notin \text{Ker}(Q_{t_1}|_{K_{t_1}})$. Заметим, что $Q_{t_1}(\bar{v}) = Q_{t_*}(v) = 0$. С другой стороны, существует такое $w \in K_{t_1}$, что $Q_{t_1}(\bar{v}, w) \neq 0$. Тогда квадратичная форма Q_{t_1} принимает значения обоих знаков в плоскости $\text{span}(\bar{v}, w)$.

В особом случае расширенная форма Q_t знакопеременна, поэтому знакопеременна и исходная форма.

Итак, форма Q_{t_1} меняет знак на K_{t_1} . По теореме 20.1, управление $\tilde{y}(t)$ неоптимально на $[0, t_1]$. $\square$

Заметим, что случай (1) предложения 21.2 дает сильные ограничения на экстремаль λ_t . Если этот случай реализуется, то множество сопряженных точек совпадает с отрезком $[t_*, t_1]$.

Предположим, что изучаемое управление $\tilde{y}(t)$ аналитично, тогда решения η_t уравнения Якоби также аналитичны. Если η_t постоянно на некотором отрезке, то оно постоянно на всей своей области определения. Поэтому в аналитическом случае альтернатива (1) предложения 21.2 невозможна, и первое сопряженное время t_* дает необходимое условие оптимальности: траектория не может быть локально геометрически оптимальной после t_* .

Отсутствие сопряженных точек влечет конечномерную локальную оптимальность в случае коранга один, см. теорему 20.1. В следующих двух

разделах мы докажем гораздо более сильный результат для регулярного случая: отсутствие сопряженных точек достаточно для сильной оптимальности.

21.4 Регулярный случай: преобразование уравнения Якоби

Пусть λ_t — регулярная экстремаль. Предположим, что максимизированный гамильтониан $H(\lambda)$ гладок в окрестности λ_t . Из условия максимума ПМП получаем уравнение

$$\frac{\partial h_u}{\partial u}(\lambda) = 0,$$

которое можно разрешить в окрестности λ_t :

$$\frac{\partial h_u}{\partial u}(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = u(\lambda).$$

Отображение $\lambda \mapsto u(\lambda)$ гладко вблизи λ_t и удовлетворяет равенству

$$u(\lambda_t) = \tilde{u}(t).$$

Максимизированный гамильтониан ПМП выражается в окрестности λ_t как

$$H(\lambda) = h_{u(\lambda)}(\lambda),$$

см. предложение 12.1. Рассмотрим поток на T^*M :

$$e^{t\vec{H}} \circ \overleftarrow{\exp} \int_0^t -\vec{h}_{\tilde{u}(\tau)} d\tau = e^{t\vec{H}} \circ P_t^*.$$

По формуле вариаций в гамильтоновой форме, см. (2.27) и (11.22), этот поток гамильтонов:

$$e^{t\vec{H}} \circ P_t^* = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \vec{\varphi}_\tau d\tau \quad (21.29)$$

с функцией Гамильтона

$$\varphi_t(\lambda) = (H - h_{\tilde{u}(t)})(P_t^{*-1}(\lambda)).$$

Заметим, что

$$\lambda_0 \circ e^{t\vec{H}} \circ P_t^* = \lambda_t \circ P_t^* = \lambda_0,$$

то есть λ_0 — особая точка поля $\vec{\varphi}_t$. Иными словами, λ_0 — критическая точка гамильтониана:

$$\varphi_t(\lambda) \geq 0 = \varphi_t(\lambda_0) \quad \Rightarrow \quad d_{\lambda_0} \varphi_t = 0.$$

Естественно предположить, что соответствующий гессиан связан с оптимальностью экстремали λ_t .

Следующее предложение устанавливает связь между двумя гамильтоновыми системами: уравнением Якоби на Σ и гамильтоновой системой с максимизированным гамильтонианом на T^*M . Мы воспользуемся этим соотношением при доказательстве достаточных условий оптимальности в разделе 21.5.

Предложение 21.3. *Гамильтониан b_t уравнения Якоби равен половине гессиана функции Гамильтона φ_t в точке λ_0 :*

$$b_t = \frac{1}{2} \text{Hess}_{\lambda_0} \varphi_t.$$

Доказательство. Напомним, что гамильтониан уравнения Якоби в регулярном случае равен

$$b_t(\eta) = -\frac{1}{2} \langle \sigma(J_t \cdot, \eta), (h_t'')^{-1} \sigma(J_t \cdot, \eta) \rangle.$$

Преобразуем линейную форму:

$$\sigma(J_t \cdot, \eta) = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial u} \overrightarrow{h_{u,t}} \cdot, \eta \right)$$

где $h_{u,t}(\lambda) = h_u(P_t^{*-1}(\lambda))$

$$= - \left\langle d_{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial u} h_{u,t} \cdot, \eta \right\rangle = - \left\langle \left(d_{\lambda_t} \frac{\partial h_u}{\partial u} \cdot \right) (P_t^{*-1})_{*\lambda_0}, \eta \right\rangle$$

где $(P_t^{*-1})_*$ — дифференциал диффеоморфизма $(P_t^{*-1}) : T^*M \rightarrow T^*M$

$$= - \left\langle d_{\lambda_t} \frac{\partial h_u}{\partial u} \cdot, \xi \right\rangle,$$

$$\xi = (P_t^{*-1})_{*\lambda_0} \eta \in T_{\lambda_t}(T^*M).$$

Тогда гамильтониан b_t можно переписать как

$$b_t(\eta) = -\frac{1}{2} \left\langle \left\langle d_{\lambda_t} \frac{\partial h_u}{\partial u} \cdot, \xi \right\rangle, (h_t'')^{-1} \left\langle d_{\lambda_t} \frac{\partial h_u}{\partial u} \cdot, \xi \right\rangle \right\rangle.$$

Вычислим гессиан функции Гамильтона

$$\varphi_t(\lambda) = (h_{u(\lambda)} - h_{\bar{u}(t)})(P_t^{*-1}(\lambda)).$$

Легко видеть, что

$$\text{Hess}_{\lambda_0} \varphi_t(\eta) = \text{Hess}_{\lambda_t} (h_{u(\lambda)} - h_{\bar{u}(t)})(\xi).$$

Далее,

$$d_\lambda(h_{u(\lambda)} - h_{\bar{u}(t)}) = \underbrace{\frac{\partial h_u}{\partial u} \Big|_{u(\lambda)}}_{\equiv 0} d_\lambda u + (d_\lambda h_u) \Big|_{u(\lambda)} - d_\lambda h_{\bar{u}(t)},$$

$$D_{\lambda_t}^2(h_{u(\lambda)} - h_{\bar{u}(t)}) = \left(d_{\lambda_t} \frac{\partial h_u}{\partial u} \Big|_{u(\lambda_t)} \right) d_{\lambda_t} u.$$

Дифференциал $d_{\lambda_t} u$ можно найти дифференцированием тождества

$$\frac{\partial h_u}{\partial u} \Big|_{u(\lambda)} \equiv 0$$

в точке $\lambda = \lambda_t$. Действительно, получаем

$$\frac{\partial^2 h_u}{\partial u^2} d_\lambda u + d_\lambda \frac{\partial h_u}{\partial u} = 0,$$

поэтому

$$d_{\lambda_t} u = -(h_t'')^{-1} d_{\lambda_t} \frac{\partial h_u}{\partial u}.$$

Следовательно,

$$D_{\lambda_t}^2(h_{u(\lambda)} - h_{\bar{u}(t)}) = -d_{\lambda_t} \frac{\partial h_u}{\partial u} (h_t'')^{-1} d_{\lambda_t} \frac{\partial h_u}{\partial u},$$

то есть

$$\text{Hess}_{\lambda_0} \varphi_t(\eta) = \text{Hess}_{\lambda_t}(h_{u(\lambda)} - h_{\bar{u}(t)})(\xi) = 2b_t(\eta),$$

и предложение доказано. $\square$

В силу того, что гамильтониан φ_t достигает минимума в точке λ_0 , квадратичная форма b_t неотрицательна:

$$b_t \geq 0.$$

Обозначим через C_t пространство постоянных вертикальных решений уравнения Якоби на отрезке $[0, t]$:

$$C_t = \left\{ \eta \in \Pi_0 \mid \vec{b}_\tau(\eta) \equiv 0, \tau \in [0, t] \right\}. \quad (21.30)$$

Мы можем дать следующее простое описание этого пространства:

$$C_t = \Pi_0 \bigcap \left(\bigcap_{\tau \in [0, t]} \text{Ker } b_\tau \right).$$

Действительно, особые точки гамильтонова векторного поля суть критические точки гамильтониана, а критические точки невырожденной квадратичной формы суть элементы ее ядра.

21.5 Достаточные условия оптимальности

В этом разделе мы получим достаточные условия оптимальности для задачи с интегральным функционалом:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f_u(q), & q &\in M, & u &\in U = \text{int } U \subset \mathbb{R}^m, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ \int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

с закрепленным или свободным конечным временем. Отметим, что сейчас мы будем изучать оптимальную задачу, а не геометрическую, как раньше. Однако теория уравнения Якоби остается применимой, так как уравнение Якоби зависит только от гамильтониана $h_u(\lambda)$ и экстремальной пары $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$.

Для нормального гамильтониана принципа максимума

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_u(q) \rangle - \varphi(q, u), \quad \lambda \in T^*M,$$

и регулярной экстремальной пары $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$ задачи оптимального управления рассмотрим уравнение Якоби

$$\dot{\eta} = \vec{b}_t(\eta), \quad \eta \in \Sigma = T_{\lambda_0}(T^*M).$$

В разделе 21.3 мы показали, что отсутствие сопряженных точек на интервале $(0, t_1)$ необходимо для геометрической оптимальности (по крайней мере в аналитическом случае коранга один).

Упражнение 21.1. Покажите, что отсутствие сопряженных точек на $(0, t_1)$ необходимо и для оптимальности (в аналитическом случае), сводя задачу оптимального управления к геометрической.

Покажем теперь, что отсутствие сопряженных точек также достаточно для оптимальности (в регулярном случае).

Траектория $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, называется *сильно оптимальной* для задачи оптимального управления, если она реализует локальный минимум функционала качества относительно всех траекторий системы, близких к $q(t)$ в равномерной топологии $C([0, t_1], M)$ и имеющих те же граничные точки, что и $q(t)$. Если этот минимум строгий, то траектория $q(t)$ называется *строго сильно оптимальной*.

Теорема 21.3. Пусть λ_t , $t \in [0, t_1]$, есть регулярная нормальная экстремаль в задаче с интегральным функционалом и закрепленным временем, и пусть максимизированный гамильтониан $H(\lambda)$ гладок в окрестности λ_t . Если промежуток $(0, t_1]$ не содержит сопряженных точек, то экстремальная траектория $q(t) = \pi(\lambda_t)$, $t \in [0, t_1]$, строго сильно оптимальна.

Доказательство. Мы используем теорию полей экстремалей (см. раздел 17.1) и вложим λ_t в семейство экстремалей, хорошо проецирующееся на M .

Максимизированный гамильтониан

$$H(\lambda) = \max_{u \in U} h_u(\lambda), \quad \lambda \in T^*M,$$

определен и гладок. Тогда по теореме 17.1 достаточно построить такую функцию $a \in C^\infty(M)$, что семейство многообразий

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t &= e^{t\tilde{H}}(\mathcal{L}_0) \subset T^*M, & t \in [0, t_1], \\ \mathcal{L}_0 &= \{\lambda = d_q a\} \subset T^*M, \\ \lambda_0 &\in \mathcal{L}_0, \end{aligned}$$

хорошо проецируется на M :

$$\pi : \mathcal{L}_t \rightarrow M \text{ есть диффеоморфизм вблизи } \lambda_t, \quad t \in [0, t_1].$$

Иными словами, требуется, чтобы касательные пространства $T_{\lambda_t} \mathcal{L}_t = e_*^{t\tilde{H}}(T_{\lambda_0} \mathcal{L}_0)$ имели нулевое пересечение с вертикальными подпространствами $\Pi_t = T_{\lambda_t}(T_{q(t)}^*M)$:

$$e_*^{t\tilde{H}}(T_{\lambda_0} \mathcal{L}_0) \cap \Pi_t = \{0\}, \quad t \in [0, t_1].$$

Это возможно благодаря отсутствию сопряженных точек (типичная ситуация для сопряженной точки — складка при проекции на M — изображена на рис. 21.1).

Мы докажем ниже существование такого многообразия $\mathcal{L}_0$ благодаря переходу к его касательному пространству L_0 — лагранжеву подпространству в Σ (см. определение в разделе 11.5.3). Для любого лагранжева подпространства $L_0 \subset \Sigma$, трансверсального Π_0 , можно найти такую функцию $a \in C^\infty(M)$, что график ее дифференциала $\mathcal{L}_0 = \{\lambda = d_q a\} \subset T^*M$ удовлетворяет условиям:

$$(1) \quad \lambda_0 \in \mathcal{L}_0,$$

$$(2) \quad T_{\lambda_0} \mathcal{L}_0 = L_0.$$

Действительно, в канонических координатах (p, q) на T^*M возьмем функцию вида

$$a(q) = \langle p_0, q \rangle + \frac{1}{2} q^T S q, \quad \lambda_0 = (p_0, 0),$$

с симметричной $n \times n$ матрицей S . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \{\lambda = (p, q) \mid p = p_0 + S q\}, \\ T_{\lambda_0} \mathcal{L}_0 &= \{(dp, dq) \mid dp = S dq\} \end{aligned}$$

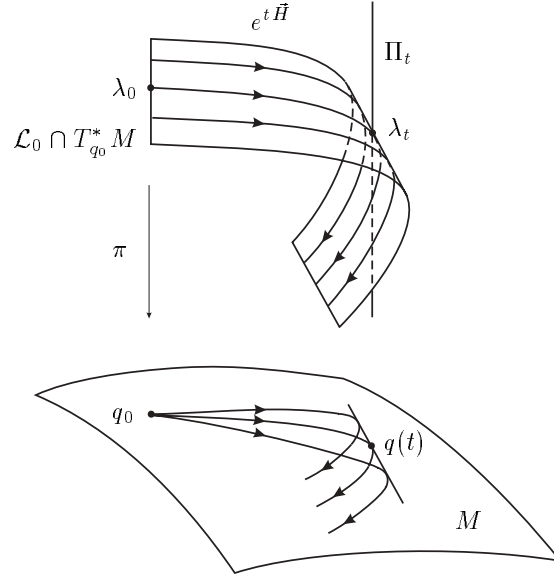


Рис. 21.1: Сопряженная точка — складка

и остается только выбрать линейное отображение S с графиком L_0 . Заметим, что симметричность матрицы S соответствует лагранжовости подпространства L_0 . Ниже мы используем аналогичную конструкцию для параметризации лагранжевых подпространств квадратичными формами.

Для завершения доказательства осталось найти такое лагранжево подпространство $L_0 \subset \Sigma$, что

$$\left(e_*^{t\vec{H}} L_0\right) \cap \Pi_t = \{0\}, \quad t \in [0, t_1].$$

В силу (21.29), гамильтонов поток с максимизированным гамильтонианом имеет разложение

$$e^{t\vec{H}} = \Phi_t \circ P_t^{*-1}, \quad \Phi_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \vec{\varphi}_\tau d\tau.$$

Заметим, что поток P_t^{*-1} на T^*M порожден потоком P_t на M , поэтому он сохраняет семейство вертикальных подпространств:

$$(P_t^{*-1})_* \Pi_0 = \Pi_t.$$

Таким образом, остается доказать существование лагранжева подпространства $L_0 \subset \Sigma$, для которого

$$(\Phi_{t*} L_0) \cap \Pi_0 = \{0\}, \quad t \in [0, t_1]. \quad (21.31)$$

Предложение 21.3 устанавливает связь между гамильтонианом b_t уравнения Якоби и гамильтонианом φ_t :

$$\frac{1}{2} \text{Hess}_{\lambda_0} \varphi_t = b_t.$$

Следовательно, поле $\vec{b}_t$ есть линеаризация поля $\vec{\varphi}_t$ в особой точке λ_0 : гамильтониан b_t и гамильтоново поле $\vec{b}_t$ суть соответственно главные члены тейлоровского разложения φ_t и $\vec{\varphi}_t$ в точке λ_0 . Линеаризация потока есть поток линеаризации, поэтому

$$\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \vec{\varphi}_\tau d\tau \right)_{*\lambda_0} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \vec{b}_\tau d\tau.$$

Введем обозначение для потока уравнения Якоби:

$$B_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \vec{b}_\tau d\tau,$$

тогда

$$\Phi_{t*\lambda_0} = B_t,$$

и равенство (21.31) переписывается как

$$(B_t L_0) \cap \Pi_0 = \{0\}, \quad t \in [0, t_1]. \quad (21.32)$$

Остается доказать существование лагранжева подпространства L_0 , удовлетворяющего этому равенству.

Напомним, что отрезок $(0, t_1]$ не содержит сопряженных точек:

$$(B_t \Pi_0) \cap \Pi_0 = C_t, \quad t \in (0, t_1],$$

где C_t — пространство постоянных вертикальных решений уравнения Якоби на $[0, t]$, см. (21.30).

Для того, чтобы прояснить основные идеи доказательства, рассмотрим сначала простой случай, когда

$$C_t = \{0\}, \quad t \in (0, t_1], \quad (21.33)$$

то есть

$$(B_t \Pi_0) \cap \Pi_0 = \{0\}, \quad t \in (0, t_1].$$

Зафиксируем любое $\varepsilon \in (0, t_1)$. В силу непрерывности потока B_t , существует такая окрестность вертикального подпространства Π_0 , что для любого лагранжева подпространства L_0 из этой окрестности

$$(B_t L_0) \cap \Pi_0 = \{0\}, \quad t \in [\varepsilon, t_1].$$

Для завершения доказательства остается найти такое лагранжево подпространство L_0 , удовлетворяющее условию

$$(B_t L_0) \cap \Pi_0 = \{0\}, \quad t \in [0, \varepsilon].$$

Введем параметризацию множества лагранжевых подпространств $L_0 \subset \Sigma$, достаточно близких к Π_0 . Возьмем любое лагранжево подпространство $H \subset \Sigma$, являющееся горизонтальным, т.е. трансверсальным вертикальному подпространству Π_0 . Тогда пространство Σ распадается в прямую сумму:

$$\Sigma = \Pi_0 \oplus H.$$

Введем координаты Дарбу (p, q) на Σ , в которых

$$\Pi_0 = \{(p, 0)\}, \quad H = \{(0, q)\}.$$

Такие координаты можно выбрать многими способами. Действительно, симплектическая форма σ задает невырожденное спаривание взаимно трансверсальных лагранжевых подпространств Π_0 и H :

$$H = \Pi_0^*, \\ \langle f, e \rangle = \sigma(e, f), \quad e \in \Pi_0, \quad f \in H.$$

Возьмем любой базис $e_1, \dots, e_n$ в Π_0 и соответствующий базис $f_1, \dots, f_n$ в H , двойственный относительно этого спаривания, и мы получим базис Дарбу в Σ . В координатах Дарбу симплектическая форма записывается как

$$\sigma((p_1, q_1), (p_2, q_2)) = \langle p_1, q_2 \rangle - \langle p_2, q_1 \rangle.$$

Любое n -мерное подпространство $L \subset \Sigma$, трансверсальное H , есть график линейного отображения

$$S : \Pi_0 \rightarrow H,$$

то есть

$$L = \{(p, Sp) \mid p \in \Pi_0\}.$$

Подпространство L лагранжево тогда и только тогда, когда соответствующее отображение S имеет симметрическую матрицу в симплектическом базисе (упражнение):

$$S = S^*.$$

Введем квадратичную форму на Π_0 с матрицей S :

$$S(p, p) = \langle p, Sp \rangle.$$

Множество лагранжевых подпространств $L \subset \Sigma$, трансверсальных горизонтальному пространству H , параметризовано квадратичными формами S на Π_0 . Для такой параметризации лагранжевых подпространств $L \subset \Sigma$, $L \cap H = \{0\}$, будем использовать термин (Π_0, H) -параметризация.

Рассмотрим семейство квадратичных форм S_t , параметризующее семейство лагранжевых подпространств вида

$$L_t = B_t L_0,$$

то есть

$$L_t = \{(p, S_t p) \mid p \in \Pi_0\}.$$

Лемма 21.2.

$$\dot{S}_t(p, p) = 2b_t(p, S_t p).$$

Доказательство. Возьмем любую траекторию $(p, q) = (p_t, q_t)$ гамильтонова поля $\vec{b}_t$. Из равенства

$$q = S_t p,$$

получаем

$$\dot{q} = \dot{S}_t p + S_t \dot{p},$$

то есть

$$\vec{b}_t(p, q) = \left(\dot{p}, \dot{S}_t p + S_t \dot{p} \right).$$

В силу квадратичности гамильтониана b_t , получаем

$$\sigma \left((p, q), \vec{b}_t(p, q) \right) = 2b_t(p, q).$$

Но левую часть легко вычислить:

$$\begin{aligned} \sigma \left((p, q), \vec{b}_t(p, q) \right) &= \sigma \left((p, q), (\dot{p}, \dot{q}) \right) \\ &= \sigma \left((p, S_t p), (\dot{p}, \dot{S}_t p + S_t \dot{p}) \right) = \left\langle p, \dot{S}_t p + S_t \dot{p} \right\rangle - \langle \dot{p}, S_t p \rangle \\ &= \left\langle p, \dot{S}_t p \right\rangle \end{aligned}$$

в силу симметричности S_t . □

Так как гамильтониан φ_t достигает минимума в λ_0 , имеем $b_t \geq 0$, поэтому

$$\dot{S}_t \geq 0.$$

Выберем начальное подпространство L_0 с помощью частичного порядка на квадратичных формах, индуцированного положительными формами. Выбирая любое лагранжево подпространство $L_0 \subset \Sigma$ с соответствующей квадратичной формой

$$S_0 > 0,$$

достаточно близкой к нулевой форме, получаем

$$S_t > 0, \quad t \in [0, \varepsilon].$$

То есть

$$L_t \cap \Pi_0 = \{0\}$$

на $[0, \varepsilon]$, а потому и на всем отрезке $[0, t_1]$.

