Ю.Л. Сачков

Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах

Оглавление

Предисловие

Математическая теория управления — один из важных и востребованных разделов прикладной математики. Дифференциально-геометрическое направление в теории управления активно развивается в нашей стране и за рубежом [58], [78], [80], [96], [111], [48], [3], [62], [66], [13]. Эта книга посвящена центральным вопросам геометрической теории управления — *управляемости* и *симметриям*. Хорошо известно, что наличие нетривиальной группы симметрий упрощает исследование управляемой системы. В этой монографии мы рассматриваем системы, заведомо имеющие большую группу симметрий; для таких систем мы изучаем задачу глобальной управляемости, а также задачу нахождения полной группы симметрий.

Более конкретно, книга посвящена исследованию *правоинвариантных систем на группах Ли*. Это — управляемые системы, динамика которых описывается обыкновенным дифференциальным уравнением на группе Ли, причем эта динамика инвариантна относительно всех правых сдвигов на группе Ли. С теоретической точки зрения, это — естественный и важный класс систем, для которого возможна содержательная теория (именно такие системы возникают, например, при локальной нильпотентной аппроксимации гладких систем). С другой стороны, такие системы моделируют целый ряд прикладных задач (вращение и качение тел, движение роботов, квантовая механика, компьютерное видение).

Первая часть книги «Управляемость инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах» посвящена исследованию *глобальной управляемости* правоинвариантных систем на группах Ли, а также их проекций на однородные пространства групп Ли. Основное внимание уделено *разрешимым* группам Ли, некоторым их подклассам, а также обобщениям. Причина такого интереса в следующем. Благодаря разложению Леви, любая группа Ли представляется как произведение разрешимой и полупростой групп. Для полупростых групп Ли в 80–90-е года прошлого века были разработаны эффективные методы исследования управляемости. Однако для разрешимых групп Ли таких методов не существовало. Цель первой части монографии — описание таких методов, и демонстрация их в работе, вплоть до классификации ряда случаев малой размерности.

С самого начала развития теории инвариантных систем на группах Ли одной из существенных мотиваций был интерес к индуцированным системам на однородных пространствах, в частности, к *билинейным системам*, часто возникающим в приложениях. Вторая часть монографии «Управляемость билинейных систем в ортантах» посвящена вопросам управляемости билинейных систем в положительном ортанте. При такой постановке задачи естественно предполагать, что положительный ортант есть инвариантное множество для билинейной системы. В этом случае билинейная система глобально неуправляема, тем более неуправляема соответствующая инвариантная система на матричной группе Ли, и требуются новые методы исследования управляемости в ортанте. Изложению этих методов, а также их применению для различных размерностей переменных состояния и управления и посвящена вторая часть книги.

В третьей части монографии «Симметрии инвариантных систем на группах Ли» излагаются методы отыскания полной *алгебры Ли инфинитезимальных симметрий* для важных классов управляемых систем — распределений и субримановых структур. Эти методы применяются к инвариантным системам на нильпотентных группах Ли в интересных случаях малой размерности.

Более подробно содержание монографии отражено в начале каждой из трех частей.

Эта книга рассчитана на математиков-студентов старших курсов, аспирантов и научных работников. Помимо стандартных курсов, изучаемых студентами математических специальностей в течение первых двух лет в университете, предполагается знакомство читателя с основами теории управления, а также теории групп Ли и алгебр Ли. Впрочем, большинство используемых понятий (кроме самых базовых) определяется в тексте. Каждая глава завершается библиографическим комментарием с кратким описанием истории вопроса, родственных работ, а в некоторых случаях и обсуждением возможных направлений дальнейших исследований.

Большая часть результатов, представленных в книге, опубликована в зарубежных изданиях, и автору хотелось бы представить их российскому читателю.

Автор выражает искреннюю благодарность своим учителям — Алексею Федоровичу Филиппову и Андрею Александровичу Аграчеву за приобщение к математической теории управления.

Автор также благодарен за разнообразную помощь в написании этой книги Ж. Жакобу, Ж.-П. Готье, Б. Боннару, Ф. Сильва Лейте, Д. Миттенхуберу.

Слова особой благодарности — моей жене Елене, за веру и поддержку во все времена.

Переславль-Залесский *Ю.Л. Сачков*
Сентябрь 2006 г.

Часть I

Управляемость инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах

Исследование управляемости нелинейных систем является одной из центральных тем геометрической теории управления. Для гладких нелинейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, имеется глубокая и подробная общая теория *локальной управляемости* в терминах конфигураций скобок Ли векторных полей в правой части [79], [113], [85], [32], [33], [47], [114], [115], [26]. Однако содержательная теория *глобальной управляемости* может быть построена лишь для некоторых специальных классов систем. Один из естественных и замечательных классов такого рода образуют правоинвариантные системы на группах Ли. Пространство состояний этих систем есть группа Ли, а динамика сохраняется правыми сдвигами на группе. Такие системы имеют большую группу симметрий, и для них оказалось возможным построить красивую теорию глобальной управляемости. Вопрос управляемости инвариантных систем на группах Ли тесно связан с управляемостью проекций этих систем на однородные пространства групп Ли (например, билинейных систем).

В первой части монографии представлены результаты по глобальной управляемости правоинвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. Этот вопрос является предметом активных исследований в математической теории управления и теории полугрупп Ли в течение более чем 30 лет. Работы в этом направлении вызваны потребностями приложений в механике и геометрии, связями с другими важными классами нелинейных управляемых систем (билинейными и аффинными), а также исследованиями по обобщению теории Софуса Ли с группового случая на полугрупповой.

Глава 1 представляет собой краткий обзор с изложением основных определений, а также важнейших результатов по управляемости инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах.

В главе 2 представлены условия управляемости для аффинных по управлению инвариантных систем, для которых поля при управлениях порождают подалгебру коразмерности один.

В последующих главах первой части изложены результаты по управляемости инвариантных систем на разрешимых группах Ли и их обобщениях. В главе 3 получены условия управляемости инвариантных систем для важного подкласса разрешимых групп Ли — вполне разрешимых групп. В главе 4 получены условия управляемости для разрешимых групп Ли, и вообще для групп Ли, отличных от своих производных подгрупп. Эти результаты применяются в главе 5 к системам на метабелевых групп Ли. Наконец, в главе 6 получена полная классификация управляемых систем с одним управлением на разрешимых группах Ли размерности не выше 6.

Глава 1

Инвариантные системы на группах Ли и однородных пространствах, и их управляемость

В этой вводной главе приведены основные определения и постановки задач, а также общие результаты по правоинвариантным системам и их управляемости.

Мы будем предполагать, что читатель знаком с основами теории групп Ли и алгебр Ли [14], [28], [9], а также геометрической теории управления [3], [80].

1.1 Определения и общие свойства правоинвариантных систем

Будем обозначать через G вещественную группу Ли, а через L – ее алгебру Ли, т.е. алгебру Ли правоинвариантных векторных полей на G.

1.1.1 Основные определения

Правоинвариантной управляемой системой Γ на группе Ли G называется произвольное множество правоинвариантных векторных полей на G, т.е. любое подмножество

$$\Gamma \subset L. \tag{1.1}$$

Важный для приложений класс правоинвариантных систем образуют системы, *аффинные по управлению*:

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}, \tag{1.2}$$

где A, $B_1, \ldots, B_m$ — некоторые элементы L. Если пространство управлений U совпадает с $\mathbb{R}^m$, то система (1.2) есть аффинное подпространство L.

Замечание. В данной работе мы будем записывать правоинвариантные системы в виде (1.1) или (1.2), т.е. как набор векторных полей — *полисистему*. Следуя *классической нотации*, аффинные по управлению системы (1.2) записываются в виде

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i(x), \qquad u = (u_1, \ldots, u_m) \in U, \quad x \in G, \tag{1.3}$$

с управлениями $u_1(\cdot), \ldots, u_m(\cdot)$, где $A(x)$, $B_1(x), \ldots, B_m(x)$ — правоинвариантные поля на группе G. Полисистема (1.1) записывается в классической нотации с помощью выбора параметризации множества Γ.

Траекторией правоинвариантной системы Γ на G называется непрерывная кривая $x(t)$ в G, определенная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и такая, что существуют разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ и векторные поля $A_1, \ldots, A_k$ в Γ такие, что ограничение $x(t)$ на каждый открытый интервал (t_{i-1}, t_i) дифференцируемо и $\dot{x}(t) = A_i(x(t))$ при $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

Для управляемых систем в классической нотации (1.3), так определенные траектории соответствуют кусочно-постоянным управлениям $u(t)$. Известно, что этот класс допустимых управлений достаточен при исследовании управляемости.

Для любого $T \geqslant 0$ и любого x из G *множеством достижимости за время* T системы Γ из точки x называется множество $\mathcal{A}_\Gamma(x, T)$ всех точек, в которые система может быть переведена из x в точности за T единиц времени:

$$\mathcal{A}_\Gamma(x, T) = \{x(T) \mid x(\cdot) \text{ траектория } \Gamma,\ x(0) = x\}.$$

Множество достижимости за время не больше $T \geqslant 0$ определяется как

$$\mathcal{A}_\Gamma(x, \leqslant T) = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathcal{A}_\Gamma(x, t).$$

Множество достижимости системы Γ из точки $x \in G$ — это множество $\mathcal{A}_\Gamma(x)$ всех конечных точек $x(T)$, $T \geqslant 0$, всех траекторий Γ, начинающихся в точке x:

$$\mathcal{A}_\Gamma(x) = \{x(T) \mid x(\cdot) \text{ траектория } \Gamma,\ x(0) = x,\ T \geqslant 0\} = \bigcup_{T \geqslant 0} \mathcal{A}_\Gamma(x, T).$$

Если это не приводит к неопределенности, то мы обозначаем в дальнейшем множества достижимости $\mathcal{A}_\Gamma(x, T)$ и $\mathcal{A}_\Gamma(x)$ соответственно через $\mathcal{A}(x, T)$ и $\mathcal{A}(x)$.

Система Γ называется *(глобально) управляемой*, если для любой пары точек x_0 и x_1 из G точка x_1 достижима из x_0 вдоль траектории Γ за некоторое неотрицательное время:

$$x_1 \in \mathcal{A}(x_0) \text{ для любых } x_0,\ x_1 \in G,$$

или, иными словами, если

$$\mathcal{A}(x) = G \text{ для любых } x \in G.$$

Другое свойство, очевидно, более слабое, чем управляемость, также существенно для описания множеств достижимости. Система Γ называется *достижимой* в точке $x \in G$, если множество достижимости $\mathcal{A}(x)$ имеет непустую внутренность в G.

Замечание. Инверсия

$$i\,:\,G \to G, \qquad i(x) = x^{-1},$$

индуцирует изоморфизм между алгеброй Ли правоинвариантных векторных полей на группе Ли G и алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей на G. Поэтому все задачи для левоинвариантных систем, включая управляемость, сводятся к изучению правоинвариантных систем.

Для любого подмножества $\Gamma \subset L$ будем обозначать через $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ алгебру Ли, порожденную Γ, т.е. наименьшую подалгебру в L, содержащую Γ.

Если l — подмножество линейного пространства V, то $\mathrm{span}(l)$ будет обозначать линейное подпространство в V, порожденное l, а $\mathrm{co}(l)$ — положительный выпуклый конус, порожденный множеством l.

Топологическое замыкание множества M обозначается через $\mathrm{cl}\, M$ или $\overline{M}$, а внутренность M — через $\mathrm{int}\, M$.

Для тождественного оператора и единичной матрицы используется обозначение Id, а E_{ij} обозначает матрицу с единичным ij-м элементом и нулевыми остальными элементами. Транспонированная матрица A обозначается A^* или A'.

1.1.2 Простейшие свойства множеств достижимости и орбит

Пусть

$$\exp\,:\,L \to G$$

есть экспоненциальное отображение из алгебры Ли L в группу Ли G. Любое правоинвариантное векторное поле $A \in L$ полно. Траектория поля A, проходящая через единицу Id группы G имеет вид

$$\exp(tA), \qquad t \in \mathbb{R},$$

а

$$\exp(tA)x, \qquad t \in \mathbb{R},$$

есть траектория поля A, проходящая через точку $x \in G$.

Приведенные далее важные свойства множеств достижимости легко следуют из правоинвариантности Γ и определения $\mathcal{A}(x)$.

Лемма 1.1. *Пусть $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система и x — произвольная точка группы G.*

(1) $\mathcal{A}(x) = \{\exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1)x \mid A_i \in \Gamma,\ t_i \geqslant 0,\ k \in \mathbb{N}\}$.

(2) $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\mathrm{Id})x$.

(3) $\mathcal{A}(\mathrm{Id})$ *является подполугруппой группы G.*

(4) $\mathcal{A}(x)$ *является линейно связным подмножеством группы G.*

(5) $\overline{\mathcal{A}(\mathrm{Id})}$ *является подполугруппой группы G.*

Орбита системы Γ, проходящая через точку $x \in G$, обозначается $\mathcal{O}_\Gamma(x)$ и определяется аналогично множеству достижимости $\mathcal{A}(x)$:

$$\mathcal{O}_\Gamma(x) = \{\exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1)x \mid A_i \in \Gamma,\ t_i \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}\},$$

сравните с пунктом (1) леммы 1.1. В орбите $\mathcal{O}_\Gamma$ допускается движение вдоль полей из Γ как в положительном, так и отрицательном направлениях, в то время как во множестве достижимости $\mathcal{A}_\Gamma$ — только в положительном направлении.

Если система Γ задана, то ее орбита обозначается $\mathcal{O}(x)$.

В следующем предложении мы приводим некоторые свойства наборов правоинвариантных векторных полей, известные из теории групп Ли и теории управления.

Лемма 1.2. *Пусть $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система и x — произвольная точка группы G.*

(1) $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(\mathrm{Id})x$.

(2) $\mathcal{O}(\mathrm{Id})$ *является связной подгруппой Ли в G с алгеброй Ли* $\mathrm{Lie}(\Gamma)$.

(3) $\mathcal{O}(x)$ *является максимальным интегральным многообразием инволютивного правоинвариантного распределения* $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ *на G, содержащим точку x.*

Так как все существенные свойства множеств достижимости (включая управляемость, см. далее теоремы 1.6, 1.7, выражаются в терминах множества достижимости из единицы $\mathcal{A}(\mathrm{Id})$, то мы ограничимся в дальнейшем изучением этого множества и обозначим его $\mathcal{A}$. Аналогично, мы будем обозначать орбиту $\mathcal{O}(\mathrm{Id})$ просто через $\mathcal{O}$.

1.1.3 Матричные системы

Важный класс правоинвариантных систем, который во многом вызвал само развитие теории таких систем, образован *матричными* управляемыми системами.

Обозначим через $\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ множество всех вещественных матриц размера $n \times n$.

Общая линейная группа $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ образована всеми невырожденными $n \times n$–матрицами:

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}.$$

Групповое умножение в $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ есть обычное матричное умножение, а вещественная аналитическая структура на $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ задается с помощью отождествления $\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ с $\mathbb{R}^{n^2}$.

Алгеброй Ли группы $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ является пространство всех вещественных $n \times n$–матриц

$$\mathrm{gl}(n;\mathbb{R}) = \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$$

с матричным коммутатором

$$[A, B] = AB - BA, \qquad A, B \in \mathrm{gl}(n;\mathbb{R}),$$

в качестве произведения.

Пусть G — *линейная группа*, т.е. замкнутая подгруппа в $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, и пусть $L \subset \mathrm{gl}(n;\mathbb{R})$ — алгебра Ли группы G.

Для любой матрицы $A \in L$ соответствующее правоинвариантное векторное поле на G задается матричным произведением

$$A(x) = Ax, \qquad x \in G \tag{1.4}$$

(мы отождествляем правоинвариантное векторное поле с его значением в единице группы).

Экспоненциальное отображение из L в G задается матричной экспонентой

$$A \mapsto \exp(A) = \mathrm{Id} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots, \qquad A \in L.$$

Траектория поля $A \in L$, проходящая через точку $x \in G$, определяется с помощью матричной экспоненты и произведения

$$\exp(tA)x, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Умножение справа на элемент $g \in G$

$$x \mapsto xg, \qquad x \in G$$

отображает траекторию (1.5) в траекторию, поэтому векторные поля вида (1.4) называются правоинвариантными.

Правоинвариантная управляемая система на линейной группе G есть произвольное множество матриц $\Gamma \subset L$.

Аффинная по управлению правоинвариантная управляемая система на группе G имеет вид (1.2) для некоторых матриц $A, B_1, \dots, B_m \in L$. В классической нотации такая система записывается как матричная управляемая система

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i x, \qquad u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in G. \tag{1.6}$$

Мы рассмотрим ниже несколько примеров линейных групп G и их алгебр Ли L. В каждом из этих случаев G может рассматриваться как пространство состояний правоинвариантной системы $\Gamma \subset L$; для аффинной по управлению системы, см. (1.2) или (1.6), матрицы A, B_1, $\dots$, B_m могут выбираться произвольно в алгебре Ли L.

Пример 1.1. Общая линейная группа $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ имеет алгебру Ли $\mathrm{gl}(n;\mathbb{R})$. Ее размерность равна n^2. Заметим, что $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ несвязна: она имеет две связные компоненты.

Пример 1.2. Компонента связности единицы в $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ есть группа всех вещественных $n \times n$–матриц с положительным определителем

$$\mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid \det X > 0\}.$$

Алгеброй Ли группы $\mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R})$ является $\mathrm{gl}(n;\mathbb{R})$.

Пример 1.3. *Специальная линейная группа* есть группа всех вещественных $n \times n$–матриц с единичным определителем

$$\mathrm{SL}(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid \det X = 1\}.$$

Это — связная группа Ли размерности $(n^2 - 1)$, а ее алгебра Ли $\mathrm{sl}(n;\mathbb{R})$ состоит из всех $n \times n$–матриц с нулевым следом

$$\mathrm{sl}(n;\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}.$$

Пример 1.4. *Специальная ортогональная группа* образована всеми вещественными ортогональными $n \times n$–матрицами с единичным определителем:

$$\mathrm{SO}(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid X^* = X^{-1},\ \det X = 1\}.$$

Это — связная группа Ли размерности $n(n-1)/2$, а ее алгебра Ли $\mathrm{so}(n;\mathbb{R})$ состоит из всех вещественных кососимметрических $n \times n$–матриц:

$$\mathrm{so}(n;\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid A^* = -A\}.$$

1.1.4 Нормальная достижимость

Если точка $y \in G$ достижима из другой точки $x \in G$, то существуют элементы $A_1, \ldots, A_k$ в Γ и $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ с положительными координатами такие, что
$$y = \exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1) x.$$

Следующее более сильное свойство оказывается существенным при изучении топологических свойств множества достижимости и управляемости.

Определение 1.1. Точка y группы G называется *нормально достижимой* из точки x группы G вдоль системы Γ, если существуют элементы $A_1, \ldots, A_k$ в Γ и $\hat{t} \in \mathbb{R}^k$ с положительными координатами $\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_k$ такие, что отображение $F(t_1, \ldots, t_k) = \exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1) x$ из $\mathbb{R}^k$ в G имеет следующие свойства:

(1) $F(\hat{t}) = y$.

(2) Ранг дифференциала dF в точке $\hat{t}$ равен размерности G.

В этом случае точка y называется нормально достижимой из x вдоль полей $A_1, \ldots, A_k$.

Теорема 1.1. *Если* $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$, *то в любой окрестности O единицы* $\operatorname{Id} \in G$ *существуют точки, нормально достижимые из* Id *вдоль* Γ. *Следовательно, множество* $\operatorname{int} \mathcal{A} \cap O$ *непусто.*

Если алгебра Ли, порожденная Γ, не совпадает со всей алгеброй Ли L, то Γ может рассматриваться как правоинвариантная система на орбите $\mathcal{O}$. Согласно (4) леммы 1.2, алгебра Ли $\operatorname{Lie}(\Gamma)$ совпадает с алгеброй Ли группы Ли $\mathcal{O}$, поэтому из предыдущей теоремы вытекают следующие соотношения между множеством достижимости $\mathcal{A}$ и орбитой $\mathcal{O}$.

Лемма 1.3. (1) *Множество достижимости $\mathcal{A}$ содержится в орбите $\mathcal{O}$.*

(2) *Для любой окрестности O единицы* Id *в топологии орбиты $\mathcal{O}$ пересечение* $\operatorname{int}_{\mathcal{O}} \mathcal{A} \cap O$ *непусто.*

(3) *Более того,* $\operatorname{cl} \operatorname{int}_{\mathcal{O}} \mathcal{A} \supset \mathcal{A}$.

(Мы обозначаем через $\operatorname{int}_{\mathcal{O}}$ внутренность подмножества орбиты $\mathcal{O}$ в топологии $\mathcal{O}$.)

1.1.5 Общие условия управляемости

Теорема 1.2. *Необходимым условием управляемости правоинвариантной системы Γ на G является связность группы Ли G.*

Замечание. Ввиду предыдущей теоремы, в дальнейшем все группы Ли предполагаются связными, если явно не оговорено противное.

Важнейшее необходимое условие управляемости, приведенное в следующем предложении, обычно называется *ранговым условием*.

Теорема 1.3. *Если правоинвариантная система* Γ *управляема на группе Ли* G*, то* Γ *порождает* L *как алгебру Ли:*

$$\mathrm{Lie}(\Gamma) = L.$$

Если $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$*, то множество достижимости* $\mathcal{A}$ *имеет непустую внутренность в группе* G.

Вообще говоря, ранговое условие недостаточно для управляемости, но эквивалентно достижимости.

Теорема 1.4. *Правоинвариантная система* Γ *на* G *достижима в единице (и тогда в любой точке из* G*) тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Если для системы $\Gamma \subset L$ выполнено ранговое условие $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то говорят, что Γ — система *полного ранга*.

Теорема 1.5. *Правоинвариантная система* Γ *тогда и только тогда является управляемой на связной группе Ли* G*, когда:*

(1) *множество достижимости* $\mathcal{A}$ *является подгруппой в* G *и*

(2) $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Теорема 1.6. *Правоинвариантная система* Γ *управляема на связной группе Ли* G *тогда и только тогда, когда она управляема из единицы, т.е.* $\mathcal{A} = G$.

Если Γ — система полного ранга, то ее множество достижимости $\mathcal{A}$ имеет непустую внутренность в G. Но, вообще говоря, единичный элемент Id может лежать на границе $\mathcal{A}$.

Теорема 1.7. *Правоинвариантная система* Γ *управляема на связной группе Ли* G *тогда и только тогда, когда единица* Id *принадлежит внутренности множества* $\mathcal{A}$.

Нижеследующее условие управляемости имеет фундаментальное значение, т.к. оно показывает, что при изучении управляемости систем полного ранга можно заменять множество достижимости $\mathcal{A}$ его замыканием $\mathrm{cl}\,\mathcal{A}$.

Теорема 1.8. *Если множество достижимости* $\mathcal{A}$ *плотно в связной группе Ли* G *и* $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$*, то* Γ *управляема на* G.

Теорема 1.9. *Правоинвариантная система* Γ *управляема на связной группе Ли* G *тогда и только тогда, когда единица* Id *нормально достижима из* Id *вдоль некоторых элементов* $A_1, \ldots, A_k$ *в* Γ.

Из предыдущего результата легко следует, что управляемость правоинвариантных систем сохраняется при малых возмущениях. Точнее, пусть $\rho(\cdot,\cdot)$ — некоторое расстояние в алгебре Ли L и $d(\cdot,\cdot)$ — соответствующее хаусдорфово расстояние между подмножествами L:

$$d(\Gamma_1,\Gamma_2)=\max\left\{\sup_{A_1\in\Gamma_1}\inf_{A_2\in\Gamma_2}\rho(A_1,A_2),\ \sup_{A_2\in\Gamma_2}\inf_{A_1\in\Gamma_1}\rho(A_1,A_2)\right\}.$$

Теорема 1.10. *Если правоинвариантная система $\Gamma\subset L$ управляема, то существует $\varepsilon>0$ такое, что любая система $\Gamma'\subset L$ управляема при условии $d(\Gamma,\Gamma')<\varepsilon$.*

1.2 Индуцированные системы на однородных пространствах

1.2.1 Однородные пространства и управляемость

Определение 1.2. Группа Ли G действует на аналитическом многообразии M, если существует аналитическое отображение $\theta : G\times M\to M$, удовлетворяющее свойствам:

(1) $\theta(g_2g_1,x)=\theta(g_2,\theta(g_1,x))$ для всех g_1,g_2 из G и всех x из M, и

(2) $\theta(\mathrm{Id},x)=x$ для всех x из M.

Для любого $g\in G$ рассмотрим аналитический диффеоморфизм $\theta_g : M\to M$, который определяется как $\theta_g(x)=\theta(g,x)$ (диффеоморфизм, обратный к θ_g, равен $\theta_{g^{-1}}$). Отображение $g\mapsto\theta_g$ называется *действием* группы G на M. Действие является гомоморфизмом из группы G в группу аналитических диффеоморфизмов многообразия M. Для любого элемента $A\in L$, $\theta_{\exp tA}$ есть однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M с генератором $\theta_*(A)$ — аналитическим векторным полем на M:

$$\theta_*(A)(x)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\theta_{\exp tA}(x),\quad x\in M,\ A\in L.$$

Такие векторные поля $\theta_*(A)$, $A\in L$, называются *подчиненными действию θ группы* G. Они образуют конечномерную алгебру Ли

$$\theta_*(L)=\{\theta_*(A)\mid A\in L\}$$

полных векторных полей на M.

Определение 1.3. Система векторных полей $\mathcal{F}$ на M называется *подчиненной действию* θ, если $\mathcal{F}$ содержится в $\theta_*(L)$. Если $\mathcal{F}=\theta_*(\Gamma)$ для некоторой правоинвариантной системы $\Gamma\subset L$, то $\mathcal{F}$ называется *индуцированной* системой для системы Γ.

Группа Ли G действует *транзитивно* на M, если для любого $x \in M$ орбита $\{\theta_g(x) \mid g \in G\}$ совпадает со всем многообразием M. Многообразие, допускающее транзитивное действие группы Ли, называется *однородным пространством* этой группы Ли. Однородные пространства — это в точности фактор-многообразия групп Ли. Если θ — транзитивное действие G на M, то рассмотрим группу изотропии H в некоторой фиксированной точке $x \in M$:

$$H = \{g \in G \mid \theta_g(x) = x\}.$$

Группа изотропии H является замкнутой подгруппой в G, и многообразие M диффеоморфно пространству левых смежных классов G/H, причем диффеоморфизм $G/H \to M$ задается как $gH \mapsto \theta_g(x)$.

Если дана правоинвариантная система Γ на группе Ли G, действующей транзитивно на многообразии M, то можно построить систему на M, индуцированную системой Γ. Следующее утверждение дает условие управляемости, связанное с этой конструкцией.

Теорема 1.11. *Пусть θ — действие связной группы Ли на многообразии M, $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система на G и $\mathcal{F} = \theta_*(\Gamma)$ — индуцированная система на M.*

(1) *Для любой точки x из M множество достижимости системы $\mathcal{F}$ из точки x имеет вид*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(x) = \theta_{\mathcal{A}_\Gamma}(x) = \{\theta_g(x) \mid g \in \mathcal{A}_\Gamma\}.$$

(2) *Пусть действие θ транзитивно. Если Γ управляема на G, то $\mathcal{F}$ управляема на M.*

(3) *$\mathcal{F}$ управляема на M тогда и только тогда, когда полугруппа $\mathcal{A}_\Gamma$ действует транзитивно на M.*

Важные приложения теоремы 1.11 относятся к случаю линейного действия линейных групп $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда индуцированные системы являются билинейными или, более общо, аффинными системами.

1.2.2 Билинейные системы

Индуцированные векторные поля и системы

Для линейного действия группы $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\theta_g(x) = gx, \quad g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

индуцированные векторные поля линейны:

$$\theta_*(A)(x) = Ax, \quad A \in \mathrm{gl}(n;\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Выберем произвольным образом элементы $A, B_1, \ldots, B_m \in \mathrm{gl}(n;\mathbb{R})$ и множество управляющих параметров $U \subset \mathbb{R}^m$, и рассмотрим аффинную по управлению правоинвариантную систему на $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$:

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}.$$

Тогда индуцированная система является набором линейных векторных полей на $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{F} = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}.$$

Переходя от полисистем к управляемым системам в классической нотации, получаем билинейную систему:

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i x, \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Билинейные системы на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Предположим, что действие связной линейной группы $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ транзитивно на линейном пространстве с выколотым началом координат $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Типичные примеры — это группы $\mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$. Пусть L — алгебра Ли группы G. В предыдущих примерах алгебры Ли равны соответственно $\mathrm{gl}(n;\mathbb{R})$ и $\mathrm{sl}(n;\mathbb{R})$.

Для этого случая из теоремы 1.11 получаем следующее предложение.

Следствие 1.1. *Если правоинвариантная система*

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\} \subset L$$

управляема на линейной группе G, которая действует транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то билинейная система

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i x, \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

управляема на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Билинейные системы на S^{n-1}

Теперь рассмотрим случай, когда связная линейная группа транзитивно действует на единичной сфере

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\},$$

например, группу $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ вращений n-мерного пространства. Пусть L — алгебра Ли группы G. В предыдущем примере алгебра Ли $\mathrm{so}(n;\mathbb{R})$ состоит из кососимметрических $n \times n$–матриц.

Тогда теорема 1.11 дает следующее утверждение.

Следствие 1.2. *Если правоинвариантная система*

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\} \subset L$$

управляема на линейной группе G, которая действует транзитивно на S^{n-1}, то билинейная система

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i x, \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in S^{n-1}$$

управляема на сфере S^{n-1}.