Равенство (21.32) доказано в простом случае (21.33). Теперь рассмотрим общий случай. Сейчас пересечение $(B_t \Pi_0) \cap \Pi_0 = C_t$ непусто, но от него можно избавиться, переходя к уравнению Якоби на факторпространстве $C_t^\perp / C_t$.

Семейство постоянных вертикальных решений C_t не возрастает:

$$C_{t'} \supset C_{t''} \text{ при } t' < t''.$$

Имеем $C_0 = \Pi_0$ и положим, по определению, $C_{t_1+0} = \{0\}$. Семейство C_t непрерывно слева, обозначим его точки разрыва:

$$0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq t_1$$

(отметим, что в простом случае (21.33) было $k = 1$, $s_1 = 0$). Семейство C_t постоянно на промежутках $(s_i, s_{i+1}]$.

Построим такие подпространства $E_i \subset \Pi_0$, $i = 1, \dots, k$, что

$$C_t = E_{i+1} \oplus E_{i+2} \oplus \dots \oplus E_k, \quad t \in (s_i, s_{i+1}].$$

Заметим, что при $t = 0$ получаем разложение вертикального подпространства:

$$\Pi_0 = C_0 = E_1 \oplus \dots \oplus E_k.$$

Для любого горизонтального лагранжева подпространства $H \subset \Sigma$ можно построить соответствующее разложение H :

$$H = F_1 \oplus \dots \oplus F_k, \quad \sigma(E_i, F_j) = 0, \quad i \neq j. \quad (21.34)$$

Зафиксируем любое начальное горизонтальное подпространство $H_0 \subset \Sigma$, $H_0 \cap \Pi_0 = \{0\}$. Следующее утверждение завершает доказательство теоремы 21.3 в общем случае.

Лемма 21.3. *Для любого $i = 1, \dots, k$ существуют такие число $\varepsilon_i > 0$ и лагранжево подпространство $H_i \subset \Sigma$, $H_i \cap \Pi_0 = \{0\}$, что любое лагранжево подпространство $L_0 \subset \Sigma$, $L_0 \cap H_0 = \{0\}$, имеющее (Π_0, H_0) -параметризацию $S_0(p, p) = \varepsilon \langle p, p \rangle$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_i$, удовлетворяет условиям:*

- (1) $L_t \cap \Pi_0 = \{0\}$, $t \in [0, s_i]$,
- (2) $L_t \cap H_i = \{0\}$, $t \in [0, s_i]$, и лагранжево подпространство L_t имеет (Π_0, H_i) -параметризацию $S_t > 0$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по i .

Пусть $i = 1$. При $s_1 = 0$ утверждение тривиально, поэтому считаем, что $s_1 > 0$. Возьмем любое $\varepsilon_1 > 0$ и любое лагранжево подпространство $L_0 \subset \Sigma$ с квадратичной формой $\varepsilon \langle p, p \rangle$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, в (Π_0, H_0) -параметризации.

Заметим, что $C_t = \Pi_0$, то есть $B_t|_{\Pi_0} = \text{Id}$ при $t \in (0, s_1]$. Далее,

$$L_t \cap \Pi_0 = B_t L_0 \cap B_t \Pi_0 = B_t (L_0 \cap \Pi_0) = \{0\}, \quad t \in [0, s_1].$$

В силу непрерывности потока B_t , существует горизонтальное лагранжево подпространство H_1 с такой (Π_0, H_0) -параметризацией $-\delta\langle p, p \rangle$, $\delta > 0$, что $L_t \cap H_1 = \{0\}$, $t \in [0, s_1]$. Легко видеть, что подпространство L_0 задается в (Π_0, H_1) -параметризации квадратичной формой $S_0(p, p) = \varepsilon'\langle p, p \rangle > 0$, $\varepsilon' = \varepsilon/(1 + \varepsilon/\delta) < \varepsilon$. Мы уже доказали, что $S_t \geq 0$, поэтому

$$S_t > 0, \quad t \in [0, s_1],$$

в (Π_0, H_1) -параметризации.

Базис индукции ($i = 1$) доказан.

Докажем шаг индукции. Зафиксируем $i \geq 1$, предположим, что утверждение леммы 21.3 доказано для i , и докажем его для $i + 1$.

Пусть $t \in (s_i, s_{i+1}]$, тогда $C_t = E_{i+1} \oplus \cdots \oplus E_k$. Введем разложение горизонтального подпространства H_i как в (21.34):

$$H_i = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 \oplus \cdots \oplus E_i, & E'_2 &= C_t = E_{i+1} \oplus \cdots \oplus E_k, \\ F'_1 &= F_1 \oplus \cdots \oplus F_i, & F'_2 &= F_{i+1} \oplus \cdots \oplus F_k, \\ L_0^1 &= L_0 \cap (E'_1 \oplus F'_1), & L_0^2 &= L_0 \cap (E'_2 \oplus F'_2). \end{aligned}$$

Так как $B_t E'_2 = E'_2$, косоортогональное дополнение $(E'_2)^\perp = E'_1 \oplus E'_2 \oplus F'_1$ также инвариантно относительно потока уравнения Якоби: $B_t(E'_2)^\perp = (E'_2)^\perp$.

Для того, чтобы доказать, что $L_t \cap \Pi_0 = \{0\}$, вычислим это пересечение. В силу включения $\Pi_0 \subset (E'_2)^\perp$, получаем

$$B_t L_0 \cap \Pi_0 = B_t L_0 \cap B_t(E'_2)^\perp \cap \Pi_0 = B_t(L_0 \cap (E'_2)^\perp) \cap \Pi_0 = B_t L_0^1 \cap \Pi_0. \quad (21.35)$$

Поэтому требуется доказать, что $B_t L_0^1 \cap \Pi_0 = \{0\}$, $t \in (s_i, s_{i+1}]$.

Так как подпространства E'_2 и $(E'_2)^\perp$ инвариантны относительно потока B_t , фактор-поток определен корректно:

$$\tilde{B}_t : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}, \quad \tilde{\Sigma} = (E'_2)^\perp / E'_2.$$

В факторе поток $\tilde{B}_t$ не имеет постоянных вертикальных решений:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_t \tilde{\Pi}_0 \cap \tilde{\Pi}_0 &= \{0\}, & t &\in (s_i, s_{i+1}], \\ \tilde{\Pi}_0 &= \Pi_0 / E'_2. \end{aligned}$$

Из рассуждения, приведенного при доказательстве простого случая (21.33), следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{B}_t \tilde{L}_0^1 \cap \tilde{\Pi}_0 &= \{0\}, & t &\in (s_i, s_{i+1}], \\ \tilde{L}_0^1 &= L_0^1 / E'_2, \end{aligned}$$

для L_0 , достаточно близких к Π_0 , т.е. для достаточно малых ε . Поэтому

$$B_t L_0^1 \cap \Pi_0 \subset E'_2, \quad t \in (s_i, s_{i+1}].$$

Теперь легко доказать, что это пересечение пусто:

$$B_t L_0^1 \cap \Pi_0 \subset B_t L_0^1 \cap E'_2 = B_t L_0^1 \cap B_t E'_2 = B_t (L_0^1 \cap E'_2) = \{0\}, \quad t \in (s_i, s_{i+1}].$$

Ввиду цепочки (21.35),

$$L_t \cap \Pi_0 = \{0\}, \quad t \in (s_i, s_{i+1}],$$

то есть мы доказали условие (1) из формулировки леммы 21.3 для $i + 1$.

Переходим к условию (2). Так же как при доказательстве базиса индукции, показываем, что существует такое горизонтальное лагранжево подпространство $H_{i+1} \subset \Sigma$, что кривая лагранжевых подпространств L_t , $t \in [0, s_{i+1}]$, трансверсальна H_{i+1} . В (Π_0, H_{i+1}) -параметризации начальное подпространство L_0 задается положительной квадратичной формой $S_0(p, p) = \varepsilon' \langle p, p \rangle$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Так как $\dot{S}_t \geq 0$, получаем

$$S_t > 0, \quad t \in [0, s_{i+1}].$$

Условие (2) доказано для $i + 1$.

Шаг индукции доказан, и доказательство данной леммы завершено. $\square$

В силу этой леммы,

$$L_t \cap \Pi_0 = \{0\}, \quad t \in [0, t_1],$$

для всех начальных подпространств L_0 , задаваемых квадратичными формами $S_0 = \varepsilon \langle p, p \rangle$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$, для некоторого $\varepsilon_k > 0$ в (Π_0, H_0) -параметризации. Это означает, что мы построили семейство экстремалей, содержащее λ_t и хорошо проецирующееся на M . По теореме 17.1, экстремаль λ_t , $t \in [0, t_1]$, сильно оптимальна. Теорема 21.3 доказана. $\square$

Для задачи с интегральным функционалом и свободным конечным временем t_1 аналогичное рассуждение и теорема 17.2 дают следующее достаточное условие оптимальности.

Теорема 21.4. Пусть λ_t , $t \in [0, t_1]$, есть регулярная нормальная экстремаль в задаче с интегральным функционалом и свободным временем, и пусть гамильтониан $H(\lambda)$ гладок в окрестности λ_t . Если на отрезке $(0, t_1]$ нет сопряженных точек, то экстремальная траектория $q(t) = \pi(\lambda_t)$, $t \in [0, t_1]$, строго сильно оптимальна.

Глава 22

Редукция

В этой главе мы рассмотрим метод сведения аффинной по управлению системы к нелинейной системе на многообразии меньшей размерности.

22.1 Редукция

Рассмотрим аффинную по управлению систему

$$\dot{q} = f(q) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(q), \quad u_i \in \mathbb{R}, \quad q \in M, \quad (22.1)$$

с попарно коммутирующими векторными полями при управлениях:

$$[g_i, g_j] \equiv 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Поток системы можно разложить по формуле вариаций:

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(f + \sum_{i=1}^m u_i(\tau) g_i \right) d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t e^{\sum_{i=1}^m w_i(\tau) \operatorname{ad} g_i} f d\tau \circ e^{\sum_{i=1}^m w_i(t) g_i}, \quad (22.2)$$

$$w_i(t) = \int_0^t u_i(\tau) d\tau.$$

Здесь мы считаем $\sum_{i=1}^m u_i(\tau) g_i$ невозмущенным потоком и учитываем, что поля g_i взаимно коммутируют. Введем частичную систему, соответствующую второму члену в разложении (22.2):

$$\dot{q} = e^{\sum_{i=1}^m w_i \operatorname{ad} g_i} f(q), \quad w_i \in \mathbb{R}, \quad q \in M, \quad (22.3)$$

где w_i — новые управления. Множества достижимости $\mathcal{A}_1(t)$ исходной системы (22.1) и $\mathcal{A}_2(t)$ частичной системы (22.3) за время t из точки $q_0 \in M$ тесно связаны друг с другом:

$$\mathcal{A}_1(t) \subset \mathcal{A}_2(t) \circ \left\{ e^{\sum_{i=1}^m w_i g_i} \mid w_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \operatorname{cl}(\mathcal{A}_1(t)). \quad (22.4)$$

Действительно, первое включение следует непосредственно из разложения (22.2). Чтобы доказать второе разложение в (22.4), заметим, что отображение

$$w(\cdot) \mapsto q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t e^{\sum_{i=1}^m w_i(\tau) \operatorname{ad} g_i} f \, d\tau$$

непрерывно в топологии L_1 , это следует из асимптотического разложения хронологической экспоненты. Поэтому отображение

$$(w(\cdot), v) \mapsto q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t e^{\sum_{i=1}^m w_i(\tau) \operatorname{ad} g_i} f \, d\tau \circ e^{\sum_{i=1}^m v_i g_i}$$

непрерывно в топологии $L_1 \times \mathbb{R}^m$. Наконец, отображение

$$u(\cdot) \mapsto (w(\cdot), v) = \left(\int_0^\cdot u(\tau) \, d\tau, \int_0^t u(\tau) \, d\tau \right)$$

имеет всюду плотный образ в $L_1 \times \mathbb{R}^m$. Тогда из разложения (22.2) следует второе включение в (22.4).

Частичная система (22.3) инвариантна относительно полей g_i :

$$\left(e^{\sum_{i=1}^m v_i g_i} \right)_* e^{\sum_{i=1}^m w_i \operatorname{ad} g_i} f = e^{\sum_{i=1}^m (w_i - v_i) \operatorname{ad} g_i} f. \quad (22.5)$$

Поэтому цепочка (22.4) и равенство (22.5) означают, что исходную систему (22.1) можно рассматривать как композицию частичной системы (22.3) с потоком полей g_i : любое множество достижимости исходной системы за время t есть (с точностью до замыкания) множество достижимости частичной системы за время t плюс скачок вдоль g_i , более того, скачок вдоль g_i возможен в любой момент времени.

Пусть $(u(t), \lambda_t)$ — экстремаль исходной аффинной по управлению системы. Экстремаль λ_t вполне особая, более того, условие максимума ПМП равносильно тождеству

$$\langle \lambda_t, g_i \rangle \equiv 0.$$

Легко видеть, что

$$\mu_t = \left(e^{\sum_{i=1}^m w_i(t) g_i} \right)^* \lambda_t$$

есть экстремаль системы (22.3), соответствующая управлению

$$w(t) = \int_0^t u(\tau) \, d\tau,$$

более того,

$$\langle \mu_t, g_i \rangle \equiv 0. \quad (22.6)$$

(Мы используем здесь термин экстремаль как синоним критической точки отображения в конец, т.е. мы требуем, чтобы экстремальное управление

было критическим, но не обязательно минимизирующим, для зависящего от управления гамильтониана ПМП). Обратно, если μ_t — экстремаль (22.3) с липшицевым управлением $w(t)$ и выполняется тождество (22.6), то

$$\lambda_t = \left(e^{-\sum_{i=1}^m w_i(t) g_i} \right)^* \mu_t$$

есть экстремаль исходной системы (22.1) с управлением

$$u(t) = \dot{w}(t).$$

Более того, усиленное обобщенное условие Лежандра для экстремали λ_t исходной системы совпадает с усиленным условием Лежандра для соответствующей экстремали μ_t частичной системы. Иными словами, переход от системы (22.1) к системе (22.3) переводит хорошие особые экстремали λ_t в регулярные экстремали μ_t .

Упражнение 22.1. Проверьте, что экстремали λ_t и μ_t имеют одно и то же сопряженное время.

Так как система (22.3) инвариантна относительно полей g_i , эту систему можно рассматривать на факторе многообразия M по модулю действия полей g_i , если такое фактор-многообразие корректно определено. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на M :

$$q' \sim q \iff q' \in \mathcal{O}_q(g_1, \dots, g_m).$$

Предположим, что все орбиты $\mathcal{O}_q(g_1, \dots, g_m)$ имеют одинаковую размерность и более того, выполняется следующее условие нерекуррентности: для любой точки $q \in M$ существует такие окрестность $O_q \ni q$ и многообразие $N_q \subset M$, $q \in N_q$, трансверсальное $\mathcal{O}_q(g_1, \dots, g_m)$, что любая орбита $\mathcal{O}_{q'}(g_1, \dots, g_m)$, $q' \in O_q$, пересекает N_q в единственной точке. Эти условия выполняются, например, если $M = \mathbb{R}^n$, а g_i суть постоянные векторные поля, или если $m = 1$, а поле g_1 неособое и нерекуррентное. Если эти условия выполняются, то пространство орбит $M/\sim$ есть гладкое многообразие. Тогда система (22.3) корректно определена на фактор-многообразии $M/\sim$:

$$\dot{q} = e^{\sum_{i=1}^m w_i \operatorname{ad} g_i} f(q), \quad w_i \in \mathbb{R}, \quad q \in M/\sim. \quad (22.7)$$

Переход от исходной аффинной по управлению системы (22.1) к нелинейной по управлению редуцированной системе (22.7) уменьшает размерность пространства состояний и преобразует особые экстремали в регулярные.

Пусть $\pi : M \rightarrow M/\sim$ есть проекция. Для множества достижимости $\mathcal{A}_3(t)$ редуцированной системы (22.7) из точки $\pi(q_0)$ включения (22.4) принимают форму

$$\mathcal{A}_1(t) \subset \pi^{-1}(\mathcal{A}_3(t)) \subset \operatorname{cl}(\mathcal{A}_1(t)). \quad (22.8)$$

Из приведенного выше анализа экстремалей следует, что $q(t)$ есть экстремальная кривая исходной системы (22.1) тогда и только тогда, когда ее проекция $\pi(q(t))$ есть экстремальная кривая редуцированной системы (22.7).

Первое включение в (22.8) означает, что если $\pi(q(\tau))$, $\tau \in [0, t]$, геометрически оптимальна, то $q(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, также геометрически оптимальна.

Можно также определить процедуру обратной редукции. Возьмем управляемую систему

$$\dot{q} = f(q, w), \quad q \in M, \quad w \in \mathbb{R}^n, \quad (22.9)$$

ограничим ее на липшицевы управления $w(\cdot)$ и добавим интегратор:

$$\begin{cases} \dot{q} = f(q, w), \\ \dot{w} = u, \end{cases} \quad (q, w) \in M \times \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^n. \quad (22.10)$$

Упражнение 22.2. Докажите, что система (22.9) является редукцией системы (22.10).

22.2 Управление твердым телом

Рассмотрим задачу быстрогодействия для системы, описывающей вращения твердого тела, см. раздел 19.4:

$$\dot{q} = q(a + ub), \quad q \in \text{SO}(3), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (22.11)$$

где

$$a, b \in \text{so}(3), \quad \langle a, b \rangle = 0, \quad |b| = 1, \quad a \neq 0.$$

Отметим, что в разделе 19.4 мы предполагали, что $|a| = 1$, а не $|b| = 1$, как сейчас, однако один случай получается из другого делением правой части системы на константу.

Редуцируем систему (22.11). Пространство состояний $\text{SO}(3)$ необходимо профакторизовать по орбитам qe^{sb} , $s \in \mathbb{R}$, поля qb . Соответствующее отношение эквивалентности имеет вид:

$$q \sim qe^{sb}, \quad s \in \mathbb{R},$$

и структура фактор-пространства описана в следующем утверждении.

Предложение 22.1.

$$\text{SO}(3)/\sim \simeq S^2,$$

причем каноническая проекция есть

$$q \mapsto q\beta, \quad q \in \text{SO}(3), \quad \beta \in S^2. \quad (22.12)$$

Здесь $\beta \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ есть единичный вектор, соответствующий матрице $b \in \text{so}(3)$:

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Группа $\mathrm{SO}(3)$ транзитивно действует на сфере S^2 . Подгруппа в $\mathrm{SO}(3)$, оставляющая точку $\beta \in S^2$ неподвижной, состоит из вращений вокруг прямой β , т.е. она равна

$$e^{\mathbb{R}b} = \{e^{sb} \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Поэтому фактор $\mathrm{SO}(3)/e^{\mathbb{R}b} = \mathrm{SO}(3)/\sim$ диффеоморфен S^2 , проекция $\mathrm{SO}(3) \rightarrow S^2$ задается соотношением (22.12), и множества уровня этого отображения совпадают с орбитами поля qb . $\square$

Частичная система (22.3) в этом примере имеет вид

$$\dot{q} = qe^{w \operatorname{ad} b} a, \quad q \in \mathrm{SO}(3), \quad w \in \mathbb{R},$$

а редуцированная система (22.7) есть

$$\frac{d}{dt}(q\beta) = qe^{w \operatorname{ad} b} a\beta, \quad q\beta \in S^2. \quad (22.13)$$

Правая часть этой симметричной управляемой системы задает окружность радиуса $|a|$ в касательной плоскости $(q\beta)^\perp = T_{q\beta}S^2$. Иными словами, система (22.13) задает риманову метрику на S^2 . Так как векторные поля в правой части системы (22.13) постоянны по модулю, задача быстрогодействия эквивалентна римановой задаче (минимизация времени равносильна минимизации длины, если скорость постоянна по модулю).

Экстремальные кривые (геодезические) римановой метрики на S^2 — дуги больших окружностей, они оптимальны вплоть до полуокружностей. Сопряженные точки для исходной и редуцированной систем одни и те же, поэтому для обеих систем экстремальные кривые оптимальны вплоть до диаметрально противоположных точек.

22.3 Управление угловой скоростью

Рассмотрим систему, описывающую управление угловой скоростью вращающегося твердого тела, см. (6.19):

$$\dot{\mu} = \mu \times \beta \mu + ul, \quad u \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}^3. \quad (22.14)$$

Здесь μ — вектор угловой скорости твердого тела в системе координат, связанной с телом, а $l \in \mathbb{R}^3$ — единичный вектор в общем положении, вдоль которого прикладывается момент. Заметим, что в разделе 6.4 допускался только момент $u = \pm 1$, сейчас же момент неограничен. В разделе 8.4 было доказано, что система с ограниченным управлением вполне управляема (даже в шестимерном пространстве). Сейчас мы покажем, что с неограниченным управлением получается полная управляемость в $\mathbb{R}^3$ за сколь угодно малое время.

Применим процедуру редукции к исходной системе (22.14). Частичная система теперь имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= e^{w \operatorname{ad} l}(\mu \times \beta \mu) \\ &= (\mu + wl) \times \beta(\mu + wl), \quad w \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Фактор $\mathbb{R}^3$ по модулю орбит постоянного поля l может быть реализован как плоскость $\mathbb{R}^2$, проходящая через начало координат и ортогональная l . Тогда проекция $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ есть ортогональная проекция вдоль l , и редуцированная система имеет вид

$$\dot{x} = (x + wl) \times \beta(x + wl) - \langle x \times \beta(x + wl), l \rangle l, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad w \in \mathbb{R}. \quad (22.15)$$

Введем декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, соответствующие ортонормированному реперу с базисными векторами, коллинеарными векторам $l, l \times \beta l, l \times (l \times \beta l)$. В этих координатах $x = (x_1, x_2)$ и редуцированная система (22.15) принимает форму:

$$\dot{x}_1 = b_{13}x_2^2 + ((b_{11} - b_{33})x_2 - b_{23}x_1)w - b_{13}w^2, \quad (22.16)$$

$$\dot{x}_2 = -b_{13}x_1x_2 + ((b_{22} - b_{11})x_1 + b_{23}x_2)w, \quad (22.17)$$

где $b = (b_{ij})$ — матрица оператора β в выбранном ортонормированном репере. Прямое вычисление показывает, что $b_{13} < 0$ и $b_{22} - b_{11} \neq 0$. В полярных координатах (r, φ) в плоскости (x_1, x_2) редуцированная система (22.16), (22.17) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{r} &= rF(\cos \varphi, \sin \varphi)w - b_{13} \cos \varphi w^2, \\ \dot{\varphi} &= -b_{13}r \sin \varphi - (1/r) \sin \varphi w^2 + G(\cos \varphi, \sin \varphi)w,\end{aligned}$$

где F и G — однородные многочлены степени 2, причем $G(\pm 1, 0) = b_{22} - b_{11}$.

Подбирая подходящие управления, можно построить траектории системы в $\mathbb{R}^2$ следующих двух типов:

- (1) «спирали», т.е. траектории, начинающиеся и заканчивающиеся на положительной полуоси x_1 , не проходящие через начало координат ($r \neq 0$), и вращающиеся против часовой стрелки ($\dot{\varphi} > 0$),
- (2) «горизонтальные» траектории, почти параллельные оси x_1 ($\dot{x}_1 \gg \dot{x}_2$).

Более того, по этим траекториям можно двигаться быстро. Действительно, система (22.16), (22.17) имеет очевидную симметрию — она инвариантна относительно замен переменных $x_1 \mapsto \alpha x_1, x_2 \mapsto \alpha x_2, w \mapsto \alpha w, t \mapsto \alpha^{-1}t$ ($\alpha > 0$). Следовательно, существуют «спирали», сколь угодно далекие от начала координат со сколь угодно малым временем полного оборота вокруг нуля. Далее, из уравнений (22.16), (22.17) легко видеть, что при больших по модулю управлениях w получаются сколь угодно быстрые движения вдоль «горизонтальных» траекторий в положительном направлении оси x_1 .

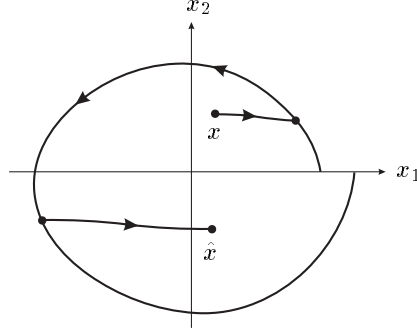


Рис. 22.1: Полная управляемость системы (22.15)

Комбинируя движения типов (1) и (2), можно перевести любую точку $x \in \mathbb{R}^2$ в любую точку $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ за произвольное время $\varepsilon > 0$, см. рис. 22.1. Мы оставляем подробности этого рассуждения читателю в качестве упражнения, см. также [41].

Итак, достижимые множества $\mathcal{A}_x^3(t)$ редуцированной системы (22.15) из точки x за время t удовлетворяют свойству:

$$\mathcal{A}_x^3(\varepsilon) = \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon > 0.$$

В силу цепочки (22.8), достижимые множества $\mathcal{A}_\mu^1(t)$ исходной системы (22.14) удовлетворяют равенству

$$\text{cl}(\mathcal{A}_\mu^1(\varepsilon)) = \mathbb{R}^3 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^3, \quad \varepsilon > 0.$$

Так как вектор l находится в общем положении, 3-мерная система (22.14) имеет полный ранг (см. предложение 6.1), поэтому она вполне управляема за сколь угодно малое время:

$$\mathcal{A}_\mu^1(\varepsilon) = \mathbb{R}^3 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^3, \quad \varepsilon > 0.$$

Глава 23

Кривизна

23.1 Кривизна двумерных систем

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U, \quad (23.1)$$

где

$$\dim M = 2, \quad U = \mathbb{R} \text{ или } S^1.$$

Мы предполагаем, что правая часть $f_u(q)$ гладко зависит от (u, q) . Хорошо известный пример такой системы дает двумерная риманова задача: локально эта задача задает управляемую систему

$$\dot{q} = \cos u f_1(q) + \sin u f_2(q), \quad q \in M, \quad u \in S^1,$$

где f_1, f_2 — локальный ортонормированный репер римановой структуры. Мы получим инвариантное относительно обратной связи уравнение Якоби для управляемой системы (23.1), а также построим главный инвариант этой системы относительно преобразований обратной связи — кривизну (в римановом случае этот инвариант совпадает с гауссовой кривизной). Мы докажем теорему сравнения для сопряженных точек, аналогичную теоремам сравнения в римановой геометрии.

Будем предполагать, что кривая допустимых скоростей управляемой системы (23.1) удовлетворяет следующим условиям регулярности:

$$\begin{aligned} f_u(q) \wedge \frac{\partial f_u(q)}{\partial u} &\neq 0, \\ \frac{\partial f_u(q)}{\partial u} \wedge \frac{\partial^2 f_u(q)}{\partial u^2} &\neq 0, \quad q \in M, \quad u \in U. \end{aligned} \quad (23.2)$$

Условие (23.2) означает, что кривая $\{f_u(q) \mid u \in U\} \subset T_q M$ сильно выпукла, из него следует усиленное условие Лежандра для экстремалей системы (23.1).

Введем линейный на слоях кокасательного расслоения зависящий от управления гамильтониан

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_u(q) \rangle$$

и максимизированный гамильтониан

$$H(\lambda) = \max_{u \in U} h_u(\lambda). \quad (23.3)$$

Будем предполагать, что $H(\lambda)$ определен в рассматриваемой области в T^*M . Более того, мы предполагаем, что для любого λ в этой области максимум в (23.3) достигается для единственного $u \in U$; это означает, что любая опорная прямая касается кривой допустимых скоростей в единственной точке. Тогда из условия выпуклости (23.2) следует, что $H(\lambda)$ является гладким в данной области и сильно выпуклым на слоях в T^*M . Более того, H однороден порядка один на слоях, поэтому можно ограничиться изучением поверхности уровня

$$\mathcal{H} = H^{-1}(1) \subset T^*M.$$

Обозначим пересечение со слоем через

$$\mathcal{H}_q = \mathcal{H} \cap T_q^*M.$$

23.1.1 Подвижный репер

Построим инвариантный относительно преобразований обратной связи подвижный репер на 3-мерном многообразии $\mathcal{H}$ для того, чтобы записать уравнение Якоби в этом репере. Отметим, что максимизированный гамильтониан H инвариантен по обратной связи, так как он зависит от всей кривой допустимых скоростей $f_U(q)$, но не от ее параметризации управлением u . Поэтому поверхность уровня $\mathcal{H}$ и слой $\mathcal{H}_q$ также инвариантны по обратной связи.

Начнем строить репер с вертикального поля, касающегося кривой $\mathcal{H}_q$. Введем в слое полярные координаты:

$$p = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in T_q^*M,$$

тогда $\mathcal{H}_q$ параметризуется углом φ :

$$\mathcal{H}_q = \{p = p(\varphi)\}.$$

Так как кривая $\mathcal{H}_q$ не проходит через начало координат: $p(\varphi) \neq 0$, получаем

$$p(\varphi) \wedge \frac{dp}{d\varphi}(\varphi) \neq 0. \quad (23.4)$$

Разложим вторую производную в репере $p, \frac{dp}{d\varphi}$:

$$\frac{d^2 p}{d\varphi^2}(\varphi) = a(\varphi)p(\varphi) + b(\varphi)\frac{dp}{d\varphi}(\varphi).$$

Кривая $\mathcal{H}_q$ сильно выпукла, поэтому

$$a(\varphi) < 0.$$

При замене параметра $\theta = \theta(\varphi)$ получаем

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} = a(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 p(\theta) + \tilde{b}(\theta) \frac{dp}{d\theta}(\theta),$$

поэтому существует единственный (с точностью до трансляций и ориентации) параметр θ на кривой $\mathcal{H}_q$, для которого

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} = -p(\theta) + b(\theta) \frac{dp}{d\theta}(\theta).$$

Зафиксируем такой параметр θ и определим соответствующее вертикальное векторное поле на $\mathcal{H}$:

$$v = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

В инвариантных терминах, v — единственное (с точностью до умножения на ± 1) вертикальное поле на $\mathcal{H}$, для которого

$$L_v^2 s = -s + b L_v s, \quad (23.5)$$

где $s = pdq$ — тавтологическая форма на T^*M , суженная на $\mathcal{H}$.

Определим подвижный репер на $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$V_1 = v, \quad V_2 = [v, \vec{H}], \quad V_3 = \vec{H}.$$

Заметим, что эти векторные поля линейно независимы, так как v вертикально, а другие два поля имеют линейно независимые горизонтальные составляющие:

$$\begin{aligned} \pi_* \vec{H} &= f, \\ \pi_* [v, \vec{H}] &= \frac{\partial f_u}{\partial u} \frac{du}{d\theta}, \quad \frac{du}{d\theta} \neq 0. \end{aligned}$$

Здесь мы обозначаем через $u(\theta)$ максимизирующее управление на $\mathcal{H}_q$:

$$\langle p(\theta), f_{u(\theta)} \rangle \geq \langle p(\theta), f_u \rangle, \quad u \in U.$$

Дифференцируя тождество

$$\left\langle p(\theta), \frac{\partial f_u}{\partial u} \Big|_{u(\theta)} \right\rangle \equiv 0$$

по θ , получаем $\frac{du}{d\theta} \neq 0$.

Для того, чтобы написать уравнение Якоби вдоль экстремали λ_t , нам потребуются скобки Ли гамильтонова поля $\vec{H}$ с векторными полями репера:

$$\begin{aligned} [\vec{H}, V_1] &= -V_2, \\ [\vec{H}, V_2] &= ?, \\ [\vec{H}, V_3] &= 0. \end{aligned}$$

Вычислим недостающую вторую скобку.

Теорема 23.1.

$$[\vec{H}, [\vec{H}, v]] = -\kappa v. \quad (23.6)$$

Функция $\kappa = \kappa(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{H}$, называется *кривизной* двумерной управляемой системы (23.1). Гамильтоново поле $\vec{H}$ инвариантно по обратной связи, а поле v инвариантно по обратной связи с точностью до умножения на ± 1 . Поэтому кривизна κ есть инвариант системы (23.1) относительно преобразований обратной связи.

Докажем теорему 23.1.

Доказательство. Параметр θ задает отождествление

$$\mathcal{H} \cong \{\theta\} \times M, \quad (23.7)$$

поэтому касательное пространство к $\mathcal{H}$ может быть разложено в прямую сумму горизонтального и вертикального подпространств. По двойственности, любая дифференциальная форма на $\mathcal{H}$ имеет горизонтальную и вертикальную части. Заметим, что тривиализация (23.7) неинвариантна по обратной связи, так как выбор сечения $\theta = 0$ произволен, поэтому форма $d\theta$ и горизонтальность подпространства неинвариантны по обратной связи.

Для краткости обозначим в этом доказательстве через

$$s = s|_{\mathcal{H}}$$

горизонтальную форму на $\mathcal{H}$. Обозначим производную Ли:

$$L_v = L_{\frac{\partial}{\partial \theta}} = ' \quad$$

и рассмотрим следующий корепер на $\mathcal{H}$:

$$d\theta, \quad s, \quad s'. \quad (23.8)$$

Легко видеть, что эти формы линейно независимы: $d\theta$ вертикальна, а горизонтальные формы s, s' линейно независимы в силу (23.4). Теперь построим репер на $\mathcal{H}$, двойственный реперу (23.8).

Разложим $\vec{H}$ на горизонтальные и вертикальные части:

$$\vec{H} = \underbrace{Y}_{\text{горизонтально}} + \underbrace{\alpha \frac{\partial}{\partial \theta}}_{\text{вертикально}}, \quad \alpha = \alpha(\theta, q). \quad (23.9)$$

Докажем, что поля

$$\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad Y, \quad Y' = \left[\frac{\partial}{\partial \theta}, Y \right]$$

составляют репер, двойственный кореперу (23.8). Нужно показать лишь, что пара горизонтальных полей Y, Y' двойственна паре горизонтальных форм s, s' . Во-первых,

$$\langle s_\lambda, Y \rangle = \langle s_\lambda, \vec{H} \rangle = \langle \lambda, f_u \rangle = H(\lambda) = 1.$$

Далее,

$$\langle s_\lambda, Y' \rangle = \langle s_\lambda, \vec{H}' \rangle = \left\langle \lambda, \frac{\partial f_u}{\partial \theta} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \lambda, \frac{\partial f_u}{\partial u} \right\rangle}_{=0} \frac{du}{d\theta} = 0.$$

Следовательно,

$$0 = \langle s, Y \rangle' = \langle s', Y \rangle + \langle s, Y' \rangle,$$

то есть

$$\langle s', Y \rangle = 0.$$

Наконец,

$$0 = \langle s', Y \rangle' = \langle s'', Y \rangle + \langle s', Y' \rangle.$$

Равенство (23.5) можно переписать как $s'' = -s + bs'$, поэтому

$$\langle s', Y' \rangle = -\langle s'', Y \rangle = \langle s - bs', Y \rangle = 1.$$

Итак, мы доказали, что репер

$$\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad Y, \quad Y' \in \text{Vec } \mathcal{H}$$

двойственен кореперу

$$d\theta, \quad s, \quad s' \in \Lambda^1(\mathcal{H}).$$

Для завершения доказательства данной теоремы вычислим скобку $[\vec{H}, [\vec{H}, v]]$ с помощью этих реперов.

Сначала рассмотрим стандартную симплектическую форму:

$$\sigma|_{\mathcal{H}} = d(s|_{\mathcal{H}}) = ds = d\theta \wedge s' + d_q s,$$

где $d_q s$ — дифференциал формы s по горизонтальным координатам. Горизонтальная 2-форма $d_q s$ имеет разложение

$$d_q s = c s \wedge s', \quad c = c(\theta, q),$$

поэтому

$$\sigma|_{\mathcal{H}} = d\theta \wedge s' + cs \wedge s'.$$

Так как

$$i_{\vec{H}} \sigma|_{\mathcal{H}} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned}\sigma|_{\mathcal{H}}(\vec{H}, \cdot) &= \sigma|_{\mathcal{H}}(Y + \alpha \frac{\partial}{\partial \theta}, \cdot) \\ &= \alpha s' - \langle s', Y \rangle d\theta + c \langle s, Y \rangle s' - c \langle s', Y \rangle s \\ &= \alpha s' + cs' = 0,\end{aligned}$$

то есть $\alpha = -c$, поэтому

$$\vec{H} = Y - c \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Теперь вычислим требующуюся скобку Ли.

$$\vec{H}' = \left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \vec{H} \right] = Y' - c' \frac{\partial}{\partial \theta},$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\left[\vec{H}, \left[\vec{H}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right] &= \left[\vec{H}, -\vec{H}' \right] = \left[Y - c \frac{\partial}{\partial \theta}, -Y' + c' \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \\ &= \underbrace{\left(\vec{H}c' - \vec{H}'c \right) \frac{\partial}{\partial \theta}}_{\text{вертикальная часть}} + \underbrace{[Y', Y] + cY'' - c'Y'}_{\text{горизонтальная часть}}.\end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось убедиться, что горизонтальная часть скобки $[\vec{H}, [\vec{H}, \frac{\partial}{\partial \theta}]]$ обращается в нуль.

Из равенства $s'' = -s + bs'$ следует, в силу двойственности реперов Y , Y' и s , s' , что

$$Y'' = -Y - bY'.$$

Далее,

$$\begin{aligned}ds &= d\theta \wedge s' + cs \wedge s', \\ d(s') &= (ds)' = d\theta \wedge s'' + c's \wedge s' + cs \wedge s'' \\ &= -d\theta \wedge s - b d\theta \wedge s' + (c' + cb)s \wedge s',\end{aligned}$$

и скобку $[Y', Y]$ можно вычислить, используя двойственность реперов и предложение 18.1:

$$[Y', Y] = cY + (c' + cb)Y'.$$

Итак, горизонтальная часть поля $[\vec{H}, [\vec{H}, v]]$ равна

$$[Y', Y] + cY'' - c'Y' = cY + (c' + cb)Y' - cY - cbY' - c'Y' = 0.$$

Мы доказали, что

$$\left[\vec{H}, \left[\vec{H}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right] = -\kappa \frac{\partial}{\partial \theta},$$

где кривизна вычисляется по формуле

$$\kappa = -\vec{H}c' + \vec{H}'c.$$

□

Замечание. Напомним, что вертикальное векторное поле v , удовлетворяющее (23.5), единственно с точностью до множителя ± 1 . С другой стороны, вертикальное поле v , удовлетворяющее (23.6), единственно с точностью до множителя, постоянного вдоль траекторий $\vec{H}$ (и потому не влияющего на κ). Следовательно, для вычисления кривизны κ можно использовать любое векторное поле v , для которого выполняется равенство вида (23.6).

Итак, теперь нам известны все скобки гамильтонова векторного поля $X = \vec{H}$ с векторными полями репера V_1, V_2, V_3 :

$$[\vec{H}, V_1] = -V_2, \quad (23.10)$$

$$[\vec{H}, V_2] = \kappa V_1, \quad (23.11)$$

$$[\vec{H}, V_3] = 0. \quad (23.12)$$

23.1.2 Уравнение Якоби в подвижном репере

Мы используем построенный подвижный репер для того, чтобы вывести дифференциальное уравнение для определения сопряженного времени нашей двумерной системы — уравнение Якоби в подвижном репере.

Как в главе 21, рассмотрим уравнение Якоби вдоль регулярной экстремали λ_t , $t \in [0, t_1]$, двумерной системы (23.1):

$$\dot{\eta} = \vec{b}_t(\eta), \quad \eta \in \Sigma = T_{\lambda_0}(T^*M),$$

и его поток

$$B_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \vec{b}_\tau d\tau.$$

Напомним, что $\Pi_0 = T_{\lambda_0}(T_{q_0}^*M)$ — вертикальное подпространство в Σ , а $C_t \subset \Pi_0$ — подпространство постоянных вертикальных решений уравнения Якоби на $[0, t]$, см. (21.30). Пересечение $B_t\Pi_0 \cap \Pi_0$ всегда содержит подпространство C_t . Момент $t \in (0, t_1]$ есть сопряженное время для экстремали λ_t тогда и только тогда, когда это пересечение больше, чем C_t :

$$B_t\Pi_0 \cap \Pi_0 \neq C_t.$$

Для того, чтобы дополнить репер V_1, V_2, V_3 до базиса в $T_{\lambda_0}(T^*M)$, рассмотрим векторное поле, трансверсальное $\mathcal{H}$ — вертикальное эйлерово поле $E \in \text{Vec}(T^*M)$, имеющее поток

$$\lambda \circ e^{tE} = e^t \cdot \lambda, \quad \lambda \in T^*M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В координатах (p, q) на T^*M это поле имеет вид

$$E = p \frac{\partial}{\partial p}.$$

Векторные поля V_1, V_2, V_3, E образуют базис в $T_\lambda(T^*M)$, $\lambda \in \mathcal{H}$. Поля $V_1 = \frac{\partial}{\partial \theta}$ и E вертикальны:

$$\Pi_0 = \text{span}(V_1(\lambda_0), E(\lambda_0)).$$

Чтобы найти вертикальное подпространство C_t , вычислим действие потока B_t на эти поля. При доказательстве теоремы 21.3 мы разложили поток уравнения Якоби:

$$B_t(\eta) = (P_t^*)_* e_*^{t\vec{H}}(\eta).$$

Поэтому

$$B_tE(\lambda_0) = (P_t^*)_* e_*^{t\vec{H}}E(\lambda_0).$$

Гамильтониан H однороден порядка один на слоях, следовательно, поток $\vec{H}$ также однороден:

$$(k\lambda) \circ e^{t\vec{H}} = k \left(\lambda \circ e^{t\vec{H}} \right), \quad k > 0,$$

а поля $\vec{H}$ и E коммутируют. То есть гамильтоново векторное поле $\vec{H}$ сохраняет вертикальное эйлерово поле E . Далее, поток P_t^* линеен на слоях, поэтому он также сохраняет поле E . Итак, вектор $E(\lambda_0)$ инвариантен относительно потока уравнения Якоби, то есть

$$\mathbb{R}E(\lambda_0) \subset C_t.$$

Легко видеть, что это включение — на самом деле равенство. Действительно, учитывая скобку (23.10), получаем

$$e_*^{t\vec{H}}V_1(\lambda_0) = \lambda_t \circ e^{-t \operatorname{ad} \vec{H}}V_1 = \lambda_t \circ (V_1 + tV_2 + o(t)) \notin T_{\lambda_t}(T_{q(t)}^*M),$$

поэтому

$$B_tV_1(\lambda_0) \notin \Pi_0$$

при малых $t > 0$. Это означает, что

$$C_t = \mathbb{R}E(\lambda_0), \quad t \in (0, t_1].$$

Поэтому момент t есть сопряженное время тогда и только тогда, когда

$$B_t\Pi_0 \cap \Pi_0 \neq \mathbb{R}E(\lambda_0),$$

то есть

$$e_*^{t\vec{H}}V_1(\lambda_0) \in \mathbb{R}V_1(\lambda_t),$$

или, что равносильно,

$$\lambda_0 \circ e^{t \operatorname{ad} \vec{H}}V_1 \in \mathbb{R}(\lambda_0 \circ V_1). \quad (23.13)$$

Теперь опишем действие потока произвольного поля на подвижный репер.