1.2.3 Аффинные системы

Обозначим группу всех обратимых аффинных отображений n-мерного пространства через $\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$. Она является полупрямым произведением группы трансляций n-мерного пространства и общей линейной группы:

$$\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \ltimes \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}).$$

Эта группа может быть представлена как подгруппа группы $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R})$, состоящая из матриц вида

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Вкладывая $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ в качестве гиперплоскости

$$\mathbb{R}^n \times \{v_{n+1} = 1\} = \{(v_1, \ldots, v_n, 1)^* \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (v_1, \ldots, v_n)^* \in \mathbb{R}^n\},$$

получаем аффинное отображение в $\mathbb{R}^n$, которое определяется элементом $\overline{X} \in \mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Xv + x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

То есть группа $\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$ действует на $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\theta_{\overline{X}}(v) = Xv + x, \quad \overline{X} \in \mathrm{Aff}(n;\mathbb{R}), \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Алгебра Ли $\mathrm{aff}(n;\mathbb{R})$ аффинной группы представляется матрицами

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{gl}(n;\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}^n.$$

Однопараметрическая подгруппа в $\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$, соответствующая элементу $\overline{A} \in \mathrm{aff}(n;\mathbb{R})$, имеет вид

$$\exp t \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tA} & \frac{e^{tA}-\mathrm{Id}}{A} a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\frac{e^{tA}-\mathrm{Id}}{A} = t\,\mathrm{Id} + \frac{t^2}{2!}A + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^{n-1} + \cdots\ .$$

Соответствующий поток в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\theta_{\exp(t\overline{A})}(v) = e^{tA}v + \frac{e^{tA}-\mathrm{Id}}{A}a,$$

поэтому индуцированное векторное поле является аффинным векторным полем на $\mathbb{R}^n$:

$$\theta_*(\overline{A})(v) = Av + a, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть теперь G — связная линейная подгруппа в $\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$, действующая транзитивно на $\mathbb{R}^n$, например, группа обратимых аффинных преобразований n-мерного пространства, сохраняющих ориентацию

$$\mathrm{Aff}_+(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \ltimes \mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid X \in \mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n \right\},$$

или группа собственных движений n-мерного пространства

$$\mathrm{E}(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \ltimes \mathrm{SO}(n;\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid X \in \mathrm{SO}(n;\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Пусть L — алгебра Ли группы G; в предыдущих примерах имеем соответственно алгебры Ли — полупрямые суммы

$$\mathrm{aff}(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \leftthreetimes \mathrm{gl}(n;\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{gl}(n;\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}^n \right\},$$

и

$$\mathrm{e}(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \leftthreetimes \mathrm{so}(n;\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{so}(n;\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Аффинная по управлению правоинвариантная система на группе Ли G

$$\Gamma = \left\{ \overline{A} + \sum_{i=1}^m u_i \overline{B}_i \mid u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\} \subset L, \tag{1.7}$$

где

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B}_i = \begin{pmatrix} B_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, m,$$

индуцирует следующую *аффинную* управляемую систему:

$$\dot{x} = Ax + a + \sum_{i=1}^m u_i(B_i x + b_i), \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

Отметим следующие частные случаи аффинных систем: билинейные системы, рассмотренные в пп. 1.2.2 и 1.2.2 ($a = b_1 = \cdots = b_m = 0$), и классические *линейные* системы

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i, \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

которые получаются при $a = 0$, $B_1 = \cdots = B_m = 0$.

Из теоремы 1.11 вытекает следующее предложение.

Следствие 1.3. *Пусть G — связная линейная подгруппа в* $\mathrm{Aff}(n; \mathbb{R})$*, которая действует транзитивно на $\mathbb{R}^n$. Если правоинвариантная система* (1.7) *управляема на G, то индуцированная аффинная система* (1.8) *управляема на $\mathbb{R}^n$.*

1.3 Насыщение Ли

Эффективным способом для получения (достаточных) условий управляемости является техника расширения, основанная на вычислении касательного конуса к замыканию множества достижимости системы в единице.

Определение 1.4. Правоинвариантные системы $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset L$ называются *эквивалентными* друг другу, если $\mathrm{cl}(\mathcal{A}_{\Gamma_1}) = \mathrm{cl}(\mathcal{A}_{\Gamma_2})$.

Определение 1.5. Пусть $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система. *Насыщение Ли* системы Γ, обозначаемое $\mathrm{LS}(\Gamma)$, есть максимальное подмножество алгебры Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$, эквивалентное Γ.

Если системы Γ_1 и Γ_2 эквивалентны системе Γ, то их объединение, очевидно, также эквивалентно Γ. Поэтому насыщение Ли системы Γ всегда существует: это объединение всех систем в $\mathrm{Lie}(\Gamma)$, эквивалентных Γ. Наибольшая правоинвариантная система, эквивалентная Γ, имеет вид $\{A \in L \mid \exp(tA) \in \mathrm{cl}(\mathcal{A}_\Gamma) \ \forall t \geqslant 0\}$, поэтому насыщение Ли можно описать следующим образом.

Теорема 1.12. *Для любой системы* $\Gamma \subset L$

$$\mathrm{LS}(\Gamma) = \mathrm{Lie}(\Gamma) \cap \{A \in L \mid \exp(tA) \in \mathrm{cl}(\mathcal{A}_\Gamma) \ \forall t \geqslant 0\}.$$

Обозначим через $\mathrm{E}(\Gamma)$ множество $\{A \in \mathrm{LS}(\Gamma) \mid -A \in \mathrm{LS}(\Gamma)\}$. Это — наибольшее линейное подпространство L, содержащееся в $\mathrm{LS}(\Gamma)$.

Основные свойства насыщения Ли собраны в следующем утверждении.

Теорема 1.13. (0) $\mathrm{LS} \circ \mathrm{LS} = \mathrm{LS}$,

(1) $\mathrm{LS}(\Gamma)$ *— замкнутый выпуклый положительный конус в L, т.е.*

(1a) $\mathrm{LS}(\Gamma)$ *топологически замкнуто:*

$$\mathrm{cl}(\mathrm{LS}(\Gamma)) = \mathrm{LS}(\Gamma),$$

(1b) $\mathrm{LS}(\Gamma)$ *выпукло:*

$$A, B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \;\Rightarrow\; \alpha A + (1-\alpha)B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \quad \forall\ \alpha \in [0,1],$$

(1c) $\mathrm{LS}(\Gamma)$ — *положительный конус:*

$$A \in \mathrm{LS}(\Gamma) \;\Rightarrow\; \alpha A \in \mathrm{LS}(\Gamma) \quad \forall\ \alpha \geqslant 0.$$

Поэтому

$$A, B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \;\Rightarrow\; \alpha A + \beta B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \quad \forall\ \alpha, \beta \geqslant 0.$$

(2) *Для всех* $A \in \mathrm{E}(\Gamma)$ *и всех* $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t\,\mathrm{ad}\,A}\mathrm{LS}(\Gamma) \subset \mathrm{LS}(\Gamma).$$

То есть,

$$\pm\, A, B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{t\,\mathrm{ad}\,A}B = B + (t\,\mathrm{ad}\,A)B + \frac{(t\,\mathrm{ad}\,A)^2}{2!}B + \ldots \in \mathrm{LS}(\Gamma) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

(3) $\mathrm{E}(\Gamma)$ — *подалгебра* L. *В частности,*

$$\pm A, \pm B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \;\Rightarrow\; \pm[A, B] \in \mathrm{LS}(\Gamma).$$

(4) *Если* $A \in \mathrm{LS}(\Gamma)$ *и однопараметрическая подгруппа* $\{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *квазипериодична, то* $\mathbb{R}A \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$.

Следующая теорема дает общий критерий управляемости в терминах насыщения Ли.

Теорема 1.14. *Правоинвариантная система* $\Gamma \subset L$ *управляема на связной группе Ли* G *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$.

Обычно трудно построить насыщение Ли правоинвариантной системы явно. Поэтому теорема 1.14 применяется как достаточное условие управляемости при помощи следующей процедуры. Начиная с системы Γ, строится вполне упорядоченное расширяющееся семейство расширений $\{\Gamma_\alpha\}$ системы Γ, т.е.

$$\Gamma_0 = \Gamma, \qquad \Gamma_\alpha \subset \Gamma_\beta \text{ при } \alpha < \beta.$$

Правила расширения основаны на теореме 1.13:

(1) По данной системе Γ_α строится $\Gamma_\beta = \mathrm{cl}(\mathrm{co}(\Gamma_\alpha))$.

(2) При $\pm A, B \in \Gamma_\alpha$ строится $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup e^{\mathbb{R}\,\mathrm{ad}\,A}B$.

(3) При $\pm A, \pm B \in \Gamma_\alpha$ строится $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup \mathbb{R}[A, B]$.

(4) Для $A \in \Gamma_\alpha$ с квазипериодической однопараметрической группой строится $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup \mathbb{R}A$.

Теорема 1.13 гарантирует, что все расширения Γ_α принадлежат $\mathrm{LS}(\Gamma)$. Если на некотором шаге α получается равенство $\Gamma_\alpha = L$ то $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$, и система Γ управляема.

1.4 Условия управляемости для специальных классов систем и групп Ли

1.4.1 Симметричные системы

Система $\Gamma \subset L$ называется *симметричной*, если вместе со всяким элементом X эта система содержит также противоположный по знаку элемент $-X$, т.е.

$$\Gamma = -\Gamma.$$

Теорема 1.15. *Пусть Γ — симметричная правоинвариантная система на G. Тогда ее множество достижимости $\mathcal{A}$ является подгруппой группы G и совпадает с орбитой $\mathcal{O}$.*

Таким образом, проверка управляемости для симметричной системы Γ сводится к проверке алгебраического условия совпадения связных групп Ли $\mathcal{O}$ и G.

Теорема 1.16. *Симметричная правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема на связной группе Ли G тогда и только тогда, когда $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.*

Аффинная по управлению система

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}$$

симметрична, если вектор сноса A равен нулю, а множество управления U симметрично относительно начала координат: $U = -U$. В этом случае теоремы 1.15, 1.16 приобретают следующий вид.

Теорема 1.17. *Пусть множество управления $U \subset \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию $U = -U$. Рассмотрим симметричную аффинную по управлению систему*

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\} \subset L$$

на группе Ли G. Тогда:

(1) *Множество достижимости $\mathcal{A}$ совпадает с орбитой $\mathcal{O}$, т.е. связной подгруппой Ли группы G с алгеброй Ли*

(2) *Если $U = \mathbb{R}^m$, то любая точка $\mathcal{A}$ достижима из единицы Id за любое время:*
$$\mathcal{A}(\mathrm{Id}, T) = \mathcal{A} = \mathcal{O} \text{ для всех } T > 0.$$

(3) *Если G связна и $U = \mathbb{R}^m$, то система Γ управляема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Lie}(B_1, \dots, B_m) = L$.*

1.4.2 Компактные группы Ли

В этом параграфе мы рассмотрим группы Ли, являющиеся *компактными* топологическими пространствами. В этом случае ранговое условие достаточно для управляемости на связной группе Ли.

Теорема 1.18. *Правоинвариантная система* $\Gamma \subset L$ *управляема на компактной связной группе Ли* G *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Теорема 1.19. *Пусть* G *— компактная связная группа Ли и пусть правоинвариантная система* $\Gamma \subset L$ *управляема на* G. *Тогда существует такое* $T > 0$, *что для любых* $g_0, g_1 \in G$ *существует управление, переводящее* g_0 *в* g_1 *за время не больше* T.

1.4.3 Полупрямые произведения групп Ли

В этом параграфе рассматривается случай, когда группа Ли G является полупрямым произведением линейного пространства V и группы Ли K. Если K компактна, то имеется полное описание управляемости; в частности, если группа Ли K не имеет ненулевых неподвижных точек в пространстве K, то ранговое условие эквивалентно управляемости. Если K некомпактна, то условия управляемости получаются из рассмотрения компактных подгрупп группы K.

Пусть K и V — группы Ли, причем пусть K действует на V. Рассмотрим *полупрямое произведение* $G = V \ltimes K$. Многообразие G является декартовым произведением V и K, а умножение в группе G задается следующим образом:

$$(v_1, k_1) \cdot (v_2, k_2) = (v_1 + k_1 v_2, k_1 k_2), \quad v_1, v_2 \in V, \ k_1, k_2 \in K.$$

Алгебра Ли L группы G является *полупрямой суммой* $L(V) \leftthreetimes L(K)$, где $L(V)$ и $L(K)$ являются алгебрами Ли групп V и K соответственно. Линейное пространство L является прямой суммой линейных пространств $L(V)$ и $L(K)$, а произведение в алгебре Ли L определяется следующим образом:

$$[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] = ([a_1, a_2] + b_1(a_2) - b_2(a_1), [b_1, b_2]),$$
$$a_1, a_2 \in L(V), \ b_1, b_2 \in L(K).$$

Обозначим проекции из G на сомножители V и K соответственно через τ и π:

$$\tau : G \to V, \quad \tau(v, k) = v, \qquad v \in V, \ k \in K,$$
$$\pi : G \to K, \quad \pi(v, k) = k, \qquad v \in V, \ k \in K.$$

Проекция π является гомоморфизмом групп Ли. Обозначим через $L(K)$ алгебру Ли группы Ли K. Дифференциал

$$\pi_* : L \to L(K)$$

является гомоморфизмом алгебр Ли.

В данном параграфе предполагается, что V является векторной группой Ли, т.е. конечномерным линейным пространством, рассматриваемым как абелева группа Ли. Действие группы Ли K на линейном пространстве V предполагается линейным.

Определение 1.6. Точка $v \in V$ называется *неподвижной точкой* для действия группы K, если

$$Kv = \{gv \mid g \in K\} = \{v\}.$$

В этом случае будем писать $Kv = v$.

Начало координат $0 \in V$ является неподвижной точкой любого линейного действия на V.

Следующий результат можно рассматривать как обобщение критерия управляемости для компактных групп Ли (теоремы 1.18).

Теорема 1.20. *Пусть компактная связная группа Ли K линейно действует на линейном пространстве V, причем V не имеет ненулевых неподвижных точек относительно K. При этих условиях правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема на группе Ли $G = V \ltimes K$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Если линейное действие компактной группы Ли K имеет ненулевые неподвижные точки в V, то можно показать, что ранговое условие больше не является достаточным для управляемости. Приведем условия управляемости для этого случая. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение на V, инвариантное относительно K.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V \mid Kv = v\}, \\ V_2 &= V_1^{\perp}. \end{aligned}$$

Из определения подпространства V_1 следует, что для любого $X \in L(K)$ и любого $v \in V_1$ имеем $Xv = 0$. Более того, если $X \in L(K)$ и $w \in V_2$, то

$$\langle v, Xw \rangle = -\langle Xv, w \rangle = 0 \qquad \text{для всех } v \in V_1.$$

Поэтому оба пространства V_1 и V_2 инвариантны относительно элементов $L(K)$. Обозначим через P ортогональную проекцию из V на V_1. Напомним, что τ — каноническая проекция из G на V, поэтому τ_* — проекция из L на V. Обозначим через Γ_V проекцию $\tau_*(\Gamma)$ правоинвариантной системы $\Gamma \subset L$. Имеем следующее утверждение.

Теорема 1.21. *Пусть компактная связная группа Ли K линейно действует на линейном пространстве V. Правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема на группе Ли $G = V \ltimes K$ тогда и только тогда, когда:*

(1) $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$ *и*

(2) *выпуклый конус, порожденный $P(\Gamma_V)$, совпадает с V_1.*

1.4.4 Полупростые группы Ли

Определение 1.7. Подпространство $I \subset L$ называется *идеалом* алгебры Ли L, если

$$[I, L] \subset I.$$

Алгебра Ли L называется *полупростой*, если она не содержит ненулевых разрешимых идеалов. Группа Ли G называется *полупростой*, если ее алгебра Ли L полупроста. Алгебра Ли L называется *простой*, если она не содержит нетривиальных (т.е. отличных от $\{0\}$ и L) идеалов. Полупростая алгебра Ли является прямой суммой своих простых неабелевых идеалов.

Группы Ли $\mathrm{SL}(n)$ и $\mathrm{SU}(n)$ просты; группы Ли $\mathrm{SO}(n)$, $n \neq 4$, просты, в то время как $\mathrm{SO}(4)$ полупроста.

В вопросе управляемости интересен случай $\mathrm{SL}(n)$ т.к. остальные две группы компактны, и для них управляемость равносильна ранговому условию. Можно показать, что ранговое условие не является достаточным для управляемости на $\mathrm{SL}(n)$.

Задача управляемости для $\mathrm{SL}(n)$ гораздо сложнее, чем для компактных групп Ли. Вся техника расширения Ли была развита во многом именно для исследования случая $\mathrm{SL}(n)$. Для этого случая нет критериев, но имеются широкие достаточные условия управляемости. В качестве примера приведем следующий результат.

Теорема 1.22. *Пусть вещественные $n \times n$–матрицы с нулевым следом $A = (a_{ij})$ и B удовлетворяют условиям:*

(1) $a_{1n}a_{n1} < 0$,

(2) $B = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n)$,

(3) $b_1 < b_2 < \dots < b_n$,

(4) $b_i - b_j \neq b_k - b_m$ *при* $(i, j) \neq (k, m)$.

При этих условиях система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ управляема на группе $\mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда матрица A неразложима.

Напомним, что $n \times n$–матрица A называется *разложимой*, если существует матрица перестановки базиса P такая, что

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

где A_3 — $k \times k$–матрица с $0 < k < n$. Далее, $n \times n$–матрица называется *неразложимой*, если она не является разложимой. Неразложимые матрицы — это в точности матрицы, не имеющие нетривиальных инвариантных координатных подпространств.

1.4.5 Нильпотентные группы Ли

Алгебра Ли L называется *нильпотентной*, если ее убывающий центральный ряд

$$L_{(1)} = [L, L],\ L_{(2)} = [L, L_{(1)}],\ \ldots,\ L_{(i)} = [L, L_{(i-1)}],\ \ldots, \quad i \in \mathbb{N},$$

стабилизируется на нуле:

$$L \supset L_{(1)} \supset L_{(2)} \supset \cdots \supset L_{(N)} = \{0\}$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Алгебра Ли L называется *разрешимой*, если ее производный ряд

$$L^{(1)} = [L, L],\ L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}],\ \ldots,\ L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}],\ \ldots, \quad i \in \mathbb{N},$$

стабилизируется на нуле:

$$L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \cdots \supset L^{(N)} = \{0\}$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Любая нильпотентная алгебра Ли разрешима, т.к. $L_{(i)} \supset L^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$.

Другая эквивалентная характеристика нильпотентности L состоит в том, что все присоединенные операторы $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, нильпотентны и потому имеют нулевой спектр.

Для аффинных по управлению правоинвариантных систем

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m \right\} \subset L \tag{1.9}$$

на односвязных нильпотентных группах Ли имеется критерий управляемости в терминах подалгебры Ли

$$L_0 = \operatorname{Lie}(B_1, \ldots, B_m).$$

Теорема 1.23. *Пусть G — нильпотентная связная односвязная группа Ли. Система* (1.9) *управляема на G тогда и только тогда, когда $L_0 = L$.*

1.4.6 Группы Ли с кокомпактным радикалом

Обозначим через $\operatorname{Rad} G$ *радикал* группы Ли G, т.е. максимальную разрешимую нормальную подгруппу группы G. В этом параграфе будем предполагать, что группа Ли G имеет *кокомпактный радикал*, то есть факторгруппа $K = G / \operatorname{Rad} G$ компактна. Этот широкий класс групп Ли содержит:

- разрешимые группы Ли ($K = \{\mathrm{Id}\}$),

- компактные группы Ли,

- полупрямые произведения векторных пространств V с компактными группами Ли ($V \subset \operatorname{Rad} G$).

Следующая теорема дает описание управляемости на группах Ли с кокомпактным радикалом в алгебраических терминах; эта характеризация полна в случае односвязных групп Ли.

Теорема 1.24. *Пусть фактор $G/\operatorname{Rad} G$ компактен и $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система полного ранга:* $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$. *Если Γ не содержится ни в каком полупространстве в L, ограниченном подалгеброй, то Γ управляема на связной группе Ли G. Обратное верно, если G односвязна.*

1.5 Библиографические замечания

1.5.1 Управляемость инвариантных систем

Управляемые системы, пространством состояния которых являются группы Ли, изучаются в математической теории управления с начала 70-ых годов прошлого века.

Р. В. Брокетт [57] рассматривал прикладные задачи, которые приводят к управляемым системам на матричных группах и их однородных пространствах; например, в исследованиях модели преобразователя постоянного тока и вращения твердого тела вокруг неподвижной точки возникают задачи управления на группе вращений трехмерного пространства $\mathrm{SO}(3;\mathbb{R})$ и на $\mathrm{SO}(3;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ соответственно. Такие задачи естественно приводят к матричным управляемым системам вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) B_i x(t), \quad u_i(t) \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

где $x(t)$ и A, $B_1, \dots, B_m$ суть $n \times n$–матрицы.

Последовательное математическое исследование управляемых систем на группах Ли было начато В. Джарджевичем и Х. Дж. Суссманном [84]. Они отметили, что переход от матричной системы (1.10) к более общей правоинвариантной системе

$$\dot{x}(t) = A(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) B_i(x(t)), \quad x(t) \in G, \quad u(t) \in \mathbb{R},$$

где A, $B_1, \dots, B_m$ — правоинвариантные векторные поля на группе Ли G, “никоим существенным образом не влияет на природу задачи”. Простейшие свойства множеств достижимости и орбит правоинвариантных систем были установлены в работе [84].

Понятие нормальной достижимости было введено и исследовано (для произвольных нелинейных систем) Х. Дж. Суссманном [112].

Теорема 1.1 доказана А. Кренером [86].

1.5.2 Индуцированные системы на однородных пространствах

Исследование управляемых систем на однородных пространствах, подчиненных действию групп (в частности, билинейных и аффинных системы) было одной из важнейших задач, вызвавших изучение правоинвариантных систем. Результаты раздела 1.2 принадлежат в основном Р. В. Брокетту [57]. Терминология и весь подход в целом были предложены В. Джарджевичем и И. Купкой [82], [81].

У. Бутби и Е. Н. Вильсон [51, 52] нашли полный список линейных групп, действующих транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Более того, ими предложен алгоритм, использующий лишь рациональные операции с матрицами, для проверки того, что группа Ли, порожденная данными матрицами, принадлежит этому списку.

Все группы Ли, транзитивно действующие на сферах, также перечислены, см. работы Х. Самельсона [107], стр. 26, А. Бореля [53, 54], Д. Монтгомери и Х. Самельсона [91].

1.5.3 Насыщение Ли

Идея рассмотрения замыкания множеств достижимости в качестве инварианта правоинвариантных систем при рассмотрении вопросов управляемости восходит к В. Джарджевичу и Х. Дж. Суссманну [84]. Понятие насыщения Ли и техника расширения были развиты В. Джарджевичем и И. Купкой [82, 81], см. также [80].

1.5.4 Теория полугрупп Ли

Теория полугрупп Ли изучает общие подполугруппы групп Ли, не обязательно возникающие как множества достижимости управляемых систем. Для этого случая справедливо обобщение теоремы 1.13.

Подмножество W алгебры Ли L называется *клином*, если W — замкнутый положительный выпуклый конус в L. *Гранью* клина W, обозначаемой $H(W)$, называется наибольшее линейное подпространство L, содержащееся в W:

$$H(W) = W \cap -W.$$

Клин W называется *клином Ли*, если

$$e^{\operatorname{ad} A} W \subset W \quad \text{для всех } A \in H(W).$$

Для замкнутой подполугруппы S группы Ли G, содержащей единицу Id, ее касательный конус

$$L(S) = \{A \in L \mid \exp(tA) \in S \ \forall t \geqslant 0\}$$

является клином Ли.

Основные результаты теории полугрупп Ли и их касательных объектов изложены в книгах К. Х. Хофманна и Дж. Д. Лоусона [75], Дж. Хильгерта и К.-Х. Ниба [70], Дж. Хильгерта, К. Х. Хофманна, и Дж. Д. Лоусона [68].

1.5.5 Симметричные системы

Критерий управляемости для симметричных матричных систем был получен Р. В. Брокеттом [57]. В этой же работе критерий был конкретизирован для групп матриц с положительным определителем $\mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R})$, унимодулярных матриц $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$, симплектических матриц $\mathrm{Sp}\,(n;\mathbb{R})$ и ортогональных унимодулярных матриц $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$.

Общие результаты по управляемости симметричных правоинвариантных систем получены В. Джарджевичем и Х. Дж. Суссманном [84].

1.5.6 Компактные группы Ли

Результаты по управляемости в разделе 1.4.2 и их приложения к случаю группы вращений получены В. Джарджевичем и Х. Дж. Суссманном [84].

1.5.7 Полупрямые произведения групп Ли

Результаты, изложенные в разделе 1.4.3, получены Б. Боннаром, В. Джарджевичем, И. Купкой, и Г. Салле [50].

1.5.8 Полупростые группы Ли

Условия управляемости на группе $\mathrm{SL}(n)$ (теорема 1.22) были получены Ж. П. Готье и Г. Борнаром [64] (в этой работе приводится также аналогичная теорема для случая, когда матрица B может иметь комплексные собственные значения, а также простой алгоритм проверки квадратной матрицы на разложимость). Эти условия были обобщены для произвольных полупростых групп Ли с конечным центром, см. работу Р. Эль Ассуди, Ж. П. Готье, и И. Купки [41]. Эта статья является кульминацией серии работ по управляемости на полупростых группах Ли В. Джарджевича и И. Купки [82, 81], Ж. П. Готье и Г. Борнара [64], Ж. П. Готье, И. Купки, и Г. Салле [65], Р. Эль Ассуди и Ж. П. Готье [39, 40], Ф. Сильвы Лейте и П. Е. Крауча [110], Р. Эль Ассуди [42].

Результаты, относящиеся к подполугруппам полупростых групп Ли, имеются в работах Л. Сан Мартина [108] и Л. Сан Мартина и П. Тонелли [109].

1.5.9 Нильпотентные группы Ли

Условия управляемости для аффинных по управлению систем на нильпотентных группах Ли в разделе 1.4.5 принадлежат В. Аяла [43].

1.5.10 Группы Ли с кокомпактным радикалом

Описание максимальных подполугрупп в группах Ли с кокомпактным радикалом и условия управляемости на таких группах Ли в разделе 1.4.6 получены Дж. Д. Лоусоном [87].

Ранговое условие и гиперповерхностный принцип

Для доказательства неуправляемости системы обычно либо показывают, что ранговое условие нарушено (см. теорему 1.3), либо строят (не обязательно гладкую) гиперповерхность в пространстве состояний, пересекаемую всеми траекториями лишь в одном направлении (см., например, гиперповерхностный принцип в следствии 2.1). Согласно теореме 1.24, для правоинвариантных систем на односвязных группах Ли с кокомпактным радикалом такую гиперповерхность всегда можно отыскать среди подгрупп коразмерности один. Интересный вопрос состоит в том, для любой ли неуправляемой правоинвариантной системы полного ранга существует такая подгруппа коразмерности один? Положительный ответ может дать новый способ получения достаточных условий управляемости, а отрицательный даст пример сложного препятствия к управляемости.

В заключение этой главы отметим, что более подробно с результатами по управляемости инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах можно познакомиться по книге В.Джарджевича [80], обзору [20], а также по статьям, цитированным в этих работах.

Глава 2

Гиперповерхностные системы

Класс управляемых систем в n-мерном пространстве с $(n-1)$ независимым управлением имеет особенности, облегчающие их исследование, особенно в случае неограниченных управлений. Это тем более справедливо для правоинвариантных систем.

2.1 Определения и формулировка критерия управляемости

Определение 2.1. Аффинная по управлению правоинвариантная система

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m \right\} \subset L \tag{2.1}$$

называется *гиперповерхностной*, если алгебра Ли L_0, порожденная векторными полями $B_1, \dots, B_m$, является подалгеброй коразмерности один в L:

$$\dim L_0 = \dim \mathrm{Lie}(B_1, \dots, B_m) = \dim L - 1.$$

Обозначим через G_0 связную подгруппу группы G, соответствующую подалгебре L_0.

Управляемость гиперповерхностных правоинвариантных систем полностью характеризуется следующим утверждением.

Теорема 2.1. *Пусть* Γ *— аффинная по управлению гиперповерхностная система* (2.1) *на связной группе Ли* G.

(1) *Если* G_0 *замкнута в* G, *то* Γ *управляема тогда и только тогда, когда* $A \notin L_0$ *и* $G/G_0 \simeq S^1$.

(2) *Если G_0 незамкнута в G, то Γ управляема тогда и только тогда, когда $A \notin L_0$.*

Теорема 2.1 будет доказана в разделе 2.3, для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

2.2 Предварительные леммы

Пусть алгебра Ли L_0 имеет коразмерность один в L, а подгруппа G_0 замкнута в G. Тогда пространство правых смежных классов $G/G_0 = \{G_0 a \mid a \in G\}$ есть гладкое многообразие, а естественная проекция π действует следующим образом:

$$\pi : G \to G/G_0, \qquad \pi : a \mapsto G_0 a.$$

В любой точке $a \in G$ можно рассмотреть соответствующий дифференциал π_{*a} и сопряженное к нему отображение π_a^*:

$$\pi_{*a} : T_a G \to T_{\pi(a)} G/G_0, \qquad \pi_a^* : T^*_{\pi(a)} G/G_0 \to T_a^* G.$$

Многообразие G/G_0 одномерно, поэтому оно совпадает с S^1 или $\mathbb{R}$. Обозначим через τ дифференциальную 1-форму на G/G_0, равную $d\varphi$ в случае $G/G_0 = S^1$, и dx в случае $G/G_0 = \mathbb{R}$. Тогда $\pi^*\tau$ есть дифференциальная 1-форма на G, которую мы будем обозначать символом ω.

Лемма 2.1. *Пусть $\dim L_0 = \dim L - 1$ и $\overline{G}_0 = G_0$. Тогда $\operatorname{Ker} \omega_a = L_0(a)$ для любого $a \in G$.*

Мы обозначаем через $L_0(a)$ линейное подпространство в $T_a G$, образованное значениями правоинвариантных векторных полей из L_0 в точке $a \in G$.

Доказательство. Во первых, очевидно, что

$$\forall a \in G, \qquad \operatorname{Ker} \pi_{*a} = T_a(G_0 a) = L_0(a). \tag{2.2}$$

После этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} T_a G & \xrightarrow{\omega_a} & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{*a}} & & \| \\ T_{\pi(a)} G/G_0 & \xrightarrow{\tau_{\pi(a)}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Эта диаграмма коммутативна, т.е.

$$\omega_a = \tau_{\pi(a)} \circ \pi_{*a}. \tag{2.3}$$

Но пространство $T_{\pi(a)} G/G_0$ одномерно, поэтому $\tau_{\pi(a)}$ — изоморфизм. Поэтому, в силу равенства (2.3), получаем

$$\operatorname{Ker} \omega_a = \operatorname{Ker} \pi_{*a}.$$

Но тогда из равенства (2.2) следует, что $\operatorname{Ker} \omega_a = L_0(a)$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть* $\dim L_0 = \dim L - 1$, $\overline{G}_0 = G_0$, *и* $A \notin L_0$. *Тогда либо* $\omega(X(a)) > 0$ *для всех* $a \in G$, $X \in \Gamma$ *либо* $\omega(X(a)) < 0$ *для всех* $a \in G$, $X \in \Gamma$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi : G \times L \to \mathbb{R}$, определенную следующим образом:

$$\forall a \in G,\ X \in L, \qquad \Phi(a, X) = \omega\big(X(a)\big).$$

Отметим, что Φ непрерывна на $G \times L$. Для доказательства данной леммы требуется показать, что Φ сохраняет знак на $G \times \Gamma$.

Сначала покажем, что

$$\forall a \in G,\ B \in L_0, \qquad \Phi(a, B) = 0. \tag{2.4}$$

Возьмем любые $a \in G$ и $B \in L_0$. Имеем $B(a) \in L_0(a)$. По лемме 2.1, $B(a) \in \operatorname{Ker} \omega_a$, и равенство (2.4) доказано.

Теперь покажем, что

$$\forall a \in G,\ X \in \Gamma, \qquad \Phi(a, X) \neq 0. \tag{2.5}$$

Пусть $a \in G$ и $X \in \Gamma$. Тогда $X = A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i$ для некоторых чисел $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}$, поэтому с учетом соотношения (2.4)

$$\Phi(a, X) = \omega\left(A(a) + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i(a)\right) = \omega\big(A(a)\big).$$

Далее, $A \notin L_0$, поэтому $A(a) \notin L_0(a)$. Тогда из леммы 2.1 получаем, что $\omega\big(A(a)\big) \neq 0$. Неравенство (2.5) доказано.

Итак, Φ есть непрерывная функция, не обращающаяся в нуль на связном множестве $G \times \Gamma$. Поэтому Φ сохраняет знак на $G \times \Gamma$. □

Лемма 2.3. *Пусть* $p \in \overline{\mathcal{A}}$. *Тогда*

(1) $G_0 p \subset \overline{\mathcal{A}}$,

(2) $\exp(tA)p \in \overline{\mathcal{A}}$ *для всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из включения $G_0 \subset \overline{\mathcal{A}}$ и полугруппового свойства замыкания множества достижимости (лемма 1.1). Утверждение (2) доказывается аналогично. □

Лемма 2.4. *Пусть* $\dim L_0 = \dim L - 1$, $\overline{G}_0 = G_0$, $G/G_0 = S^1$, *и* $A \notin L_0$. *Тогда* $\overline{\mathcal{A}} = G$.

Доказательство. По лемме 2.2, $\omega\big(A(a)\big)$ имеет один и тот же знак для всех $a \in G$. Для определенности, пусть $\omega\big(A(a)\big) > 0$ для всех $a \in G$, в случае отрицательного знака доказательство аналогично.

Покажем, что $\pi(\mathcal{A}) = S^1$. От противного, пусть $\pi(\mathcal{A}) \neq S^1$.

(a) Множество достижимости $\mathcal{A}$ линейно связно (см. лемму 1.1), поэтому $\pi(\mathcal{A})$ также линейно связно. Более того, единичный элемент $e \in G$ принадлежит $\mathcal{A}$, поэтому $\pi(e) = 0 \in S^1$ принадлежит $\pi(\mathcal{A})$. Следовательно, $\pi(\mathcal{A})$

— собственное линейно связное подмножество окружности S^1, содержащее 0. То есть это — промежуток вида

$$\pi(\mathcal{A}) = |\alpha_{\min}; \alpha_{\max}| \tag{2.6}$$

для некоторых чисел $\alpha_{\min} \leqslant 0 \leqslant \alpha_{\max}$, $\alpha_{\max} - \alpha_{\min} \leqslant 2\pi$, где $|$ обозначает одну из скобок [или].

(b) Возьмем любую точку $p \in \pi^{-1}(\alpha_{\max})$. Покажем, что $p \in \overline{\mathcal{A}}$. Легко видеть, что $\alpha_{\max} > 0$, и существует такое $\varepsilon > 0$, что $(\alpha_{\max} - \varepsilon; \alpha_{\max}) \subset \pi(\mathcal{A})$. Возьмем любое $\alpha \in (\alpha_{\max} - \varepsilon; \alpha_{\max})$. Имеем $\alpha \in \pi(\mathcal{A})$, поэтому существует точка $q \in \pi^{-1}(\alpha) \bigcap \mathcal{A}$. По лемме 2.3, $G_0 q \subset \overline{\mathcal{A}}$. Но $G_0 q = \pi^{-1}(\alpha)$, поэтому доказано, что

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \alpha \in (\alpha_{\max} - \varepsilon; \alpha_{\max}), \qquad \pi^{-1}(\alpha) \subset \overline{\mathcal{A}}. \tag{2.7}$$

Пусть $V \subset G$ — любая окрестность точки p. Проекция π есть открытое отображение, поэтому $\pi(V) \subset S^1$ — окрестность точки $\pi(p) = \alpha_{\max}$. Поэтому существует точка

$$\alpha \in (\alpha_{\max} - \varepsilon; \alpha_{\max}) \bigcap \pi(V).$$

С другой стороны, $\alpha \in (\alpha_{\max} - \varepsilon; \alpha_{\max})$, поэтому (в силу (2.7)) имеем

$$\pi^{-1}(\alpha) \subset \overline{\mathcal{A}}. \tag{2.8}$$

С другой стороны, $\alpha \in \pi(V)$, поэтому

$$\pi^{-1}(\alpha) \bigcap V \neq \emptyset. \tag{2.9}$$

Теперь из (2.8) и (2.9) следует, что $V \bigcap \overline{\mathcal{A}} \neq \emptyset$. Доказано, что любая окрестность точки p пересекается с $\overline{\mathcal{A}}$. Поэтому $p \in \overline{\mathcal{A}}$.

(c) Теперь мы придем к противоречию, показав, что множество $\pi(\mathcal{A})$ содержит числа сколь угодно близкие к $\alpha_{\max}$ и большие $\alpha_{\max}$.

Рассмотрим кривые $a(t) = \exp(At)p$ и $\alpha(t) = \pi\big(a(t)\big)$. Имеем $p \in \overline{\mathcal{A}}$, поэтому (по лемме 2.3)

$$\big\{ \, a(t) \mid t \geqslant 0 \, \big\} \subset \overline{\mathcal{A}}. \tag{2.10}$$

Более того, имеем

$$\dot{\alpha}(0) = (d/dt)\big|_{t=0} \pi\big(\exp(At)p\big) = \pi_*\big(A(p)\big).$$

Но $\omega\big(A(p)\big) > 0$, т.е. $d\varphi\big(\pi_*(A(p))\big) > 0$. Поэтому $\alpha(t)$ возрастает в окрестности точки $t = 0$. Поэтому существуют такие $\delta_0 > 0$ и $t_0 > 0$, что $\alpha(t_0) = \alpha_{\max} + \delta_0$. В силу (2.10), имеем $\big\{ \, a(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant t_0 \, \big\} \subset \overline{\mathcal{A}}$. Но $\pi(\overline{\mathcal{A}}) \subset \overline{\pi(\mathcal{A})}$, поэтому

$$\pi\big(\big\{ \, a(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant t_0 \, \big\}\big) = \big[\, 0; \alpha_{\max} + \delta_0 \,\big] \subset \overline{\pi(\mathcal{A})},$$

что противоречит (2.6). Это противоречие показывает, что

$$\pi(\mathcal{A}) = S^1. \tag{2.11}$$

Теперь покажем, что $\overline{\mathcal{A}} = G$. Выберем точку $x \in G$. В силу (2.11), существует точка $y \in G_0 x \bigcap \mathcal{A}$. Из леммы 2.3 следует, что $G_0 y \subset \overline{\mathcal{A}}$. Но $G_0 y = G_0 x$, поэтому $G_0 x \subset \overline{\mathcal{A}}$. В силу произвольности $x \in G$, заключаем, что $\overline{\mathcal{A}} = G$. □

Напомним, что *ранговое условие* для инвариантных систем $\Gamma \subset L$ имеет вид

$$\operatorname{Lie}(\Gamma) = L.$$

Для гиперповерхностных систем это условие легко проверяется в силу следующего предложения.

Лемма 2.5. *Пусть* $\dim L_0 = \dim L - 1$. *Тогда ранговое условие для системы* (2.1) *равносильно условию* $A \notin L_0$.

Доказательство. Если $A \notin L_0$, то $L = L_0 \oplus \mathbb{R} A$ и $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$. А если $A \in L_0$, то $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L_0 \neq L$. □

Лемма 2.6. *Если система* Γ *имеет полный ранг, а множество достижимости* $\mathcal{A}$ *плотно в* G, *то система* Γ *управляема.*

Доказательство. См. теорему 1.8. □

2.3 Доказательство критерия управляемости

Теперь докажем теорему 2.1 с помощью результатов предыдущего раздела.

Доказательство. Ранговое условие необходимо для управляемости, поэтому, в силу леммы 2.5, условие $A \notin L_0$ необходимо в обоих пунктах (1) и (2).

Случай (1). Пусть $\overline{G}_0 = G_0$.

Необходимость условия $G/G_0 = S^1$. Замкнутая подгруппа G_0 имеет коразмерность один в G, поэтому $\dim G/G_0 = 1$. Следовательно, имеем $G/G_0 = \mathbb{R}$ или $G/G_0 = S^1$. Если $G/G_0 = \mathbb{R}$, то из леммы 2.2 вытекает, что проекция $\pi : G \to \mathbb{R}$ есть монотонная функция вдоль любой траектории системы Γ. Это противоречит управляемости системы Γ, поэтому $G/G_0 = S^1$.

Достаточность. Пусть $A \notin L_0$ и $G/G_0 = S^1$.

По лемме 2.5, система Γ имеет полный ранг. В силу леммы 2.4, множество достижимости $\mathcal{A}$ плотно в G. Но тогда из леммы 2.6 следует, что Γ управляема.

Случай (2). Пусть $\overline{G}_0 \neq G_0$.

Достаточность. Обозначим $\overline{G}_0$ через H. Легко видеть, что H — абстрактная подгруппа в G. Но H замкнута в G, поэтому она является подгруппой Ли в G. Более того, G_0 связна, поэтому H также связна. Обозначим алгебру Ли группы H через $L(H)$. Имеем $G_0 \subset H \subset G$, поэтому $L_0 \subset L(H) \subset L$. Но

L_0 имеет коразмерность один в L, поэтому либо $L(H) = L_0$, либо $L(H) = L$. Если $L(H) = L_0$, то $H = G_0$, что противоречит незамкнутости подгруппы G_0. Поэтому $L(H) = L$, и H есть связная подгруппа Ли группы G с алгеброй Ли L. Следовательно, $H = G$, т.е. $\overline{G}_0 = G$. Но $\overline{\mathcal{A}} \supset G_0$, поэтому $\overline{\mathcal{A}} = G$. Ранговое условие выполнено (см. лемму 2.5), и из леммы 2.6 следует управляемость системы Γ. □

2.4 Необходимые условия управляемости для односвязных групп Ли

Воспользуемся теоремой 2.1 для вывода необходимых условий управляемости для аффинных инвариантных систем на односвязных группах Ли.

Следствие 2.1 (Гиперповерхностный принцип). *Гиперповерхностная система Γ не может быть управляема на односвязной группе Ли G.*

Доказательство. В силу односвязности G, ее подгруппа коразмерности один G_0, соответствующая подалгебре L_0, замкнута. Более того, из односвязности G следует односвязность G/G_0. Поэтому $G/G_0 = \mathbb{R}$, и из теоремы 2.1 следует, что Γ неуправляема. □

Следствие 2.2. *Пусть G односвязна. Предположим, что существует подалгебра l коразмерности один в L, содержащая L_0. Тогда Γ неуправляема.*

Доказательство. Систему Γ можно расширить до аффинной системы вида

$$\Gamma_1 = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i + \sum_{i=m+1}^{k} u_i B_i \mid \forall i \ u_i \in \mathbb{R} \right\},$$

где $B_{m+1}, \dots, B_k$ дополняют $B_1, \dots, B_m$ до базиса подалгебры l. В силу следствия 2.1, система Γ_1 неуправляема, поэтому Γ также неуправляема. □

Смысл следствия 2.2 в том, что если существует подалгебра коразмерности один $l \supset L_0$, то множество достижимости системы Γ находится «с одной стороны» от связной подгруппы в G коразмерности один, соответствующей подалгебре l: в силу односвязности G, эта подгруппа коразмерности один разделяет G на две части.

Следствие 2.3. *Пусть G односвязна, а ее алгебра Ли L удовлетворяет следующему условию:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{любая подалгебра } l_1 \subset L,\ l_1 \neq L, \text{ содержится} \\ \text{в некоторой подалгебре коразмерности один } l_2 \subset L. \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

В этом случае аффинная система Γ управляема на G тогда и только тогда, когда $L_0 = L$.

Доказательство. Легко видеть, что условие $L_0 = L$ достаточно для управляемости Γ в силу включения $\mathrm{LS}(\Gamma) \supset L_0$ для системы Γ вида (2.1).

Если $L_0 \neq L$, то по условию (2.12) можно найти такую подалгебру коразмерности один $l \subset L$, что $L_0 \subset l$. Тогда l удовлетворяет условиям следствия 2.2, и Γ неуправляема. □

2.5 Библиографические замечания

Результаты данной главы были впервые опубликованы в работе [99].

Общие гиперповерхностные нелинейные системы исследовал К. Хант [76, 77].

Гиперповерхностный принцип, сформулированный в следствии 2.1, является необходимым условием управляемости на произвольной односвязной группе Ли. По теореме Дж. Лоусона [87], если односвязная группа Ли имеет кокомпактный радикал, то этот принцип достаточен для управляемости. Было бы интересно расширить класс односвязных групп Ли с кокомпактным радикалом так, чтобы гиперповерхностный принцип оставался критерием управляемости.

Теорема 2.1 обобщает аналогичный критерий теоремы В. Аяла [43], имеющей дополнительное предположение о том, что L_0 является идеалом алгебры Ли L.

Глава 3

Вполне разрешимые группы Ли

3.1 Определения, примеры, и формулировка критерия управляемости

В этой главе будем предполагать, что Γ является аффинной по управлению системой вида

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m \right\} \subset L, \tag{3.1}$$

и рассмотрим условия управляемости для следующего подкласса класса разрешимых групп Ли.

Определение 3.1. Разрешимая алгебра Ли L называется *вполне разрешимой*, если все присоединенные операторы $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, имеют вещественный спектр. Группа Ли называется *вполне разрешимой*, если она имеет вполне разрешимую алгебру Ли.

Треугольная группа $\mathrm{T}(n;\mathbb{R})$ (см. пример 3.1 ниже) вполне разрешима, так же как и любая из ее подгрупп. Нильпотентные группы Ли вполне разрешимы, т.к. присоединенные операторы в нильпотентных алгебрах Ли имеют нулевой спектр. С другой стороны, группа движений плоскости $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ является разрешимой, но не вполне разрешимой (группа $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ и ее односвязная накрывающая $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ будут рассматриваться в разделе 5.4).

Вполне разрешимые алгебры Ли имеют много подалгебр коразмерности один, это имеет решающее значение для следующего критерия управляемости на вполне разрешимых группах Ли.

Теорема 3.1. *Пусть G — связная односвязная вполне разрешимая группа Ли. Система* (3.1) *управляема на G тогда и только тогда, когда $L_0 = L$.*

Напомним, что мы обозначаем

$$L_0 = \mathrm{Lie}(B_1, \ldots, B_m).$$

Теорема 3.1 будет доказана в разделе 3.3 с помощью следствия 2.3 и полученных в следующем разделе алгебраических предложений.

3.2 Подалгебры коразмерности один

Лемма 3.1. *Если алгебра Ли L вполне разрешима, то для любой подалгебры $l_1 \subset L$, $l_1 \neq L$, существует такая подалгебра $l_2 \subset L$, что $l_1 \subset l_2$ и $\dim l_2 = \dim l_1 + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим представление алгебры Ли

$$\rho : l_1 \to \mathrm{End}(L/l_1),$$

определенное следующим образом:

$$\forall x \in l_1, v \in L, \quad \rho(x)(v + l_1) = [x, v] + l_1,$$

т.е. ρ есть фактор-представление присоединенного представления

$$\mathrm{ad} : l_1 \to \mathrm{End}(L).$$

Все операторы $\rho(x)$, $x \in l_1$, имеют только вещественные собственные значения, и так как l_1 есть разрешимая алгебра Ли, то по теореме Ли, комплексификация представления ρ имеет общий собственный вектор. Соответствующее собственное значение вещественно, поэтому можно найти общий вещественный собственный вектор $v + l_1 \in L/l_1$, $v \notin l_1$, для всех операторов $\rho(x)$, $x \in l_1$:

$$\forall x \in l_1 \quad \rho(x)(v + l_1) = [x, v] + l_1 = \lambda(x)v + l_1, \quad \lambda(x) \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим линейное пространство

$$l_2 = l_1 + \mathrm{span}(v).$$

Из равенств (3.2) следует, что

$$[l_1, v] \subset l_2,$$

поэтому l_2 есть алгебра Ли. Очевидно, что $l_1 \subset l_2$ и $\dim l_2 = \dim l_1 + 1$. □

Лемма 3.2. *Если алгебра Ли L вполне разрешима, то выполняется условие* (2.12).

Доказательство. Последовательно используем лемму 3.1 и получаем, что любая подалгебра $l \subset L$, $l \neq L$, содержится в такой цепочке подалгебр $l = l_0 \subset l_1 \subset \ldots \subset l_{r-1} \subset l_r = L$, что

$$\dim l_{k+1} = \dim l_k + 1 \quad \forall k = 0, \ldots, r-1.$$

Тогда l_{r-1} — подалгебра коразмерности один в L, содержащая алгебру Ли l. □

Будем говорить, что алгебра Ли L имеет *флаг идеалов*, если существуют такие идеалы I_p, $I_{p-1}, \ldots, I_1$, I_0 в L, что

$$L = I_p \supset I_{p-1} \supset \ldots \supset I_1 \supset I_0 = \{0\}$$

и

$$\dim I_k = k \quad \forall k = 0, 1, \ldots, p.$$

Лемма 3.3. *Пусть алгебра Ли L имеет флаг идеалов. Тогда*

(1) *L разрешима,*

(2) *L вполне разрешима,,*

(3) *любая подалгебра $l \subset L$ имеет флаг идеалов.*

Доказательство. Пусть $L = I_p \supset I_{p-1} \supset \ldots \supset I_1 \supset I_0 = \{0\}$ есть флаг идеалов.

(1) Элементы производного ряда допускают вложение

$$L^{(k)} \subset I_{p-k} \quad \forall k = 0, 1, \ldots, p.$$

Поэтому $L^{(p)} = \{0\}$, т.е. L разрешима.

(2) Выберем такой базис $e_1, \ldots, e_p$ в L, что

$$I_k = \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_k) \quad \forall k = 0, 1, \ldots, p.$$

Пространства I_k суть идеалы в L, поэтому

$$\mathrm{ad}\, x\,(I_k) \subset I_k \quad \forall x \in L.$$

Все операторы $\mathrm{ad}\, x$, $x \in L$, имеют треугольные матрицы в указанном выше базисе. Поэтому все собственные значения операторов $\mathrm{ad}\, x$, $x \in L$, вещественны.

(3) Рассмотрим линейные пространства J_k, $k = 0, 1, \ldots, p$, определенные как

$$J_k = l \bigcap I_k.$$

Имеем

$$\big[l, J_k\big] = \big[l, l \bigcap I_k\big] \subset \big[l, l\big] \bigcap \big[l, I_k\big] \subset l \bigcap \big[L, I_k\big] \subset l \bigcap I_k = J_k,$$

где J_k суть идеалы в l, и $l = J_p \supset J_{p-1} \supset \ldots \supset J_1 \supset J_0 = \{0\}$. Имеем

$$\dim J_{k+1} - \dim J_k = 1 \text{ или } 0 \qquad \forall k = 2, \ldots, p-1.$$

Поэтому, чтобы получить флаг идеалов в l, достаточно исключить из последовательности $\{J_k\}$ все идеалы J_k , для которых указанная выше разность равна нулю. □

3.3 Доказательство критерия управляемости

Доказательство теоремы 3.1 вытекает непосредственно из следствия 2.3 и леммы 3.2.

Из теоремы 3.1 и леммы 3.3 получаем следующее предложение.

Следствие 3.1. *Пусть G — односвязная группа Ли, а ее алгебра Ли L имеет флаг идеалов. В этом случае Γ управляема на G тогда и только тогда, когда $L_0 = L$.*

3.4 Фактор-системы

Пусть h — идеал в L, а H — соответствующая связная подгруппа в G. Предположим, что H замкнута, поэтому G/H есть группа Ли. Обозначим естественную проекцию из G на G/H через π, а ее дифференциал через π_*. Можно корректно определить проекцию системы Γ на G/H:

$$\pi_*(\Gamma) = \left\{ \pi_* v \mid v \in \Gamma \right\} \subset L/h.$$

Заметим, что управляемость системы Γ на G влечет управляемость системы $\pi_*(\Gamma)$ на G/H.

Производная подалгебра $L^{(1)}$ — идеал в L, и для односвязной группы G ее производная подгруппа $G^{(1)}$ замкнута. Эта конструкция и теорема 3.1 позволяют получить следующее необходимое условие управляемости.

Теорема 3.2. *Пусть группа Ли G односвязна. Если система Γ управляема, то*

(1) $\pi_*(L_0) = L/L^{(1)}$,

(2) $m \geqslant \dim L - \dim L^{(1)}$.

Доказательство. (1) Алгебра Ли $L/L^{(1)}$ коммутативна, поэтому удовлетворяет условию (2.12). Если Γ управляема на G, то $\pi_*(\Gamma)$ управляема на $G/G^{(1)}$. Но тогда из теоремы 3.1 следует, что $\pi_*(L_0) = L/L^{(1)}$.

(2) Подалгебра $\pi_*(L_0)$ коммутативна и порождена векторами $\pi_* B_1, \ldots, \pi_* B_m$, поэтому

$$m \geqslant \dim(\pi_*(L_0)) = \dim(L/L^{(1)}) = \dim L - \dim L^{(1)}. \qquad \square$$

Замечание. Эта теорема означает, что инвариантные системы на односвязной группе Ли G с нетривиальным $G/G^{(1)}$ существенно отличаются от общих нелинейных систем. Известно, что в общем случае равенство $m = 2$ достаточно для глобальной управляемости. Однако пункт (2) теоремы 3.2 дает оценку снизу ($\dim G/G^{(1)}$) на количество векторных полей при управлениях $B_1, \ldots, B_m$, необходимое для управляемости на односвязной группе G.

3.5 Примеры

Пример 3.1. Пусть $G = \mathrm{T}(n;\mathbb{R})$ — группа всех верхнетреугольных $n \times n$–матриц с положительными диагональными элементами. Группа Ли $\mathrm{T}(n;\mathbb{R})$ связна, односвязна и вполне разрешима. Ее алгебра Ли $L = \mathfrak{t}(n;\mathbb{R})$ состоит из всех верхнетреугольных $n \times n$–матриц. Производная подалгебра $L^{(1)}$ состоит из всех строго верхнетреугольных матриц, а $L/L^{(1)}$ есть n-мерная абелева алгебра Ли всех диагональных $n \times n$–матриц.

По теореме 3.1, аффинная по управлению система Γ управляема на группе $\mathrm{T}(n;\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $L_0 = L$.

По теореме 3.2 управляемость системы Γ на $\mathrm{T}(n;\mathbb{R})$ достигается с не менее чем $n = \dim L/L^{(1)}$ управлениями. Эта нижняя оценка точна. Например, система $\Gamma = \{\, A + \sum_{i=1}^n u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R} \,\}$, где $B_i = E_{ii} + E_{i,i+1}$ при $i = 1, \ldots, n-1$ и $B_n = E_{nn}$, управляема на $\mathrm{T}(n;\mathbb{R})$. Действительно, легко видеть, что $\mathrm{Lie}(B_1, \ldots, B_n) = \mathfrak{t}(n;\mathbb{R})$.

Пример 3.2. Пусть $G = \mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ — евклидова группа собственных движений двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$. Группа Ли $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ связна, но не односвязна. Она может быть представлена 3×3–матрицами вида

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & b_1 \\ c_{21} & c_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (c_{ij}) \in \mathrm{SO}(2;\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

где C — матрица вращения и b — вектор трансляции. Соответствующая матричная алгебра Ли $L = \mathfrak{e}(2;\mathbb{R})$ порождена как линейное пространство матрицами $A_1 = E_{13}$, $A_2 = E_{23}$, и $A_3 = E_{21} - E_{12}$. Имеем $L^{(1)} = \mathrm{span}(A_1, A_2)$ и $L^{(2)} = \{0\}$; поэтому L разрешима.

Рассмотрим правоинвариантную систему $\Gamma = \{\, A_1 + uA_3 \mid u \in \mathbb{R} \,\}$. Покажем с помощью техники насыщения Ли (см. раздел 1.3), что система Γ управляема на $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$.

Имеем $A_1, \pm A_3 \in \mathrm{LS}(\Gamma)$. Поэтому $\exp(s \,\mathrm{ad}\, A_3) A_1 \in \mathrm{LS}(\Gamma)$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Но $\exp(s \,\mathrm{ad}\, A_3) A_1 = (\cos s) A_1 + (\sin s) A_2$. Следовательно, $\mathrm{span}(A_1, A_2) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$; поэтому $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$. Итак, система Γ управляема на $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$.

Очевидно, Γ может также рассматриваться как правоинвариантная система на односвязной накрывающей $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ группы $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$. Вышеприведенное доказательство управляемости системы Γ на $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ чисто алгебраическое, т.е. оно не использует никаких глобальных геометрических свойств группы $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$. Поэтому Γ управляема и на $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$.

Спектр оператора $\mathrm{ad}\, A_3$ состоит из $\pm i$ и 0. Следовательно, этот пример показывает, что условие полной разрешимости алгебры L, т.е. вещественности спектра присоединенных операторов в теореме 3.1 существенно. Подробные условия управляемости правоинвариантных систем на группе $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ и ее односвязной накрывающей $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ приведены в разделе 5.4.

3.6 Заключительные замечания

3.6.1 Алгебры Ли, сложные для управления

Для любой группы Ли G и любой аффинной по управлению системы

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R} \right\}$$

на группе G, управляемость однородной части

$$\Gamma_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R} \right\}$$

достаточна для управляемости системы Γ на G. Назовем алгебру Ли L *сложной для управления*, если любая аффинная по управлению система $\Gamma \subset L$ и ее однородная часть Γ_0 одновременно управляемы или неуправляемы (на связной односвязной группе Ли G, соответствующей L). В сложной для управления алгебре Ли L вектор сноса A в аффинной по управлению системе $\Gamma \subset L$ не помогает управлению, что не имеет места в произвольных алгебрах Ли.

Имеется расширяющаяся цепочка классов сложных для управления алгебр Ли:

$$\text{абелевы} \subset \text{нильпотентные} \subset \text{вполне разрешимые}. \tag{3.3}$$

Абелев случай очевиден (см., например, [20]), нильпотентный рассмотрен в теореме 1.23, а вполне разрешимый — в теореме 3.1.

С другой стороны, алгебра Ли группы $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ движений плоскости разрешима, не вполне разрешима и не является сложной для управления (см. раздел 5.4).

Согласно гиперповерхностному принципу (следствие 2.1), все алгебры Ли, удовлетворяющие свойству (2.12). являются сложными для управления. Автору неизвестно, является ли это включение строгим. По лемме 3.2, вполне разрешимые алгебры Ли удовлетворяют свойству (2.12). Естественный вопрос заключается в том, существуют ли алгебры Ли, сложные для управления и не содержащиеся в цепочке (3.3)? Если да, то можно ли эту цепочку продолжить до какого-нибудь разумного класса алгебр Ли? Для ответа на этот вопрос может оказаться важной теория подалгебр коразмерности один в алгебрах Ли, созданная К. Х. Хофманном [72, 73].

3.6.2 Подалгебры коразмерности один и два

Решение задачи управляемости для вполне разрешимых алгебр Ли (см. раздел 3.1) основано на следующем факте: любая собственная подалгебра вещественной *вполне разрешимой* алгебры Ли содержится в подалгебре коразмерности один. С другой стороны, любая собственная подалгебра вещественной *разрешимой* алгебры Ли содержится в некоторой подалгебре коразмерности один или два. Можно поэтому предложить следующий подход к исследованию управляемости на разрешимых группах Ли. Спроецируем систему вдоль связной подгруппы, соответствующей указанной подалгебре коразмерности один или два. Затем: 1) если эта подгруппа замкнута и нормальна, то получаем правоинвариантную систему на одно- или двумерной группе Ли (такие системы просты для исследования); 2) если эта подгруппа замкнута, но не является нормальной, то получаем нелинейную систему на одно- или двумерном гладком многообразии (такие системы можно исследовать методами нелинейной теории управляемости); 3) наконец, если эта подгруппа незамкнута, то можно применять теорию управляемых систем на слоениях.

3.7 Библиографические замечания

Результаты данной главы были впервые опубликованы в работе [99].

Вполне разрешимые алгебры Ли (группы Ли) называются также *треугольными над* $\mathbb{R}$ или алгебрами (соответственно группами), *типа* (R), см., например, обзор Э. Б. Винберга, В. В. Горбацевича, и А. Л. Онищика [8].

Глава 4

Разрешимые группы Ли и их обобщения

В этой главе мы получим условия управляемости для разрешимых алгебр Ли L и для их обобщений, а именно, для алгебр Ли L, удовлетворяющих условию $L \neq L^{(1)}$. Эти алгебры Ли образуют широкий класс, содержащий класс разрешимых алгебры Ли, но не совпадающий с ним: например, алгебра $\mathrm{gl}(n;\mathbb{R})$ не является разрешимой и имеет производную подалгебру $\mathrm{sl}(n;\mathbb{R})$. С другой стороны, если алгебра Ли L полупроста, то $L = L^{(1)}$. Обратное неверно: алгебра Ли инфинитезимальных движений трехмерного пространства $\mathrm{e}(3;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \rightthreetimes \mathrm{so}(3;\mathbb{R})$ не является полупростой, хотя и совпадает со своей производной подалгеброй.