Лемма 23.1. Пусть N — гладкое многообразие, $\dim N = m$, и пусть векторные поля $V_1, \dots, V_m \in \operatorname{Vec} N$ образуют подвижный репер на N . Возьмем

векторное поле $X \in \text{Vec } N$. Пусть оператор $\text{ad } X$ имеет матрицу $A = (a_{ij})$ в этом репере:

$$(\text{ad } X) V_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} V_i, \quad a_{ij} \in C^\infty(N).$$

Тогда матрица $\Gamma(t) = (\gamma_{ij}(t))$ оператора $e^{t \text{ad } \vec{H}}$ в подвижном репере:

$$e^{t \text{ad } X} V_j = \sum_{i=1}^m \gamma_{ij}(t) V_i, \quad \gamma_{ij}(t) \in C^\infty(N), \quad (23.14)$$

является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{\Gamma}(t) = \Gamma(t) A(t), \quad (23.15)$$

$$\Gamma(0) = \text{Id}, \quad (23.16)$$

где $A(t) = (e^{tX} a_{ij})$.

Доказательство. Начальное условие (23.16) очевидно. Для того, чтобы получить матричное уравнение (23.15), продифференцируем тождество (23.14) по t :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}_{ij}(t) V_i &= e^{t \text{ad } X} [X, V_j] = e^{t \text{ad } X} \left(\sum_{k=1}^m a_{kj} V_k \right) = \sum_{k=1}^m (e^{tX} a_{kj}) e^{t \text{ad } X} V_k \\ &= \sum_{k,i=1}^m (e^{tX} a_{kj}) \gamma_{ik} V_i, \end{aligned}$$

и дифференциальное уравнение получено. $\square$

Ввиду включения (23.13), момент t есть сопряженное время тогда и только тогда, когда коэффициенты разложения

$$\lambda_0 \circ e^{t \text{ad } \vec{H}} V_j = \sum_{i=1}^3 \gamma_{ij}(t) (\lambda_0 \circ V_i)$$

удовлетворяют равенствам:

$$\gamma_{21}(t) = \gamma_{31}(t) = 0.$$

По предыдущей лемме, матрица $\Gamma(t) = (\gamma_{ij}(t))$ является решением задачи Коши (23.15), (23.16) с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_t & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa_t = \kappa(\lambda_t),$$

см. соотношения между скобками Ли (23.10)–(23.12).

Итак, момент $t \in (0, t_1]$ есть сопряженное время тогда и только тогда, когда решения задач Коши

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_{21} = -\gamma_{22}, \\ \dot{\gamma}_{22} = \kappa_t \gamma_{21}, \end{cases} \quad \gamma_{21}(0) = 0, \quad \gamma_{22}(0) = 1$$

и

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_{31} = -\gamma_{32}, \\ \dot{\gamma}_{32} = \kappa_t \gamma_{31}, \end{cases} \quad \gamma_{31}(0) = 0, \quad \gamma_{32}(0) = 0$$

удовлетворяют равенствам

$$\gamma_{21}(t) = \gamma_{31}(t) = 0.$$

Но задача Коши для γ_{31} , γ_{32} имеет только тривиальное решение. Поэтому для сопряженного времени t получаем линейную неавтономную систему в переменных $(x_1, x_2) = (\gamma_{21}, \gamma_{22})$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = \kappa_t x_1, \end{cases} \quad x_1(0) = x_1(t) = 0. \quad (23.17)$$

Мы будем называть систему (23.17), или, что равносильно, дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \kappa_t x = 0, \quad x(0) = x(t) = 0, \quad (23.18)$$

уравнением Якоби для системы (23.1) в подвижном репере. Доказано следующее предложение.

Теорема 23.2. *Момент $t \in (0, t_1]$ есть сопряженное время для двумерной системы (23.1) тогда и только тогда, когда граничная задача (23.18) имеет нетривиальное решение.*

Из теоремы сравнения Штурма для дифференциальных уравнений второго порядка (см., например, [137]) вытекает следующая теорема сравнения для сопряженных точек.

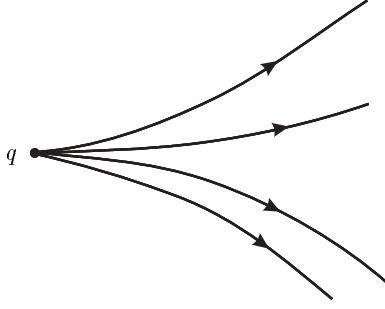
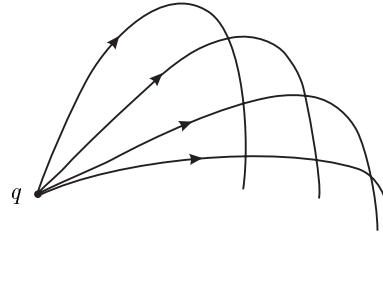
Теорема 23.3. (1) *Если $\kappa < C^2$ для некоторого $C > 0$ вдоль экстремали λ_t , то на временном отрезке $[0, \frac{\pi}{C}]$ нет сопряженных точек. В частности, если $\kappa \leq 0$ вдоль λ_t , то сопряженных точек нет.*

(2) *Если $\kappa \geq C^2$ вдоль λ_t , то на отрезке $[0, \frac{\pi}{C}]$ есть сопряженная точка.*

Характерное поведение экстремальных траекторий двумерной системы (23.1) в случаях отрицательной и положительной кривизны изображено на рис. 23.1 и 23.2 соответственно.

Пример 23.1. Рассмотрим управляемую систему, соответствующую римановой задаче на 2-мерном многообразии M :

$$\dot{q} = \cos u f_1(q) + \sin u f_2(q), \quad q \in M, \quad u \in S^1,$$

Рис. 23.1: $\kappa < 0$ Рис. 23.2: $\kappa > 0$

где f_1, f_2 — ортонормированный репер римановой структуры $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

В этом случае κ есть *гауссова кривизна* риманова многообразия M , и она вычисляется следующим образом:

$$\kappa = -c_1^2 - c_2^2 + f_1 c_2 - f_2 c_1,$$

где c_i — структурные константы репера f_1, f_2 : $[f_1, f_2] = c_1 f_1 + c_2 f_2$. Мы докажем эту формулу для κ в главе 24.

Для римановой задачи кривизна $\kappa = \kappa(q)$ зависит только от точки на базе $q \in M$, но не от координаты θ в слое. Вообще говоря, это не так: кривизна есть функция от $(q, \theta) \in \mathcal{H}$.

Условия оптимальности в терминах сопряженных точек, полученные в главе 21, могут быть легко применены к рассматриваемой двумерной системе (23.1).

Предположим сначала, что $t_c \in (0, t_1)$ есть сопряженное время для экстремали $\lambda_t, t \in [0, t_1]$, системы (23.1). Проверим выполнение условий предложения 21.2. Из условия (23.2) следует, что экстремаль регулярна. Соответствующее управление $\tilde{u}$ имеет коранг один, так как множитель Лагранжа λ_t однозначно определяется из принципа максимума (с точностью до скалярного множителя). Далее, уравнение Якоби не может иметь решений вида (21.28): если бы это было так, то уравнение Якоби в подвижном репере $\ddot{x} + \kappa_t x = 0$ имело бы нетривиальное решение с граничными условиями $x(t_c) = \dot{x}(t_c) = 0$, что невозможно. Итак, экстремаль λ_t удовлетворяет условиям предложения 21.2, и альтернатива (1) этого предложения не реализуется. Поэтому соответствующая экстремальная траектория не является локально геометрически оптимальной.

Если отрезок $[0, t_1]$ не содержит сопряженных точек, то по теореме 21.4 соответствующая экстремальная траектория оптимальна по быстродействию по сравнению со всеми другими допустимыми траекториями, достаточно близкими в M .

23.2 Кривизна трехмерных аффинных по управлению систем

В этом разделе мы рассмотрим аффинные по управлению трехмерные системы:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f_0(q) + u f_1(q), & u \in \mathbb{R}, & \quad q \in M, \\ \dim M &= 3. \end{aligned} \quad (23.19)$$

Мы редуцируем такую систему к двумерной, как в главе 22, и вычислим кривизну полученной двумерной системы — инвариант системы (23.19) по обратной связи.

Мы предполагаем, что выполнены следующие условия регулярности в M :

$$f_0 \wedge f_1 \wedge [f_0, f_1] \neq 0, \quad (23.20)$$

$$f_1 \wedge [f_0, f_1] \wedge [f_1, [f_0, f_1]] \neq 0. \quad (23.21)$$

Любая экстремаль λ_t аффинной по управлению системы (23.19) вполне особая, она удовлетворяет равенству

$$h_1(\lambda_t) = \langle \lambda_t, f_1 \rangle \equiv 0, \quad (23.22)$$

и соответствующее экстремальное управление нельзя найти непосредственно из этого равенства. Дифференцирование (23.22) по t дает

$$h_{01}(\lambda_t) = \langle \lambda_t, [f_0, f_1] \rangle \equiv 0,$$

и еще одно дифференцирование приводит к равенству, содержащему управление:

$$h_{001}(\lambda_t) + u(t)h_{101}(\lambda_t) = \langle \lambda_t, [f_0, [f_0, f_1]] \rangle + u(t)\langle \lambda_t, [f_1, [f_0, f_1]] \rangle \equiv 0.$$

Тогда особое управление однозначно определяется:

$$u = \tilde{u}(q) = -\frac{h_{001}(\lambda)}{h_{101}(\lambda)}, \quad h_1(\lambda) = h_{01}(\lambda) = 0.$$

Применим к системе (23.19) преобразование обратной связи:

$$u \mapsto u - \tilde{u}(q).$$

Это преобразование влияет на поле f_0 , но сохраняет условия регулярности (23.20), (23.21). После этого преобразования особое управление равно

$$u = 0.$$

Иными словами,

$$\lambda f_1 = \lambda[f_0, f_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda[f_0, [f_0, f_1]] = 0.$$

Поэтому будем считать далее, что

$$[f_0, [f_0, f_1]] \in \text{span}(f_1, [f_0, f_1]). \quad (23.23)$$

В трубчатой окрестности траектории поля f_0 рассмотрим редукцию трехмерной системы (23.19):

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = e^{w \text{ ad } f_1} f_0(\tilde{q}), \quad w \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \tilde{q} \in \widetilde{M} = M/e^{\mathbb{R}f_1}, \quad (23.24)$$

для достаточно малого ε .

Эта система имеет те же сопряженные точки, что и исходная система (23.19). Если система (23.24) не имеет сопряженных точек, то соответствующая особая траектория системы (23.19) геометрически сильно оптимальна, т.е. локально приходит на границу множества достижимости.

Опишем кокасательное расслоение фактора $\widetilde{M}$. Касательное пространство к $\widetilde{M}$ состоит из касательных векторов к M по модулю f_1 :

$$\begin{aligned} T_{\tilde{q}}\widetilde{M} &\cong T_q M / \mathbb{R}f_1(q), \\ q &\in M, \quad \tilde{q} = q \circ e^{\mathbb{R}f_1} \in \widetilde{M}, \end{aligned} \quad (23.25)$$

отождествление (23.25) задается отображением

$$\begin{aligned} v &\mapsto \tilde{v}, \quad v \in T_q M, \quad \tilde{v} \in T_{\tilde{q}}\widetilde{M}, \\ v &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} q(t), \quad \tilde{v} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{q}(t). \end{aligned}$$

Поэтому кокасательное пространство к $\widetilde{M}$ состоит из ковекторов на M , ортогональных f_1 :

$$\begin{aligned} T_q^* \widetilde{M} &\cong T_q^* M \cap \{h_1 = 0\}, \\ \lambda &\mapsto \tilde{\lambda}, \quad \lambda \in T_q^* M \cap \{h_1 = 0\}, \quad \tilde{\lambda} \in T_q^* \widetilde{M}, \\ \langle \tilde{\lambda}, \tilde{v} \rangle &= \langle \lambda, v \rangle, \quad v \in T_q M, \quad \tilde{v} \in T_{\tilde{q}} \widetilde{M}. \end{aligned}$$

Учитывая, что поле f_1 есть проекция гамильтонова поля $\vec{h}_1$, легко видеть, что

$$T^* \widetilde{M} \cong \{h_1 = 0\} / e^{\mathbb{R}\vec{h}_1},$$

где отображение $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ определено выше (упражнение: покажите, что $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 \Leftrightarrow \lambda_2 \in \lambda_1 \circ e^{\mathbb{R}\vec{h}_1}$). Итак, кокасательное расслоение фактора $\widetilde{M}$ получается из T^*M с помощью гамильтоновой редукции по $\vec{h}_1$ — ограничения на поверхность уровня гамильтониана h_1 с последующей факторизацией по действию потока $\vec{h}_1$.

Далее, из условия регулярности (23.21) следует, что поле $\vec{h}_1$ трансверсально поверхности уровня $\{h_1 = h_{01} = 0\}$, и эта поверхность уровня дает еще одну реализацию кокасательного расслоения фактора:

$$T^* \widetilde{M} \cong \{h_1 = h_{01} = 0\}.$$

В этой реализации $\vec{h}_0$ есть гамильтоново поле, соответствующее максимизированному гамильтониану — генератору экстремалей ($\vec{H}$ в разделе 23.1). Поверхность уровня максимизированного гамильтониана ($\mathcal{H}$ в разделе 23.1) реализуется как подмногообразие

$$\{h_1 = h_{01} = 0, h_0 = 1\} \subset T^*M.$$

С помощью канонической проекции $\pi : T^*M \rightarrow M$ это подмногообразие можно отождествить с M , поэтому поверхность уровня $\mathcal{H}$ раздела 23.1 реализуется сейчас как M . Мы используем эту реализацию, чтобы вычислить кривизну трехмерной системы (23.19) как кривизну κ ее двумерной редукции (23.24).

Гамильтоново поле $\vec{H}$ раздела 23.1 теперь равно f_0 , а f_1 есть вертикальное поле. Остается нормировать f_1 , т.е. найти такое вертикальное поле af_1 , $a \in C^\infty(M)$, что

$$[f_0, [f_0, af_1]] = -\kappa af_1, \quad (23.26)$$

см. (23.6). Тройка

$$f_0, \quad f_1, \quad f_2 = [f_0, f_1]$$

образует подвижный репер на M , рассмотрим структурные константы этого репера:

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=0}^2 c_{ji}^k f_k, \quad i, j = 0, 1, 2.$$

Заметим, что включение (23.23), полученное после предварительного преобразования обратной связи, теперь записывается как $c_{02}^0 = 0$. Поэтому

$$[f_0, [f_0, f_1]] = -c_{02}^1 f_1 - c_{02}^2 [f_0, f_1].$$

Теперь можно найти такой нормирующий фактор a для f_1 , чтобы выполнялось равенство (23.26). Получаем

$$\begin{aligned} [f_0, [f_0, af_1]] &= [f_0, (f_0 a) + a[f_0, f_1]] = (f_0^2 a) f_1 + 2(f_0 a)[f_0, f_1] + a[f_0, [f_0, f_1]] \\ &= (f_0^2 a - c_{02}^1 a) f_1 + (2f_0 a - c_{01}^2) [f_0, f_1]. \end{aligned}$$

Теперь искомая функция a находится из первого уравнения в частных производных

$$2f_0 a - c_{02}^2 a = 0,$$

и можно вычислить кривизну:

$$\kappa = -\frac{f_0^2 a - c_{02}^1 a}{a}.$$

Итак, *кривизна аффинной по управлению трехмерной системы* (23.19) выражается через структурные константы как

$$\kappa = c_{02}^1 - \frac{1}{4}(c_{02}^2)^2 - \frac{1}{2}f_0 c_{02}^2,$$

функция на пространстве состояний M .

Оценки кривизны κ вдоль (необходимо особой) экстремали трехмерной аффинной по управлению системы позволяют получать оценки сопряженного времени, а потому и отрезков, на которых экстремаль локально оптимальна. Действительно, по построению, κ есть кривизна редуцированной двумерной системы. Как известно из главы 22, редукция переводит особые экстремали в регулярные, а исходная и редуцированная системы имеют одно и то же сопряженное время. Поэтому посредством редукции можно применить теорему 23.3 к исследованию оптимальности особых экстремалей трехмерных аффинных по управлению систем.

Глава 24

Качение тел

В этой главе мы применим теорему об орбите и принцип максимума Понтрягина к инвариантной геометрической модели качения пары твердых тел. Будет решена задача управляемости: в частности, мы покажем, что система вполне управляема тогда и только тогда, когда тела не изометричны. Мы поставим задачу оптимального управления и изучим ее экстремали.

24.1 Геометрическая модель

Рассмотрим два твердых тела в трехмерном пространстве, катящихся одно по другому без проскальзывания и прокручивания.

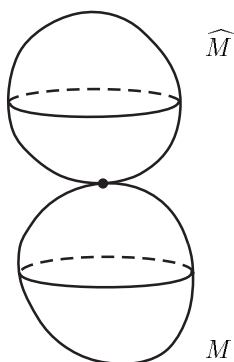


Рис. 24.1: Катящиеся тела

Вместо вложения задачи в $\mathbb{R}^3$, мы рассмотрим инвариантную геометрическую модель этой системы.

Пусть M и $\widehat{M}$ суть двумерные связные многообразия — поверхности катящихся тел. Для того чтобы измерять длины кривых на M и $\widehat{M}$, будем считать, что каждое из этих многообразий *риманово*, т.е. имеет *риманову структуру* — скалярное произведение в касательных пространствах, гладко зависящее от точки многообразия:

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle_M, & \quad v_i \in T_x M, \\ \langle \widehat{v}_1, \widehat{v}_2 \rangle_{\widehat{M}}, & \quad \widehat{v}_i \in T_{\widehat{x}} \widehat{M}. \end{aligned}$$

Более того, мы предполагаем, что M и $\widehat{M}$ ориентированы (поверхности твердых тел в $\mathbb{R}^3$ ориентированы вектором внешней нормали).

В точках контакта тел $x \in M$ и $\widehat{x} \in \widehat{M}$ их касательные пространства отождествляются с помощью изометрии (т.е. линейного отображения, сохраняющего риманову структуру)

$$q : T_x M \rightarrow T_{\widehat{x}} \widehat{M},$$

см. рис. 24.2. Мы имеем дело только с сохраняющими ориентацию изо-

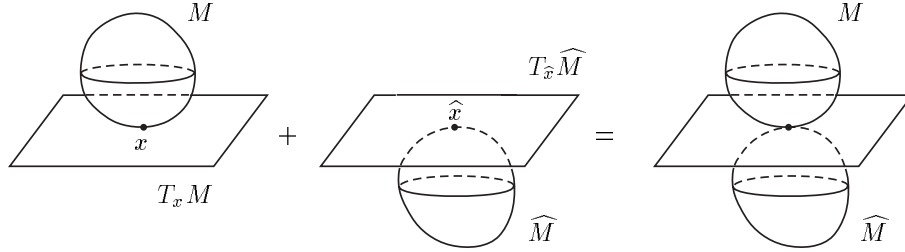


Рис. 24.2: Отождествление касательных пространств в точке контакта

метриями и далее будем опускать слова «сохраняющие ориентацию» для упрощения языка. Изометрия q есть состояние системы, и пространство состояний есть связное 5-мерное многообразие

$$Q = \{ q : T_x M \rightarrow T_{\widehat{x}} \widehat{M} \mid x \in M, \widehat{x} \in \widehat{M}, q \text{ изометрия} \}.$$

Обозначим проекции из Q на M и $\widehat{M}$:

$$\begin{aligned} \pi(q) = x, \quad \widehat{\pi}(q) = \widehat{x}, \quad q : T_x M \rightarrow T_{\widehat{x}} \widehat{M}, \\ q \in Q, \quad x \in M, \quad \widehat{x} \in \widehat{M}. \end{aligned}$$

Локальные координаты на Q можно ввести следующим образом. Выберем произвольные локальные ортонормированные реперы e_1, e_2 на M и $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2$ на $\widehat{M}$:

$$\langle e_i, e_j \rangle_M = \delta_{ij}, \quad \langle \widehat{e}_i, \widehat{e}_j \rangle_{\widehat{M}} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Для любой конфигурации тел $q \in Q$, обозначим через θ угол поворота от репера $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2$ к реперу qe_1, qe_2 в точке контакта:

$$\begin{aligned} qe_1 &= \cos \theta \widehat{e}_1 + \sin \theta \widehat{e}_2, \\ qe_2 &= -\sin \theta \widehat{e}_1 + \cos \theta \widehat{e}_2. \end{aligned}$$

Тогда локально точки $q \in Q$ параметризуются тройками $(x, \widehat{x}, \theta)$, $x = \pi(q) \in M$, $\widehat{x} = \widehat{\pi}(q) \in \widehat{M}$, $\theta \in S^1$. Выбирая локальные координаты (x_1, x_2) на M и $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ на $\widehat{M}$, получаем локальные координаты $(x_1, x_2, \widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \theta)$ на Q .