В этой главе мы рассмотрим условия управляемости для систем со скалярным управлением

$$\Gamma = \{\, A + uB \mid u \in \mathbb{R} \,\} = A + \mathbb{R}B \subset L \tag{4.1}$$

на группе Ли G, не совпадающей со своей производной подгруппой $G^{(1)}$. Следовательно, будем предполагать, что $L \neq L^{(1)}$.

4.1 Обозначения и определения

Сначала введем обозначения, связанные с собственными значениями и собственными пространствами присоединенного оператора $\mathrm{ad}\, B$ в алгебре Ли L.

Производная подалгебра и вторая производная подалгебра:

$$L^{(1)} = [L, L], \qquad L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}];$$

комплексификация L и $L^{(i)}$, $i = 1, 2$:

$$L_c = L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \qquad L_c^{(i)} = L^{(i)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C};$$

присоединенные представления и операторы:

$$\operatorname{ad} : L \to \operatorname{End}(L), \qquad (\operatorname{ad} B)X = [B, X] \quad \forall X \in L,$$

$$\operatorname{ad}_c : L_c \to \operatorname{End}(L_c), \qquad (\operatorname{ad}_c B)X = [B, X] \quad \forall X \in L_c;$$

спектр операторов $\operatorname{ad} B|_{L^{(i)}}$, $i = 1, 2$:

$$\operatorname{Sp}^{(i)} = \left\{ a \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ker}\left(\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(i)}} - a \operatorname{Id}\right) \neq \{0\} \right\};$$

вещественный и комплексный спектры операторов $\operatorname{ad} B|_{L^{(i)}}$, $i = 1, 2$:

$$\operatorname{Sp}_r^{(i)} = \operatorname{Sp}^{(i)} \cap \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Sp}_c^{(i)} = \operatorname{Sp}^{(i)} \setminus \mathbb{R};$$

комплексные собственные пространства оператора $\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}}$:

$$L_c(a) = \operatorname{Ker}\left(\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}} - a \operatorname{Id}\right);$$

вещественные инвариантные подпространства оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$:

$$L(a) = (L_c(a) + L_c(\overline{a})) \cap L;$$

комплексные корневые пространства операторов $\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(i)}}$, $i = 1, 2$:

$$L_c^{(i)}(a) = \bigcup_{N=1}^{\infty} \operatorname{Ker}\left(\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(i)}} - a \operatorname{Id}\right)^N;$$

вещественные инвариантные подпространства операторов $\operatorname{ad} B|_{L^{(i)}}$, $i = 1, 2$, вещественные аналоги комплексных корневых подпространств:

$$L^{(i)}(a) = \left(L_c^{(i)}(a) + L_c^{(i)}(\overline{a})\right) \bigcap L;$$

компоненты пространств $L^{(i)}$, соответствующие вещественным собственным значениям операторов $\operatorname{ad} B|_{L^{(i)}}$, $i = 1, 2$:

$$L_r^{(i)} = \sum\nolimits^{\oplus} \left\{ L^{(i)}(a) \mid a \in \operatorname{Sp}_r^{(i)} \right\}.$$

Подалгебры $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ являются идеалами алгебры L, поэтому они $(\operatorname{ad} B)$-инвариантны, и ограничения $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ и $\operatorname{ad} B|_{L^{(2)}}$ корректно определены.

В следующей лемме приведены простые утверждения о разложении подалгебр $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ в суммы инвариантных подпространств присоединенного оператора $\operatorname{ad} B$.

Лемма 4.1. (1) $L^{(i)} = \sum\nolimits^{\oplus} \left\{ L^{(i)}(a) \mid a \in \operatorname{Sp}^{(i)}, \operatorname{Im} a \geqslant 0 \right\}$, $i = 1, 2$,

(2) $\operatorname{Sp}^{(2)} \subset \operatorname{Sp}^{(1)}$, $\operatorname{Sp}_r^{(2)} \subset \operatorname{Sp}_r^{(1)}$,

(3) $L^{(2)}(a) \subset L^{(1)}(a)$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}^{(2)}$,

(4) $L_r^{(2)} \subset L_r^{(1)}$,

(5) $\mathrm{Sp}^{(2)} \subset \mathrm{Sp}^{(1)} + \mathrm{Sp}^{(1)}$.

Доказательство. Доказательство проводится с помощью стандартных рассуждений из линейной алгебры. Кроме этого, в пункте (5) используется тождество Якоби. □

Рассмотрим фактор-оператор

$$\widetilde{\mathrm{ad}}\, B \; : \; L^{(1)}/L^{(2)} \to L^{(1)}/L^{(2)},$$

определенный следующим образом:

$$\left(\widetilde{\mathrm{ad}}\, B\right)\left(X + L^{(2)}\right) = (\mathrm{ad}\, B)X + L^{(2)} \quad \forall X \in L^{(1)}.$$

Аналогично при $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ определяем фактор-оператор в факторе корневого пространства:

$$\widetilde{\mathrm{ad}}\, B(a) \; : \; L^{(1)}(a)/L^{(2)}(a) \to L^{(1)}(a)/L^{(2)}(a),$$
$$\left(\widetilde{\mathrm{ad}}\, B(a)\right)\left(X + L^{(2)}(a)\right) = (\mathrm{ad}\, B)X + L^{(2)}(a) \quad \forall X \in L^{(1)}(a),$$

и его комплексификацию:

$$\widetilde{\mathrm{ad}_c}\, B(a) \; : \; L_c^{(1)}(a)/L_c^{(2)}(a) \to L_c^{(1)}(a)/L_c^{(2)}(a),$$
$$\left(\widetilde{\mathrm{ad}_c}\, B(a)\right)\left(X + L_c^{(2)}(a)\right) = (\mathrm{ad}_c\, B)\, X + L_c^{(2)}(a) \quad \forall X \in L_c^{(1)}(a).$$

Определение 4.1. Пусть $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$. Будем обозначать через $\mathrm{j}\,(a)$ геометрическую кратность собственного значения a оператора $\widetilde{\mathrm{ad}_c}\, B(a)$ в линейном пространстве $L_c^{(1)}(a)/L_c^{(2)}(a)$.

Замечания.

(a) Для $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ число $\mathrm{j}\,(a)$ равно количеству жордановых блоков оператора $\widetilde{\mathrm{ad}}\, B(a)$ в пространстве $L^{(1)}(a)/L^{(2)}(a)$.

(b) Если собственное значение $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ простое, то $\mathrm{j}\,(a) = 0$ при $a \in \mathrm{Sp}^{(2)}$ и $\mathrm{j}\,(a) = 1$ при $a \in \mathrm{Sp}^{(1)} \setminus \mathrm{Sp}^{(2)}$.

Предположим, что $L = L^{(1)} \oplus \mathbb{R}B$ для некоторого B из L (это предположение естественно в силу приведенной далее теоремы 4.1). Тогда по лемме 4.1

$$L = \mathbb{R}B \oplus L^{(1)} = \mathbb{R}B \oplus \sum\nolimits^{\oplus} \left\{ L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\, \mathrm{Im}\, a \geqslant 0 \right\}, \qquad (4.2)$$

то есть любой элемент $X \in L$ может быть единственным образом представлен в следующем виде:

$$X = X_B + \sum \left\{ X(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)}, \operatorname{Im} a \geqslant 0 \right\}, \quad X_B \in \mathbb{R}B,\ X(a) \in L^{(1)}(a).$$

Рассмотрим такое разложение для неуправляемого векторного поля A системы Γ:

$$A = A_B + \sum \left\{ A(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)}, \operatorname{Im} a \geqslant 0 \right\}.$$

Будем обозначать через $\widetilde{A}(a)$ каноническую проекцию вектора $A(a) \in L^{(1)}(a)$ на фактор-пространство $L^{(1)}(a)/L^{(2)}(a)$.

Определение 4.2. Пусть $L = L^{(1)} \oplus \mathbb{R}B$, $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$, и $\mathrm{j}\,(a) = 1$. Будем говорить, что вектор $A \in L$ *имеет нулевую a-верхушку*, если

$$\widetilde{A}(a) \in \left(\widetilde{\operatorname{ad}} B(a) - a \operatorname{Id}\right) \left(L^{(1)}(a)/L^{(2)}(a)\right).$$

В противном случае будем говорить, что A *имеет ненулевую a-верхушку*. В этих случаях будем использовать соответствующие обозначения: $\operatorname{top}(A, a) = 0$ или $\operatorname{top}(A, a) \neq 0$.

Замечание. Геометрически, если вектор A имеет ненулевую a-верхушку, то вектор $\widetilde{A}(a)$ имеет ненулевую составляющую, соответствующую старшему присоединенному вектору в (единственной) жордановой цепочке оператора $\widetilde{\operatorname{ad}} B(a)$. Из-за неединственности жорданова базиса эта компонента не определена однозначно, но ее свойство быть равной нулю не зависит от базиса.

Определение 4.3. Пару комплексных чисел (α, β), $\operatorname{Re}\alpha \leqslant \operatorname{Re}\beta$, будем называть *$N$-парой собственных значений оператора* $\operatorname{ad} B$, если выполняются следующие условия:

(1) $\alpha, \beta \in \mathrm{Sp}^{(1)}$,

(2) $L^{(2)}(\alpha) \not\subset \sum \left\{ [L^{(1)}(a), L^{(1)}(b)] \mid a, b \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \operatorname{Re} a,\ \operatorname{Re} b \notin [\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta] \right\}$,

(3) $L^{(2)}(\beta) \not\subset \sum \left\{ [L^{(1)}(a), L^{(1)}(b)] \mid a, b \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \operatorname{Re} a,\ \operatorname{Re} b \notin [\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta] \right\}$.

Замечание. Иными словами, для порождения обоих корневых пространств $L^{(2)}(\alpha)$ и $L^{(2)}(\beta)$ для N-пары (α, β) требуется по меньшей мере одно корневое пространство $L^{(1)}(\gamma)$, для которого $\operatorname{Re}\gamma \in [\alpha, \beta]$. Далее в теореме 4.2 N-пары являются сильнейшим препятствием к управляемости при выполнении необходимых условий теоремы 4.1. В некоторых случаях общего положения свойство отсутствия вещественных N-пар может быть проверено с помощью леммы 4.9.

4.2 Необходимые условия управляемости

4.2.1 Формулировки результатов

Управляемость на односвязных группах Ли G при $G \neq G^{(1)}$ оказывается очень сильным свойством: оно налагает существенные ограничения как на саму группу G, так и на систему Γ.

Теорема 4.1. *Пусть G — связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли L, удовлетворяющей условию $L \neq L^{(1)}$. Если правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ вида* (4.1) *управляема, то*:

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,

(2) $B \notin L^{(1)}$,

(3) $L_r^{(2)} = L_r^{(1)}$,

(4) $\mathrm{Sp}_r^{(2)} = \mathrm{Sp}_r^{(1)}$,

(5) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} \subset \mathrm{Sp}^{(1)} + \mathrm{Sp}^{(1)}$,

(6) $\mathrm{j}\,(a) \leqslant 1$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$,

(7) $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ *таких, что* $\mathrm{j}\,(a) = 1$.

Обозначения $\mathrm{j}\,(a)$ и $\mathrm{top}\,(A, a)$, используемые в теореме 4.1, введены в определениях 4.1 и 4.2.

Замечания.

(a) Первое условие характеризует пространство состояний G, а не систему Γ. Оно означает, что никакая система со скалярным управлением $\Gamma = \{\, A + uB \,\}$ не может быть управляемой на односвязной группе Ли G, для которой $\dim G^{(1)} < \dim G - 1$. То есть для управляемости на такой группе необходимо увеличить количество управлений. Это согласуется с общей оценкой снизу $m \geqslant \dim G - \dim G^{(1)}$ для количества векторных полей при управлениях, необходимого для управляемости системы с векторным управлением $\Gamma = \{\, A + \sum_{i=1}^m u_i B_i \,\}$ на односвязной группе Ли G (см. теорему 3.2).

(b) Условия (3)–(7) нетривиальны только для алгебр Ли L с $L^{(2)} \neq L^{(1)}$ (в частности, для разрешимых некоммутативных L). Если $L^{(2)} = L^{(1)}$, то эти условия очевидно удовлетворяются.

(c) Третье условие означает, что $\mathrm{j}\,(a) = 0$ для всех $a \in \mathrm{Sp}_r^{(1)}$, то есть условие (6) нетривиально только при $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$.

(d) По той же причине, в условии (7) включение $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ можно заменить на $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$. Заметим, что если $\mathrm{j}\,(a) = 0$, то по формальному определению 4.2 вектор A имеет нулевую a-верхушку.

(e) Четвертое и пятое условия следуют из третьего, но проще для проверки. Простое (и сильное) «арифметическое» необходимое условие управляемости (5) может быть проверено по картине расположения собственных значений оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$.

(f) Для разрешимых L при условиях (1), (2) спектр $\mathrm{Sp}^{(1)} = \mathrm{Sp}\,(\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}})$ с точностью до гомотетий один и тот же для всех $B \notin L^{(1)}$. Тогда условия (4), (5) зависят от L, а не от B.

(g) В случае простого спектра оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ необходимые условия управляемости принимают следующую более простую форму.

Следствие 4.1. *Пусть G — связная односвязная группа Ли, а ее алгебра Ли удовлетворяет условию $L \neq L^{(1)}$. Предположим, что спектр* $\mathrm{Sp}^{(1)}$ *прост. Если правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема, то*:

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,

(2) $B \notin L^{(1)}$,

(3) $\mathrm{Sp}_r^{(2)} = \mathrm{Sp}_r^{(1)}$,

(4) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} \subset \mathrm{Sp}^{(1)} + \mathrm{Sp}^{(1)}$,

(5) $A(a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}^{(1)} \setminus \mathrm{Sp}^{(2)}$.

Мы докажем теорему 4.1 и следствие 4.1 в разделе 4.2.3.

Замечание. Здесь мы обсудим условие $L^{(1)} \neq L$, существенное в данной главе и мотивированное ее главной целью — разрешимыми алгебрами Ли L. Рассмотрим разложение Леви

$$L = R \rtimes S, \quad R = \operatorname{rad} L.$$

Известно (см., например, [116], теорема 3.14.1), что разложение Леви для производной подалгебры имеет вид

$$L^{(1)} = [L, R] \rtimes S, \quad [L, R] = \operatorname{rad} L^{(1)}.$$

Это значит, что

$$L^{(1)} \neq L \iff [L, \operatorname{rad} L] \neq \operatorname{rad} L.$$

Если алгебра Ли L полупроста (т.е. $\operatorname{rad} L = 0$), то, очевидно, $L^{(1)} = L$. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, для (неполупростой) алгебры Ли группы движений трехмерного пространства $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{so}(3)$ ее производная подалгебра совпадает с самой алгеброй.

4.2.2 Предварительные леммы

Сначала получим несколько достаточных условий для существования подалгебр коразмерности один в L, содержащих вектор $B \in L$. В силу следствия 2.2, эти условия достаточны для неуправляемости системы Г.

Лемма 4.2. *Пусть $L^{(1)} + \mathbb{R}B \neq L$. Тогда существует подалгебра коразмерности один в L, содержащая B.*

Доказательство. Обозначим через l линейное пространство $L^{(1)}+\mathbb{R}B$. Имеем $[l,l] \subset L^{(1)} \subset l$, поэтому l является подалгеброй; любое линейное подпространство в L, содержащее l, также является подалгеброй. Так как $l \neq L$, существует подпространство коразмерности один l_1 в L, содержащее l. Тогда l_1 — искомая подалгебра коразмерности один в L, содержащая B. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть $L^{(1)} \oplus \mathbb{R}B = L$. Если $L_r^{(2)} \neq L_r^{(1)}$, то существует подалгебра коразмерности один в L, содержащая B.*

Доказательство. Если $L_r^{(1)} \neq L_r^{(2)}$, то существует такое вещественное собственное значение $a_0 \in \mathrm{Sp}_r^{(1)}$, что $L^{(1)}(a_0) \neq L^{(2)}(a_0)$. Пусть векторы

$$\{v_1 + L^{(2)}(a_0), \dots, v_p + L^{(2)}(a_0)\}, \quad p = \dim(L^{(1)}(a_0)/L^{(2)}(a_0)),$$

образуют жорданов базис оператора $\mathrm{ad}\,\widetilde{B(a_0)}$:

$$\mathrm{ad}\,\widetilde{B(a_0)}(v_i + L^{(2)}(a_0)) = (a_0 v_i + v_{i+1}) + L^{(2)}(a_0), \ i = 1, \dots, p-1, \tag{4.3}$$
$$\mathrm{ad}\,\widetilde{B(a_0)}(v_p + L^{(2)}(a_0)) = a_0 v_p + L^{(2)}(a_0). \tag{4.4}$$

(Мы предполагаем, для простоты, что собственное значение a_0 оператора $\mathrm{ad}\,\widetilde{B(a_0)}$ геометрически простое, т.е. матрица этого оператора есть один жорданов блок; в общем случае нескольких жордановых блоков изменения в доказательстве очевидны.)

Рассмотрим линейное пространство

$$l_1 = \mathrm{span}(v_2, \dots, v_p) \oplus L^{(2)}(a_0).$$

Из условий (4.3), (4.4) следует, что пространство l_1 является $(\mathrm{ad}\,B)$-инвариантным. Кроме того, $\dim l_1 = \dim L^{(1)}(a_0) - 1$.

Определим линейные пространства

$$\begin{aligned} l_2 &= l_1 \oplus \sum\nolimits^{\oplus} \{\, L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ a \neq a_0,\ \mathrm{Im}\,a \geqslant 0 \,\}, \\ l_3 &= l_2 \oplus \mathbb{R}B. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Во первых, $\dim l_2 = \dim L^{(1)} - 1$, поэтому

$$\dim l_3 = \dim L^{(1)} = \dim L - 1. \tag{4.6}$$

Во-вторых, $L^{(1)}(a_0) \supset l_1 \supset L^{(2)}(a_0)$, поэтому

$$L^{(1)} \supset l_2 \supset L^{(2)}. \tag{4.7}$$

В-третьих, пространство l_2 является $(\operatorname{ad} B)$-инвариантным. Поэтому, с использованием (4.5) и (4.7), получаем цепочку

$$[l_3, l_3] = [l_2, B] + [l_2, l_2] \subset l_2 + [L^{(1)}, L^{(1)}] = l_2 + L^{(2)} = l_2 \subset l_3.$$

Следовательно, l_3 есть искомая подалгебра в L: она имеет коразмерность один (см. (4.6)) и содержит вектор B (см. (4.5)). □

В следующих трех леммах получено несколько условий, достаточных для нарушения рангового условия $\operatorname{Lie}(A, B) = L$.

Лемма 4.4. *Пусть $B \notin L^{(1)}$ и пусть существует такое линейное подпространство $l_1 \subset L$, что выполняются следующие соотношения:*

(1) $L^{(2)} \subset l_1 \subset L^{(1)}$,

(2) $l_1 \neq L^{(1)}$,

(3) $A \in \mathbb{R}B \oplus l_1$,

(4) $(\operatorname{ad} B) l_1 \subset l_1$.

Тогда $\operatorname{Lie}(A, B) \neq L$.

Доказательство. По условию (1),

$$[l_1, l_1] \subset [L^{(1)}, L^{(1)}] = L^{(2)} \subset l_1,$$

т.е. l_1 есть подалгебра Ли.

Рассмотрим линейное пространство $l = \mathbb{R}B \oplus l_1$. Имеем (учитывая условие (4))

$$[l, l] \subset (\operatorname{ad} B) l_1 + [l_1, l_1] \subset l_1 \subset l,$$

поэтому l есть также подалгебра Ли.

По условию (3) имеем $\operatorname{Lie}(A, B) \subset l$, а условие (2) влечет $l \neq L$. Поэтому $\operatorname{Lie}(A, B) \neq L$. □

Лемма 4.5. *Пусть $L = \mathbb{R}B \oplus L^{(1)}$. Если $\mathrm{j}\,(a_0) > 1$ для некоторого $a_0 \in \operatorname{Sp}^{(1)}$, то* $\operatorname{Lie}(A, B) \neq L$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай комплексного $a_0 \in \operatorname{Sp}_c^{(1)}$. В силу условия $\mathrm{j}\,(a_0) > 1$, фактор-оператор $\widetilde{\operatorname{ad}_c B(a_0)}$ имеет по крайней мере два циклических пространства $V, W \subset L_c^{(1)}(a_0)/L_c^{(2)}(a_0)$. То есть существуют такие две жордановы цепочки $\{v_1, \dots, v_p\}$, $\{w_1, \dots, w_q\}$, $p, q > 0$, что

$$V = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_p), \quad W = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_q),$$

и в этих базисах матрицы операторов $\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}|_V$ и $\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}|_W$ суть жордановы блоки

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_0 \end{pmatrix}}_{p}, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_0 \end{pmatrix}}_{q}. \tag{4.8}$$

Очевидно, можно предполагать, что комплексно сопряженные базисы

$$\{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_p\} \quad \text{и} \quad \{\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_q\}$$

образуют жордановы цепочки оператора $\mathrm{ad}_c \widetilde{B(\overline{a}_0)}$ в комплексно сопряженных пространствах $\overline{V}, \overline{W} \subset L_c^{(1)}(\overline{a}_0)/L_c^{(2)}(\overline{a}_0)$.

Отметим, что

$$(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}) \operatorname{span}(v_i, \dots, v_p) \subset \operatorname{span}(v_i, \dots, v_p), \qquad i = 1, \dots, p, \tag{4.9}$$

$$(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}) \operatorname{span}(w_j, \dots, w_q) \subset \operatorname{span}(w_j, \dots, w_q), \quad j = 1, \dots, q. \tag{4.10}$$

Рассмотрим для прямой суммы

$$L_c^{(1)}(a_0)/L_c^{(2)}(a_0) = V \oplus W \oplus (\text{другие цикл. пр-ва оператора } \mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}) \tag{4.11}$$

разложение

$$\begin{aligned} \widetilde{A(a_0)} = (A_{v_1} v_1 + \ldots + A_{v_p} v_p) + (A_{w_1} w_1 + \ldots + A_{w_q} w_q) + \\ + \ (\text{слагаемые в других цикл. пр-вах оператора } \mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Можно предполагать, что

$$A_{v_1} = 0 \text{ или } A_{w_1} = 0 \text{ в разложении (4.12).} \tag{4.13}$$

Мы докажем это в конце данного доказательства. Теперь предположим, что выполняется условие (4.13) и, для определенности, $A_{w_1} = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \widetilde{A(a_0)} \in \tilde{l} := V \oplus \operatorname{span}(w_2, \dots, w_q) \oplus \\ \oplus (\text{другие циклические пространства оператора } \mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}), \\ \dim \tilde{l} = \dim(L_c^{(1)}(a_0)/L_c^{(2)}(a_0)) - 1, \end{aligned}$$

и, ввиду условий (4.9), (4.10),

$$(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)})\, \tilde{l} \subset \tilde{l}.$$

Теперь пусть $l \subset L_c^{(1)}(a_0)$ есть канонический прообраз пространства $\tilde{l}$. Очевидно, что

$$\begin{gathered} A(a_0) \in l, \\ \dim l = \dim L_c^{(1)}(a_0) - 1, \\ (\mathrm{ad}_c\, B)\, l \subset l, \\ L_c^{(1)}(a_0) \supset l \supset L_c^{(2)}(a_0). \end{gathered}$$

Теперь перейдем к овеществлению:

$$\begin{gathered} A(a_0) \in l_r := (l + \bar{l}) \cap L \subset L^{(1)}(a_0), \\ \dim l_r = \dim L^{(1)}(a_0) - 2, \\ (\mathrm{ad}\, B)\, l_r \subset l_r, \\ L^{(1)}(a_0) \supset l_r \supset L^{(2)}(a_0). \end{gathered}$$

Наконец, для пространства

$$l_1 := l_r \oplus \sum\nolimits^{\oplus} \{\, L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\, a \neq a_0,\, \mathrm{Im}\, a \geqslant 0 \,\}$$

получаем

$$\begin{gathered} A \in \mathbb{R}B \oplus l_1, \\ \dim l_1 = \dim L^{(1)} - 2, \\ (\mathrm{ad}\, B)\, l_1 \subset l_1, \\ L^{(1)} \supset l_1 \supset L^{(2)}. \end{gathered}$$

Итак, все условия леммы 4.4 выполнены, и $\mathrm{Lie}(A, B) \neq L$ по модулю пока недоказанного условия (4.13).

Чтобы доказать это условие, предположим, что $A_{v_1} \neq 0$ и $A_{w_1} \neq 0$ в разложении (4.12). Ввиду симметрии между V и W, можно считать, что $p = \dim V > q = \dim W$. Определим новый базис в V:

$$\tilde{v}_i = v_i + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}} w_i \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant q, \qquad \tilde{v}_i = v_i \quad \text{для} \quad q < i \leqslant p.$$

Легко видеть, что $\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_p\}$ есть базис пространства V, и $A_{w_1} = 0$ в разложении (4.12) для нового базиса $\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_p\}$ и старого базиса $\{w_1, \ldots, w_q\}$.

Покажем, что новый базис жорданов.

Если $1 \leqslant i < q$, то

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{ad}_c\, \widetilde{B(a_0)}\big)\tilde{v}_i &= \big(\mathrm{ad}_c\, \widetilde{B(a_0)}\big) v_i + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}} \big(\mathrm{ad}_c\, \widetilde{B(a_0)}\big) w_i = \\ &= (a_0 v_i + v_{i+1}) + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}} (a_0 w_i + w_{i+1}) = \\ &= a_0 \left(v_i + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}} w_i \right) + \left(v_{i+1} + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}} w_{i+1} \right) = a_0 \tilde{v}_i + \tilde{v}_{i+1}. \end{aligned}$$

Если $i = q$ и $p > q$, то

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}\big)\tilde{v}_q &= \big(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}\big)v_q + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}}\big(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}\big)w_q = \\ &= (a_0 v_q + v_{q+1}) + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}} a_0 w_q = \\ &= a_0\left(v_q + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}} w_q\right) + v_{q+1} = a_0 \tilde{v}_q + \tilde{v}_{q+1}.\end{aligned}$$

Если $i = q$ и $p = q$, то

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}\big)\tilde{v}_q &= \big(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}\big)v_q + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}}\big(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}\big)w_q = \\ &= a_0 v_q + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}} a_0 w_q = a_0\left(v_q + \frac{A_{w_1}}{A_{v_1}} w_q\right) = a_0 \tilde{v}_q.\end{aligned}$$

Если $q < i < p$, то

$$\big(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}\big)\tilde{v}_i = \big(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}\big)v_i = a_0 v_i + v_{i+1} = a_0 \tilde{v}_i + \tilde{v}_{i+1}.$$

Наконец, если $i = p > q$, то

$$\big(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}\big)\tilde{v}_p = \big(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}\big)v_p = a_0 v_p = a_0 \tilde{v}_p.$$

Поэтому $\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_p\}$ есть жорданов базис для $\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}|_V$, и $A_{w_1} = 0$ в разложении (4.12), что и требовалось доказать.

Итак, лемма доказана в случае комплексного собственного значения a_0.

Если же a_0 вещественно, доказательство аналогично и проще т.к. нет необходимости сначала переходить к комплексификации, а затем к овеществлению. □

Лемма 4.6. *Пусть* $L = \mathbb{R}B \oplus L^{(1)}$. *Более того, предположим, что* $\mathrm{j}\,(a_0) = 1$ *и* $\mathrm{top}\,(A, a_0) = 0$ *для некоторого собственного значения* $a_0 \in \mathrm{Sp}^{(1)}$. *Тогда* $\mathrm{Lie}(A, B) \neq L$.

Доказательство. Жорданов базис оператора $\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a_0)}$ состоит из одной жордановой цепочки

$$\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k) = L_c^{(1)}(a_0)/L_c^{(2)}(a_0),$$

и, кроме того, в разложении

$$\widetilde{A(a_0)} = A_{v_1} v_1 + \ldots + A_{v_k} v_k$$

имеем $A_{v_1} = 0$ так как

$$(\mathrm{ad}_c \widetilde{B(a)} - a_0 \,\mathrm{Id})(L_c^{(1)}(a_0)/L_c^{(2)}(a_0)) = \mathrm{span}(v_2, \ldots, v_k).$$

Теперь так же, как в лемме 4.5, обозначим через l прообраз пространства $\mathrm{span}(v_2, \dots, v_k)$ под действием проекции $L_c^{(1)}(a_0) \to L_c^{(1)}(a_0)/L_c^{(2)}(a_0)$, и через $\bar{l}$ комплексное сопряженное пространство к l в L_c. Тогда пространство

$$l_1 = \big((l + \bar{l}) \cap L\big) \oplus \sum\nolimits^{\oplus} \left\{ L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ a \neq a_0,\ \mathrm{Im}\, a \geqslant 0 \right\}$$

удовлетворяет всем условиям леммы 4.4, поэтому $\mathrm{Lie}(A, B) \neq L$. □

4.2.3 Доказательство необходимых условий управляемости

Докажем теорему 4.1.

Доказательство. Предположим, что система Γ управляема на группе G.

Пункты (1) и (2). Если $\dim L^{(1)} \neq \dim L - 1$ или $B \in L^{(1)}$, то $L^{(1)} + \mathbb{R}B \neq L$. Тогда из леммы 4.2 и гиперповерхностного принципа (следствие 2.1) заключаем, что Γ неуправляема. Это противоречие доказывает пункты (1) и (2), и позволяет считать далее в доказательстве, что $L^{(1)} \oplus \mathbb{R}B = L$.

Пункт (3). Если $L_r^{(2)} \neq L_r^{(1)}$, то из леммы 4.3 и гиперповерхностного принципа (следствие 2.1) получаем, что Γ неуправляема.

Пункт (4) следует непосредственно из пункта (3).

Пункт (5). Из предыдущего пункта получаем $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \mathrm{Sp}_r^{(2)}$. Но $\mathrm{Sp}_r^{(2)} \subset \mathrm{Sp}^{(2)} \subset \mathrm{Sp}^{(1)} + \mathrm{Sp}^{(1)}$ (см. лемму 4.1, (5)), следовательно $\mathrm{Sp}_r^{(1)} \subset \mathrm{Sp}^{(1)} + \mathrm{Sp}^{(1)}$.

Пункты (6), (7) следуют из леммы 4.5, 4.6 и из рангового условия. □

Докажем следствие 4.1.

Доказательство. Если спектр $\mathrm{Sp}^{(1)}$ прост, то $L^{(1)}(a) = L(a)$ для всех $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$, и $\dim L^{(1)}(a) = 1$ или 2 при $a \in \mathrm{Sp}_r^{(1)}$ или $\mathrm{Sp}_c^{(1)}$ соответственно. Далее, равенство $L_r^{(2)} = L_r^{(1)}$ эквивалентно равенству $\mathrm{Sp}_r^{(2)} = \mathrm{Sp}_r^{(1)}$. Условие (6) теоремы 4.1 исчезает в силу замечания (b) после определения 4.1, раздел 4.1. А $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$, $\mathrm{j}\,(a) = 1$ тогда и только тогда, когда $A(a) \neq 0$, $a \in \mathrm{Sp}^{(1)} \setminus \mathrm{Sp}^{(2)}$. Теперь следствие 4.1 вытекает непосредственно из теоремы 4.1. □

4.3 Достаточные условия управляемости

4.3.1 Формулировки результатов

При выполнении необходимых условий теоремы 4.1 можно получить широкие достаточные условия управляемости. Отметим, что теперь условие односвязности может быть исключено. Так что нижеприводимые достаточные условия имеют полностью алгебраический характер, т.е. локальны; это отличает их от достаточных условий управляемости для полупростых групп Ли G (см. раздел 1.4.4), включающих глобальное условие (конечность центра группы G).

Теорема 4.2. *Пусть* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *— правоинвариантная система на связной группе Ли* G. *Предположим, что выполняются условия*:

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,

(2) $B \notin L^{(1)}$,

(3) $L_r^{(2)} = L_r^{(1)}$,

(4) $\dim L_c(a) = 1$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,

(5) $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,

(6) *оператор* $\mathrm{ad}\,B|_{L^{(1)}}$ *не имеет* N*-пар вещественных собственных значений.*

Тогда система Γ *управляема на группе Ли* G.

Обозначение $\mathrm{top}\,(A, a)$ и понятие N-пары, используемые в теореме 4.2, введены в определениях 4.2 и 4.3.

Замечания.

(a) Условия (1)–(3) необходимы для управляемости в случае односвязных групп $G \neq G^{(1)}$ (см. теорему 4.1).

(b) Условия (4) и (5) близки к необходимым условиям управляемости (6) и (7) теоремы 4.1 соответственно. Заметим, что четвертое условие означает, что все комплексные собственные значения оператора $\mathrm{ad}\,B|_{L^{(1)}}$ геометрически просты.

(c) Условия (2) и (5) открыты, т.е. сохраняются при малых возмущениях A и B.

(d) Наиболее ограничительным из условий (1)–(6) является последнее. Можно показать, что наибольшая размерность подалгебры $L^{(1)}$, в которой это условие выполняется и сохраняется при малых возмущениях спектра оператора $\mathrm{ad}\,B|_{L^{(1)}}$ для разрешимых L, равна 5. Это будет использовано для получения классификации управляемых систем Γ на односвязных разрешимых группах Ли G малой размерности (см. главу 6).

(e) Технически сложное условие (6) может быть заменено более простым и более ограничительным условием, и тогда достаточные условия записываются как в следствии 4.2 ниже.

(f) При дополнительном предположении о простоте спектра $\mathrm{Sp}^{(1)}$ достаточные условия еще более упрощаются и представлены в следствии 4.3 ниже.

Следствие 4.2. *Пусть следующие условия выполняются для правоинвариантной системы* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *на группе Ли* G:

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,

(2) $B \notin L^{(1)}$,

(3) $L_r^{(2)} = L_r^{(1)}$,

(4) $\dim L_c(a) = 1$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,

(5) $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,

(6) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$ *или* $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ *или* $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\mathrm{Re}\, z < 0\}$.

Тогда система Γ *управляема на* G.

Следствие 4.3. *Пусть следующие условия выполняются для правоинвариантной системы* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *на группе Ли* G:

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,

(2) $B \notin L^{(1)}$,

(3) *спектр* $\mathrm{Sp}^{(1)}$ *прост,*

(4) $\mathrm{Sp}_r^{(2)} = \mathrm{Sp}_r^{(1)}$,

(5) $A(a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,

(6) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$ *или* $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ *или* $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\mathrm{Re}\, z < 0\}$.

Тогда система Γ *управляема на* G.

Теорема 4.2 и ее следствия доказываются с помощью техники насыщения Ли (см. раздел 1.3): показывается, что возрастающая цепочка нижних оценок касательного конуса $\mathrm{LS}(\Gamma)$ к замыканию множества достижимости $\mathcal{A}$ в единице Id стабилизируется на всей алгебре Ли L.

Теорема 4.2 и следствия 4.2, 4.3 будут доказаны в разделе 4.3.3.

4.3.2 Предварительные леммы

Как и выше, будем считать, что $L \neq L^{(1)}$. Ввиду теоремы 4.1, будем также предполагать, что $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$ и $B \notin L^{(1)}$.

Будем обозначать через Id тождественный оператор или единичную матрицу соответствующих размеров, а также

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos\alpha t & -\sin\alpha t \\ \sin\alpha t & \cos\alpha t \end{pmatrix}, \quad M_{r,\alpha} = \begin{pmatrix} r & -\alpha \\ \alpha & r \end{pmatrix}$$

при $t, \alpha, r \in \mathbb{R}$.

Начнем с необходимой в дальнейшем технической леммы.

Лемма 4.7. *Пусть $\eta, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Тогда*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} (1+\eta\cos(\mu t))\sigma_\lambda(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad |\mu| \neq \lambda, \\ (\eta/2)\,\mathrm{Id} & \textit{при} \quad |\mu| = \lambda. \end{cases}$$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} (1+\eta\sin(\mu t))\sigma_\lambda(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad |\mu| \neq \lambda, \\ \pm(\eta/2)\mathrm{J} & \textit{при} \quad \mu = \pm\lambda. \end{cases}$$

Доказательство. Непосредственное вычисление. □

Теперь докажем предложение, играющее центральную роль в доказательстве наших достаточных условий управляемости (теорема 4.2).

Лемма 4.8. *Пусть $C \in \mathrm{LS}(\Gamma) \cap L^{(1)}$. Предположим, что для всех $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$ выполняются следующие условия*:

(1) $\dim L_c(a) = 1$ *и*

(2) $\mathrm{top}\,(C, a) \neq 0$ *или* $L^{(1)}(a) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$.

Пусть, вдобавок, для числа

$$r = \max\{\, \mathrm{Re}\, a \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\, C(a) \neq 0 \,\}$$
$$(\textit{или } r = \min\{\, \mathrm{Re}\, a \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\, C(a) \neq 0 \,\})$$

имеем $r \notin \mathrm{Sp}^{(1)}$ или $C(r) = 0$. Тогда

$$\mathrm{LS}(\Gamma) \supset \sum \left\{ L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\, \mathrm{Re}\, a = r,\, a \neq r \right\}.$$

Теперь идея доказательства теоремы 4.2 может быть представлена следующим образом. В силу (4.2), алгебра Ли L представляется в виде прямой суммы прямой $\mathbb{R}B$ и корневых пространств $L^{(1)}(a)$, $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$. Далее показываем, что насыщение Ли $\mathrm{LS}(\Gamma)$ совпадает с L. Во первых, легко видеть, что $\mathbb{R}B \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$. Затем доказываем от противного, что $L^{(1)}(a) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$ для всех $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$. Действительно, предположим, что существуют числа

$$n = \min \left\{ \mathrm{Re}\, a \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\, L^{(1)}(a) \not\subset \mathrm{LS}(\Gamma) \right\},$$
$$m = \max \left\{ \mathrm{Re}\, a \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\, L^{(1)}(a) \not\subset \mathrm{LS}(\Gamma) \right\}$$

и рассмотрим отрезок $[n, m] \subset \mathbb{R}$. Тогда из леммы 4.8 следует, что n, m является N-парой вещественных собственных значений оператора $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$, что противоречит условию (6) теоремы 4.2. Тогда теорема 4.2 будет доказана, см. раздел 4.3.3.

Докажем лемму 4.8.

Доказательство. Для простоты предположим, что

$$\mathrm{Sp}^{(1)} \cap \{\, \mathrm{Re}\, z = r,\ z \neq r \,\} = \{\, a, \overline{a}; b, \overline{b} \,\}, \tag{4.14}$$

где $a = r + i\alpha$, $b = r + i\beta$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta > 0$. Если на прямой $\{\, \mathrm{Re}\, z = r \,\}$ лежит более двух пар комплексно сопряженных собственных значений, то доказательство аналогично; если же меньше двух пар, то доказательство очевидно упрощается.

Итак,

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= L^{(1)}(a) \oplus L^{(1)}(b) \oplus L^{(1)}(r) \\ &\quad \oplus \sum\nolimits^{\oplus} \{\, L^{(1)}(c) \mid c \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \mathrm{Re}\, c < r, \mathrm{Im}\, c \geqslant 0 \,\} \end{aligned} \tag{4.15}$$

(отметим, что если $r \notin \mathrm{Sp}^{(1)}$, то $L^{(1)}(r) = \{0\}$ по определению), и соответственно

$$C = C(a) + C(b) + \sum \{\, C(c) \mid c \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \mathrm{Re}\, c < r, \mathrm{Im}\, c \geqslant 0 \,\}.$$

Для любого элемента $D \in L$, неотрицательной функции $g(t)$, и натурального числа p рассмотрим предел

$$I(D, g, p) := \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \frac{g(t)}{e^{rt} t^{p-1}} \exp(t \,\mathrm{ad}\, B) D \, dt.$$

Из свойств конуса $\mathrm{LS}(\Gamma)$ (см. раздел 1.3) следует, что если $D \in \mathrm{LS}(\Gamma)$ и предел $I(D, g, p)$ существует, то $I(D, g, p) \in \mathrm{LS}(\Gamma)$. Более того, если вектор $v(t) \in -\mathrm{LS}(\Gamma)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, то

$$I(D, g, p, v) := \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \frac{g(t)}{t^{p-1}} \left(\frac{\exp(t \,\mathrm{ad}\, B) D}{e^{rt}} - v(t) \right) dt \in \mathrm{LS}(\Gamma)$$

когда этот предел существует.

Введем обозначения:

$$C_a(t) = \exp(t \,\mathrm{ad}\, B) C(a), \tag{4.16}$$

$$C_b(t) = \exp(t \,\mathrm{ad}\, B) C(b), \tag{4.17}$$

$$C_{<r}(t) = \exp(t \,\mathrm{ad}\, B) \sum \{\, C(c) \mid c \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \mathrm{Re}\, c < r, \mathrm{Im}\, c \geqslant 0 \,\}. \tag{4.18}$$

Заметим, что

$$I(C, g, p) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \frac{g(t)}{e^{rt} t^{p-1}} (C_a(t) + C_b(t) + C_{<r}(t)) \, dt.$$

Для любой ограниченной неотрицательной функции $g(t)$ и любого $p \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{g(t)}{e^{rt} t^{p-1}} C_{<r}(t) = O(e^{-\varepsilon t} t^{1-p+d}), \quad t \to +\infty,$$

где $\varepsilon = \min\{\, r - \operatorname{Re} c \mid c \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \operatorname{Re} c < r \,\} > 0$, и d равно размеру максимального жорданова блока оператора $\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}}$, соответствующего собственным значениям $c \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ для $\operatorname{Re} c < r$. Поэтому

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \frac{g(t)}{e^{rt}t^{p-1}} C_{<r}(t)\, dt = 0.$$

Следовательно,

$$I(C, g, p) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \frac{g(t)}{e^{rt}t^{p-1}} (C_a(t) + C_b(t))\, dt \in \mathrm{LS}(\Gamma) \tag{4.19}$$

если этот предел существует.

Теперь выберем базисы $\{\, x_1, y_1; \dots; x_k, y_k \,\}$ и $\{\, z_1, w_1; \dots; z_l, w_l \,\}$ в пространствах $L^{(1)}(a)$ и $L^{(1)}(b)$, в которых матрицы операторов $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}(a)}$ и $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}(b)}$ суть жордановы блоки

$$\begin{pmatrix} M_{r,\alpha} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathrm{Id} & M_{r,\alpha} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & M_{r,\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Id} & M_{r,\alpha} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} M_{r,\beta} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathrm{Id} & M_{r,\beta} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & M_{r,\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Id} & M_{r,\beta} \end{pmatrix},$$

где $a = r + i\alpha$, $b = r + i\beta$. В базисах $\{\, x_1, y_1; \dots; x_k, y_k \,\}$ и $\{\, z_1, w_1; \dots; z_l, w_l \,\}$ имеем

$$\begin{aligned} C(a) &= (C_{x_1}, C_{y_1}; \dots; C_{x_k}, C_{y_k})' = (C_{X_1}; \dots; C_{X_k})', \\ C(b) &= (C_{z_1}, C_{w_1}; \dots; C_{z_l}, C_{w_l})' = (C_{Z_1}; \dots; C_{Z_l})', \end{aligned}$$

где $X_i = (x_i, y_i)'$, $C_{X_i} = (C_{x_i}, C_{y_i})' \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, k$, и $Z_i = (z_i, w_i)'$, $C_{Z_i} = (C_{z_i}, C_{w_i})' \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, l$ (штрих означает транспозицию векторов и матриц). Тогда в базисе

$$\{\, x_1, y_1; \dots; x_k, y_k; z_1, w_1; \dots; z_l, w_l \,\}$$

пространства $L^{(1)}(a) \oplus L^{(1)}(b)$ имеем

$$\frac{C_a(t)+C_b(t)}{e^{rt}} = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha(t)C_{X_1} \\ \sigma_\alpha(t)(tC_{X_1}+C_{X_2}) \\ \vdots \\ \sigma_\alpha(t)\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}C_{X_1}+\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}C_{X_2}+\ldots+C_{X_k}\right) \\ \sigma_\beta(t)C_{Z_1} \\ \sigma_\beta(t)(tC_{Z_1}+C_{Z_2}) \\ \vdots \\ \sigma_\beta(t)\left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}C_{Z_1}+\frac{t^{l-2}}{(l-2)!}C_{Z_2}+\ldots+C_{Z_l}\right) \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Пусть $k > l$ (если $k \leqslant l$, то проводимые ниже рассуждения легко модифицируются).

(A) Покажем, что $\operatorname{span}(x_k, y_k) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$.

Согласно условиям данной леммы, имеем $L^{(1)}(a) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$ или $\operatorname{top}(C,a) \neq 0$. Если $L^{(1)}(a) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$, то $\operatorname{span}(x_k, y_k) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$. Поэтому мы предполагаем далее, что выполняется равенство $\operatorname{top}(C,a) \neq 0$, которое в базисе $\{x_1, y_1; \ldots; x_k, y_k\}$ означает $C_{X_1} \neq 0$.

Положим $g(t) = 1 + \eta\cos(\mu t)$ $(g(t) = 1 + \eta\sin(\mu t))$, $|\mu| = \alpha$, $|\eta| \leqslant 1$. Учитывая (4.19), (4.20), и лемму 4.7, получаем

$$\begin{aligned} I(C,g,k) &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_T^{2T}\frac{g(t)}{e^{rt}t^{k-1}}(C_a(t)+C_b(t))\,dt = \\ &= \frac{1}{(k-1)!}(0;0;\ldots;0;MC_{X_1};0;0;\ldots;0)' \in \mathrm{LS}(\Gamma), \end{aligned} \tag{4.21}$$

где

$$M = (\eta/2)\,\mathrm{Id} \quad \text{при} \quad g(t) = 1+\eta\cos(\pm\alpha t), \tag{4.22}$$
$$M = \pm(\eta/2)\mathrm{J} \quad \text{при} \quad g(t) = 1+\eta\sin(\pm\alpha t). \tag{4.23}$$

В силу того, что выпуклая коническая оболочка векторов (4.21) для матриц M вида (4.22) и (4.23), $|\eta| \leqslant 1$, есть плоскость $\operatorname{span}(x_k, y_k)$, заключаем, что $\operatorname{span}(x_k, y_k) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$.

(B) Выберем $v(t) \in -\mathrm{LS}(\Gamma)$ равным

$$\left(0,\ldots,0,\sigma_\alpha(t)\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}C_{X_1}+\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}C_{X_2}+\ldots+C_{X_k}\right),0,\ldots,0\right)',$$

т.е. компоненте вектора (4.20) в плоскости $\operatorname{span}(x_k, y_k)$, и повторим предельный переход, описанный в (A), заменив $I(C,g,k)$ на $I(C,g,k-1,v)$, и получим $\operatorname{span}(x_{k-1}, y_{k-1}) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$.

(C) Повторим процедуру (B) для $I(C,g,p,v)$, где $v(t)$ — компонента вектора (4.20) в плоскости $\operatorname{span}(x_p, y_p)$, а p уменьшается от $k-2$ до $l+1$, и получим включение $\operatorname{span}(x_{l+1}, y_{l+1}; \ldots; x_k, y_k) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$.

(D) Применим процедуру (C) при $p = l$ с использованием функций $g(t)$ вида $1 + \eta\cos(\lambda t)$, $1 + \eta\sin(\lambda t)$ для $|\lambda| = \alpha$ и $|\lambda| = \beta$, и получим $\operatorname{span}(x_l, y_l; z_l, w_l) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$.

(E) Будем уменьшать p и повторять процедуру (D) вплоть до $p = 1$, пока не получим равенство

$$L^{(1)}(a) \oplus L^{(1)}(b) = \\ = \operatorname{span}(x_1, y_1; z_1, w_1; \dots; x_l, y_l; z_l, w_l; x_{l+1}, y_{l+1}; \dots; x_k, y_k) \subset \mathrm{LS}(\Gamma).$$

Ввиду (4.14), доказательство леммы завершено. □

Приведем несколько достаточных условий для того, чтобы элемент B не имел вещественной N-пары собственных значений. Эти условия проверяются просто по картине спектра оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ на комплексной плоскости. Они понадобятся нам при доказательстве следствия 4.2. Следствия 4.2 и 4.3 вытекают из теоремы 4.2 и нижеследующего утверждения, дающего простые достаточные условия несуществования вещественных N-пар собственных значений.

Лемма 4.9. *Пусть $B \notin L^{(1)}$ и $L_r^{(1)} = L_r^{(2)}$. Тогда любое из нижеследующих условий достаточно для того, чтобы оператор $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ не имел вещественных N-пар собственных значений*:

(1) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$ *или*

(2) $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\operatorname{Re} z > 0\}$ *или*

(3) $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\operatorname{Re} z < 0\}$.

Доказательство. Первый случай ($\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$) очевиден, т.к. вещественных собственных значений вообще нет.

Случай (2). Пусть (α, β) есть вещественная N-пара, $0 < \alpha \leqslant \beta$. Имеем

$$L^{(2)}(\alpha) \subset L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] = \sum \{\, [L^{(1)}(a), L^{(1)}(b)] \mid a, b \in \mathrm{Sp}^{(1)} \,\}.$$

Из условия Якоби следует, что $[L^{(1)}(a), L^{(1)}(b)] \subset L^{(1)}(a+b)$, а пространства $L^{(1)}(c)$, $c \in \mathrm{Sp}^{(1)}$, образуют прямую сумму, поэтому

$$L^{(2)}(\alpha) \subset \sum \{\, [L^{(1)}(a), L^{(1)}(b)] \mid a, b \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ a + b = \alpha \,\}. \tag{4.24}$$

Из условий $a + b = \alpha$ и $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$ получаем $\operatorname{Re} a < \alpha$, $\operatorname{Re} b < \alpha$. Поэтому условие (4.24) дает

$$L^{(2)}(\alpha) \subset \sum \{\, [L^{(1)}(a), L^{(1)}(b)] \mid a, b \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b < \alpha \,\}.$$

Это противоречит пункту (2) определения 4.3.

Случай (3) рассматривается аналогично. □

4.3.3 Доказательство достаточных условий управляемости

Докажем теорему 4.2.

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{LS}(\Gamma) \supset L^{(1)}$.

Определим следующие числа и множества:

$$n = \min \{ \operatorname{Re} a \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ L^{(1)}(a) \not\subset \mathrm{LS}(\Gamma) \}, \tag{4.25}$$

$$m = \max \{ \operatorname{Re} a \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ L^{(1)}(a) \not\subset \mathrm{LS}(\Gamma) \}, \tag{4.26}$$

$$N = \{ a \in \mathrm{Sp}^{(1)} \mid \operatorname{Re} a = n,\ L^{(1)}(a) \not\subset \mathrm{LS}(\Gamma) \},$$

$$M = \{ a \in \mathrm{Sp}^{(1)} \mid \operatorname{Re} a = m,\ L^{(1)}(a) \not\subset \mathrm{LS}(\Gamma) \}.$$

Предположим, что $\mathrm{LS}(\Gamma) \not\supset L^{(1)}$, тогда $-\infty < n \leqslant m < +\infty$ и $N \neq \emptyset$, $M \neq \emptyset$.

Напомним следующее разложение вектора A, соответствующее корневым подпространствам оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$:

$$A = A_B + \sum \{ A(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \operatorname{Im} a \geqslant 0 \}.$$

Определим элемент

$$A_1 = A - A_B - \sum \{ A(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \operatorname{Re} a > m \text{ или } \operatorname{Re} a < n,\ \operatorname{Im} a \geqslant 0 \}.$$

Отметим, что $A_1 \in \mathrm{LS}(\Gamma)$ т.к. все слагаемые в правой части принадлежат $\mathrm{LS}(\Gamma)$. Кроме того, $A_1 \in L^{(1)}$. Рассмотрим разложение

$$A_1 = \sum \{ A_1(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \operatorname{Im} a \geqslant 0 \}.$$

Для любого $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ имеем

$$\operatorname{Re} a \in [n; m] \Rightarrow A_1(a) = A(a),$$
$$\operatorname{Re} a \notin [n; m] \Rightarrow A_1(a) = 0.$$

Согласно условию (6) данной теоремы, пара вещественных чисел (n, m) не является N-парой. Поэтому по крайней мере одно из условий (1)–(3) определения 4.3 нарушается. Рассмотрим эти случаи отдельно и придем к противоречию.

(1) Пусть нарушается условие (1) определения 4.3, т.е. $n \notin \mathrm{Sp}^{(1)}$ или $m \notin \mathrm{Sp}^{(1)}$. Предположим, для определенности, что $m \notin \mathrm{Sp}^{(1)}$.

Применим лемму 4.8 при $C = A_1$ и $r = m$. Тогда имеем

$$\mathrm{LS}(\Gamma) \supset \sum \{ L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)}, \operatorname{Re} a = m,\ a \neq m \} =$$
$$= \sum \{ L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)}, \operatorname{Re} a = m \},$$

что противоречит условию (4.26).

Если $n \notin \mathrm{Sp}^{(1)}$, аналогично приходим к противоречию с (4.25). Поэтому случай (1) невозможен.

(2) Пусть теперь $n, m \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ и пусть нарушается условие (2) определения 4.3, т.е.

$$L^{(2)}(n) \subset \sum \{ [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\mu)] \mid \lambda, \mu \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \mathrm{Re}\,\lambda, \mathrm{Re}\,\mu \notin [n; m] \}.$$

Но при $\mathrm{Re}\,\lambda, \mathrm{Re}\,\mu \notin [n; m]$ имеем $L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\mu) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$ (в силу определений (4.25) и (4.26)), следовательно, $L^{(2)}(n) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$. По условию данной теоремы $L^{(1)}(n) = L^{(2)}(n)$, поэтому

$$L^{(1)}(n) \subset \mathrm{LS}(\Gamma). \tag{4.27}$$

Рассмотрим вектор $A_2 = A_1 - A_1(n)$. Имеем $A_2 \in \mathrm{LS}(\Gamma) \cap L^{(1)}$ и $A_2(n) = 0$. Теперь применим лемму 4.8 при $C = A_2$ и $r = n$, и получим

$$\mathrm{LS}(\Gamma) \supset \sum \{ L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \mathrm{Re}\,a = n,\ a \neq n \}.$$

Тогда, в силу (4.27), имеем

$$\mathrm{LS}(\Gamma) \supset \sum \{ L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \mathrm{Re}\,a = n \},$$

что противоречит условию (4.25). Поэтому случай (2) невозможен, и условие (2) определения 4.3 не может нарушаться.

(3) Аналогично доказывается, что и условие (3) определения 4.3 не может нарушаться.

Поэтому все три условия определения 4.3 выполняются, и (n, m) есть вещественная N-пара собственных значений. Это противоречит условию (6) данной теоремы. Поэтому $\mathrm{LS}(\Gamma) \supset L^{(1)}$. Но $L = \mathbb{R}B \oplus L^{(1)}$ и $\mathbb{R}B \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$. Поэтому $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$, и Γ управляема по теореме 1.14. $\square$

Доказательство следствия 4.2 вытекает непосредственно из теоремы 4.2 и леммы 4.9.

Доказательство следствия 4.3 очевидно ввиду следствия 4.2.

Условия управляемости теорем 4.1 и 4.2 для групп Ли $G \neq G^{(1)}$ дают полное описание управляемости для нескольких классов групп Ли: метабелевых, некоторых подгрупп группы аффинных отображений n-мерного пространства, и односвязных групп Ли малой размерности. Эти результаты представлены в далее главах 5 и 6.

4.4 Библиографические замечания

Результаты данной главы были впервые опубликованы в работе [100].

Лемма 4.8 по содержанию и идее доказательства аналогична пункту а) предложения 11 [81].

Результаты К. Х. Хофманна [74] о компактных элементах в разрешимых алгебрах Ли могут быть полезны для понимания управляемости на разрешимых группах Ли без предположения односвязности, существенного для необходимых условий управляемости в этой главе.

Глава 5

Метабелевы группы Ли

Алгебры Ли L, имеющие производный ряд длины 2:

$$L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} = \{0\},$$

называются *метабелевыми*. Группа Ли с метабелевой алгеброй Ли также называется *метабелевой*.

Метабелева алгебра Ли, очевидно, разрешима. Поэтому результаты главы 4 дают условия управляемости для метабелевых групп Ли.

5.1 Условия управляемости на метабелевых группах Ли

Теорема 5.1. *Пусть G — метабелева связная группа Ли. Тогда следующие условия достаточны для управляемости системы $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ на группе G:*

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,

(2) $B \notin L^{(1)}$,

(3) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$,

(4) $\dim L_c(a) = 1$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,

(5) $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$.

Если группа G односвязна, то условия (1)–(5) также необходимы для управляемости системы Γ на G.

Обозначение $\mathrm{top}\,(A, a)$ введено в определении 4.2.

Доказательство. Достаточность вытекает из следствия 4.2.

Для доказательства необходимости для односвязной группы G предположим, что Γ управляема. Тогда пункты (1) и (2) данной теоремы следуют из пунктов (1) и (2) теоремы 4.1.

Условие (3) следует из теоремы 4.1 и метабелевости группы G:

$$L_r^{(1)} = L_r^{(2)} \subset L^{(2)} = \{0\}.$$

Условие (4). Для любых $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$ имеем $L^{(2)}(a) = \{0\}$, поэтому число $\mathrm{j}\,(a)$ равно геометрической кратности собственного значения a оператора $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}(a)}$, т.е. $\dim L_c(a)$. Согласно пункту (6) теоремы 4.1, имеем $\mathrm{j}\,(a) = 1$, поэтому $\dim L_c(a) = 1$.

Условие (5). Для любых $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$ имеем $\mathrm{j}\,(a) = 1$, тогда согласно пункту (7) теоремы 4.1 имеем $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$. □

Пример 5.1. Пусть V — конечномерное вещественное линейное пространство и $l \subset \mathrm{gl}(V)$ — линейная алгебра Ли. Рассмотрим их полупрямую сумму $L = V \leftthreetimes l$. Она является подалгеброй алгебры Ли группы аффинных преобразований пространства V, так как $L \subset V \leftthreetimes \mathrm{gl}(V)$. Если l абелева, то L метабелева:

$$L^{(1)} = lV \leftthreetimes \{0\}, \quad L^{(2)} = \{0\}.$$

В следующем разделе подробно рассматривается частный случай, когда алгебра l одномерна.

5.2 Полупрямые произведения

Пусть V — конечномерное вещественное линейное пространство, $\dim V = n$, и M — ненулевой линейный оператор в V. Рассмотрим метабелеву алгебру Ли $L(M)$, являющуюся полупрямой суммой абелевой алгебры Ли V и одномерной алгебры $\mathbb{R}M$. Эта алгебра может быть представлена $(n+1)\times(n+1)$–матрицами:

$$L(M) = \left\{ \begin{pmatrix} Mt & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathrm{gl}(n+1; \mathbb{R}). \tag{5.1}$$

Обозначим через $G(M)$ связную подгруппу Ли группы $\mathrm{GL}(n+1; \mathbb{R})$, соответствующую алгебре $L(M)$. Она является полупрямым произведением векторной группы Ли $\mathbb{R}^n$ с одномерной группой $G_1 = \{\exp(Mt) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Элементами группы $G(M)$ являются матрицы

$$\begin{pmatrix} \exp(Mt) & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}^n,$$

поэтому группу $G(M)$ можно рассматривать как подгруппу группы $\mathrm{Aff}(n; \mathbb{R})$ аффинных преобразований n-мерного пространства, порожденную однопараметрической группой автоморфизмов G_1 и всеми трансляциями $p \in \mathbb{R}^n$.

Группа $G(M)$ неодносвязна тогда и только тогда, когда однопараметрическая подгруппа G_1 периодична, что очевидно имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{array}{ll} \text{матрица } M \text{ диагонализируема,} & \\ \operatorname{Sp}(M) = ir \cdot (k_1, \dots, k_n) & \text{для некоторых} \\ & r \in \mathbb{R},\ (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n. \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

Замечание. Если условия (5.2) выполняются, то по теореме 1.20 (о полупрямых произведениях линейных пространств и компактных групп Ли) система $\Gamma \subset L(M)$ управляема на $G(M)$ тогда и только тогда, когда она имеет полный ранг: $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L(M)$.

С другой стороны, из критерия управляемости для односвязных метабелевых групп Ли (теорема 5.1) мы получим ниже условия управляемости для односвязной накрывающей $\widetilde{G(M)}$ и для самой группы $G(M)$.

Перед исследованием условий управляемости для группы $G(M)$ мы докажем вспомогательное утверждение, переводящее условие Калмана (эквивалентное как управляемости, так и ранговому условию для линейных систем $\dot{x} = Ax + ub$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, см., например, [3]) на язык собственных значений матрицы A и компонент вектора b в соответствующих корневых пространствах. Это утверждение будет использовано ниже при переформулировке наших условий управляемости для правоинвариантных и билинейных систем.