Пусть $q(t) \in Q$ есть кривая, соответствующая движению катящихся тел, тогда $x(t) = \pi(q(t))$ и $\widehat{x}(t) = \widehat{\pi}(q(t))$ суть траектории точек контакта в M и $\widehat{M}$ соответственно. Условие отсутствия проскальзывания означает, что

$$q(t)\dot{x}(t) = \dot{\widehat{x}}(t), \quad (24.1)$$

а условие отсутствия прокручивания геометрически формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} q(t) & \text{ (векторное поле, параллельное вдоль } x(t)) \\ &= \text{(векторное поле, параллельное вдоль } \widehat{x}(t)). \end{aligned} \quad (24.2)$$

Наша модель игнорирует ограничения состояния, соответствующие допустимости контакта тел, вложенных в $\mathbb{R}^3$. Впрочем, заметим, что если поверхности M и $\widehat{M}$ имеют соответственно положительную и неотрицательную гауссовы кривизны в точке, то их контакт локально допустим.

Из условий допустимости (24.1) и (24.2) следует, что кривая $x(t) \in M$ однозначно определяет все движение $q(t) \in Q$. То есть скорости допустимых движений определяют распределение Δ ранга 2 в 5-мерном пространстве Q . Мы покажем это формально и вычислим распределение Δ явно ниже. Перед этим напомним некоторые начальные сведения из римановой геометрии.

24.2 Двумерная риманова геометрия

Пусть M — двумерное риманово многообразие. Мы опишем римановы геодезические, связность Леви-Чивита и параллельный перенос на $T^*M \cong TM$.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова структура и e_1, e_2 — ортонормированный репер на M .

24.2.1 Римановы геодезические

Для произвольных точек $x_0, x_1 \in M$ будем искать кратчайшую кривую в M , соединяющую x_0 и x_1 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 e_1(x) + u_2 e_2(x), \quad x \in M, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ x(0) &= x_0, \quad x(t_1) = x_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle^{1/2} dt = \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Так же как в разделе 19.1, из принципа максимума легко следует, что параметризованные длиной дуги экстремальные траектории в этой задаче (римановы геодезические) являются проекциями траекторий нормального гамильтонова поля:

$$\begin{aligned} x(t) &= \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda), & \lambda \in \mathcal{H} = \{H = 1/2\} \subset T^*M, \\ H &= \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2), \\ h_i(\lambda) &= \langle \lambda, e_i \rangle, & i = 1, 2. \end{aligned}$$

Поверхность уровня $\mathcal{H}$ есть сферическое расслоение над M со слоем

$$\mathcal{H}_q = \{h_1^2 + h_2^2 = 1\} \cap T_q^*M \cong S^1,$$

параметризованным углом φ :

$$h_1 = \cos \varphi, \quad h_2 = \sin \varphi.$$

Кокасательное расслоение риманова многообразия отождествляется с касательным расслоением благодаря римановой структуре:

$$\begin{aligned} TM &\cong T^*M, \\ v &\mapsto \lambda = \langle v, \cdot \rangle. \end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{H} \subset T^*M$ отождествляется со сферическим расслоением

$$\mathcal{S} = \{v \in TM \mid \|v\| = 1\} \subset TM$$

единичных касательных векторов к M . После этого отождествления можно рассматривать $e^{t\vec{H}}$ как геодезический поток на $\mathcal{S}$.

24.2.2 Связность Леви-Чивита

Связностью на сферическом расслоении $\mathcal{S} \rightarrow M$ называется произвольное горизонтальное распределение D :

$$\begin{aligned} D &= \{D_v \subset T_v\mathcal{S} \mid v \in \mathcal{S}\}, \\ D_v \oplus T_v(\mathcal{S}_x) &= T_v\mathcal{S}, \quad \mathcal{S}_x = \mathcal{S} \cap T_xM. \end{aligned}$$

Любая связность D на M задает *параллельный перенос* единичных касательных векторов вдоль кривых на M . Пусть $x(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть кривая в M , и пусть $v_0 \in T_{x(0)}M$ есть единичный касательный вектор. Кривая $x(t)$ имеет единственный горизонтальный лифт на $\mathcal{S}$ с началом в v_0 :

$$\begin{aligned} v(t) &\in \mathcal{S}, & \pi \circ v(t) &= x(t), \\ \dot{v}(t) &\in D_{v(t)}, \\ v(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Действительно, если кривая $x(t)$ удовлетворяет неавтономному дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = u_1(t) e_1(x) + u_2(t) e_2(x),$$

то его горизонтальный лифт $v(t)$ есть решение поднятого уравнения

$$\dot{v} = u_1(t) \xi_1(v) + u_2(t) \xi_2(v), \quad (24.3)$$

где ξ_i — горизонтальные лифты базисных полей e_i :

$$D_v = \text{span}(\xi_1(v), \xi_2(v)), \quad \pi_* \xi_i = e_i.$$

Заметим, что решения уравнения (24.3) продолжаются на весь временной отрезок $[0, t_1]$, так как слои $\mathcal{S}_x$ компактны. Вектор $v(t_1)$ есть параллельный перенос вектора v_0 вдоль кривой $x(t)$.

Векторное поле $v(t)$ вдоль кривой $x(t)$ называется *параллельным*, если оно сохраняется параллельными переносами вдоль $x(t)$.

Связность Леви-Чивита есть единственная связность на сферическом расслоении $\mathcal{S} \rightarrow M$, удовлетворяющая свойствам:

- (1) скорость любой римановой геодезической параллельна вдоль геодезической (т.е. геодезическое поле $\vec{H}$ горизонтально),
- (2) параллельные переносы сохраняют угол, т.е. горизонтальные лифты векторных полей на базе M коммутируют с векторным полем $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, определяющим элемент длины (или, что эквивалентно, элемент угла) в слое $\mathcal{S}_x$.

Вычислим связность Леви-Чивита как горизонтальное распределение на $\mathcal{H} \cong \mathcal{S}$. В главе 23 был построен инвариантный относительно обратной связи репер на многообразии $\mathcal{H}$:

$$T_\lambda \mathcal{H} = \text{span} \left(\vec{H}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \vec{H}' \right), \quad \vec{H}' = \left[\frac{\partial}{\partial \varphi}, \vec{H} \right].$$

Далее,

$$\vec{H} = h_1 \left(e_1 + c_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + h_2 \left(e_2 + c_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (24.4)$$

$$\vec{H}' = -h_2 \left(e_1 + c_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + h_1 \left(e_2 + c_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (24.5)$$

где c_i — структурные константы ортонормированного репера на M :

$$[e_1, e_2] = c_1 e_1 + c_2 e_2, \quad c_i \in C^\infty(M).$$

Действительно, составляющая поля $\vec{H} = h_1 \vec{h}_1 + h_2 \vec{h}_2$ в касательном пространстве многообразия M равна $h_1 e_1 + h_2 e_2$. Чтобы найти составляющую

поля $\vec{H}$ в слое, вычислим производные $\vec{H}h_i$ двумя разными способами:

$$\begin{aligned}\vec{H}h_1 &= (h_1\vec{h}_1 + h_2\vec{h}_2)h_1 = h_2(\vec{h}_2h_1) = h_2\{h_2, h_1\} = h_2(-c_1h_1 - c_2h_2), \\ \vec{H}h_1 &= \vec{H}\cos\varphi = -\sin\varphi(\vec{H}\varphi) = -h_2(\vec{H}\varphi),\end{aligned}$$

аналогично

$$\vec{H}h_2 = h_1(c_1h_1 + c_2h_2) = h_1(\vec{H}\varphi),$$

поэтому

$$\vec{H}\varphi = c_1h_1 + c_2h_2.$$

Следовательно,

$$\vec{H} = h_1e_1 + h_2e_2 + (c_1h_1 + c_2h_2)\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

и равенство (24.4) доказано. Отсюда равенство (24.5) получается непосредственным дифференцированием.

Заметим, что с помощью разложений (24.4), (24.5) можно легко вычислить гауссову кривизну k риманова многообразия M по формуле теоремы 23.1:

$$\left[\vec{H}, \left[\vec{H}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\right] = -k\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Так как

$$[\vec{H}, \vec{H}'] = (c_1^2 + c_2^2 - e_1c_2 + e_2c_1)\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

получаем

$$k = -c_1^2 - c_2^2 + e_1c_2 - e_2c_1. \quad (24.6)$$

Свойства (1) и (2) горизонтального распределения D на $\mathcal{H}$, задающего связность Леви-Чивита, означают, что $\vec{H} \in D$ и $e_*^{s\frac{\partial}{\partial\varphi}}D = D$, поэтому

$$D = \text{span} \left\{ e_*^{s\frac{\partial}{\partial\varphi}}\vec{H} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Так как

$$e_*^{s\frac{\partial}{\partial\varphi}}\vec{H} = h_1(\varphi - s) \left(e_1 + c_1\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) + h_2(\varphi - s) \left(e_2 + c_2\frac{\partial}{\partial\varphi} \right),$$

получаем

$$D = \text{span} \left(\vec{H}, \vec{H}' \right).$$

1-форма связности D :

$$\omega \in \Lambda^1(\mathcal{H}), \quad D = \text{Ker } \omega,$$

имеет вид

$$\omega = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 - d\varphi,$$

где (ω_1, ω_2) — двойственный корепер к (e_1, e_2) :

$$\omega_i \in \Lambda^1(M), \quad \langle \omega_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

24.3 Допустимые скорости

Вернемся к задаче о качении тел и запишем условия допустимости (24.1), (24.2) для кривой $q(t) \in Q$ как ограничения на скорость $\dot{q}(t)$. Разложим скорости кривых контакта в M и $\widehat{M}$ в ортонормированных реперах:

$$\dot{x} = a_1 e_1(x) + a_2 e_2(x), \quad (24.7)$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{a}_1 \hat{e}_1(\hat{x}) + \hat{a}_2 \hat{e}_2(\hat{x}). \quad (24.8)$$

Тогда условие непроскальзывания (24.1) принимает форму:

$$\hat{a}_1 = a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta, \quad \hat{a}_2 = a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta. \quad (24.9)$$

Рассмотрим условие непрокручивания (24.2). Обозначим структурные константы в реперах:

$$[e_1, e_2] = c_1 e_1 + c_2 e_2, \quad c_i \in C^\infty(M),$$

$$[\hat{e}_1, \hat{e}_2] = \hat{c}_1 \hat{e}_1 + \hat{c}_2 \hat{e}_2, \quad \hat{c}_i \in C^\infty(\widehat{M}).$$

Пусть $\tilde{q} : T_x^* M \rightarrow T_{\hat{x}}^* \widehat{M}$ есть отображение, индуцированное изометрией q благодаря отождествлению касательных и кокасательных пространств:

$$\tilde{q} \omega_1 = \cos \theta \hat{\omega}_1 + \sin \theta \hat{\omega}_2,$$

$$\tilde{q} \omega_2 = -\sin \theta \hat{\omega}_1 + \cos \theta \hat{\omega}_2.$$

В кокасательном расслоении условие непрокручивания означает, что если

$$\lambda(t) = (x(t), \varphi(t)) \in \mathcal{H}$$

есть параллельное ковекторное поле вдоль кривой $x(t) \in M$, то

$$\hat{\lambda}(t) = \tilde{q}(t) \lambda(t) = (\hat{x}(t), \hat{\varphi}(t)) \in \hat{\mathcal{H}}$$

есть параллельное ковекторное поле вдоль кривой $\hat{x}(t) \in \widehat{M}$.

В силу того, что изометрия $q(t)$ поворачивает касательные пространства на угол $\theta(t)$, отображение $\tilde{q}(t)$ поворачивает кокасательные пространства на тот же угол: $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t) + \theta(t)$, поэтому

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\hat{\varphi}}(t) - \dot{\varphi}(t). \quad (24.10)$$

Ковекторное поле $\lambda(t)$ параллельно вдоль кривой на базе $x(t)$ тогда и только тогда, когда $\dot{\lambda} \in \text{Ker } \omega$, то есть

$$\dot{\varphi} = \langle c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2, \dot{x} \rangle = c_1 a_1 + c_2 a_2.$$

Аналогично, $\hat{\lambda}(t)$ параллельно вдоль $\hat{x}(t)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\varphi}} &= \langle \hat{c}_1 \hat{\omega}_1 + \hat{c}_2 \hat{\omega}_2, \dot{\hat{x}} \rangle = \hat{c}_1 \hat{a}_1 + \hat{c}_2 \hat{a}_2 \\ &= a_1 (\hat{c}_1 \cos \theta + \hat{c}_2 \sin \theta) + a_2 (-\hat{c}_1 \sin \theta + \hat{c}_2 \cos \theta). \end{aligned}$$

Ввиду равенства (24.10), условие непрочувствования принимает форму

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \widehat{c}_1 \widehat{a}_1 + \widehat{c}_2 \widehat{a}_2 - (c_1 a_1 + c_2 a_2) \\ &= a_1(-c_1 + \widehat{c}_1 \cos \theta + \widehat{c}_2 \sin \theta) + a_2(-c_2 - \widehat{c}_1 \sin \theta + \widehat{c}_2 \cos \theta).\end{aligned}\quad (24.11)$$

Итак, условия допустимости (24.1) и (24.2) для катящихся тел определяют ограничения (24.9) и (24.11) вдоль кривых контакта (24.7), (24.8), т.е. распределение ранга два Δ на Q , порожденное локально векторными полями

$$X_1 = e_1 + \cos \theta \widehat{e}_1 + \sin \theta \widehat{e}_2 + (-c_1 + \widehat{c}_1 \cos \theta + \widehat{c}_2 \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (24.12)$$

$$X_2 = e_2 - \sin \theta \widehat{e}_1 + \cos \theta \widehat{e}_2 + (-c_2 - \widehat{c}_1 \sin \theta + \widehat{c}_2 \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (24.13)$$

Допустимые движения катящихся тел суть траектории управляемой системы

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q \in Q, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \quad (24.14)$$

24.4 Управляемость

Обозначим гауссовы кривизны римановых многообразий M и $\widehat{M}$ соответственно через k и $\widehat{k}$. Поднимем эти кривизны с M и $\widehat{M}$ на Q :

$$k(q) = k(\pi(q)), \quad \widehat{k}(q) = \widehat{k}(\widehat{\pi}(q)), \quad q \in Q.$$

Теорема 24.1. (1) *Множество достижимости O системы (24.14) из точки $q \in Q$ есть гладкое погруженное связное подмногообразие в Q размерности 2 или 5. А именно:*

$$\begin{aligned}(k - \widehat{k})|_O \equiv 0 &\Rightarrow \dim O = 2, \\ (k - \widehat{k})|_O \not\equiv 0 &\Rightarrow \dim O = 5.\end{aligned}$$

(2) *Существует инъективное соответствие между изометриями $i : M \rightarrow \widehat{M}$ и 2-мерными множествами достижимости O системы (24.14). В частности, если многообразия M и $\widehat{M}$ изометричны, то система (24.14) не является вполне управляемой.*

(3) *Предположим, что оба многообразия M и $\widehat{M}$ полны и односвязны. Тогда соответствие между изометриями $i : M \rightarrow \widehat{M}$ и 2-мерными множествами достижимости O системы (24.14) биективно. В частности, система (24.14) вполне управляема тогда и только тогда, когда многообразия M и $\widehat{M}$ неизометричны.*

Доказательство. (1) По теореме об орбите, множество достижимости симметричной системы (24.14), т.е. орбита распределения Δ , проходящая через произвольную точку $q \in Q$, есть гладкое погруженное подмногообразие в Q . Покажем, что любая орбита O распределения Δ пятимерна или двумерна.

Зафиксируем любую орбиту O и предположим сначала, что существует точка $q \in O$, в которой многообразия M и $\widehat{M}$ имеют разные гауссовы кривизны: $k(q) \neq \widehat{k}(q)$. Для того, чтобы построить репер на Q , вычислим повторные скобки Ли полей X_1, X_2 :

$$X_3 = [X_1, X_2] = c_1 X_1 + c_2 X_2 + (\widehat{k} - k) \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (24.15)$$

$$\begin{aligned} X_4 &= [X_1, X_3] \\ &= (X_1 c_1) X_1 + (X_1 c_2) X_2 + c_2 X_3 + (X_1 (\widehat{k} - k)) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\widehat{k} - k) \left[X_1, \frac{\partial}{\partial \theta} \right], \end{aligned} \quad (24.16)$$

$$\begin{aligned} X_5 &= [X_2, X_3] \\ &= (X_2 c_1) X_1 + (X_2 c_2) X_2 - c_1 X_3 + (X_2 (\widehat{k} - k)) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\widehat{k} - k) \left[X_2, \frac{\partial}{\partial \theta} \right], \end{aligned} \quad (24.17)$$

$$\left[X_1, \frac{\partial}{\partial \theta} \right] = \sin \theta \widehat{e}_1 - \cos \theta \widehat{e}_2 + (\cdots) \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (24.18)$$

$$\left[X_2, \frac{\partial}{\partial \theta} \right] = \cos \theta \widehat{e}_1 + \sin \theta \widehat{e}_2 + (\cdots) \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (24.19)$$

При вычислении скобки (24.15) было использовано выражение (24.6) гауссовой кривизны через структурные константы. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \text{Lie}(X_1, X_2)(q) &= \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)(q) = \text{span}\left(e_1, e_2, \widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)(q) \\ &= T_q Q. \end{aligned}$$

Система (24.14) имеет полный ранг в точке $q \in O$, где $k \neq \widehat{k}$, поэтому $\dim O = 5$.

С другой стороны, если $k(q) = \widehat{k}(q)$ во всех точках $q \in O$, то в силу равенства (24.15) распределение Δ интегрируемо, поэтому $\dim O = 2$.

(2) Пусть $i : M \rightarrow \widehat{M}$ есть изометрия. Ее график

$$\Gamma = \left\{ q \in Q \mid q = i_{*x} : T_x M \rightarrow T_{\widehat{x}} \widehat{M}, \quad x \in M, \quad \widehat{x} = i(x) \in \widehat{M} \right\}$$

есть гладкое двумерное подмногообразие в Q . Докажем, что Γ — орбита Δ . Локально выберем ортонормированный репер e_1, e_2 в M и возьмем соответствующий ортонормированный репер $\widehat{e}_1 = i_* e_1, \widehat{e}_2 = i_* e_2$ в $\widehat{M}$. Тогда $\theta|_{\Gamma} = 0$. Так как $\widehat{c}_1 = c_1, \widehat{c}_2 = c_2$ и $k(q) = \widehat{k}(q)$, ограничения полей X_1, X_2 имеют вид

$$X_1|_{\Gamma} = e_1 + \widehat{e}_1, \quad X_2|_{\Gamma} = e_2 + \widehat{e}_2.$$

Поэтому поля X_1, X_2 касаются Γ . Из скобки Ли (24.15) получаем

$$[X_1, X_2]|_{\Gamma} = c_1 X_1 + c_2 X_2,$$

поэтому Γ есть орбита Δ . Разные изометрии $i_1 \neq i_2$ имеют разные графики $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, т.е. соответствие между изометриями и двумерными орбитами инъективно.

(3) Теперь предположим, что многообразия M и $\widehat{M}$ полны и односвязны. Пусть O — двумерная орбита Δ . Построим изометрию $i : M \rightarrow \widehat{M}$ с графиком O .

Заметим прежде всего, что для любой липшицевой кривой $x(t) \in M$, $t \in [0, t_1]$, и любой точки $q_0 \in Q$ существует такая траектория $q(t)$ системы (24.14), что $\pi(q(t)) = x(t)$ и $q(0) = q_0$. Действительно, липшицева кривая $x(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть траектория неавтономного дифференциального уравнения $\dot{x} = u_1(t)e_1(x) + u_2(t)e_2(x)$ для некоторых $u_i \in L_\infty[0, t_1]$. Поднимем эти уравнения на Q :

$$\dot{q} = u_1(t)X_1(q) + u_2(t)X_2(q), \quad q(0) = q_0. \quad (24.20)$$

Покажем, что решение этой задачи Коши определено на всем отрезке $[0, t_1]$. Обозначим через R риманову длину кривой $x(t)$, а через $B(x_0, 2R) \subset M$ замкнутый риманов шар радиуса $2R$ с центром x_0 . Кривая $x(t)$ содержится в $B(x_0, 2R)$ и не пересекается с его границей. Заметим, что шар $B(x_0, 2R)$ есть замкнутое ограниченное подмногообразие полного пространства M , поэтому он компактен. Проекция $\widehat{x}(t) \in \widehat{M}$ максимального решения $q(t)$ задачи Коши (24.20) имеет риманову длину не больше R , поэтому она содержится в компакте $B(\widehat{x}_0, 2R) \subset \widehat{M}$, $\widehat{x}_0 = \widehat{\pi}(q_0)$, и не пересекается с его границей. Итак, максимальное решение $q(t)$ задачи (24.20) содержится в компакте $K = B(x_0, 2R) \times B(\widehat{x}_0, 2R) \times S^1$ и не выходит на его границу. Поэтому максимальное решение $q(t)$ определено на всем отрезке $[0, t_1]$.