Лемма 5.1. *Пусть A есть вещественная $n \times n$ матрица, $b \in \mathbb{R}^n$. Тогда условие Калмана*

$$\operatorname{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n \tag{5.3}$$

равносильно следующим условиям:

(1) *матрица A имеет геометрически простой спектр,*

(2) $\operatorname{top}(b, \lambda) \neq 0$ *для любого собственного значения $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$.*

По аналогии с определением 4.2 в разделе 4.1, будем писать $\operatorname{top}(b, \lambda) \neq 0$, если компонента $b(\lambda)$ вектора b в корневом пространстве $\mathbb{R}^n(\lambda)$, соответствующем собственному значению λ, удовлетворяет условию

$$b(\lambda) \notin (A - \lambda \operatorname{Id})\mathbb{R}^n(\lambda),$$

т.е. вектор $b(\lambda)$ имеет ненулевую компоненту, соответствующую старшему присоединенному вектору в (единственной) жордановой цепочке оператора A, соответствующей λ.

При доказательстве леммы 5.1 мы воспользуемся следующим утверждением.

Предложение 5.1. (Лемма Хаутуса, [111], лемма 3.3.7.) *Пусть A есть комплексная $n \times n$ матрица, $b \in \mathbb{C}^n$. Тогда условие Калмана* (5.3) *эквивалентно условию*

$$\operatorname{rank}(\lambda \cdot \operatorname{Id} - A, b) = n \quad \forall\ \lambda \in \operatorname{Sp}(A). \tag{5.4}$$

Докажем лемму 5.1.

Доказательство. Ввиду предложения 5.1, достаточно доказать, что условие (5.4) равносильно условиям (1), (2) леммы 5.1.

Во-первых, предположим, что все собственные значения A вещественны; иначе перейдем к комплексификации. Во-вторых, условие (5.4) сохраняется при заменах базиса в $\mathbb{R}^n$. Поэтому будем считать, что матрица A является жордановой нормальной формой:

$$A = \begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{i_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} = \mathrm{Sp}\,(A),$$

$$J_{i_l}(\lambda_l) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_l & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_l & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_l & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_l \end{pmatrix}}_{i_l}, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Тогда $n \times (n+1)$ матрица в условии (5.4) представляется в виде

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &:= (\lambda \cdot \mathrm{Id}_n - A, b) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cdot \mathrm{Id}_{i_1} - J_{i_1}(\lambda_1) & \cdots & 0 & b(\lambda_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \cdot \mathrm{Id}_{i_k} - J_{i_k}(\lambda_k) & b(\lambda_k) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $b(\lambda_l)$, $l = 1, \ldots, k$, означает проекцию вектора b на корневое пространство матрицы A, соответствующее собственному значению λ_l.

Необходимость. Предположим, что $\operatorname{rank} \phi(\lambda) = n$ для всех $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$ и докажем, что выполняются условия (1), (2) леммы 5.1.

1. Если спектр матрицы A не является геометрически простым, то $\lambda_i = \lambda_j$ для некоторых $i \neq j$. Тогда матрица $\phi(\lambda_i)$ имеет два нулевых столбца, и $\operatorname{rank} \phi(\lambda_i) < n$.

2. Предположим, что вектор b имеет нулевую λ-верхушку для некоторого $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$; для определенности, пусть $\mathrm{top}\,(b, \lambda_1) = 0$. Тогда первая компонента вектора b в выбранном жордановом базисе равна нулю, и первая строка матрицы $\phi(\lambda_1)$ нулевая. Поэтому $\operatorname{rank} \phi(\lambda_1) < n$.

Достаточность. Если условия (1), (2) леммы 5.1 выполняются, то из представления (5.5) легко видеть, что все матрицы $\phi(\lambda_l)$, $l = 1, \ldots, k$, имеют n линейно независимых столбцов, и условие (5.4) выполнено. □

Теперь получим условия управляемости для универсальной накрывающей $\widetilde{G(M)}$, а также для самой группы $G(M)$.

Теорема 5.2. *Пусть M есть ненулевая $n \times n$–матрица, $G = \widetilde{G(M)}$, $L = L(M)$. Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема на G тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

(1) *матрица M имеет чисто комплексный спектр,*

(2) $B \notin L^{(1)}$,

(3) $\operatorname{span}(B, A, (\operatorname{ad} B)A, \dots, (\operatorname{ad} B)^{n-1}A) = L$.

Для группы $G(M)$ условия (1)–(3) достаточны для управляемости. Если условия (5.2) нарушаются, то условия (1)–(3) эквивалентны управляемости на $G(M)$.

Замечание. Используя лемму 5.1, легко показать, что условия (1)–(3) теоремы 5.2 эквивалентны следующим условиям:

(1) матрица M имеет чисто комплексный спектр,

(2) $B \notin L^{(1)}$,

(3) $\operatorname{span}(B, A, (\operatorname{ad} B)A, \dots, (\operatorname{ad} B)^{n-1}A) = L$.

Докажем теорему 5.2.

Доказательство. Теорема 5.1 применима к группе $G = \widetilde{G(M)}$, и условие (1) теоремы 5.1 выполнено.

Разложим вектор $B \in L$ по базису алгебры Ли L:

$$B = B_x x + B_{y_1} y_1 + \dots + B_{y_n} y_n.$$

Условие $B \notin L^{(1)}$ эквивалентно неравенству $B_x \neq 0$. Более того, в силу метабелевости L,

$$\operatorname{Sp}^{(1)} = \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}) = B_x \cdot \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} x|_{L^{(1)}}) = B_x \cdot \operatorname{Sp}(M).$$

По теореме 5.1, система Γ управляема на G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(1) $B \notin L^{(1)}$,

(2) $\operatorname{Sp}(M) \cap \mathbb{R} = \emptyset$,

(3) матрица M имеет геометрически простой спектр,

(4) $\operatorname{top}(A, \lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \operatorname{Sp}(M)$.

Утверждение данной теоремы для $\widetilde{G(M)}$ доказано.

Для $G(M)$ управляемость следует из управляемости на универсальной накрывающей $\widetilde{G(M)}$. Если же условия (5.2) нарушаются, то $G(M) = \widetilde{G(M)}$. □

Пусть теперь условия (5.2) выполняются. Тогда группа $G(M)$ есть полупрямое произведение векторной группы $\mathbb{R}^n$ и одномерной компактной группы G_1. Но условия управляемости на таких полупрямых произведениях были получены Б.Боннаром, В.Джарджевичем, И.Купкой и Г.Салле [50]: если компактная группа не имеет ненулевых неподвижных точек в векторной группе (как раз такой случай мы и имеем), то управляемость эквивалентна ранговому условию (теорема 1.20).

Итак, имеются условия управляемости систем вида $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ на группе $G(M)$ и ее односвязной накрывающей $\widetilde{G(M)}$. В односвязном случае (т.е. когда нарушаются условия (5.2)), они даются теоремой 5.2, в противном случае работает теорема Б.Боннара, В.Джарджевича, И.Купки и Г.Салле 1.20.

5.3 Аффинные системы

Возьмем произвольную матрицу $A \in \mathrm{M}(n; \mathbb{R})$ и вектор $b \in \mathbb{R}^n$, и рассмотрим аффинную систему

$$\dot{x} = uAx + b, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{Σ}$$

Согласно разделу 1.2, эта система подчинена линейному действию группы $G(A) \subset \mathrm{Aff}(n; \mathbb{R})$, описанной в предыдущем пункте.

Это наблюдение в сочетании с условиями управляемости правоинвариантных систем на группах Ли вида $G(A)$ приводит к полным условиям управляемости для аффинных систем Σ.

Теорема 5.3. *Система Σ глобально управляема на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(1) *матрица A имеет чисто комплексный спектр и*

(2) $\mathrm{span}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = \mathbb{R}^n$.

Замечание. По лемме 5.1, условия (1)–(2) этой теоремы можно равносильно переформулировать следующим образом:

(1) матрица A имеет чисто комплексный геометрически простой спектр,

(2) $\mathrm{top}\,(b, \lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$.

Докажем теорему 5.3.

Доказательство. Мы используем условия этой теоремы в эквивалентной форме, указанной в предыдущем замечании.

Достаточность. Рассмотрим билинейную систему

$$\dot{Y} = \overline{A}Y + u\overline{B}Y, \quad Y = (X, 1)' \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{$\overline{\Sigma}$}$$

где

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

суть $(n+1)\times(n+1)$ матрицы. Легко видеть, что система Σ глобально управляема на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда система $\overline{\Sigma}$ глобально управляема в n-мерной аффинной плоскости

$$(\mathbb{R}^n, 1)' = \{\, Y = (X, 1)' \in \mathbb{R}^{n+1} \mid X \in \mathbb{R}^n \,\}.$$

Рассмотрим матричную алгебру Ли $L(A)$ и соответствующую группу Ли $G(A)$, описанную в предыдущем разделе. Имеем $\overline{A}, \overline{B} \in L(A)$, и $\overline{\Gamma} = \overline{A} + \mathbb{R}\overline{B} \subset L(A)$ есть правоинвариантная система на группе $G(A)$. Теорема 5.2 гарантирует, что при выполнении условий (1), (2) данной теоремы система $\overline{\Gamma}$ управляема на группе $G(A)$. Но группа $G(A)$ действует транзитивно в плоскости $(\mathbb{R}^n, 1)'$, и билинейная система $\overline{\Sigma}$ индуцирована правоинвариантной системой $\overline{\Gamma}$ при естественном действии группы $G(A)$ в плоскости $(\mathbb{R}^n, 1)'$, см. раздел 1.2. Поэтому из управляемости $\overline{\Gamma}$ на $G(A)$ следует управляемость $\overline{\Sigma}$ на $(\mathbb{R}^n, 1)'$. Следовательно, система Σ глобально управляема на $\mathbb{R}^n$.

Необходимость. Пусть система Σ глобально управляема на $\mathbb{R}^n$.

(1a) Сначала покажем, что матрица A не имеет вещественных собственных значений. Предположим, что существует хотя бы одно собственное значение $a \in \operatorname{Sp}(A) \cap \mathbb{R}$. Выберем жорданов базис $\{\, e_1, \dots, e_n \,\}$ матрицы A и обозначим через $\{\, x_1, \dots, x_n \,\}$ соответствующие координаты в $\mathbb{R}^n$. Пусть e_k обозначает корневой вектор максимального порядка, соответствующий собственному значению a:

$$(A - a\,\mathrm{Id})^k e_k = a e_k + \varepsilon e_{k+1}, \quad \varepsilon = 1 \text{ или } 0,$$

и k максимально возможное натуральное число. Тогда из системы Σ получаем

$$\dot{x}_k = u a x_k + b_k,$$

где b_k есть k-я координата вектора b в базисе $\{\, e_1, \dots, e_n \,\}$. Теперь очевидно, что по крайней мере одно их полупространств $\{\, x_k \geqslant 0 \,\}$, $\{\, x_k \leqslant 0 \,\}$ в $\mathbb{R}^n$ положительно инвариантно для системы Σ, т.е. любая траектория системы Σ, начинающаяся в таком полупространстве при $t = 0$, не выходит из него при $t > 0$. Поэтому данная система не является глобально управляемой.

(1b) Теперь покажем, что спектр $\operatorname{Sp}(A)$ геометрически прост. Предположим, что для некоторого (комплексного) собственного значения $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ существует по меньшей мере два линейно независимых собственных вектора. Применим преобразование жордановых цепочек, описанное в лемме 4.5, и получим нулевую компоненту вектора b в двумерном подпространстве в $\mathbb{R}^n$, порожденном парой корневых векторов матрицы A максимального порядка (см. условия (4.12), (4.13)). Теперь, если x_k, y_k суть координаты в $\mathbb{R}^n$ в преобразованном жордановом базисе, соответствующие вышеуказанному двумерному подпространству, то из системы Σ получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= u(\alpha x_k + \beta y_k), \\ \dot{y}_k &= u(-\beta x_k + \alpha y_k), \end{aligned}$$

где $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$, $\beta = \operatorname{Im}\lambda$. Поэтому подпространство коразмерности два $\{ x_k = y_k = 0 \}$ в $\mathbb{R}^n$ является (как положительно, так и отрицательно) инвариантным для системы Σ, и она не может быть управляемой.

(2) Наконец, покажем, что вектор b имеет ненулевую λ-верхушку для любого собственного значения $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$. Если это не так, выберем любую жорданову цепочку в корневом пространстве, соответствующем λ, применим приведенное в пункте (1.b) рассуждение, и покажем, что Σ неуправляема.

Необходимость и достаточность полностью доказаны. $\square$

5.4 Группа движений плоскости

Интересно рассмотреть, как развитая выше общая теория работает в наглядном трехмерном случае.

Пусть $G = \mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ — евклидова группа собственных движений плоскости $\mathbb{R}^2$. Ее алгебра Ли $L = \mathrm{e}(2;\mathbb{R})$ порождена как линейное пространство матрицами $A_1 = E_{13}$, $A_2 = E_{23}$, $A_3 = E_{21} - E_{12}$ и имеет форму (5.1):

$$L = L(M), \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она разрешима (даже метабелева):

$$L^{(1)} = \operatorname{span}(A_1, A_2) \supset L^{(2)} = \{0\},$$

но не вполне разрешима:

$$\operatorname{Sp}(\operatorname{ad} A_3) = \{\pm i, 0\}.$$

Группа Ли $\mathrm{E}(2;\mathbb{R}) = G(M)$ связна, но неодносвязна, это видно и из условий (5.2).

Рассмотрим систему $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathrm{e}(2;\mathbb{R})$ на $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ — односвязной накрывающей группы $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$. Полное описание управляемости системы Γ на $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ выводится из теоремы 5.2.

Теорема 5.4. *Система* $\Gamma = A+\mathbb{R}B \subset \mathrm{e}(2;\mathbb{R})$ *управляема на* $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда векторы* A, B *линейно независимы и* $B \notin \operatorname{span}(A_1, A_2)$.

Можно сравнить условия управляемости для $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ со следующими условиями для $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$, полученными из теоремы 1.20.

Теорема 5.5. *Система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathrm{e}(2;\mathbb{R})$ *управляема на* $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда векторы* A, B *линейно независимы и* $\{A, B\} \not\subset \operatorname{span}(A_1, A_2)$.

Наконец, из теоремы 5.3 получаем следующее предложение.

Теорема 5.6. *Система*

$$\dot{X} = uAX + b, \quad X, b \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}$$

глобально управляема в плоскости $\mathbb{R}^2$ *тогда и только тогда, когда:*

(1) *матрица* A *имеет чисто комплексный спектр,*

(2) $b \neq 0$.

5.5 Библиографические замечания

Результаты данной главы были впервые опубликованы в работе [100].

Глава 6

Классификация управляемых систем на разрешимых группах Ли малой размерности

Возьмем алгебру Ли L и рассмотрим «наибольшую» связную группу Ли G с алгеброй Ли L — односвязную группу Ли. Все остальные связные группы Ли с алгеброй Ли L «меньше» чем G в том смысле, что они являются фактор-группами G/C, где C — некоторая дискретная подгруппа центра группы G. Правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ может поэтому рассматриваться на любой из этих групп, и односвязная группа G наиболее трудна из всех этих групп для управления. Поэтому если дана правоинвариантная система Γ на группе Ли (или однородном пространстве группы Ли) H, то естественно сначала изучить ее управляемость на односвязной накрывающей $\widetilde{H}$ группы H. Если Γ управляема на $\widetilde{H}$, то она очевидно управляема и на H (и всех ее однородных пространствах); в противном случае необходимо использовать специфические геометрические свойства группы H (например, существование периодических однопараметрических подгрупп) для проверки управляемости системы Γ на H. Очевидно и замечательно, что условия управляемости на односвязной группе Ли G должны иметь алгебраическую форму: они полностью определяются алгеброй Ли L и ее подмножеством Γ (см., например, теоремы 1.23, 3.1, 4.1, 5.1, 5.2).

Это обосновывает следующее определение.

Определение 6.1. Правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ называется *управляемой*, если она управляема на (единственной) связной односвязной группе Ли с алгеброй Ли L.

А следующее определение естественно, по крайней мере, для разрешимых алгебр Ли малой размерности.

Определение 6.2. Алгебра Ли L называется *управляемой*, если существуют $A, B \in L$ такие, что система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ управляема.

Замечание. Мы определяем управляемость алгебры Ли L в терминах аффинных прямых

$$A + \mathbb{R}B = \big\{A + uB \mid u \in \mathbb{R}\big\} \subset L.$$

Можно показать, что это определение равносильно аналогичному определению в терминах отрезков

$$\{(1-u)A + uB \mid u \in [0,\, 1]\} \subset L,$$

см. далее теорему 6.25.

В этой главе мы покажем, что для разрешимых алгебр Ли малой размерности L справедливо следующее:

- существование управляемой системы со скалярным управлением $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$, т.е. управляемость алгебры L, является сильным ограничением на L;
- если L управляема, то почти все пары $(A, B) \in L \times L$ порождают управляемые системы $\Gamma = A + \mathbb{R}B$;
- управляемость системы $\Gamma \subset L$ зависит в основном от L, а не от Γ.

Более того, из этих результатов следует полное описание управляемости в разрешимых алгебрах Ли малой размерности; это описание представлено в следующих разделах.

До размерности 6 включительно мы описываем все управляемые разрешимые алгебры Ли, и приводим критерии управляемости для систем с одним управлением $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$.

Общая картина управляемых разрешимых алгебры Ли «с высоты птичьего полета» такова:

$\dim L = 1$**:** (единственная) алгебра Ли управляема;

$\dim L = 2$**:** обе алгебры Ли неуправляемы;

$\dim L = 3$**:** имеется одно семейство управляемых алгебр Ли: $L_3(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$;

$\dim L = 4$**:** имеется одно семейство управляемых алгебр Ли: $L_4(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$;

$\dim L = 5$**:** имеется два семейства управляемых алгебр Ли:

1. $L_{5,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$,
2. $L_{5,II}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

$\dim L = 6$**:** имеется 6 семейств и, вдобавок, еще две управляемые алгебры Ли:

1. $L_{6,I}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda\neq\mu,\bar{\mu}$,
2. $L_{6,II}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{Re}\mu$, $\lambda\neq\mu,\bar{\mu}$,
3. $L_{6,III}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$,
4. $L_{6,IV}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\,\mathbb{R})$,
5. $L_{6,V}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$,
6. $L_{6,VI}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$,
7. $L_{6,VII}$,
8. $L_{6,VIII}$.

Любая такая алгебра Ли L имеет производную подалгебру $L^{(1)}$ коразмерности один, и комплексные параметры λ и μ суть собственные значения операторов $\operatorname{ad}x|_{L^{(1)}}$, $x\in L\backslash L^{(1)}$. Алгебры Ли в различных семействах неизоморфны между собой. Внутри каждого семейства алгебры Ли изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие множества $\{\lambda,\bar{\lambda},\mu,\bar{\mu}\}$ (или $\{\lambda,\bar{\lambda}\}$) гомотетичны в $\mathbb{C}$ (для семейства $L_{6,I}(\lambda,\mu)$, соответствующие множества $\{\lambda,\bar{\lambda}\}$ и $\{\mu,\bar{\mu}\}$ должны быть гомотетичны с одним и тем же коэффициентом подобия).

Для всех управляемых разрешимых алгебр Ли малой размерности получен следующий общий результат.

Теорема 6.1. *Пусть L есть управляемая разрешимая алгебра Ли,* $\dim L\leqslant 6$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(*a*) *Единственной подалгеброй коразмерности один в L является ее производная подалгебра $L^{(1)}$.*

(*b*) *Пусть $A,B\in L$. Система $\Gamma=A+\mathbb{R}B\subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(1) $B\notin L^{(1)}$;

(2) $\operatorname{Lie}(A,B)=L$.

(*c*) *Пусть $B\in L\setminus L^{(1)}$. Тогда система $\Gamma=A+\mathbb{R}B\subset L$ управляема для почти всех $A\in L$.*

Данная глава имеет следующую структуру. В разделах 6.1–6.6 получено описание управляемых разрешимых алгебр Ли размерности 1–6, а также условия управляемости для систем вида $\Gamma=A+\mathbb{R}B$.

В разделе 6.7 эти результаты объединены в форме, справедливой для всех размерностей от 1 до 6.

В то время как разделы 6.1–6.7 посвящены управляемости прямых $\Gamma=A+\mathbb{R}B$, в разделе 6.8 изучается управляемость отрезков $S=\bigl\{(1-u)A+uB\mid u\in[0,\,1]\bigr\}$.

Получена связь управляемости отрезков с управляемостью прямых, а также общий критерий управляемости для отрезков в разрешимых алгебрах Ли в терминах полуплоскостей, содержащих углы, порожденные отрезками как конусы.

В разделе 6.9 приведено несколько заключительных замечаний, которые могут быть полезны для дальнейшего исследования правоинвариантных систем.

Наконец, в разделе 6.10 доказано несколько вспомогательных предложений.

6.1 Одномерная алгебра Ли

Единственная одномерная алгебра Ли абелева и изоморфна $\mathbb{R}$.

Теорема 6.2. *Одномерная алгебра Ли $\mathbb{R}$ управляема.*

Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathbb{R}$ управляема тогда и только тогда, когда $B \neq 0$.

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно. □

6.2 Двумерные алгебры Ли

Имеется две неизоморфные двумерные алгебры Ли: абелева $\mathbb{R}^2$ и разрешимая неабелева $S_2 = \operatorname{span}(x, y)$, $[x, y] = y$.

Теорема 6.3. *Обе двумерные алгебры Ли $\mathbb{R}^2$ и S_2 неуправляемы.*

Доказательство. Обе алгебры Ли $L = \mathbb{R}^2$ и S_2 вполне разрешимы, т.е. все операторы $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, имеют вещественные спектры. По теореме 3.1, вполне разрешимая алгебра Ли L неуправляема при $\dim L \geqslant 1$. □

6.3 Трехмерные алгебры Ли

6.3.1 Конструкция управляемых алгебр Ли

Конструкция 6.1. Алгебра Ли $L_3(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; см. рис. 6.1.

$$L_3(\lambda) = \operatorname{span}(x, y, z),$$
$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z)} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \lambda = a + bi.$$

Иными словами, в алгебре Ли $L_3(\lambda)$ выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$[x, y] = ay - bz, \quad [x, z] = by + az.$$

Все остальные скобки базисных элементов x, y, и z либо определяются из этих скобок по кососимметричности: $[y, x] = -ay + bz$, $[z, x] = -by - az$, либо равны нулю: $[y, z] = [z, y] = 0$. Мы будем использовать далее подобное описание умножения в разрешимых алгебрах Ли малой размерности.

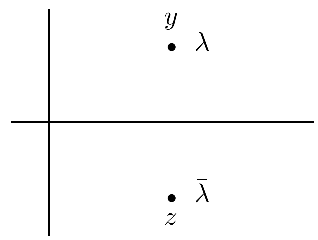


Рис. 6.1: Управляемая алгебра $L_3(\lambda)$.

Замечание. Для (единственной) тройки базисных элементов (x, y, z) выполняется тождество Якоби; поэтому $L_3(\lambda)$ есть алгебра Ли. Такое же рассуждение с тождеством Якоби для всех троек базисных элементов показывает, что все управляемые алгебры Ли, определенные в разделах 6.4–6.6, также реализуются.

Алгебра Ли $L_3(\lambda)$ схематически представлена на рис. 6.1 с помощью собственных значений $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ и овеществлений собственных векторов y, $z \in L_3(\lambda)$ оператора $\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z)}$.

6.3.2 Условия управляемости

Теорема 6.4. *Пусть $L = L_3(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(*a*) *Единственной подалгеброй коразмерности один в L является ее производная подалгебра $L^{(1)}$.*

(*b*) *Пусть $A, B \in L$. Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

  (1) $B \notin L^{(1)}$;

  (2) $\operatorname{Lie}(A, B) = L$, *или*

  (2′) *векторы A и B линейно независимы, или*

  (2″) $\operatorname{span}(B, A, (\operatorname{ad} B)A) = L$.

(*c*) *Пусть $B \in L \setminus L^{(1)}$. Тогда система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема для почти всех $A \in L$.*

Замечание. В пункте (*b*) мы утверждаем, что управляемость системы Γ равносильна любому из следующих (взаимно эквивалентных) условий: (1) & (2), или (1) & (2′), или (1) & (2″). Это же соглашение используется далее в аналогичных теоремах для более высоких размерностей.

Теорема 6.5. *Трехмерная разрешимая алгебра Ли является управляемой тогда и только тогда, когда она изоморфна $L_3(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

6.3.3 Доказательство условий управляемости

Алгебра Ли $L_3(\lambda)$: теорема 6.4

Доказательство. **Утверждение** (b), (1) & (2′). Достаточность. Покажем, что выполняются все условия следствия 4.3.

Условия (1) и (2) очевидно выполняются.

Условие (3). Рассмотрим разложение $B = B_x x + B_y y + B_z z$. По лемме 6.2, имеем

$$\mathrm{Sp}^{(1)} = \mathrm{Sp}\big(\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}\big) = B_x \cdot \mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\, x|_{L^{(1)}}) = B_x \cdot \{\lambda, \bar{\lambda}\}.$$

Условие $B \notin L^{(1)}$ равносильно неравенству $B_x \neq 0$; поэтому спектр $\mathrm{Sp}^{(1)}$ прост.

Условие (4): $\mathrm{Sp}_r^{(2)} = \mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$.

Условие (5), $A(a) \neq 0$ для всех $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$, означает, что вектор A имеет ненулевую проекцию на $L^{(1)}$ вдоль прямой $\mathbb{R}B$, т.е. A и B линейно независимы.

Условие (6): $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$.

Теперь из следствия 4.3 следует, что система Γ управляема.

Необходимость следует из пунктов (2) и (5) следствия 4.1.

Утверждение (b), (1) & (2): докажем, что (2) $\Leftrightarrow$ (2′) при условии (1).

(2) $\Rightarrow$ (2′). Если (2′) нарушается, то (2) также нарушается по лемме 4.6.

(2) $\Leftarrow$ (2′). Если (2) нарушается, то Γ неуправляема по ранговому условию; таким образом, нарушается и условие (2′).

Утверждение (b), (1) & (2″) следует из леммы 6.4.

Утверждение (c) следует из утверждения (b), (1) & (2′).

Утверждение (a) следует из утверждения (c) и леммы 6.5. □

Управляемые алгебры Ли: теорема 6.5

Доказательство. Необходимость. Пусть L есть трехмерная разрешимая алгебра Ли, а $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ — управляемая система. По теореме 4.1, имеем $\dim L^{(1)} = 2$, $B \notin L^{(1)}$, и $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \mathrm{Sp}_r^{(2)}$. Производная подалгебра $L^{(1)}$ нильпотентна и двумерна, потому абелева. Следовательно, $L^{(2)} = \{0\}$, и потому $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \mathrm{Sp}_r^{(2)} = \emptyset$. Таким образом,

$$\mathrm{Sp}^{(1)} = \mathrm{Sp}\big(\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}\big) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}, \quad \lambda = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Тогда существует такой базис y, z плоскости $L^{(1)}$, что

$$[B, y] = ay - bz \quad \text{и} \quad [B, z] = by + az.$$

Учитывая абелевость $L^{(1)}$, заключаем, что $L = L_3(\lambda)$; остается положить $x = B$.

Достаточность очевидно следует из теоремы 6.4 (c). □

6.3.4 Изоморфизмы управляемых алгебр Ли

Будем говорить, что множество $M_1 \subset \mathbb{C}$ *гомотетично* множеству $M_2 \subset \mathbb{C}$, если $M_2 = k \cdot M_1$ для некоторого числа $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Будем обозначать это как $M_1 \sim M_2$.

Теорема 6.6. *Алгебры Ли $L_3(\lambda_1)$ и $L_3(\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, изоморфны тогда и только тогда, когда $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\} \sim \{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\}$.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 6.2.

Достаточность. Возможны следующие два случая:

1. $\lambda_2 = k\lambda_1$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

2. $\lambda_2 = k\bar{\lambda}_1$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

В этих случаях искомый изоморфизм $L_3(\lambda_2) \to L_3(\lambda_1)$ определяется в канонических базисах $L_3(\lambda_i) = \operatorname{span}(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$, заданных в конструкции 6.1, следующим образом:

1. $x_2 \mapsto kx_1$, $y_2 \mapsto y_1$, $z_2 \mapsto z_1$;

2. $x_2 \mapsto kx_1$, $y_2 \mapsto z_1$, $z_2 \mapsto y_1$. □

6.4 Четырехмерные алгебры Ли

6.4.1 Конструкция управляемых алгебр Ли

Конструкция 6.2. Алгебра Ли $L_4(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; см. рис. 6.2.

$$\begin{aligned}
&L_4(\lambda) = \operatorname{span}(x, y, z, w),\\
&\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,w)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \qquad \lambda = a + bi,\\
&[y, z] = w.
\end{aligned}$$

Стрелки на схематическом представлении алгебры Ли $L_4(\lambda)$ на рис. 6.2 означают, что скобка Ли векторов y и z дает вектор w.

Мы будем далее использовать следующее разложение вектора $B \in L_4(\lambda)$:

$$B = B_x x + B_y y + B_z z + B_w w.$$

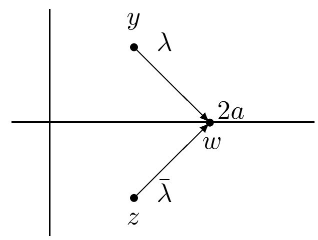


Рис. 6.2: Управляемая алгебра $L_4(\lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda = a$.

6.4.2 Условия управляемости

Теорема 6.7. *Пусть* $L = L_4(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Единственной подалгеброй коразмерности один в* L *является ее производная подалгебра* $L^{(1)}$.

(b) *Пусть* $A, B \in L$. *Система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

- (1) $B \notin L^{(1)}$;
- (2) $\operatorname{Lie}(A, B) = L$, *или*
- (2′) $A(B_x\lambda) \neq 0$, *или*
- (2″) $\operatorname{span}(B, A, (\operatorname{ad} B)A, w) = L$.

(c) *Пусть* $B \in L \setminus L^{(1)}$. *Тогда система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема для почти всех* $A \in L$.

Теорема 6.8. *Четырехмерная разрешимая алгебра Ли управляема тогда и только тогда, когда она изоморфна* $L_4(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

6.4.3 Доказательство условий управляемости

Алгебра Ли $L_4(\lambda)$: теорема 6.7

Доказательство. Сначала докажем теорему для случая $a = \operatorname{Re}\lambda \neq 0$.