Теперь легко видеть, что $\pi(O) = M$ для двумерной орбиты O . Действительно, пусть $q_0 \in O$, тогда $x_0 = \pi(q_0) \in \pi(O)$. Возьмем любую точку $x_1 \in M$ и соединим ее с x_0 липшицевой кривой $x(t)$, $t \in [0, t_1]$. Пусть $q(t)$ есть подъем кривой $x(t)$ на орбиту O с начальным условием $q(0) = q_0$. Тогда $q(t_1) \in O$ и $x_1 = \pi(q(t_1)) \in \pi(O)$. Поэтому $\pi(O) = M$. Аналогично $\widehat{\pi}(O) = \widehat{M}$.

Проекции

$$\pi : O \rightarrow M \quad \text{и} \quad \widehat{\pi} : O \rightarrow \widehat{M} \quad (24.21)$$

суть локальные диффеоморфизмы, так как

$$\begin{aligned} \pi_*(X_1) &= e_1, & \widehat{\pi}_*(X_1) &= \cos \theta \widehat{e}_1 + \sin \theta \widehat{e}_2, \\ \pi_*(X_2) &= e_2, & \widehat{\pi}_*(X_2) &= -\sin \theta \widehat{e}_1 + \cos \theta \widehat{e}_2. \end{aligned}$$

Более того, можно показать, что проекции (24.21) суть глобальные диффеоморфизмы. Действительно, пусть $q \in O$. Любая липшицева кривая $x(\cdot)$ на M , выходящая из $\pi(q)$, имеет единственный лифт на O , выходящий из q , причем этот лифт непрерывно зависит от $x(\cdot)$. Предположим, что $q' \in O$, $q' \neq q$, $\pi(q') = \pi(q)$, а $q(\cdot)$ — кривая на O , соединяющая q с q' . Стягивая замкнутую кривую $\pi(q(\cdot))$ и рассматривая ее лифт на O , получаем противоречие с локальной обратимостью $\pi|_O$. Поэтому $\pi|_O$ глобально обратимо,

следовательно, это — глобальный диффеоморфизм. То же самое справедливо для $\hat{\pi}|_O$.

Поэтому можно определить диффеоморфизм

$$i = \hat{\pi} \circ (\pi|_O)^{-1} : M \rightarrow \widehat{M}.$$

Так как

$$\begin{aligned} i_* e_1 &= \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2, \\ i_* e_2 &= -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2, \end{aligned}$$

отображение i есть изометрия.

Если многообразия M и $\widehat{M}$ неизометричны, то все множества достижимости системы (24.14) пятимерны, следовательно, это открытые подмножества в Q . Но многообразие Q связно, поэтому оно совпадает с единственной орбитой. $\square$

24.5 Задача минимизации длины

24.5.1 Постановка задачи

Предположим, что $k(x) \neq \hat{k}(\hat{x})$ для любых $x \in M$, $\hat{x} \in \widehat{M}$, т.е. $k - \hat{k} \neq 0$ на Q . Тогда в силу пункта (1) теоремы 24.1 система (24.14) вполне управляема. Рассмотрим следующую задачу оптимизации: для любых двух заданных конфигураций контакта системы твердых тел, найти допустимое движение, переводящее первую конфигурацию во вторую, и такую, чтобы траектория точки контакта в M (или, что эквивалентно, в $\widehat{M}$) была кратчайшей. Эту геометрическую задачу можно сформулировать как задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, & q &\in Q, & u &= (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, & t_1 &\text{закреплено,} \\ l &= \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} dt \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (24.22)$$

Отметим, что проекции уравнений (24.22) на M и $\widehat{M}$ имеют соответственно вид

$$\dot{x} = u_1 e_1 + u_2 e_2, \quad x \in M,$$

и

$$\dot{\hat{x}} = u_1 (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) + u_2 (-\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2), \quad \hat{x} \in \widehat{M},$$

поэтому субриманова длина l кривой $q(t)$ равна римановой длине каждой из кривых $x(t)$ и $\hat{x}(t)$.

Как обычно, заменяем длину l функционалом действия:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min,$$

и ограничимся кривыми постоянной скорости:

$$u_1^2 + u_2^2 \equiv \text{const} \neq 0.$$

24.5.2 Принцип максимума

Как показано при доказательстве теоремы 24.1, векторные поля $X_1, \dots, X_5$ образуют репер на Q , см. (24.15)–(24.17). Обозначим соответствующие линейные на слоях в T^*Q гамильтонианы:

$$g_i(\mu) = \langle \mu, X_i \rangle, \quad \mu \in T^*Q, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Тогда гамильтониан принципа максимума имеет вид

$$g_u^\nu(\mu) = u_1 g_1(\mu) + u_2 g_2(\mu) + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2),$$

а соответствующая гамильтонова система записывается как

$$\dot{\mu} = u_1 \vec{g}_1(\mu) + u_2 \vec{g}_2(\mu), \quad \mu \in T^*Q. \quad (24.23)$$

24.5.3 Анормальные экстремали

Пусть $\nu = 0$. Из условия максимума ПМП следует, что

$$g_1(\mu_t) = g_2(\mu_t) \equiv 0 \quad (24.24)$$

вдоль анормальных экстремалей. Дифференцируя эти равенства в силу гамильтоновой системы (24.23), получаем еще одно тождество:

$$g_3(\mu_t) \equiv 0. \quad (24.25)$$

Еще одно дифференцирование в силу (24.23) дает равенство, содержащее управления:

$$u_1(t)g_4(\mu_t) + u_2(t)g_5(\mu_t) \equiv 0. \quad (24.26)$$

Естественно ожидать, что условия (24.23)–(24.26) на анормальные экстремали в Q должны проецироваться в некоторые естественные геометрические условия на M и $\widehat{M}$. Это действительно так, и сейчас мы выведем дифференциальные уравнения для проекций анормальных экстремалей на M и $\widehat{M}$.

В соответствии с разложением касательных пространств

$$T_q Q = T_x M \oplus T_{\widehat{x}} \widehat{M} \oplus T_\theta S^1,$$

получаем разложение кокасательных пространств:

$$T_q^* Q = T_x^* M \oplus T_{\widehat{x}}^* \widehat{M} \oplus T_\theta^* S^1,$$

$$\mu = \lambda + \widehat{\lambda} + \alpha d\theta, \quad \mu \in T_q^* Q, \quad \lambda \in T_x^* M, \quad \widehat{\lambda} \in T_{\widehat{x}}^* \widehat{M}, \quad \alpha d\theta \in T_\theta^* S^1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g_1(\mu) &= \langle \mu, X_1 \rangle = \left\langle \lambda + \hat{\lambda} + \alpha d\theta, e_1 + \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2 + b_1 \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= h_1(\lambda) + \cos \theta \hat{h}_1(\hat{\lambda}) + \sin \theta \hat{h}_2(\hat{\lambda}) + \alpha b_1, \end{aligned} \quad (24.27)$$

$$\begin{aligned} g_2(\mu) &= \langle \mu, X_2 \rangle = \left\langle \lambda + \hat{\lambda} + \alpha d\theta, e_2 - \sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2 + b_2 \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= h_2(\lambda) - \sin \theta \hat{h}_1(\hat{\lambda}) + \cos \theta \hat{h}_2(\hat{\lambda}) + \alpha b_2, \end{aligned} \quad (24.28)$$

где $b_1 = -c_1 + \hat{c}_1 \cos \theta + \hat{c}_2 \sin \theta$, $b_2 = -c_2 - \hat{c}_1 \sin \theta + \hat{c}_2 \cos \theta$,

$$\begin{aligned} g_3(\mu) &= \langle \mu, X_3 \rangle = \left\langle \lambda + \hat{\lambda} + \alpha d\theta, c_1 X_1 + c_2 X_2 + (\hat{k} - k) \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= c_1 g_1(\mu) + c_2 g_2(\mu) + \alpha (\hat{k} - k). \end{aligned} \quad (24.29)$$

Тогда тождества (24.24) и (24.25) принимают форму:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ h_1 + \cos \theta \hat{h}_1 + \sin \theta \hat{h}_2 &= 0, \\ h_2 - \sin \theta \hat{h}_1 + \cos \theta \hat{h}_2 &= 0. \end{aligned}$$

При этих условиях, принимая во внимание равенства (24.16)–(24.19), получаем:

$$\begin{aligned} g_4(\mu) &= \left\langle \lambda + \hat{\lambda}, (X_1 c_1) X_1 + (X_2 c_2) X_2 + c_2 X_3 \right. \\ &\quad \left. + (X_1 (\hat{k} - k)) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\hat{k} - k) \left[X_1, \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\rangle \\ &= (\hat{k} - k) (\sin \theta \hat{h}_1 - \cos \theta \hat{h}_2) = (\hat{k} - k) h_2, \\ g_5(\mu) &= \left\langle \lambda + \hat{\lambda}, (X_2 c_1) X_1 + (X_2 c_2) X_2 - c_1 X_3 + \right. \\ &\quad \left. (X_2 (\hat{k} - k)) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\hat{k} - k) \left[X_2, \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\rangle \\ &= (\hat{k} - k) (\cos \theta \hat{h}_1 + \sin \theta \hat{h}_2) = -(\hat{k} - k) h_1. \end{aligned}$$

Тогда из тождества (24.26) следует, что

$$u_1 h_2 - u_2 h_1 = 0.$$

Поэтому, с точностью до перепараметризации времени, аномальные управления удовлетворяют следующим равенствам:

$$u_1 = h_1(\lambda), \quad u_2 = h_2(\lambda). \quad (24.30)$$

Для того, чтобы записать проекции гамильтоновой системы (24.23) на T^*M и $T^*\widehat{M}$, разложим гамильтоновы поля $\vec{g}_1, \vec{g}_2$. Учитывая равенства (24.27), (24.28), получаем

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= \vec{h}_1 + \cos \theta \vec{\hat{h}}_1 + \sin \theta \vec{\hat{h}}_2 + (-\sin \theta \hat{h}_1 + \cos \theta \hat{h}_2) \vec{\theta} + \alpha \vec{a}_1 + a_1 \vec{\alpha}, \\ \vec{g}_2 &= \vec{h}_2 - \sin \theta \vec{\hat{h}}_1 + \cos \theta \vec{\hat{h}}_2 + (-\cos \theta \hat{h}_1 - \sin \theta \hat{h}_2) \vec{\theta} + \alpha \vec{a}_2 + a_2 \vec{\alpha}.\end{aligned}$$

Отсюда легко следует, что $\vec{\theta} = -\frac{\partial}{\partial \alpha}$. Так как $\alpha = 0$ вдоль аномальных экстремалей, проекция на T^*M системы (24.23) с управлениями (24.30) имеет вид

$$\dot{\lambda} = h_1 \vec{h}_1 + h_2 \vec{h}_2 = \vec{H}, \quad H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2).$$

Следовательно, проекции $x(t) = \pi(q(t))$ суть римановы геодезические на M .

Аналогично, для проекций на $\widehat{M}$ получаем равенства

$$u_1 = -\cos \theta \hat{h}_1 - \sin \theta \hat{h}_2, \quad u_2 = \sin \theta \hat{h}_1 - \cos \theta \hat{h}_2,$$

поэтому

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\lambda}} &= \left(-\cos \theta \hat{h}_1 - \sin \theta \hat{h}_2\right) \left(\cos \theta \vec{\hat{h}}_1 + \sin \theta \vec{\hat{h}}_2\right) \\ &\quad + \left(\sin \theta \hat{h}_1 - \cos \theta \hat{h}_2\right) \left(-\sin \theta \vec{\hat{h}}_1 + \cos \theta \vec{\hat{h}}_2\right) \\ &= -\hat{h}_1 \vec{\hat{h}}_1 - \hat{h}_2 \vec{\hat{h}}_2 = -\vec{\hat{H}}, \quad \hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{h}_1^2 + \hat{h}_2^2),\end{aligned}$$

т.е. проекции $\hat{x}(t) = \hat{\pi}(q(t))$ суть геодезические в $\widehat{M}$.

Доказано следующее утверждение.

Предложение 24.1. *Проекции аномальных экстремальных кривых $x(t) = \pi(q(t))$ и $\hat{x}(t) = \hat{\pi}(q(t))$ суть римановы геодезические соответственно в M и $\widehat{M}$.*

Аномальные субримановы геодезические $q(t)$ оптимальны на отрезках $[0, \tau]$, на которых хотя бы одна из римановых геодезических $x(t), \hat{x}(t)$ является минималью длины. В частности, малые дуги аномальных геодезических $q(t)$ оптимальны.

24.5.4 Нормальные экстремали

Пусть $\nu = -1$. Нормальные экстремальные управления определяются из условия максимума ПМП:

$$u_1 = g_1, \quad u_2 = g_2,$$

и нормальные экстремали суть траектории гамильтоновой системы

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \vec{G}(\mu), \quad \mu \in T^*Q, \\ G &= \frac{1}{2}(g_1^2 + g_2^2).\end{aligned}\tag{24.31}$$

Максимизированный гамильтониан G гладок, поэтому малые дуги нормальных экстремальных траекторий оптимальны.

Рассмотрим случай, когда одна из катящихся поверхностей есть плоскость: $\widehat{M} = \mathbb{R}^2$. В этом случае нормальная гамильтонова система (24.31) упрощается. Выберем следующий репер на Q :

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_2, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad Y_4 = [Y_1, Y_3], \quad Y_5 = [Y_2, Y_3],$$

и введем соответствующие линейные на слоях гамильтонианы

$$m_i(\mu) = \langle \mu, Y_i \rangle, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Учитывая, что $\widehat{c}_1 = \widehat{c}_2 = \widehat{k} = 0$, вычислим скобки Ли в этом репере:

$$\begin{aligned}[Y_1, Y_2] &= c_1 Y_1 + c_2 Y_2 - k Y_3, \\ [Y_1, Y_4] &= -c_1 Y_5, & [Y_2, Y_4] &= -c_2 Y_5, \\ [Y_1, Y_5] &= c_1 Y_4, & [Y_2, Y_5] &= c_2 Y_4.\end{aligned}$$

Тогда нормальная гамильтонова система (24.31) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{m}_1 &= -m_2(c_1 m_1 + c_2 m_2 - k m_3), \\ \dot{m}_2 &= m_1(c_1 m_1 + c_2 m_2 - k m_3), \\ \dot{m}_3 &= m_1 m_4 + m_2 m_5, \\ \dot{m}_4 &= -(c_1 m_1 + c_2 m_2) m_5, \\ \dot{m}_5 &= (c_1 m_1 + c_2 m_2) m_4, \\ \dot{q} &= m_1 X_1 + m_2 X_2.\end{aligned}$$

Отметим, что вдобавок к гамильтониану $G = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2)$, эта система имеет еще один интеграл: $\rho = (m_4^2 + m_5^2)^{1/2}$. Введем координаты на поверхности уровня $G = \frac{1}{2}$:

$$m_1 = \cos \gamma, \quad m_2 = \sin \gamma, \quad m_3 = m, \quad m_4 = \rho \cos(\gamma + \psi), \quad m_5 = \rho \sin(\gamma + \psi).$$

Тогда гамильтонова система еще более упрощается:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= c_1 \cos \gamma + c_2 \sin \gamma - k m, \\ \dot{m} &= \rho \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= k m, \\ \dot{q} &= \cos \gamma X_1 + \sin \gamma X_2.\end{aligned}$$

Случай $k = \text{const}$, т.е. качение сферы по плоскости, вполне интегрируем. Эта задача подробно изучена в книге [12].

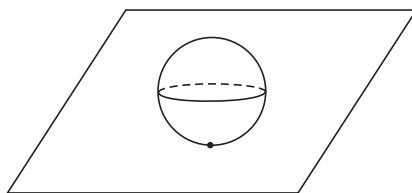


Рис. 24.3: Сфера на плоскости

Приложение А

В этом приложении мы докажем несколько технических предложений из главы 2.

А.1 Гомоморфизмы и операторы в $C^\infty(M)$

Лемма А.1. *На любом гладком многообразии M существует такая функция $a \in C^\infty(M)$, что для любого $N > 0$ существует компакт $K \Subset M$, для которого*

$$a(q) > N \quad \forall q \in M \setminus K.$$

Доказательство. Пусть e_k , $k \in \mathbb{N}$, есть разбиение единицы на M : функции $e_k \in C^\infty(M)$ имеют компактные носители $\text{supp } e_k \Subset M$, образующие локально конечное покрытие M , и $\sum_{k=1}^\infty e_k \equiv 1$. Тогда функцию $\sum_{k=1}^\infty k e_k$ можно взять в качестве a . $\square$

Напомним и докажем предложение 2.1.

Предложение 2.1. *Пусть $\varphi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ — нетривиальный гомоморфизм алгебр. Тогда существует такая точка $q \in M$, что $\varphi = \hat{q}$.*

Доказательство. Возьмем гомоморфизм $\varphi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда множество

$$\text{Ker } \varphi = \{f \in C^\infty(M) \mid \varphi f = 0\}$$

есть максимальный идеал в $C^\infty(M)$. Далее, для любой точки $q \in M$ множество функций

$$I_q = \{f \in C^\infty(M) \mid f(q) = 0\}$$

есть идеал в $C^\infty(M)$. Для того, чтобы доказать данное предложение, покажем, что

$$\text{Ker } \varphi \subset I_q \tag{А.1}$$

для некоторой точки $q \in M$. Тогда $\text{Ker } \varphi = I_q$ и $\varphi = \hat{q}$.

От противного, предположим, что $\text{Ker } \varphi \not\subset I_q$ для любой точки $q \in M$. Это значит, что

$$\forall q \in M \quad \exists b_q \in \text{Ker } \varphi \quad \text{т. ч.} \quad b_q(q) \neq 0.$$

Изменяя, если необходимо, знак b_q , получаем, что

$$\forall q \in M \quad \exists b_q \in \text{Ker } \varphi, \quad O_q \subset M \quad \text{т. ч.} \quad b_q|_{O_q} > 0. \quad (\text{A.2})$$

Зафиксируем функцию a , существующую по лемме А.1. Обозначим $\varphi(a) = \alpha$, тогда $\varphi(a - \alpha) = 0$, то есть

$$(a - \alpha) \in \text{Ker } \varphi.$$

Более того,

$$\exists K \Subset M \quad \text{т. ч.} \quad a(q) - \alpha > 0 \quad \forall q \in M \setminus K.$$

Выберем конечное покрытие компакта K окрестностями O_q , как в (А.2):

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n O_{q_i},$$

и пусть $e_0, e_1, \dots, e_n \in C^\infty(M)$ есть разбиение единицы, подчиненное следующему покрытию многообразия M :

$$M \setminus K, O_{q_1}, \dots, O_{q_n}.$$

Построим функцию, определенную глобально на M :

$$c = e_0(a - \alpha) + \sum_{i=1}^n e_i b_{q_i} > 0.$$

Та как

$$1 = \varphi\left(c \cdot \frac{1}{c}\right) = \varphi(c) \cdot \varphi\left(\frac{1}{c}\right),$$

имеем

$$\varphi(c) \neq 0.$$

Но $c \in \text{Ker } \varphi$, противоречие. Включение (А.1) доказано, так же как и данное предложение. $\square$

Теперь сформулируем и докажем теорему о свойствах регулярности для композиции операторов на $C^\infty(M)$, в частности, для неавтономных векторных полей или потоков на M .

Предложение А.1. Пусть A_t и B_t — непрерывные по t семейства линейных непрерывных операторов на $C^\infty(M)$. Тогда композиция $A_t \circ B_t$ также непрерывна по t . Если вдобавок семейства A_t и B_t дифференцируемы при $t = t_0$, то семейство $A_t \circ B_t$ также дифференцируемо при $t = t_0$, и его производная удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} (A_t \circ B_t) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} A_t \right) \circ B_{t_0} + A_{t_0} \circ \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} B_t \right).$$

Доказательство. Для доказательства непрерывности необходимо показать, что для любой функции $a \in C^\infty(M)$ следующее выражение стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$(A_{t+\varepsilon} \circ B_{t+\varepsilon} - A_t \circ B_t) a = A_{t+\varepsilon} \circ (B_{t+\varepsilon} - B_t) a + (A_{t+\varepsilon} - A_t) \circ B_t a.$$

В силу непрерывности семейства A_t , второе слагаемое $(A_{t+\varepsilon} - A_t) \circ B_t a \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как семейство B_t непрерывно, множество функций $(B_{t+\varepsilon} - B_t) a$ лежит в любой заранее выбранной окрестности нуля в $C^\infty(M)$ для достаточно малого ε . Для любого $\varepsilon_0 > 0$, семейство $A_{t+\varepsilon}$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, локально ограничено, поэтому равномерно непрерывно по теореме Банаха-Штейнгауза. Следовательно, $A_{t+\varepsilon} \circ (B_{t+\varepsilon} - B_t) a \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Непрерывность семейства $A_t \circ B_t$ доказана.

Дифференцируемость и правило Лейбница доказываются аналогично с помощью разложения

$$\frac{1}{\varepsilon} (A_{t+\varepsilon} \circ B_{t+\varepsilon} - A_t \circ B_t) a = A_{t+\varepsilon} \circ \frac{1}{\varepsilon} (B_{t+\varepsilon} - B_t) a + \frac{1}{\varepsilon} (A_{t+\varepsilon} - A_t) \circ B_t a.$$

□

А.2 Остаточный член хронологической экспоненты

Докажем оценку (2.13) остаточного члена для хронологической экспоненты.