Утверждение (b), (1) & (2′). Достаточность вытекает из следствия 4.3. Необходимость вытекает из следствия 4.1.

Утверждение (b), (1) & (2″): покажем, что (2′) ⇔ (2″) при условии (1). Прямая $I = \mathbb{R}w$ есть идеал в L. Рассмотрим фактор-алгебру Ли

$$\tilde{L} = L/I = \operatorname{span}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \simeq L_3(\lambda). \tag{6.1}$$

(Здесь и далее значок волны означает факторизацию.) Далее, в силу теоремы 6.4, получаем цепочку эквивалентных условий

$$(2') \Leftrightarrow \tilde{A}(B_x\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{span}(\tilde{B}, \tilde{A}, (\operatorname{ad}\tilde{B})\tilde{A}) = \tilde{L} \Leftrightarrow (2'').$$

Завершение доказательства: **утверждение** (b), (1) & (2), **утверждение** (c), и **утверждение** (a) получаются как в теореме 6.4.

Теперь рассмотрим случай $a = \operatorname{Re}\lambda = 0$.

Утверждение (a). От противного, пусть $l \subset L$, $l \neq L^{(1)}$, есть подалгебра коразмерности один. Рассмотрим фактор-алгебру Ли (6.1) и образ $\tilde{l} \subset \tilde{L}$ алгебры Ли l. Очевидно, $\dim \tilde{l}$ может равняться 2 или 3.

Пусть $\dim \tilde{l} = 2$. По теореме 6.4, имеем $\tilde{l} = L_3^{(1)}(\lambda) = \operatorname{span}(\tilde{y}, \tilde{z})$. Тогда алгебра Ли l содержит элементы вида

$$\begin{aligned} f^1 &= y + f_w^1 w, \quad f_w^1 \in \mathbb{R}, \\ f^2 &= z + f_w^2 w, \quad f_w^2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Тогда $[f^1, f^2] = w \in l$; поэтому $y, z \in l$. Следовательно, $l = L^{(1)}$, противоречие.

Если $\dim \tilde{l} = 3$, то $\tilde{l} = \tilde{L}$, и получаем $l = L$ с помощью рассуждения, подобного приведенному выше.

Утверждение (b), (1) & (2) следует из утверждения (a) и теоремы 1.24.

Утверждение (b), (1) & (2′). Докажем, что $(2) \Leftrightarrow (2')$ при условии (1).

$(2) \Rightarrow (2')$. Если (2′) нарушается, то (2) также нарушается по лемме 4.6.

$(2) \Leftarrow (2')$. Рассмотрим фактор-алгебру Ли (6.1). В силу теоремы 6.4, получаем цепочку

$$(2') \Rightarrow \tilde{A}(B_x\lambda) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Lie}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{L}.$$

Поэтому алгебра Ли $l = \operatorname{Lie}(A, B)$ содержит элементы вида

$$\begin{aligned} f^1 &= y + f_w^1 w, \qquad f_w^1 \in \mathbb{R}; \\ f^2 &= z + f_w^2 w, \qquad f_w^2 \in \mathbb{R}; \\ f^3 &= x + f_w^3 w, \qquad f_w^3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Тогда $[f^1, f^2] = w \in l$; следовательно, $l = L$.

Утверждение (b), (1) & (2′′) доказывается в точности как в случае $a \neq 0$.

Утверждение (c) следует из утверждения (b), (1) & (2′). □

Управляемые алгебры Ли: теорема 6.8

Доказательство. Необходимость. Пусть L есть четырехмерная управляемая разрешимая алгебра Ли, а $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ — управляемая система. По теореме 4.1, имеем $\dim L^{(1)} = 3$, $B \notin L^{(1)}$, и $L_r^{(2)} = L_r^{(1)}$.

Если $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \mathbb{R}$, то из леммы 6.3 получаем $L_r^{(1)} \neq L_r^{(2)}$, что противоречит условию (3) теоремы 4.1. Следовательно, оператор $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ имеет два комплексных и одно вещественное собственное значение:

$$\mathrm{Sp}^{(1)} = \{a \pm bi,\ c\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$$

Можно так выбрать векторы $y, z, w \in L^{(1)}$, чтобы

$$L^{(1)} = \operatorname{span}(y, z, w); \tag{6.2}$$

$$\operatorname{ad} B|_{\operatorname{span}(y,z,w)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Имеем

$$\mathbb{R}w = L^{(1)}(c) = L_r^{(1)} = L_r^{(2)}. \tag{6.4}$$

Пространство $L^{(2)}/L_r^{(2)}$ четномерно, поэтому $\dim L^{(2)}/L_r^{(2)} = 2$ или 0. Если $\dim L^{(2)}/L_r^{(2)} = 2$, то $\dim L^{(2)} = 3$, т.е. $L^{(2)} = L^{(1)}$, что противоречит нильпотентности $L^{(1)}$. Следовательно, $L^{(2)} = L_r^{(2)}$. Учитывая (6.4), получаем

$$\mathbb{R}w = L^{(2)}.$$

Таким образом, все скобки $[y, w]$, $[z, w]$, и $[y, z]$ должны иметь вид kw, $k \in \mathbb{R}$, и по крайней мере для одной скобки коэффициент k должен быть отличен от нуля. Соотношение $[y, w] = kw$, $k \neq 0$, невозможно т.к. оператор $\operatorname{ad} y|_{L^{(1)}}$ нильпотентен (что следует из нильпотентности алгебры Ли L). Аналогично заключаем, что соотношение $[z, w] = kw$, $k \neq 0$, также невозможно. Поэтому

$$[y, w] = [z, w] = 0 \tag{6.5}$$

и $[y, z] = kw$, $k \neq 0$. Переобозначим вектор kw как w и получим

$$[y, z] = w. \tag{6.6}$$

Далее, $y, z \in L^{(1)}(a+bi)$ и $w \in L^{(1)}(c)$, поэтому $w = [y, z] \in L^{(1)}(2a) = L^{(1)}(c)$; следовательно,

$$c = 2a. \tag{6.7}$$

Теперь положим $x = B$, и, с учетом (6.2)–(6.7), получим $L = L_4(\lambda)$, $\lambda = a + bi$. Необходимость доказана.

Достаточность следует из теоремы 6.7, утверждения (c). □

6.4.4 Изоморфизмы управляемых алгебр Ли

Теорема 6.9. *Алгебры Ли $L_4(\lambda_1)$ и $L_4(\lambda_2)$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, изоморфны тогда и только тогда, когда $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\} \sim \{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\}$.*

Доказательство. Необходимость. По лемме 6.2, справедливо соотношение $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1, 2\operatorname{Re}\lambda_1\} \sim \{\lambda_2, \bar{\lambda}_2, 2\operatorname{Re}\lambda_2\}$; поэтому $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\} \sim \{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\}$.

Достаточность доказывается в точности как в теореме 6.6. □

6.5 Пятимерные алгебры Ли

6.5.1 Конструкция управляемых алгебр Ли

Конструкция 6.3. Алгебра Ли $L_{5,I}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$; см. рис. 6.3.

$$L_{5,I}(\lambda,\mu) = \operatorname{span}(x,y,z,u,v);$$
$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & -d & c \end{pmatrix}, \quad \lambda = a+bi, \quad \mu = c+di.$$

Конструкция 6.4. Алгебра Ли $L_{5,II}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$; см. рис. 6.4.

$$L_{5,II}(\lambda) = \operatorname{span}(x,y,z,u,v);$$
$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & -b & a \end{pmatrix}, \quad \lambda = a+bi.$$

Окружности вокруг собственных значений λ, $\bar\lambda$ на рис. 6.4 означают, что они имеют алгебраическую кратность два. (Отметим, что геометрическая кратность равна единице.)

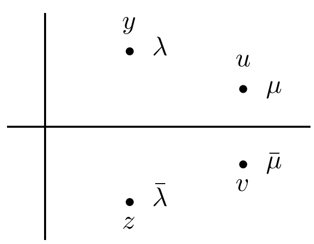


Рис. 6.3: Управляемая алгебра $L_{5,I}(\lambda,\mu)$.

Для элемента B алгебры Ли $L_{5,I}(\lambda,\mu)$ или $L_{5,II}(\lambda)$, будем использовать следующее разложение по базисным векторам:

$$B = B_x x + B_y y + B_z z + B_u u + B_v v.$$

6.5.2 Условия управляемости

Теорема 6.10. *Пусть $L = L_{5,I}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar\mu$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

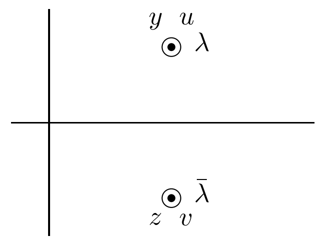


Рис. 6.4: Управляемая алгебра $L_{5,II}(\lambda)$.

(a) *Единственной подалгеброй коразмерности один в L является ее производная подалгебра $L^{(1)}$.*

(b) *Пусть $A, B \in L$. Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) $B \notin L^{(1)}$;

(2) $\mathrm{Lie}(A, B) = L$, *или*

(2′) $A(B_x\lambda) \neq 0$ *и* $A(B_x\mu) \neq 0$, *или*

(2″) $\mathrm{span}(B, A, (\mathrm{ad}\, B)A, (\mathrm{ad}\, B)^2 A, (\mathrm{ad}\, B)^3 A) = L$.

(c) *Пусть $B \in L \setminus L^{(1)}$. Тогда система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема для почти всех $A \in L$.*

Теорема 6.11. *Пусть $L = L_{5,II}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Единственной подалгеброй коразмерности один в L является ее производная подалгебра $L^{(1)}$.*

(b) *Пусть $A, B \in L$. Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема тогда и только тогда, выполняются следующие условия:*

(1) $B \notin L^{(1)}$;

(2) $\mathrm{Lie}(A, B) = L$, *или*

(2′) $\mathrm{top}(A, B_x\lambda) \neq 0$, *или*

(2″) $\mathrm{span}(B, A, (\mathrm{ad}\, B)A, (\mathrm{ad}\, B)^2 A, (\mathrm{ad}\, B)^3 A) = L$.

(c) *Пусть $B \in L \setminus L^{(1)}$. Тогда система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема для почти всех $A \in L$.*

Замечание. Обозначение $\operatorname{top}(A, B_x\lambda) \neq 0$ в теореме 6.11 (и ниже в теореме 6.18) означает, что вектор A имеет ненулевую компоненту в корневом подпространстве максимального порядка для оператора $\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}}$, см. определение 4.2.

Теорема 6.12. *Пятимерная разрешимая алгебра Ли управляема тогда и только тогда, когда она изоморфна $L_{5,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$, или $L_{5,II}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

6.5.3 Доказательство условий управляемости

Алгебра Ли $L_{5,I}(\lambda, \mu)$: теорема 6.10

Доказательство. **Утверждение** (b), (1) & (2′). Алгебра Ли $L = L_{5,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$, метабелева. Критерий управляемости для односвязных метабелевых групп Ли дается теоремой 5.1. Согласно этой теореме, управляемость системы $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ эквивалентна следующим условиям:

(1) $B \notin L^{(1)}$;

(2) $\operatorname{top}(A, a) \neq 0$ для всех $a \in \operatorname{Sp}_c^{(1)}$;

остальные три условия теоремы 5.1 выполняются для $L = L_{5,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$.

Имеем
$$\operatorname{Sp}_c^{(1)} = \operatorname{Sp}^{(1)} = B_x \cdot \{\lambda, \bar{\lambda}, \mu, \bar{\mu}\}.$$

Каждое из условий $\operatorname{top}(A, B_x\lambda) \neq 0$ и $\operatorname{top}(A, B_x\bar{\lambda}) \neq 0$ эквивалентно неравенству $A(B_x\lambda) \neq 0$; аналогично, каждое из условий $\operatorname{top}(A, B_x\mu) \neq 0$ и $\operatorname{top}(A, B_x\bar{\mu}) \neq 0$ эквивалентно неравенству $A(B_x\mu) \neq 0$.

Завершение доказательства: **утверждение** (b), (1) & (2) и (1) & (2″), **утверждение** (c), и **утверждение** (a) доказываются так же, как в теореме 6.4. □

Алгебра Ли $L_{5,II}(\lambda)$: теорема 6.11

Доказательство. Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 6.10. □

Управляемые алгебры Ли: теорема 6.12

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ есть управляемая система в пятимерной разрешимой алгебре Ли L.

Из теоремы 4.1 получаем:

$$\begin{aligned} &\dim L^{(1)} = 4; \\ &B \notin L^{(1)}; \\ &L_r^{(1)} = L_r^{(2)}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Оператор $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ имеет 4 собственные значения. Рассмотрим их возможное расположение на комплексной плоскости и покажем, что предположение управляемости необходимо приводит к случаям, указанным в данной теореме: $L = L_{5,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$, или $L = L_{5,II}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(a) Четыре вещественные собственные значения оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$. В этом случае

$$\mathrm{Sp}^{(1)} = \mathrm{Sp}(\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}) \subset \mathbb{R};$$

это невозможно т.к. лемма 6.3 дает $L_r^{(1)} \neq L_r^{(2)}$, что противоречит условию (6.8).

(b) Два комплексных и два вещественных собственных значения оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$. Пусть теперь

$$\mathrm{Sp}^{(1)} = \{\lambda, \bar{\lambda}, c, d\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Имеем следующее разложение производной подалгебры на инвариантные подпространства оператора $\operatorname{ad} B$:

$$L^{(1)} = L^{(1)}(\lambda) + L^{(1)}(c) + L^{(1)}(d). \tag{6.9}$$

Если $c \neq d$, то линейные пространства $L^{(1)}(c)$ и $L^{(1)}(d)$ одномерны и образуют прямую сумму; если $c = d$, то пространство $L^{(1)}(c) = L^{(1)}(d)$ двумерно. В обоих случаях пространство

$$l = L^{(1)}(c) + L^{(1)}(d)$$

двумерно.

Прокоммутируем соотношение (6.9) с самим собой и получим

$$\begin{aligned} L^{(2)} = &[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] + [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(c)] + \\ &+ [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(d)] + [L^{(1)}(c), L^{(1)}(d)]. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Пространство l есть алгебра Ли так как

$$[L^{(1)}(c), L^{(1)}(d)] \subset L^{(1)}(c + d) \subset L_r^{(1)} = l.$$

Алгебра Ли l нильпотентна (как подалгебра нильпотентной алгебры Ли $L^{(1)}$) и двумерна, потому абелева. Тогда для слагаемых (6.10) имеем

$$\begin{aligned} &[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] \subset L^{(1)}(2 \operatorname{Re} \lambda) \cap L_r^{(2)}; \\ &[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(c)] \subset L^{(1)}(\lambda + c) \cap L_c^{(2)}; \\ &[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(d)] \subset L^{(1)}(\lambda + d) \cap L_c^{(2)}; \\ &[L^{(1)}(c), L^{(1)}(d)] = 0. \end{aligned}$$

Поэтому все пространства

$$[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(c)], \quad [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(d)], \quad [L^{(1)}(c), L^{(1)}(c)]$$

имеют нулевое пересечение с $L_r^{(2)}$, и $L_r^{(2)} = [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)]$; следовательно,

$$\dim L_r^{(2)} = \dim[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] \leqslant 1,$$

что противоречит равенствам $L_r^{(2)} = L_r^{(1)} = l$ и $\dim l = 2$. Поэтому случай (b) невозможен.

(c) Четыре разные комплексные собственные значения оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$. Теперь пусть

$$\operatorname{Sp}^{(1)} = \{\lambda, \bar{\lambda}, \mu, \bar{\mu}\}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad \lambda \neq \mu, \bar{\mu}.$$

Обозначим $\lambda = a + bi$ и $\mu = c + di$, $b, d \neq 0$.

Выберем базис y, z, u, v в $L^{(1)}$, в котором присоединенный оператор имеет матрицу

$$\operatorname{ad} B|_{\operatorname{span}(y,z,u,v)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & -d & c \end{pmatrix}.$$

Остается доказать, что алгебра Ли $L^{(1)}$ абелева, и положить $x = B$: тогда $L = L_{5,I}(\lambda, \mu)$.

Для того, чтобы доказать, что $L^{(1)}$ абелева, рассмотрим ее комплексификацию

$$L_c^{(1)} = L_c^{(1)}(\lambda) \oplus L_c^{(1)}(\bar{\lambda}) \oplus L_c^{(1)}(\mu) \oplus L_c^{(1)}(\bar{\mu})$$

и соответствующий базис

$$\begin{aligned} &L_c^{(1)} = \operatorname{span}(e_\lambda, e_{\bar{\lambda}}, e_\mu, e_{\bar{\mu}}), \\ &L_c^{(1)}(\lambda) = \mathbb{C}\, e_\lambda,\ L_c^{(1)}(\bar{\lambda}) = \mathbb{C}\, e_{\bar{\lambda}},\ L_c^{(1)}(\mu) = \mathbb{C}\, e_\mu,\ L_c^{(1)}(\bar{\mu}) = \mathbb{C}\, e_{\bar{\mu}}, \\ &\overline{e_\lambda} = e_{\bar{\lambda}}, \quad \overline{e_\mu} = e_{\bar{\mu}}. \end{aligned}$$

Покажем, что $L_c^{(1)}$ абелева. Имеем

$$\begin{aligned} [e_\lambda, e_{\bar{\lambda}}] \in L_c^{(1)}(\lambda + \bar{\lambda}) = L_c^{(1)}(2 \operatorname{Re} \lambda) = \{0\}; \\ [e_\mu, e_{\bar{\mu}}] \in L_c^{(1)}(\mu + \bar{\mu}) = L_c^{(1)}(2 \operatorname{Re} \mu) = \{0\}; \end{aligned}$$

следовательно,

$$[e_\lambda, e_{\bar{\lambda}}] = [e_\mu, e_{\bar{\mu}}] = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} [e_\lambda, e_\mu] \in L_c^{(1)}(\lambda + \mu); \\ [e_\lambda, e_{\bar{\mu}}] \in L_c^{(1)}(\lambda + \bar{\mu}). \end{aligned}$$

Собственное пространство $L_c^{(1)}(\lambda + \mu) \neq \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\lambda + \mu$ равно одному из собственных значений λ, $\bar{\lambda}$, μ, и $\bar{\mu}$. Но $\lambda + \mu \neq \lambda, \mu$, т.к. $\mu, \lambda \neq 0$, соответственно. Далее,

$$\begin{aligned} \lambda + \mu = \bar{\lambda} \ \Leftrightarrow\ \mu = \bar{\lambda} - \lambda = -2bi; \\ \lambda + \mu = \bar{\mu} \ \Leftrightarrow\ \lambda = \bar{\mu} - \mu = -2di. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$L_c^{(1)}(\lambda+\mu) \neq \{0\} \;\Leftrightarrow\; \text{ либо } \mu=-2bi \text{ либо } \lambda=-2di.$$

Аналогично

$$L_c^{(1)}(\lambda+\bar\mu) \neq \{0\} \;\Leftrightarrow\; \text{ либо } \mu=2bi \text{ либо } \lambda=2di.$$

Рассмотрим случай $\mu=-2bi$ (остальные три случая, $\lambda=-2di$, $\mu=2bi$, и $\lambda=2di$, рассматриваются аналогично). Имеем

$$\begin{aligned}
&[e_\lambda, e_\mu] \in L_c^{(2)}(\lambda+\mu) = L_c^{(1)}(\bar\lambda) = \mathbb{C}\, e_{\bar\lambda};\\
&[e_\lambda, e_{\bar\mu}] \in L_c^{(2)}(\lambda+\bar\mu) = \{0\};\\
&[e_{\bar\lambda}, e_\mu] \in L_c^{(2)}(\bar\lambda+\mu) = \{0\};\\
&[e_{\bar\lambda}, e_{\bar\mu}] \in L_c^{(2)}(\bar\lambda+\bar\mu) = L_c^{(1)}(\lambda) = \mathbb{C}\, e_\lambda;
\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
&[e_\lambda, e_\mu] = k e_{\bar\lambda}, \quad k\in\mathbb{C},\\
&[e_{\bar\lambda}, e_{\bar\mu}] = \bar k e_\lambda.
\end{aligned}$$

Предположим, что $k\neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&[-(1/k)e_\mu, e_\lambda] = e_{\bar\lambda};\\
&[-(1/\bar k)e_{\bar\mu}, e_{\bar\lambda}] = e_\lambda;
\end{aligned}$$

поэтому

$$[-(1/k)e_\mu - (1/\bar k)e_{\bar\mu}, e_\lambda + e_{\bar\lambda}] = e_\lambda + e_{\bar\lambda},$$

т.е. $e_\lambda + e_{\bar\lambda}$ есть собственный вектор оператора $\mathrm{ad}(-(1/k)e_\mu - (1/\bar k)e_{\bar\mu})|_{L^{(1)}}$ с собственным значением 1. Но этот оператор нильпотентен т.к. L разрешима. Это противоречие показывает, что $k=0$. Алгебра Ли $L_c^{(1)}$ абелева, поэтому $L^{(1)}$ также абелева.

Положим $x=B$ и получим $L=L_{5,I}(\lambda,\mu)$ в случае (c).

(d) Два комплексных собственных значения оператора $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$. Наконец, предположим, что

$$\mathrm{Sp}^{(1)} = \{\lambda, \bar\lambda\}, \quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

Выберем такой базис

$$\{e_\lambda^1, e_\lambda^2, e_{\bar\lambda}^1, e_{\bar\lambda}^2\} \tag{6.11}$$

в $L_c^{(1)}$, что

$$\mathrm{ad}_c\, B|_{\mathrm{span}(e_\lambda^1, e_\lambda^2, e_{\bar\lambda}^1, e_{\bar\lambda}^2)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \bar\lambda & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon & \bar\lambda \end{pmatrix}, \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = 0 \text{ или } 1,\\
&\overline{e_\lambda^1} = e_{\bar\lambda}^1, \quad \overline{e_\lambda^2} = e_{\bar\lambda}^2.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Для того, чтобы показать, что $L_c^{(1)}$ абелева, докажем, что все скобки между базисными элементами (6.11) равны нулю. Во-первых,

$$[e_\lambda^1, e_\lambda^2] \in L_c^{(1)}(2\lambda) = \{0\} \quad \Rightarrow \quad [e_\lambda^1, e_\lambda^2] = 0.$$

Учитывая (6.13), получаем

$$[e_{\bar\lambda}^1, e_{\bar\lambda}^2] = 0.$$

Аналогично

$$[e_\lambda^1, e_{\bar\lambda}^1] = [e_\lambda^2, e_{\bar\lambda}^2] = 0.$$

Итак, алгебра Ли $L_c^{(1)}$ абелева, так же как и $L^{(1)}$.

(d.1) Рассмотрим сначала случай, когда оператор $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ диагонализируем над $\mathbb{C}$, т.е. $\varepsilon = 0$ в (6.12). В силу абелевости $L^{(1)}$, имеем $L^{(2)} = \{0\}$; поэтому $L^{(1)}/L^{(2)} = L^{(1)}$, и фактор-оператор $\widetilde{\operatorname{ad} B} \;:\; L^{(1)}/L^{(2)} \to L^{(1)}/L^{(2)}$ имеет геометрическую кратность 2. То есть $\mathrm{j}\,(\lambda) = 2$ (см. определение 4.1). Но это противоречит условию (6) теоремы 4.1: $\mathrm{j}\,(a) \leqslant 1$ для всех $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$. Это противоречие означает, что случай (d.1) невозможен.

(d.2) Поэтому матрица оператора $\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}}$ должна иметь жордановы клетки, т.е. $\varepsilon = 1$ в (6.12). Можно найти вещественный базис $\{y, z, u, v\}$ в $L^{(1)}$, который соответствует комплексному базису (6.11) и в котором оператор $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ имеет матрицу

$$\operatorname{ad} B|_{\mathrm{span}(y,z,u,v)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & -b & a \end{pmatrix}.$$

Теперь положим $x = B$ и получим $L = L_{5,II}(\lambda)$ в случае (d.2). Доказательство необходимости в теореме 6.12 завершено.

Достаточность следует из теорем 6.10, 6.11, (c). □

6.5.4 Изоморфизмы управляемых алгебр Ли

Теорема 6.13. *Любые две алгебры Ли $L_{5,I}(\lambda_1, \mu_1)$, $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \mu_1, \bar\mu_1$, и $L_{5,II}(\lambda_2)$, $\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, неизоморфны. Все изоморфизмы внутри этих классов суть следующие*:

(1) $L_{5,I}(\lambda_1, \mu_1) \simeq L_{5,I}(\lambda_2, \mu_2)$, $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq \mu_i, \bar\mu_i$, $i = 1, 2$, *тогда и только тогда, когда* $\{\lambda_1, \bar\lambda_1\, \mu_1, \bar\mu_1\} \sim \{\lambda_2, \bar\lambda_2\, \mu_2, \bar\mu_2\}$*;*

(2) $L_{5,II}(\lambda_1) \simeq L_{5,II}(\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *тогда и только тогда, когда* $\{\lambda_1, \bar\lambda_1\} \sim \{\lambda_2, \bar\lambda_2\}$.

Доказательство. Алгебры Ли $L_{5,I}(\lambda_1, \mu_1)$ и $L_{5,II}(\lambda_2)$ неизоморфны т.к. соответствующие множества $\{\lambda_1, \bar\lambda_1\, \mu_1, \bar\mu_1\}$ и $\{\lambda_2, \bar\lambda_2\}$ не могут быть гомотетичны.

Утверждения (1) и (2) доказываются в точности как в теореме 6.9. □

6.6 Шестимерные алгебры Ли

6.6.1 Конструкция управляемых алгебр Ли

Конструкция 6.5. Алгебра Ли $L_{6,I}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$; см. рис. 6.5.

$$\begin{aligned}
&L_{6,I}(\lambda,\mu)=\operatorname{span}(x,y,z,u,v,w);\\
&\operatorname{ad}x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)}=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0\\ -b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & d & 0\\ 0 & 0 & -d & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a\end{pmatrix};\\
&\lambda=a+bi,\ \mu=c+di;\\
&[y,z]=w.
\end{aligned}$$

Конструкция 6.6. Алгебра Ли $L_{6,II}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{Re}\mu$; см. рис. 6.6.

$$\begin{aligned}
&L_{6,II}(\lambda,\mu)=\operatorname{span}(x,y,z,u,v,w);\\
&\operatorname{ad}x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)}=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0\\ -b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & d & 0\\ 0 & 0 & -d & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a\end{pmatrix};\\
&\lambda=a+bi,\ \mu=a+di;\\
&[y,z]=w,\quad [u,v]=w.
\end{aligned}$$

Конструкция 6.7. Алгебра Ли $L_{6,III}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$; см. рис. 6.7.

$$\begin{aligned}
&L_{6,III}(\lambda)=\operatorname{span}(x,y,z,u,v,w);\\
&\operatorname{ad}x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)}=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0\\ -b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3a & b & 0\\ 0 & 0 & -b & 3a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a\end{pmatrix};\\
&\lambda=a+bi;\\
&[y,z]=w,\quad [w,y]=u,\quad [w,z]=v.
\end{aligned}$$

Конструкция 6.8. Алгебра Ли $L_{6,IV}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\,\mathbb{R})$; см. рис. 6.8.

$$L_{6,IV}(\lambda) = \operatorname{span}(x, y, z, u, v, w);$$
$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda = a + bi;$$
$$[y, v] = -[z, u] = w.$$

Конструкция 6.9. Алгебра Ли $L_{6,V}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; см. рис. 6.9.

$$L_{6,V}(\lambda) = \operatorname{span}(x, y, z, u, v, w);$$
$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix};$$
$$\lambda = a + bi;$$
$$[y, z] = w.$$

Конструкция 6.10. Алгебра Ли $L_{6,VI}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; см. рис. 6.9.

$$L_{6,VI}(\lambda) = \operatorname{span}(x, y, z, u, v, w);$$
$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix};$$
$$\lambda = a + bi;$$
$$[y, u] = [z, v] = w.$$

Конструкция 6.11. Алгебра Ли $L_{6,VII}$; см. рис. 6.10.

$$L_{6,VII} = \operatorname{span}(x, y, z, u, v, w);$$
$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$[y, z] = w, \quad [w, y] = -v, \quad [w, z] = u.$$

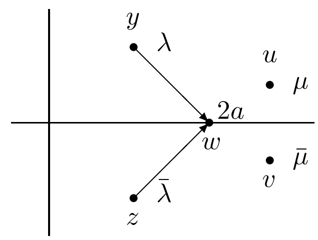


Рис. 6.5: Управляемая алгебра $L_{6,I}(\lambda, \mu)$, $\operatorname{Re}\lambda = a$.

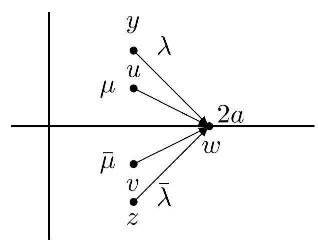


Рис. 6.6: Управляемая алгебра $L_{6,II}(\lambda, \mu)$, $\operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\mu = a$.

Конструкция 6.12. Алгебра Ли $L_{6,VIII}$; см. рис. 6.10.

$$L_{6,VIII} = \operatorname{span}(x, y, z, u, v, w);$$
$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$[y, z] = w, \quad [w, y] = v, \quad [w, z] = -u.$$

Будем далее использовать следующее разложение вектора B в любой из алгебр Ли $L_{6,I}$–$L_{6,VIII}$:

$$B = B_x x + B_y y + B_z z + B_u u + B_v v + B_w w.$$

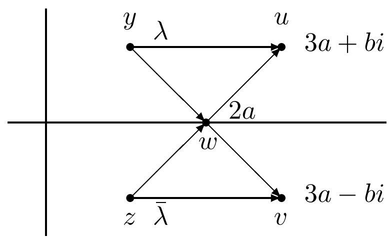


Рис. 6.7: Управляемая алгебра $L_{6,III}(\lambda)$, $\lambda = a + bi$.

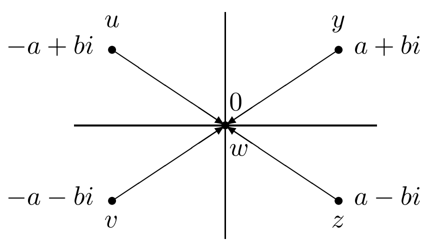


Рис. 6.8: Управляемая алгебра $L_{6,IV}(\lambda)$, $\lambda = a + bi$.