Лемма А.2. Для любых $t_1 > 0$, полного неавтономного векторного поля V_t , компакта $K \Subset M$ и целого числа $s \geq 0$, существуют $C > 0$ и компакт $K' \Subset M$, $K \subset K'$, для которых

$$\|P_t a\|_{s,K} \leq C e^{C \int_0^t \|V_\tau\|_{s,K'} d\tau} \|a\|_{s,K'}, \quad a \in C^\infty(M), \quad t \in [0, t_1], \quad (\text{А.3})$$

где

$$P_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t V_\tau d\tau.$$

Доказательство. Обозначим компактное множество

$$K_t = \cup \{P_\tau(K) \mid \tau \in [0, t]\}$$

и введем функцию

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \sup \left\{ \frac{\|P_t a\|_{s,K}}{\|a\|_{s+1,K_t}} \mid a \in C^\infty(M), \|a\|_{s+1,K_t} \neq 0 \right\} \\ &= \sup \{ \|P_t a\|_{s,K} \mid a \in C^\infty(M), \|a\|_{s+1,K_t} = 1 \}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Заметим, что функция $\alpha(t)$, $t \in [0, t_1]$, измерима, т.к. верхнюю грань в правой части (A.4) можно брать по любому счетному всюду плотному подмножеству $C^\infty(M)$. Более того, ввиду неравенств (2.3) и

$$\|a\|_{s,P_t(K)} \leq \|a\|_{s+1,K_t},$$

функция $\alpha(t)$ ограничена на отрезке $[0, t_1]$.

Так же как при определении полунорм $\|\cdot\|_{s,K}$ в разделе 2.2, зафиксируем собственное вложение $M \subset \mathbb{R}^N$ и векторные поля $h_1, \dots, h_N \in \text{Vec } M$, порождающие касательные пространства к M .

Пусть $q_0 \in K$ — точка, в которой

$$\|P_t a\|_{s,K} = \sup \{ |h_{i_1} \circ \dots \circ h_{i_l}(P_t a)(q)| \mid q \in K, 1 \leq i_1, \dots, i_l \leq N, 1 \leq l \leq s \}$$

достигает своей верхней грани, и пусть $p_a = p_a(x_1, \dots, x_N)$ есть многочлен степени $\leq s$, производные которого порядка не выше s в точке $q_t = P_t(q_0)$ совпадают с соответствующими производными a в q_t . Тогда

$$\begin{aligned}\|P_t a\|_{s,K} &= |h_{i_1} \circ \dots \circ h_{i_l}(P_t p_a)(q_0)| \leq \|P_t p_a\|_{s,K}, \\ \|p_a\|_{s,q_t} &\leq \|a\|_{s,K_t}.\end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

В конечномерном пространстве всех вещественных многочленов степени $\leq s$ все нормы эквивалентны, поэтому существует константа $C > 0$, не зависящая от выбора многочлена p степени $\leq s$, для которой

$$\frac{\|p\|_{s,K_t}}{\|p\|_{s,q_t}} \leq C. \quad (\text{A.6})$$

Из неравенств (A.5) и (A.6) получаем оценку

$$\frac{\|P_t a\|_{s,K}}{\|a\|_{s,K_t}} \leq \frac{\|P_t p_a\|_{s,K}}{\|p_a\|_{s,q_t}} \leq C \frac{\|P_t p_a\|_{s,K}}{\|p_a\|_{s,K_t}} = C \frac{\|P_t p_a\|_{s,K}}{\|p_a\|_{s+1,K_t}} \leq C \alpha(t). \quad (\text{A.7})$$

Так как

$$P_t a = a + \int_0^t P_\tau \circ V_\tau a \, d\tau,$$

имеем

$$\|P_t a\|_{s,K} \leq \|a\|_{s,K} + \int_0^t \|P_\tau \circ V_\tau a\|_{s,K} \, d\tau$$

по неравенству (А.7) и определению (2.2)

$$\leq \|a\|_{s,K} + C \|a\|_{s+1,K_t} \int_0^t \alpha(\tau) \|V_\tau\|_{s,K_t} d\tau.$$

Разделив на $\|a\|_{s+1,K_t}$, получаем

$$\frac{\|P_t a\|_{s,K}}{\|a\|_{s+1,K_t}} \leq 1 + C \int_0^t \alpha(\tau) \|V_\tau\|_{s,K_t} d\tau,$$

следовательно,

$$\alpha(t) \leq 1 + C \int_0^t \alpha(\tau) \|V_\tau\|_{s,K_t} d\tau,$$

откуда по лемме Гронуолла следует, что

$$\alpha(t) \leq e^{C \int_0^t \|V_\tau\|_{s,K_t} d\tau}.$$

Тогда из оценки (А.7) получаем

$$\|P_t a\|_{s,K} \leq C e^{C \int_0^t \|V_\tau\|_{s,K_t} d\tau} \|a\|_{s,K_t},$$

и необходимое неравенство (А.3) доказано для любого компакта $K' \supset K_t$. $\square$

Теперь докажем оценку (2.13).

Доказательство. Разложение (2.11) можно переписать в виде

$$P_t = S_m(t) + \int_{\Delta_m(t)} \cdots \int P_{\tau_m} \circ V_{\tau_m} \circ \cdots \circ V_{\tau_1} d\tau_m \dots d\tau_1,$$

где

$$S_m(t) = \text{Id} + \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\Delta_k(t)} \cdots \int V_{\tau_k} \circ \cdots \circ V_{\tau_1} d\tau_k \dots d\tau_1.$$

Тогда

$$\|(P_t - S_m(t))a\|_{s,K} \leq \int_{\Delta_m(t)} \cdots \int \|P_{\tau_m} \circ V_{\tau_m} \circ \cdots \circ V_{\tau_1} a\|_{s,K} d\tau_m \dots d\tau_1$$

по лемме А.2

$$\leq C e^{C \int_0^t \|V_\tau\|_{s,K'} d\tau} \int_{\Delta_m(t)} \cdots \int \|V_{\tau_m} \circ \cdots \circ V_{\tau_1} a\|_{s,K'} d\tau_m \dots d\tau_1.$$

Оценим последний интеграл. По определению полунорм (2.2),

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta_m(t)} \cdots \int \|V_{\tau_m} \circ \cdots \circ V_{\tau_1} a\|_{s,K'} d\tau_m \cdots d\tau_1 \\
& \leq \int_{\Delta_m(t)} \cdots \int \|V_{\tau_m}\|_{s,K'} \|V_{\tau_{m-1}}\|_{s+1,K'} \cdots \|V_{\tau_1}\|_{s+m-1,K'} \|a\|_{s+m,K'} d\tau_m \cdots d\tau_1 \\
& \leq \|a\|_{s+m,K'} \\
& \quad \int_{\Delta_m(t)} \cdots \int \|V_{\tau_m}\|_{s+m-1,K'} \|V_{\tau_{m-1}}\|_{s+m-1,K'} \cdots \|V_{\tau_1}\|_{s+m-1,K'} d\tau_m \cdots d\tau_1 \\
& = \|a\|_{s+m,K'} \frac{1}{m!} \left(\int_0^t \|V_\tau\|_{s+m-1,K'} d\tau \right)^m,
\end{aligned}$$

и оценка (2.13) доказана:

$$\|(P_t - S_m(t)) a\|_{s,K} \leq \frac{C}{m!} e^{C \int_0^t \|V_\tau\|_{s,K'} d\tau} \left(\int_0^t \|V_\tau\|_{s+m-1,K'} d\tau \right)^m \|a\|_{s+m,K'}.$$

□

Библиография¹

Книги по теории управления и неголономной геометрии

- [1] В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин, *Оптимальное управление*. – М.: Наука, 1979.
- [2] A. Bellaïche, J. Risler, Eds., Sub-Riemannian geometry. Birkhäuser, Progress in Math., 1996, v.144
- [3] Р. Беллман, *Динамическое программирование*. – М.: ИЛ, 1960.
- [4] A. Bloch, *Nonholonomic Mechanics and Control*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Volume 24, Springer, 2003.
- [5] U. Boscain, B. Piccoli, Optimal synthesis for control systems on 2-D manifolds. Springer SMAI, v.43, to appear
- [6] R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussmann, Eds., Differential geometric control theory. Birkhäuser Boston, 1983
- [7] A. A. Davydov, Qualitative theory of control systems. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1994.
- [8] Р.В. Гамкрелидзе, *Основы оптимального управления*. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975.
- [9] J.-P. Gauthier, I. A. K. Kupka, *Deterministic observation theory and applications*, Cambridge University Press, 2001.
- [10] A. Isidori, *Nonlinear control systems: an introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- [11] B. Jakubczyk, W. Respondek, Eds., Geometry of feedback and optimal control. Marcel Dekker, 1998

¹Библиография содержит как работы, упомянутые в тексте, так и некоторые другие работы, полезные для более глубокого ознакомления с предметом; она не претендует ни на полноту, ни на систематичность.

- [12] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [13] R. Montgomery, A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. AMS, 2002, 259pp.
- [14] H. Nijmeijer, A. van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [15] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкредидзе, Е.Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*. — М.: Наука, 1961.
- [16] E. D. Sontag, *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [17] H. J. Sussmann, Ed., *Nonlinear controllability and optimal control*. Marcel Dekker, 1990
- [18] M. I. Zelikin, V. F. Borisov, *Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering*, Basel: Birkhauser, 1994.

Статьи

Хронологическое исчисление и близкие вопросы

- [19] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкредидзе, Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление. Мат. сб., 1978, Т. 107(149), 467–532.
- [20] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкредидзе, Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля. Итоги науки. ВИНТИ. Проблемы геометрии, 1980, Т. 11, 135–176.
- [21] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкредидзе, Ряды Вольтерра и группы перестановок. Итоги науки. ВИНТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, 1991, Т. 39, 3–40.
- [22] A. Agrachev, R. Gamkrelidze, A. Sarychev, Local invariants of smooth control systems. Acta Appl. Math., 1989, v.14, 191–237
- [23] A. Agrachev, A. Marigo, Nonholonomic tangent spaces: intrinsic construction and rigid dimensions. Mittag Leffler Institute preprint, 2003, 12pp.
- [24] А.А. Аграчев, А.В. Сарычев, Фильтрации алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем. Докл. Акад. Наук СССР, 1987, Т. 295, 777–781.

- [25] А.А. Аграчев, С. Вахрамеев, Хронологические ряды и теорема Коши-Ковалевской. Итоги науки. ВИНТИ. Проблемы геометрии, 1981, Т. 12, 165–189.
- [26] K. T. Chen, Integration of paths, geometric invariants and a generalized Baker–Hausdorff formula. *Annals of Mathematics*, 1957, v.65, 163–178
- [27] M. Fliess, Fonctionelles causales nonlinéaires et indéterminées noncommutatives, *Bull. Soc. Math. France*, 1981, v.109, 3–40
- [28] Р.В. Гамкрелидзе, А.А. Аграчев, С. Вахрамеев, Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление. Итоги науки. ВИНТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, 1989, Т. 35, 3–107.
- [29] M. Kowski, Nilpotent Lie algebras of vector fields. *J. Reine & Angewandte Mathematic*, 1988, v.188, 1–17
- [30] M. Kowski, Combinatorics of nonlinear controllability and noncommuting flows. In: *Mathematical control theory, ICTP Lecture Notes Series*, 2002, v.8, 222–311
- [31] M. Kowski, H. J. Sussmann, Noncommutative power series and formal Lie algebraic Techniques in nonlinear control theory. In: *Operators, Systems and Linear Algebra*, U. Helmke, D. Prätzel-Wolters and E. Zers, Eds., Teubner 1997, 111–128
- [32] W. Magnus, On the exponential solution of differential equations for a linear operator. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1954, VII, 649–673
- [33] R. Ree, Lie elements and an algebra associated with shuffles. *Annals of Mathematics*, 1958, v.68, 210–220
- [34] H. J. Sussmann, A product expansion of the Chen series. In: *Theory and Applications of Nonlinear Control Systems*, C. I. Byrnes and A. Linquist, Eds., Elsevier, 1986, 323–335
- [35] A. I. Tretyak, Chronological calculus, high-order necessary conditions for optimality, and perturbation methods. *J. Dynam. Control Systems* 4 (1998), no. 1, 77–126.

Управляемость

- [36] A. Agrachev, Newton diagrams and tangent cones to attainable sets. In the book: *Analysis of Controlled Dynamical Systems*. B. Bonnard, B. Bride, J. P. Gauthier, I. Kupka, Eds. *Proc. col. Int. Lyon, France, 3-6 juillet, 1990*. Birkhauser, 1991, 11–20

- [37] A. Agrachev, Is it possible to recognize Local Controllability in a finite number of differentiations? In the book: Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Springer Verlag, London, 1999, 15–18
- [38] A. Agrachev, R. Gamkrelidze, Local controllability for families of diffeomorphisms. Systems and Control Letters, 1993, v.20, 67–76
- [39] A. Agrachev, R. Gamkrelidze, Local controllability and semigroups of diffeomorphisms. Acta Appl. Math., 1993, v.32, 1–57
- [40] A. Agrachev, A. Sarychev, The control of rotation for asymmetric rigid body. Problems of Control and Information Theory, 1983, v.12 535–547
- [41] А.А. Аграчев, А.В. Сарычев, О редукции гладкой системы, линейной по управлению, *Мат. сб.*, **130** (1986), No. 1, 18–34.
- [42] R. El Assoudi, J.P. Gauthier, and I. Kupka, “On subsemigroups of semisimple Lie groups,” *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **13**, No. 1, 117–133 (1996).
- [43] V. Ayala Bravo, “Controllability of nilpotent systems,” in: *Geometry in nonlinear control and differential inclusions*, Banach Center Publications, Warszawa, **32** (1995), pp. 35–46.
- [44] R. M. Bianchini, G. Stefani, Graded approximations and controllability along a trajectory. SIAM J. Control and Optimization, 1990, v.28, 903–924
- [45] B. Bonnard, “Contrôlabilité des systèmes bilinéaires,” *Math. Syst. Theory*, **15**, 79–92 (1981).
- [46] B. Bonnard, V. Jurdjevic, I. Kupka, and G. Sallet, “Transitivity of families of invariant vector fields on the semidirect products of Lie groups,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, **271**, No. 2, 525–535 (1982).
- [47] R. W. Brockett, “System theory on group manifolds and coset spaces,” *SIAM J. Control*, **10**, 265–284 (1972).
- [48] J.P. Gauthier and G. Bornard, “Contrôlabilité des systèmes bilinéaires,” *SIAM J. Control Optim.*, **20**, No. 3, 377–384 (1982).
- [49] J. Hilgert, K. H. Hofmann and J. D. Lawson, “Controllability of systems on a nilpotent Lie group,” *Beiträge Algebra Geometrie*, **20**, 185–190 (1985).
- [50] V. Jurdjevic and I. Kupka, “Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces,” *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble **31**, No. 4, 151–179 (1981).
- [51] V. Jurdjevic and I. Kupka, “Control systems subordinated to a group action: Accessibility,” *J. Differ. Equat.*, **39**, 186–211 (1981).

- [52] V. Jurdjevic, H. J. Sussmann, "Controllability of non-linear systems," *J. Diff. Equat.*, **12**, 95–116 (1972).
- [53] V. Jurdjevic and H. Sussmann, "Control systems on Lie groups," *J. Diff. Equat.*, **12**, 313–329 (1972).
- [54] A. Krener, "A generalization of Chow's theorem and the Bang-Bang theorem to non-linear control problems," *SIAM J. Control*, **12**, 43–51 (1974).
- [55] J. D. Lawson, "Maximal subsemigroups of Lie groups that are total," *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **30**, 479–501 (1985).
- [56] N. Levitt and H. J. Sussmann, "On controllability by means of two vector fields," *SIAM J. Control*, **13**, 1271–1281 (1975).
- [57] Yu. L. Sachkov, "Controllability of hypersurface and solvable invariant systems," *J. Dyn. Control Syst.*, **2**, No. 1, 55–67 (1996).
- [58] Yu. L. Sachkov, "Controllability of right-invariant systems on solvable Lie groups," *J. Dyn. Control Syst.*, **3**, No. 4, 531–564 (1997).
- [59] Yu. L. Sachkov, "On invariant orthants of bilinear systems," *J. Dyn. Control Syst.*, **4**, No. 1, 137–147 (1998).
- [60] Ю.Л. Сачков, Управляемость инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах, *Современная математика и ее приложения, Тематические обзоры*, Т. 59, *Динамические системы-8*, ВИНТИ, Москва, 1998.
- [61] Yu. L. Sachkov, Classification of controllable systems on low-dimensional solvable Lie groups, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6** (2000), 2: 159–217.
- [62] L. A. B. San Martin, "Invariant control sets on flag manifolds," *Math. Control Signals Systems*, **6**, 41–61 (1993).
- [63] L. A. B. San Martin and P. A. Tonelli, "Semigroup actions on homogeneous spaces," *Semigroup Forum*, **14**, 1–30 (1994).
- [64] А.В. Сарычев, Построение множеств достижимости для управления моментом вращающегося асимметрического твердого тела (особый случай). *Космические исслед.*, 1984, Т. 22, 828–841.
- [65] А.В. Сарычев, Гомотопические свойства пространства траекторий вполне не голономной дифференциальной системы. Докл. Акад. Наук СССР, 1990, Т. 314, 1336–1340.
- [66] A. V. Sarychev, Nonlinear systems with impulsive and generalized functions controls. In: "Nonlinear Synthesis", Birkhäuser, Progress in Systems and Control Theory, 1991, v.9, 244–257

- [67] H. J. Sussmann, Lie brackets and local controllability: a sufficient condition for scalar-input systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 1983, v.21, 686–713
- [68] H. J. Sussmann, A general theorem on local controllability. *SIAM J. Control and Optimization*, 1987, v.25, 158–194
- [69] H. J. Sussmann, “A general theorem on local controllability,” *SIAM J. Control Optim.*, **25**, 158–194 (1987).
- [70] А.И. Третьяк, Достаточные условия локальной управляемости и необходимые условия оптимальности высшего порядка. Дифференциально-геометрический подход. *Современная математика и ее приложения, Тематические обзоры*, Т. 24, *Динамические системы-4*, ВИНТИ, Москва, 1996.

Существование и регулярность оптимальных управлений

- [71] A. Agrachev, On regularity properties of extremal controls. *J. Dynamical and Control Systems*, 1995, v.1, 319–324
- [72] A. Agrachev, M. Sigalotti, On the local structure of optimal trajectories in $\mathbb{R}^3$. *SIAM J. on Control and Optimization* (to appear)
- [73] B. Bonnard, I. Kupka, Generic properties of singular trajectories. *Ann. Inst. H. Poincaré—Anal. Non Linéaire*, 1997, v.14, 167–186
- [74] A. Bressan, B. Piccoli, A generic classification of time optimal planar stabilizing feedback. *SIAM J. Control and Optimization*, 1998, v.36, 12–32
- [75] P. Brunowsky, Existence of regular synthesis for general problems. *J. Diff. Equations*, 1980, v.38, 317–343
- [76] A. J. Krener, H. Schättler, The structure of small-time reachable sets in low dimensions. *SIAM J. Control and Optimization*, 1989, v.27, 120–147
- [77] I. Kupka, Generalized Hamiltonians and optimal control: a geometric study of the extremals. *Proceedings ICM-86 in Berkeley*. AMS, 1987, 1189–1189
- [78] I. Kupka, Geometric theory of extremals in optimal control problems, I. The fold and Maxwell case. *Transactions of AMS*, 1987, v.299, 225–243
- [79] B. Piccoli, H. J. Sussmann, Regular Synthesis and sufficient conditions for optimality. *SIAM J. Control and Optimization*, 2000, v.39, 359–410
- [80] H. Schättler, The local structure of time optimal trajectories in dimension 3, under generic conditions. *SIAM J. Control and Optimization*, 1988, v.26, 899–918

- [81] H. J. Sussmann, Analytic stratifications and control theory. Proceedings ICM-78 in Helsinki. Acad. Sci. Fennica, 1980, 865–871
- [82] H. J. Sussmann, Envelopes, conjugate points, and bang-bang extremals. In: Algebraic and geometric methods in nonlinear control theory, Math. Appl. Reidel, Dordrecht, 1986, v.29, 325–346
- [83] H. J. Sussmann, The structure of time optimal trajectories for single-input systems in the plane. SIAM J. Control and Optimization, 1987, v.25, 433–465; 868–904
- [84] H. J. Sussmann, Regular synthesis for time optimal control of single-input real-analytic systems in the plane. SIAM J. Control and Optimization, 1987, v.25, 1145–1162

Геометрические задачи оптимального управления

- [85] A. Agrachev, Methods of control theory in nonholonomic geometry. Proceedings ICM-94 in Zürich. Birkhauser, 1995, 1473–1483
- [86] A. Agrachev, Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures. J. Dynamical and Control Systems, 1996, v.2, 321–358
- [87] A. Agrachev, Feedback-invariant optimal control theory and differential geometry, II. Jacobi curves for singular extremals. J. Dynamical and Control Systems, 1998, v.4, 583–604
- [88] A. Agrachev, On the equivalence of different types of local minima in sub-Riemannian problems. Proc. 37th IEEE Confer. on Decision and Control, 1998, 2240–2243
- [89] A. Agrachev, Compactness for sub-Riemannian length-minimizers and subanalyticity. Rend. Semin. Mat. Torino, 1998, v.56, 1–12
- [90] А.А. Аграчев, «Формула Гаусса-Бонне» для контактных субримановых многообразий. Докл. Акад. Наук России, 2001, Т. 381, 583–585.
- [91] A. Agrachev, C. El-Alaoui, J.-P. Gauthier, Sub-Riemannian metrics on R^3 . Proc. Canadian Math. Soc., 1998, v.25, 29–78
- [92] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka, Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case. J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 1997, v.2, 377–448
- [93] A. Agrachev, G. Charlot, J.-P. Gauthier, V. Zakalyukin, On sub-Riemannian caustics and wave fronts for contact distributions in the three-space. J. Dynamical and Control Systems, 2000, v.6, 365–395

- [94] A. Agrachev, R. Gamkrelidze, Feedback-invariant optimal control theory and differential geometry, I. Regular extremals. *J. Dynamical and Control Systems*, 1997, v.3, 343–389
- [95] A. Agrachev, J.-P. Gauthier, On the Dido problem and plane isoperimetric problem. *Acta Appl. Math.*, 1999, v.57, 287–338
- [96] A. Agrachev, J.-P. Gauthier, Sub-Riemannian metrics and isoperimetric problems in the contact case. *Proc. Int. Confer. Pontryagin-90*, 1999, v.3, 5–48
- [97] A. Agrachev, J.-P. Gauthier, On subanalyticity of Carnot–Caratheodory distances. *Annales de l’Institut Henri Poincaré—Analyse non linéaire*, 2001, v.18, 359–382
- [98] A. Agrachev, A. Sarychev, Strong minimality of abnormal geodesics for 2-distributions. *J. Dynamical and Control Systems*, 1995, v.1, 139–176
- [99] A. Agrachev, A. Sarychev, Abnormal sub-Riemannian geodesics: Morse index and rigidity. *Annales de l’Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire*, 1996, v.13, 635–690
- [100] A. Agrachev, A. Sarychev, Sub-Riemannian metrics: minimality of abnormal geodesics versus subanalyticity. *ESAIM: J. Control, Optimisation, and Calculus of Variations*, 1999, v.4, 377–403
- [101] A. Agrachev, I. Zelenko, Geometry of Jacobi curves, I, II. *J. Dynamical and Control Systems*, 2002, v.8, 93–140; 167–215
- [102] C. El-Alaoui, J.-P. Gauthier, I. Kupka, Small sub-Riemannian balls in $\mathbb{R}^3$. *J. Dynamical and Control Systems*, 1996, v.2, 359–421
- [103] U. Boscain, T. Chambrion, and J.-P. Gauthier, On the $K + P$ problem for a three-level quantum system: Optimality implies resonance, *J. Dynam. Control Systems*, **8** (2002), 547–572.
- [104] R. W. Brockett, *Nonlinear Control Theory and Differential Geometry*. Proceedings ICM-82 in Warsaw, Polish Scientific Publishers, 1984, 1357–1368
- [105] R. Brockett, L. Dai, Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability, In: *Nonholonomic Motion Planning*, Z. Li and J. Canny, Eds., Kluwer, Boston, 1993, 1–21.
- [106] S. Jacquet, Subanalyticity of the Sub-Riemannian Distance. *J. Dynam. Control Systems* 5 (1999), No. 3, 303–328.
- [107] W. S. Liu, H. J. Sussmann, Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-2 distributions *Memoirs of AMS*, 1995, v.118, no.569, 104pp.

- [108] А.А. Марков, Некоторые примеры решений специального класса задач на наибольшие и наименьшие количества. Сообщ. Харьковск. Мат. Общ., 1887, Т. 1, 250–276.
- [109] D. Mittenhuber, Controllability of Solvable Lie Algebras. J. Dynam. Control Systems 6 (2000), No. 3, 453–459.
- [110] D. Mittenhuber, Controllability of Systems on Solvable Lie Groups: the Generic Case. J. Dynam. Control Systems 7 (2001), No. 1, 61–75.
- [111] F. Monroy-Pérez, Non-Euclidean Dubins problem. J. Dynam. Control Systems 4 (1998), no. 2, 249–272.
- [112] O. Myasnychenko, Nilpotent $(3, 6)$ Sub-Riemannian Problem. J. Dynam. Control Systems 8 (2002), No. 4, 573–597.
- [113] Ю.Л. Сачков, Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. сб.*, **194** (2003), 9: 63–90.
- [114] Yu. L. Sachkov, Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures, *Transactions of the American Mathematical Society*, **356** (2004), 2: 457–494.
- [115] А.М. Вершик, В.Я. Гершкович, Неголономные динамические системы и геометрия распределений. – Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы – 7, 8. – М.:ВИНИТИ, 1986.
- [116] I. Zelenc, Nonregular abnormal extremals for 2-distributions: existence, second variation and rigidity. J. Dynamical and Control Systems, 1999, v.5, 347–383

Вторая вариация и близкие вопросы

- [117] А.А. Аграчев, Необходимое условие оптимальности в общем нелинейном случае. Мат. сб., 1977, Т. 102, 551–568.
- [118] А.А. Аграчев, Гомологии пересечений вещественных квадрик. Докл. Акад. Наук СССР, 1988, Т. 299, 1033–1036.
- [119] А.А. Аграчев, Квадратичные отображения в геометрической теории управления. Итоги науки. ВИНТИ. Проблемы геометрии, 1988, Т. 20, 111–205.
- [120] А.А. Аграчев, Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений. Итоги науки. ВИНТИ. Алгебра. Топология. Геометрия, 1988, Т. 26, 85–124.

- [121] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкрелидзе, Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстрогодействия. Мат. сборник, 1976, т. 100, No. 4, 610–643.
- [122] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкрелидзе, Индекс экстремальности и квазиэкстремальные управления. Докл. Акад. Наук СССР, 1985, Т. 284, 777–781.
- [123] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкрелидзе, Индекс Морса и индекс Маслова гладких управляемых систем. Докл. Акад. Наук СССР, 1986, Т. 287, 521–524.
- [124] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкрелидзе, Вычисление эйлеровой характеристики пересечений вещественных квадрик. Докл. Акад. Наук СССР, 1988, Т. 299, 11–14.
- [125] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкрелидзе, Квазиэкстремальность управляемых систем. Итоги науки. ВИНТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, 1989, Т. 35, 109–134.
- [126] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкрелидзе, Квадратичные отображения и гладкие вектор-функции: эйлерова характеристика поверхностей уровня. Итоги науки. ВИНТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, 1989, Т. 35, 179–239.
- [127] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкрелидзе, Симплектическая геометрия и необходимые условия оптимальности. Мат. сб., 1991, Т. 144, 36–54.
- [128] A. Agrachev, A. Sarychev, On abnormal extremals for Lagrange variational problems. Mathematical Systems. Estimation and Control, 1998, v.8, 87–116
- [129] А.А. Аграчев, Ж. Стефани, П. Зезза, Сильные минимумы в оптимальном управлении. Труды Математического института им. Стеклова, 1998, Т. 220, 4–22.
- [130] A. Agrachev, G. Stefani, P. Zezza, A Hamiltonian approach to strong minima in optimal control. Proc. Symp. Pure Math., AMS, 1999, v.64, 11–22
- [131] A. Agrachev, G. Stefani, P. Zezza, Strong optimality of a bang-bang trajectory. SIAM J. on Control and Optimization, 2002, v.41, 991–2014
- [132] A. Agrachev, S. Vakhrameev, Morse theory and optimal control problems. In the book: Nonlinear Synthesis. C. I. Byrnes, A. Kurzhansky, Ed. Proc. Int. Conf. Sopron, Hungary, 5–9 June, 1989. Birkhauser, 1991, 1–11
- [133] B. Bonnard, I. Kupka, Theory of the singularities of the input/output mapping and optimality of singular trajectories in the minimal-time problem. Forum Math., 1993), v.5, 111–159
- [134] A. J. Krener, The high order maximum principle and its application to singular extremals. SIAM J. Control and Optimization, 1977, v.15, 256–293

- [135] А.В. Сарычев, Устойчивость отображений гильбертовых пространств и эквивалентность управляемых систем. Мат. сб., 1980, Т. 113, 146–160.

Прочие ссылки

- [136] В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, – М.: Наука, 1989.
- [137] В.И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, – М.: Наука, 1974.
- [138] В.И. Арнольд, А.Б. Гивенталь, *Симплектическая геометрия*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985, 5–139.
- [139] J. Hale, *Ordinary differential equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., 1980.
- [140] Н. Джекобсон, *Алгебры Ли*, – М.: Мир, 1964.
- [141] Б. Мальгранж, *Идеалы дифференцируемых функций*, – М.: Мир, 1968.
- [142] Л.С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, – М.: Наука, 1984.
- [143] P. H. Rabinowitz, Periodic solutions to Hamiltonian systems, *Commun. Pure Appl. Math.*, **31**, 157–184.
- [144] Р.Т. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*. – М.: Мир, 1973.
- [145] У. Рудин, *Функциональный анализ*, – М.: Мир, 1975.
- [146] I. E. Segal, R. A. Kunze, *Integrals and operators*, Springer, 1978.
- [147] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*. – М.: Мир, 1987.
- [148] A. Weinstein, Periodic orbits for convex Hamiltonian systems, *Ann. Math.*, **108**, 507–518.

Список рисунков

1.1	Система координат на гладком многообразии M	3
1.2	Касательный вектор $\dot{\gamma}(0)$	5
1.3	Касательное пространство $T_q M$	5
1.4	Решение ОДУ $\dot{q} = V(q)$	6
1.5	Дифференциал $D_q \Phi$ отображения Φ	7
1.6	Поток P^t векторного поля V	11
1.7	Множество достижимости $\mathcal{A}_{q_0}$	15
1.8	Начальная и конечная конфигурации машины	16
1.9	Перевод машины из q_0 в q_1	16
1.10	Скобка Ли векторных полей V_1, V_2	18
1.11	Реализация скобки Ли маневром машины	19
4.1	Решетка, порожденная векторами e_1, e_2	61
5.1	Множество достижимости $\mathcal{A}_{q_0}$	64
5.2	Орбита $\mathcal{O}_{q_0}$	64
5.3	Погруженное многообразие	65
5.4	Полная управляемость семейства $\mathcal{F}$	72
5.5	Интегральное многообразие N_q распределения Δ	75
6.1	Неподвижный и подвижный реперы	84
6.2	Фазовый портрет системы (6.12)	92
6.3	Орбиты в случае $l \in \mathbb{R}e_1 \setminus \{0\}$	95
6.4	Орбиты в случае $l \in \mathbb{R}e_2 \setminus \{0\}$	95
7.1	Ломаная	107
7.2	Трудная для управления конфигурация: $\theta_1 = \theta_2$	109
7.3	Трудная для управления конфигурация: $(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_3 - \theta_2) = \pi$	109
8.1	Орбита — открытое множество	112
8.2	Орбита — многообразие с гладкой границей	112
8.3	Орбита — многообразие с негладкой границей	112
8.4	Орбита — многообразие с негладкой границей	112
8.5	Запрещенная орбита: подмножество неполной размерности	113

8.6	Запрещенная орбита: множество с изолированными граничными точками	113
8.7	Аппроксимация потока, теорема 8.2	116
8.8	Фазовый портрет поля $f _{\Pi_{\pm}}$ при $l \in \Pi_{\pm} \setminus \mathbb{R}e_2$	121
10.1	Траектория $q_{\bar{u}}(t)$ оптимальна	142
12.1	Опорная гиперплоскость и нормальный ковектор ко множеству достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ в точке q_1	174
12.2	Условия трансверсальности (12.34)	187
13.1	Оптимальный синтез в задаче (13.1)–(13.3)	198
13.2	Оптимальный синтез в задаче (13.9)–(13.11)	201
13.3	Исключение четырех переключений	209
13.4	Нахождение кратчайшей кривой для далеких граничных точек	210
15.1	Многогранник U с опорной гиперплоскостью Π	216
17.1	Доказательство теоремы 17.1	246
19.1	Субриманова задача	273
19.2	Оценка угла поворота θ	295
20.1	Сопряжение особого участка и участка с явлением Фуллера	338
21.1	Сопряженная точка — складка	355
22.1	Полная управляемость системы (22.15)	369
23.1	$\kappa < 0$	381
23.2	$\kappa > 0$	381
24.1	Катящиеся тела	387
24.2	Отождествление касательных пространств в точке контакта	388
24.3	Сфера на плоскости	402

Предметный указатель

Символы

$D_u^2 F$	302	$\omega_1 \wedge \omega_2$	153
$D_q \Phi$	7	$\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$	262
F^*	151	$\mathrm{Hess}_u F$	301
$L^\angle$	170	$\mathrm{SU}(n)$	263
L_f	158	$\mathrm{U}(n)$	263
P^t	10	$\mathrm{ind}_+ Q$	306
T^*M	150	$\mathrm{ind}_- Q$	306
$T_q M$	5	σ	163
$T_x M$	4	$\mathrm{so}(n)$	101
$[V_1, V_2]$	17	$\vec{h}$	164
$\mathrm{Ad} B$	38	$\overleftarrow{\exp}$	34, 40
$\mathcal{A}_{q_0}$	14, 63, 141	$\overrightarrow{\exp}$	30, 39
$\mathcal{A}_{q_0}(t)$	14, 140	$\{a, b\}$	165
$\mathcal{A}_{q_0}^t$	141	$d\omega$	156
$\mathcal{O}_{q_0}$	63	e^{tV}	36
$C^\infty(M)$	21	$e^{t \mathrm{ad} V}$	40
$\mathrm{Diff} M$	4	i_f	159
$\Phi_* V$	8	s	161
$\mathrm{GL}(n)$	262		
$\Lambda^1 M$	151		
$\Lambda^k M$	154		
Λ^Γ	170		
$\mathrm{Lie} \mathcal{F}$	67		
$\mathrm{Lie}_q \mathcal{F}$	67		
$\mathrm{O}(n)$	262		
$\mathrm{SL}(\mathbb{C}^n)$	263		
$\mathrm{SL}(n)$	262		
$\mathrm{SO}(3)$	83, 282		
$\mathrm{SO}(n)$	101, 262		
$\mathrm{SU}(3)$	282		
$\subseteq$	4		
$\mathrm{Vec} M$	6		
$\mathrm{ad} V$	38		
$\ a\ _{s,K}$	26		
$\hat{F}$	22, 154		

О

ОДУ	6
ОДУ, неавтономное	28

а

алгебра Ли	39
алгебра Ли, структурные констан- ты	261

в

векторное поле	6, 27
векторное поле, автономное	36
векторное поле, гамильтонов лифт 168	
векторное поле, гамильтоново	164
векторное поле, консервативное 120	
векторное поле, неавтономное	27

векторное поле, параллельное. 391
 векторное поле, полное 9, 29
 векторное поле, поток 10
 векторное поле, с компактным носителем 29
 векторное поле, совместимое . 115
 векторное поле, устойчивое по Пуассону 118
 векторное поле, экспонента . . . 36
 векторные поля, коммутатор . . 17
 векторные поля, скобка Ли . . . 17
 вложение 4
 внешнее произведение 153
 внешняя k -форма 152
 выпуклая оболочка 146

Г

гамильтониан 164
 гамильтонова система 164
 гессиан 301
 группа Ли 262
 группа Ли, линейная 263
 группа, общая линейная 262
 группа, ортогональная 262
 группа, специальная линейная 262
 группа, специальная ортогональная 262
 группа, специальная унитарная 263
 группа, унитарная 262

Д

двойственный базис 149
 динамическая система 6
 динамическое программирование 250
 диффеоморфизм 3
 дифференциал 7
 дифференциал, второй 302
 дифференциальная k -форма . . 154
 дифференциальная форма . . . 151
 дифференциальная форма, внешний дифференциал . . 156
 дифференциальная форма, внутреннее произведение . 159
 дифференциальная форма, интеграл 151,

155

дифференциальная форма, производная Ли 158
 дифференциальное уравнение, неавтономное 28
 дифференцирование алгебры . . 25

З

задача, быстродействия 145
 задача, линейная быстродействия 215
 задача, линейно-квадратичная 229
 задача, оптимального управления 140
 задача, риманова 271
 задача, субриманова 273, 324

И

игольчатая вариация 179
 изотропное подпространство . 170
 индекс квадратичной формы . 306
 интегральный инвариант Пуанкаре-Картана 242

К

касательное пространство . . . 4, 5
 касательный вектор 5
 кокасательное пространство . . 150
 кокасательное расслоение . . . 150
 кокасательное расслоение, каноническая симплектическая структура 163
 кокасательное расслоение, канонические координаты 150
 кокасательное расслоение, тривиализация 254
 коммутатор векторных полей . 17
 кривизна, 2-мерные системы . 374
 кривизна, 3-мерные аффинные по управлению системы 384
 кривизна, гауссова 381
 критическая точка, коранг . . 303

Л

лагранжево подпространство . 170
 лемма Морса 305

м

- машина Дубинса 205
- машина Дубинса, с управлением
угловым ускорением 331
- многообразие 2
- многообразие, риманово 388
- многообразие, симплектическое 163
- многообразия, диффеоморфные 3
- множество достижимости 14, 140
- модуль 71
- модуль, конечнопорожденный 72
- модуль, локально конечнопорож-
денный 73

о

- оптимальная траектория 140
- оптимальное управление 140
- оптимальность, геометрическая 299
- оптимальность, локальная геомет-
рическая 303
- оптимальность, локальная конеч-
номерная 303
- оптимальность, сильная 353
- оптимальность, строгая сильная
353
- орбита 63
- ослабленная система 146
- отображение в конец 230, 299
- отображение в конец, второй диф-
ференциал 314
- отображение в конец, дифферен-
циал 312
- отображение, гладкое 3
- отображение, локально открытое
303
- отображение, собственное 4

п

- параллельный перенос 390
- погружение 64
- подгруппа Ли 264
- подмногообразие 1
- подмногообразие, погруженное 64
- поток 28
- преобразование обратной связи 124

- принцип максимума Понтрягина
172, 181, 185, 187, 192
- пространство управляющих пара-
метров 12

р

- распределение 74
- распределение, 2-порождающее 326
- распределение, интегральное мно-
гообразие 75
- распределение, интегрируемое 75
- редукция 363
- релаксация 146
- риманова структура 388

с

- связность 390
- связность, Леви-Чивита 391
- семейство векторных полей, впол-
не неголономное 67
- семейство векторных полей, орби-
та 63
- семейство векторных полей, пол-
ного ранга 67,
111
- семейство векторных полей, сим-
метричное 63
- семейство функций, свойства ре-
гулярности 27
- семейство функционалов, свойст-
ва регулярности 27
- симплектическая структура 163
- симплектическое многообразие 163
- симплектическое пространство 170
- скобка Ли векторных полей 17
- скобка Ли, координатная формула
17
- скобка Пуассона 165
- сопряженная точка 240
- сопряженное время 341, 346
- сопряженное пространство 149

т

- тавтологическая 1-форма 161
- твердое тело 83
- твердое тело, угловая скорость 84

твердое тело, уравнения Эйлера 89
 теорема Ли 265
 теорема Филиппова 143
 тождество Якоби 38
 топология, $C^\infty(M)$ 26
 точка Лебега 179
 точка, устойчивая по Пуассону 118
 траектория, оптимальная 140

У

управление, оптимальное 140
 управление, особое 209, 297
 управление, релейное 208, 293
 управляемая система 12
 управляемая система, аффинная
 по управлению 47
 управляемая система, билинейная
 326
 управляемая система, вполне управ-
 ляемая 49
 управляемая система, левоинва-
 риантная 263
 управляемая система, линейная 47
 управляемая система, линейная,
 индексы Кронекера .. 130
 управляемая система, линейная,
 нормальная форма Бру-
 новского 131
 управляемая система, ослаблен-
 ная 146
 управляемая система, правоинва-
 риантная 264
 управляемая система, простран-
 ство состояний 12
 управляемая система, со скаляр-
 ным управлением 328
 управляемая система, состояние
 12
 управляемость, локальная 327
 управляющий параметр 12
 уравнение Гамильтона-Якоби. 250
 уравнение Якоби, в подвижном
 репере 380
 уравнение Якоби, особый случай
 347

уравнение Якоби, регулярный слу-
 чай 343
 условие Фробениуса 76
 условие общего положения 215
 условие оптимальности, Лежанд-
 ра 316
 условие оптимальности, Гоха 320,
 324
 условие оптимальности, Лежанд-
 ра 323
 условие оптимальности, Лежанд-
 ра, обобщенное 322,
 324
 условие оптимальности, Лежанд-
 ра, обобщенное, усилен-
 ное 322
 условие оптимальности, Лежанд-
 ра, усиленное 317
 условия оптимальности, достаточ-
 ные 244, 248, 353,
 361
 условия оптимальности, необхо-
 димые 172,
 324
 условия трансверсальности ... 187

Ф

форма Лиувилля 161
 формула Картана 159
 формула Коши 47
 формула вариаций 43
 функционал качества 140
 функция переключения 292

Х

хронологическая экспонента, ле-
 вая 34
 хронологическая экспонента, пра-
 вая 30

Э

эквивалентность, локальная по со-
 стоянию и обратной свя-
 зи 133
 эквивалентность, локальная по со-
 стоянию 77

эквивалентность, по обратной связи	124
экспонента векторного поля ...	36
экстремаль	172
экстремаль, аномальная	185
экстремаль, вполне особая	319
экстремаль, нормальная	185
экстремаль, регулярная	317
экстремаль, строго аномальная	
326	
экстремаль, хорошая особая ..	323
экстремальная траектория	172

я

явление Фуллера	337
-----------------------	-----