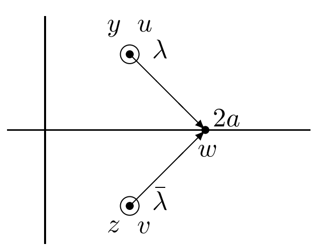


Рис. 6.9: Управляемые алгебры $L_{6,V}(\lambda)$, $L_{6,VI}(\lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda = a$.

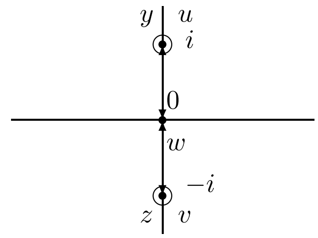


Рис. 6.10: Управляемые алгебры $L_{6,VII}$, $L_{6,VIII}$.

6.6.2 Условия управляемости

Теорема 6.14. *Пусть* $L = L_{6,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Единственной подалгеброй коразмерности один в* L *является ее производная подалгебра* $L^{(1)}$.

(b) *Пусть* $A, B \in L$. *Система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (1) $B \notin L^{(1)}$;
- (2) $\mathrm{Lie}(A, B) = L$, *или*
- (2′) $A(B_x\lambda) \neq 0$ *и* $A(B_x\mu) \neq 0$, *или*
- (2″) $\mathrm{span}(B, A, (\mathrm{ad}\, B)A, (\mathrm{ad}\, B)^2A, (\mathrm{ad}\, B)^3A, w) = L$.

(c) *Пусть* $B \in L \setminus L^{(1)}$. *Тогда система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема для почти всех* $A \in L$.

Теорема 6.15. *Пусть* $L = L_{6,II}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,\mu$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Единственной подалгеброй коразмерности один в* L *является ее производная подалгебра* $L^{(1)}$.

(b) *Пусть* $A, B \in L$. *Система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (1) $B \notin L^{(1)}$;
- (2) $\mathrm{Lie}(A, B) = L$, *или*
- (2′) $A(B_x\lambda) \neq 0$ *и* $A(B_x\mu) \neq 0$, *или*
- (2″) $\mathrm{span}(B, A, (\mathrm{ad}\, B)A, (\mathrm{ad}\, B)^2A, (\mathrm{ad}\, B)^3A, w) = L$.

(c) *Пусть* $B \in L \setminus L^{(1)}$. *Тогда система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема для почти всех* $A \in L$.

Теорема 6.16. *Пусть* $L = L_{6,III}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Единственной подалгеброй коразмерности один в* L *является ее производная подалгебра* $L^{(1)}$.

(b) *Пусть* $A, B \in L$. *Система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) $B \notin L^{(1)}$;

(2) $\mathrm{Lie}(A, B) = L$, *или*

(2′) $\mathrm{span}(B, A, (\mathrm{ad}\, B)A, w, u, v) = L$, *или*

(2″) $A(B_x\lambda) \neq 0$ (*при* $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$).

(c) *Пусть* $B \in L \setminus L^{(1)}$. *Тогда система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема для почти всех* $A \in L$.

Теорема 6.17. *Пусть* $L = L_{6,IV}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\,\mathbb{R})$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Единственной подалгеброй коразмерности один в* L *является ее производная подалгебра* $L^{(1)}$.

(b) *Пусть* $A, B \in L$. *Система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) $B \notin L^{(1)}$;

(2) $\mathrm{Lie}(A, B) = L$, *или*

(2′) $A(B_x\lambda) \neq 0$ *и* $A(-B_x\lambda) \neq 0$, *или*

(2″) $\mathrm{span}(B, A, (\mathrm{ad}\, B)A, (\mathrm{ad}\, B)^2A, (\mathrm{ad}\, B)^3A, w) = L$.

(c) *Пусть* $B \in L \setminus L^{(1)}$. *Тогда система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема для почти всех* $A \in L$.

Теорема 6.18. *Пусть* $L = L_{6,V}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *или* $L = L_{6,VI}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Единственной подалгеброй коразмерности один в* L *является ее производная подалгебра* $L^{(1)}$.

(b) *Пусть* $A, B \in L$. *Система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) $B \notin L^{(1)}$;

(2) $\mathrm{Lie}(A, B) = L$, *или*

($2'$) $\operatorname{span}(B, A, (\operatorname{ad} B)A, (\operatorname{ad} B)^2 A, (\operatorname{ad} B)^3 A, w) = L$, *или*

($2''$) $\operatorname{top}(A, B_x\lambda) \neq 0$ (*при* $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$).

(c) *Пусть* $B \in L \setminus L^{(1)}$. *Тогда система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема для почти всех* $A \in L$.

Теорема 6.19. *Пусть* $L = L_{6,VII}$ *или* $L = L_{6,VIII}$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Единственной подалгеброй коразмерности один в* L *является ее производная подалгебра* $L^{(1)}$.

(b) *Пусть* $A, B \in L$. *Система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) $B \notin L^{(1)}$;

(2) $\operatorname{Lie}(A, B) = L$, *или*

($2'$) $\operatorname{span}(B, A, (\operatorname{ad} B)A, w, u, v) = L$.

(c) *Пусть* $B \in L \setminus L^{(1)}$. *Тогда система* $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ *управляема для почти всех* $A \in L$.

Теорема 6.20. *Шестимерная разрешимая алгебра Ли* L *управляема тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из следующих алгебр Ли*:

(1) $L_{6,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$;

(2) $L_{6,II}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\mu$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$;

(3) $L_{6,III}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

(4) $L_{6,IV}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\,\mathbb{R})$;

(5) $L_{6,V}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

(6) $L_{6,VI}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

(7) $L_{6,VII}$;

(8) $L_{6,VIII}$.

6.6.3 Доказательство условий управляемости

Алгебра Ли $L_{6,I}(\lambda, \mu)$: теорема 6.14

Доказательство. **Утверждение** (b), (1) & ($2'$). Необходимость. По лемме 6.2, имеем $\operatorname{Sp}^{(1)} = B_x \cdot \{\lambda, \bar{\lambda}, \mu, \bar{\mu}, 2a\}$, $\operatorname{Sp}^{(2)} = B_x \cdot \{2a\}$, и утверждение следует непосредственно из пунктов (2) и (5) следствия 4.1.

Достаточность. Если $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, то оператор $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ не имеет N-пар вещественных собственных значений (см. определение 4.3). Тогда управляемость Γ следует из теоремы 4.2. Действительно, условия (1) и (2) этой теоремы очевидно выполняются. Условие (3):

$$L_r^{(1)} = L^{(1)}(B_x \cdot 2a) = \mathbb{R}w, \quad \text{и} \quad L_r^{(2)} = L^{(2)}(B_x \cdot 2a) = \mathbb{R}w.$$

Условие (4): комплексный спектр

$$\operatorname{Sp}_c^{(1)} = B_x \cdot \{\lambda, \bar\lambda, \mu, \bar\mu\}$$

прост; поэтому все собственные пространства $L_c(a)$, $a \in \operatorname{Sp}_c^{(1)}$, одномерны. Условие (5):

$$\operatorname{top}(A, B_x\lambda) = A(B_x\lambda) \quad \text{и} \quad \operatorname{top}(A, B_x\mu) = A(B_x\mu),$$

так как оба собственные значения $B_x\lambda$ и $B_x\mu$ просты. Условие (6): единственная пара вещественных (совпадающих) собственных значений, $B_x \cdot 2a = B_x \cdot 2a$, не является N-парой. Все условия (1)–(6) теоремы 4.2 выполняются; поэтому система Γ управляема.

Рассмотрим случай $\operatorname{Re}\lambda = a = 0$. Выполняются следующие утверждения:

(1) $\operatorname{Lie}(A, B) = L$;

(2) не существует подалгебры коразмерности один в L, содержащей элемент B.

Тогда система Γ управляема в силу теоремы 1.24.

Утверждение (1). Имеем

$$L = L_{6,I}(\lambda, \mu) = \operatorname{span}(B, y, z, u, v, w);$$

см. конструкцию 6.5. Прямая $\mathbb{R}w$ есть идеал в L. Рассмотрим фактор-алгебру Ли

$$\tilde L = L/\mathbb{R}w = \operatorname{span}(\tilde B, \tilde y, \tilde z, \tilde u, \tilde v). \tag{6.14}$$

Производная подалгебра есть

$$\tilde L^{(1)} = [\tilde L, \tilde L] = \operatorname{span}(\tilde y, \tilde z, \tilde u, \tilde v),$$

и оператор ad имеет матрицу

$$\operatorname{ad} \tilde B|_{\tilde L^{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & -d & c \end{pmatrix};$$

поэтому его спектр прост:

$$\operatorname{Sp}(\operatorname{ad} \tilde B|_{\tilde L^{(1)}}) = B_x \cdot \{\lambda, \bar\lambda, \mu, \bar\mu\}.$$

Боле того,

$$A(B_x\lambda) \neq 0,\ A(B_x\mu) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}(B_x\lambda) \neq 0,\ \tilde{A}(B_x\mu) \neq 0. \tag{6.15}$$

По лемме 6.4, имеем

$$\operatorname{span}(\tilde{B}, \tilde{A}, (\operatorname{ad}\tilde{B})\tilde{A}, (\operatorname{ad}\tilde{B})^2\tilde{A}, (\operatorname{ad}\tilde{B})^3\tilde{A}) = \tilde{L}. \tag{6.16}$$

Это означает, что образ пространства

$$l = \operatorname{span}(B, A, (\operatorname{ad}B)A, (\operatorname{ad}B)^2A, (\operatorname{ad}B)^3A) \subset L$$

при канонической проекции $L \to \tilde{L}$ совпадает со всей фактор-алгеброй Ли $\tilde{L}$. Итак, $\dim l = 5$; тогда пространство l содержит векторы вида

$$y_1 = y + \alpha w \ \text{ и } \ z_1 = z + \beta w, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$w = [y, z] = [y_1, z_1] \in \operatorname{Lie}(l);$$

поэтому $\operatorname{Lie}(l) = L$. Следовательно,

$$\operatorname{Lie}(A, B) = \operatorname{Lie}(l) = L;$$

и утверждение (1) полностью доказано.

Утверждение (2). От противного, предположим, что существует такая подалгебра l, что

$$l \subset L, \quad \dim l = \dim L - 1 \ \text{ и } \ B \in l. \tag{6.17}$$

Множество

$$\Pi = \{C \in L \mid C(B_x\lambda) = 0 \text{ или } C(B_x\mu) = 0\}$$

является объединением двух 4-мерных пространств, и оно не может содержать 5-мерное пространство l:

$$l \not\subset \Pi.$$

Следовательно, существует такой вектор $C \in l \setminus \Pi$, что

$$C \in l, \quad C(B_x\lambda) \neq 0 \ \text{ и } \ C(B_x\mu) \neq 0.$$

В силу утверждения (1),

$$\operatorname{Lie}(C, B) = L.$$

Но $l \supset \operatorname{Lie}(C, B)$; поэтому

$$l = L.$$

Полученное противоречие с (6.17) завершает доказательство утверждения (2).

Теперь из утверждений (1), (2), и теоремы 1.24 следует управляемость системы $\Gamma = A + \mathbb{R}B$. Это завершает доказательство достаточности.

Утверждение (b), (1) & (2). Докажем, что $(2) \Leftrightarrow (2')$ при условии (1).

$(2) \Rightarrow (2')$. Пусть $\mathrm{Lie}(A, B) = L$, и пусть условие $(2')$ нарушается. Для определенности, пусть $A(B_x\lambda) = 0$. Тогда $\mathrm{j}\,(B_x\lambda) = 1$ и $\mathrm{top}(A, B_x\lambda) = 0$. Из леммы 4.6 получаем $\mathrm{Lie}(A, B) \neq L$; противоречие.

$(2) \Leftarrow (2')$. Если $\mathrm{Lie}(A, B) \neq L$, то система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ неуправляема по ранговому условию, и условие $(2')$ нарушается.

Утверждение (b), (1) & $(2'')$. Докажем, что $(2') \Leftrightarrow (2'')$ при условии (1). Как выше, рассмотрим фактор-алгебру Ли (6.14). В силу (6.15), условие $(2')$ равносильно (6.16), которое, в свою очередь, эквивалентно $(2'')$.

Утверждение (c) легко следует из утверждения (b), (1) & $(2')$.

Утверждение (a) следует из утверждения (c) и леммы 6.5.

Теорема 6.14 доказана. □

Алгебра Ли $L_{6,II}(\lambda, \mu)$: теорема 6.15

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 6.14. □

Алгебра Ли $L_{6,III}(\lambda)$: теорема 6.16

Доказательство. **Случай 1:** $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$**.**

Утверждение (b), (1) & $(2'')$. Необходимость следует непосредственно из пунктов (2) и (5) следствия 4.1, так как $\mathrm{Sp}^{(1)} = B_x \cdot \{\lambda, \bar{\lambda}, \mu, \bar{\mu}, 2a\}$ и $\mathrm{Sp}^{(2)} = B_x \cdot \{\mu, \bar{\mu}, 2a\}$; см. лемму 6.2.

Достаточность. В случае общего положения $A(B_x\mu) \neq 0$ управляемость следует непосредственно из теоремы 4.2. Действительно, условия (1), (2), (4)–(6) этой теоремы очевидно выполняются. Рассмотрим условие (3). Имеем

$$\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \mathrm{Sp}_r^{(2)} = \{B_x \cdot 2a\};$$

поэтому

$$L_r^{(1)} = L^{(1)}(B_x \cdot 2a) \quad \text{и} \quad L_r^{(2)} = L^{(2)}(B_x \cdot 2a).$$

Далее,

$$L^{(2)}(B_x \cdot 2a) \subset L^{(1)}(B_x \cdot 2a).$$

Более того, собственное значение $B_x \cdot 2a$ просто, поэтому

$$\dim L^{(2)}(B_x \cdot 2a) = \dim L^{(1)}(B_x \cdot 2a) = 1.$$

Следовательно,

$$L^{(2)}(B_x \cdot 2a) = L^{(1)}(B_x \cdot 2a)$$

и

$$L_r^{(2)} = L_r^{(1)}.$$

По теореме 4.2, система Γ управляема.

В случае $A(B_x\mu) = 0$, необходимо слегка изменить доказательство данной теоремы. По лемме 4.8, получаем

$$L^{(1)}(B_x\lambda) \subset \mathrm{LS}(\Gamma). \tag{6.18}$$

В пространстве $L^{(1)}(B_x\lambda)$ можно выбрать базис вида

$$y^1 = y + y_u^1 u + y_v^1 v + y_w^1 w, \quad y_u^1, y_v^1, y_w^1 \in \mathbb{R}, \tag{6.19}$$
$$z^1 = z + z_u^1 u + z_v^1 v + z_w^1 w, \quad z_u^1, z_v^1, z_w^1 \in \mathbb{R}. \tag{6.20}$$

Так как

$$\mathrm{span}(y^1, z^1) = L^{(1)}(B_x\lambda) \subset \mathrm{LS}(\Gamma),$$

имеем

$$\pm[y^1, z^1] = \pm w^1 = \pm(w + w_u^1 u + w_v^1 v) \in \mathrm{LS}(\Gamma). \tag{6.21}$$

Используя линейные комбинации (6.19), (6.20), и (6.21), получаем

$$\begin{aligned}
&y^2 = y + y_u^2 u + y_v^2 v, \quad y_u^2,\ y_v^2 \in \mathbb{R};\\
&z^2 = z + z_u^2 u + z_v^2 v, \quad z_u^2,\ z_v^2 \in \mathbb{R};\\
&\mathrm{span}(y^2, z^2) \subset \mathrm{LS}(\Gamma).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\pm w = \pm[y^2, z^2] \in \mathrm{LS}(\Gamma).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\pm[w, y^2] = \pm[w, y] = \pm u \in \mathrm{LS}(\Gamma);\\
\pm[w, z^2] = \pm[w, z] = \pm v \in \mathrm{LS}(\Gamma).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$L^{(1)} = \mathrm{span}(y, z, u, v, w) \subset \mathrm{LS}(\Gamma).$$

Так как $B \notin L^{(1)}$, имеем $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$, и система Γ управляема по теореме 1.14.

Утверждение (b), (1) & (2$'$). Пространство $I = \mathrm{span}(u, v)$ есть идеал в алгебре L. Рассмотрим фактор-алгебру Ли

$$\tilde{L} = L/I = \mathrm{span}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}) \simeq L_4(\lambda).$$

В силу теоремы 6.7, получаем следующую цепочку:

$$(2'') \Leftrightarrow \tilde{A}(B_x\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{span}(\tilde{B}, \tilde{A}, (\mathrm{ad}\,\tilde{B})\tilde{A}, \tilde{w}) = \tilde{L} \Leftrightarrow (2').$$

Завершение доказательства: **утверждение** (b), (1) & (2), **утверждение** (c), и **утверждение** (a), доказываются в точности как в теореме 6.14.

Случай 2: $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$**.**

Утверждение (a). От противного, предположим, что алгебра Ли $L = L_{6,III}(bi)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, содержит подалгебру коразмерности один $l \neq L^{(1)}$.

Пространство $I = \mathrm{span}(u, v)$ есть идеал в L; поэтому можно рассмотреть фактор-алгебру Ли

$$\tilde{L} = L/I = \mathrm{span}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}), \tag{6.22}$$

$$\mathrm{ad}\,\tilde{x}|_{\mathrm{span}(\tilde{y},\tilde{z},\tilde{w})} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.23}$$

$$[\tilde{y}, \tilde{z}] = \tilde{w}, \tag{6.24}$$

и соответствующий образ

$$\tilde{l} \subset \tilde{L}$$

алгебры Ли l. Легко видеть, что $\dim \tilde{l}$ может равняться 3 или 4.

(1) $\dim \tilde{l} = 4$. Тогда $\tilde{l} = \tilde{L}$; поэтому алгебра Ли l содержит элементы вида

$$f^1 = x + f_u^1 u + f_v^1 v, \quad f_u^1,\ f_v^1 \in \mathbb{R}; \tag{6.25}$$

$$f^2 = y + f_u^2 u + f_v^2 v, \quad f_u^2,\ f_v^2 \in \mathbb{R}; \tag{6.26}$$

$$f^3 = z + f_u^3 u + f_v^3 v, \quad f_u^3,\ f_v^3 \in \mathbb{R}; \tag{6.27}$$

$$f^4 = w + f_u^4 u + f_v^4 v, \quad f_u^4,\ f_v^4 \in \mathbb{R}. \tag{6.28}$$

Имеем $[f^2, f^3] = w \in l$. Далее, $[f^2, w] = -u \in l$ и $[f^3, w] = -v \in l$. Так как векторы (6.25)–(6.28) принадлежат пространству l, получаем $x, y, z, w \in l$. Имеем $l = L$, противоречие.

(2) $\dim \tilde{l} = 3$. Ввиду (6.22)–(6.24), алгебра Ли $\tilde{L}$ изоморфна алгебре Ли $L_4(bi)$, см. конструкцию 6.2. Так как $\tilde{l}$ — подалгебра коразмерности один в $\tilde{L}$, из теоремы 6.7 получаем

$$\tilde{l} = \tilde{L}^{(1)} = \mathrm{span}(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}).$$

Поэтому алгебра Ли l содержит элементы вида

$$f^1 = y + f_u^1 u + f_v^1 v, \quad f_u^1,\ f_v^1 \in \mathbb{R};$$

$$f^2 = z + f_u^2 u + f_v^2 v, \quad f_u^2,\ f_v^2 \in \mathbb{R}.$$

Тогда $[f^1, f^2] = w \in l$, $[f^1, w] = -u \in l$, и $[f^2, w] = -v \in l$. Поэтому, $l = L^{(1)}$, противоречие.

Утверждение (b), (1) & (2), следует из теоремы 1.24 и (a).

Утверждение (b), (1) & $(2')$. Докажем, что $(2) \Leftrightarrow (2')$ при условии (1). Рассмотрим фактор-алгебру Ли (6.22). Ввиду теоремы 6.7, легко видеть, что

$$(2) \Leftrightarrow \mathrm{Lie}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{L} \Leftrightarrow \mathrm{span}(\tilde{B}, \tilde{A}, (\mathrm{ad}\,\tilde{B})\tilde{A}, \tilde{w}) = \tilde{L} \Leftrightarrow (2').$$

Утверждение (c) следует из утверждений (b), (1) & $(2')$. $\square$

Алгебра Ли $L_{6,IV}(\lambda)$: теорема 6.17

Доказательство. **Утверждение** (b), (1) & $(2')$. Необходимость вытекает из пунктов (2) и (5) следствия 4.1, так как

$$\mathrm{Sp}^{(1)} \setminus \mathrm{Sp}^{(2)} = B_x \cdot \{\pm\lambda, \pm\bar{\lambda}\}.$$

Достаточность получается так же как в доказательстве теоремы 6.14 для случая $\operatorname{Re}\lambda = 0$: нужно только заменить алгебру Ли $L_{6,I}(\lambda,\mu)$, собственное значение μ, и конструкцию 6.5 соответственно алгеброй Ли $L_{6,IV}(\lambda)$, собственным значением $-\lambda$, и конструкцией 6.8.

Завершение доказательства: **утверждение** (b), (1) & (2) и (1) & $(2'')$, **утверждение** (c), и **утверждение** (a) получаются в точности как при доказательстве теоремы 6.14. □

Алгебры Ли $L_{6,V}(\lambda)$ и $L_{6,VI}(\lambda)$: теорема 6.18

Доказательство. **Случай 1:** $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$**.**

Утверждение (b), (1) & $(2'')$. Необходимость следует непосредственно из пунктов (2) и (7) теоремы 4.1 так как

$$\mathrm{Sp}^{(1)} = B_x \cdot \{\lambda, \bar{\lambda}, 2a\}, \quad \mathrm{Sp}^{(2)} = \{2B_x a\},$$
$$\mathrm{j}\,(B_x\lambda) = 1, \quad \mathrm{j}\,(2B_x a) = 0$$

(см. определение 4.1 и замечания после него).

Достаточность вытекает из следствия 4.2.

Утверждение (b), (1) & $(2')$. прямая $I = \mathbb{R}w$ есть идеал в L. Рассмотрим фактор-алгебру Ли

$$\tilde{L} = L/I = \mathrm{span}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{v}) \simeq L_{5,II}(\lambda).$$

Учитывая теорему 6.11, получаем следующую цепочку:

$$(2'') \Leftrightarrow \mathrm{top}(\tilde{A}, B_x\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{span}(\tilde{B}, \tilde{A}, (\operatorname{ad}\tilde{B})\tilde{A}, (\operatorname{ad}\tilde{B})^2\tilde{A}, (\operatorname{ad}\tilde{B})^3\tilde{A}) = \tilde{L} \Leftrightarrow (2').$$

Завершение доказательства: **утверждение** (b), (1) & (2), **утверждение** (c), и **утверждение** (a) получаются в точности как в доказательстве теоремы 6.14.

Случай 2: $\operatorname{Re}\lambda = 0$**.**

Утверждение (a). От противного, допустим, что алгебра Ли L содержит подалгебру коразмерности один $l \neq L^{(1)}$.

Прямая $I = \mathbb{R}w$ есть идеал в L. Рассмотрим фактор-алгебру

$$\tilde{L} = L/I = \mathrm{span}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{v}), \tag{6.29}$$
$$\operatorname{ad}\tilde{x}|_{\mathrm{span}(\tilde{y},\tilde{z},\tilde{u},\tilde{v})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

поэтому $\tilde{L} = L_{5,II}(i)$ (см. конструкцию 6.4), и соответствующий образ

$$\tilde{l} \subset \tilde{L}.$$

Очевидно,

$$\dim \tilde{l} = \begin{cases} 4 & \text{если } w \in l, \\ 5 & \text{если } w \notin l. \end{cases}$$

(a) Пусть $\dim \tilde{l} = 4$. Тогда $\tilde{l}$ есть подалгебра коразмерности один в $\tilde{L}$, и по теореме 6.11, $\tilde{l} = L^{(1)}_{5,II}(i) = \operatorname{span}(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{v})$. В силу включения $w \in l$, получаем $l = L^{(1)}$, противоречие.

(b) Пусть $\dim \tilde{l} = 5$. Тогда $\tilde{l} = \tilde{L} \ni \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}$; поэтому алгебра Ли l содержит элементы вида

$$\begin{aligned} f^1 &= y + f^1_w w, \quad & f^1_w \in \mathbb{R}; \\ f^2 &= z + f^2_w w, \quad & f^2_w \in \mathbb{R}; \\ f^3 &= u + f^1_w w, \quad & f^3_w \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Следовательно, $[f^1, f^2] = w \in l$. Отсюда $l = L$, противоречие.

Утверждение (b), (1) & (2), следует из теоремы 1.24 и (a).

Утверждение (b), (1) & (2′). Докажем, что (2) $\Leftrightarrow$ (2′) при условии (1). Как и выше, рассмотрим фактор-алгебру Ли (6.29).

(2) $\Rightarrow$ (2′). Если $\operatorname{Lie}(A, B) = L$, то $\operatorname{Lie}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{L}$. По теореме 6.11, имеем $\operatorname{span}(\tilde{B}, \tilde{A}, (\operatorname{ad} \tilde{B})\tilde{A}, (\operatorname{ad}^2 \tilde{B})\tilde{A}, (\operatorname{ad}^3 \tilde{B})\tilde{A}) = \tilde{L}$, что эквивалентно (2′).

(2) $\Leftarrow$ (2′). Из условия (2′) следует, что $\operatorname{Lie}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{L}$. После этого показываем, что $\operatorname{Lie}(A, B) = L$ в точности как выше в пункте (b).

Утверждение (c) следует из утверждения (b), (1) & (2′). □

Алгебры Ли $L_{6,VII}$ и $L_{6,VIII}$: теорема 6.19

Доказательство. **Утверждение** (a). Пусть $l \subset L$ есть подалгебра коразмерности один, $l \neq L^{(1)}$. Пространство $I = \operatorname{span}(u, v)$ есть идеал в L; поэтому можно рассмотреть фактор-алгебру Ли

$$\begin{aligned} &\tilde{L} = L/I = \operatorname{span}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}), \\ &\operatorname{ad} \tilde{x}|_{\operatorname{span}(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &[\tilde{y}, \tilde{z}] = \tilde{w}, \end{aligned} \tag{6.30}$$

и соответствующий образ $\tilde{l} \subset \tilde{L}$ алгебры Ли l. Очевидно, $\dim \tilde{l}$ может равняться 3 или 4.

(1) Пусть $\dim \tilde{l} = 3$. Тогда $\tilde{l}$ есть подалгебра коразмерности один в алгебре Ли $\tilde{L}$, изоморфной алгебре Ли $L_4(i)$; см. конструкцию 6.2. По теореме 6.7,

подалгебра $\tilde{l}$ совпадает с производной подалгеброй $\tilde{L}^{(1)} = \operatorname{span}(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w})$. Поэтому алгебра Ли l содержит векторы вида

$$f^1 = y + f_u^1 u + f_v^1 v, \qquad f_u^1,\ f_v^1 \in \mathbb{R}, \tag{6.31}$$
$$f^2 = z + f_u^2 u + f_v^2 v, \qquad f_u^2,\ f_v^2 \in \mathbb{R}, \tag{6.32}$$
$$f^3 = w + f_u^3 u + f_v^3 v, \qquad f_u^3,\ f_v^3 \in \mathbb{R}. \tag{6.33}$$

Условие $\dim \tilde{l} = 3$ влечет $\operatorname{span}(u, v) \subset l$, что, вместе с (6.31)–(6.33), дает включение $y, z, w \in l$. Поэтому, $l = L^{(1)}$, противоречие.

(2) Пусть $\dim \tilde{l} = 4$; тогда $l + \operatorname{span}(u, v) = L$. Следовательно, алгебра Ли l содержит элементы вида

$$f^1 = y + f_u^1 u + f_v^1 v, \qquad f_u^1,\ f_v^1 \in \mathbb{R};$$
$$f^2 = z + f_u^2 u + f_v^2 v, \qquad f_u^2,\ f_v^2 \in \mathbb{R}.$$

Тогда $[f^1, f^2] = w \in l$; тогда элементы $[f^1, w] = \pm v$ и $[f^2, w] = \mp u$ также принадлежат алгебре Ли l. Отсюда получаем $l = L$, противоречие.

Утверждение (b), (1) & (2), следует из теоремы 1.24 и (a).

Утверждение (b), (1) & (2′). Докажем, что (2) $\Leftrightarrow$ (2′) при условии (1). Рассмотрим фактор-алгебру Ли (6.30).

(2) $\Rightarrow$ (2′). Пусть $\operatorname{Lie}(A, B) = L$; тогда $\operatorname{Lie}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{L}$. По теореме 6.7, получаем $\operatorname{span}(\tilde{B}, \tilde{A}, (\operatorname{ad} \tilde{B})\tilde{A}, \tilde{w}) = \tilde{L}$, что эквивалентно условию (2′) данной теоремы.

(2) $\Leftarrow$ (2′). Обратно, условие (2′) влечет $\operatorname{Lie}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{L}$. Поэтому алгебра Ли $\operatorname{Lie}(A, B)$ содержит элементы вида

$$f^1 = y + f_u^1 u + f_v^1 v, \qquad f_u^1,\ f_v^1 \in \mathbb{R};$$
$$f^2 = z + f_u^2 u + f_v^2 v, \qquad f_u^2,\ f_v^2 \in \mathbb{R};$$
$$f^3 = x + f_u^3 u + f_v^3 v, \qquad f_u^3,\ f_v^3 \in \mathbb{R}.$$

Тогда элементы $[f^1, f^2] = w$, $[f^1, w] = \pm v$, и $[f^2, w] = \mp u$ принадлежат $\operatorname{Lie}(A, B)$; следовательно, $\operatorname{Lie}(A, B) = L$.

Утверждение (c) следует из утверждения (b), (1) & (2′). $\square$

Управляемые алгебры Ли: теорема 6.20

Доказательство. Необходимость. Пусть шестимерная разрешимая алгебра Ли L управляема, т.е. существуют такие $A, B \in L$, что система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ управляема. Тогда из теоремы 4.1 получаем следующее:

$$\begin{aligned} &\dim L^{(1)} = 5; \\ &B \notin L^{(1)}; \\ &L_r^{(1)} = L_r^{(2)}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Теперь рассмотрим шаг за шагом все возможные случаи расположения спектра $\operatorname{Sp}^{(1)} = \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}})$ в комплексной плоскости.

(a) Пять вещественных собственных векторов оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$. Оператор $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ не может иметь вещественного спектра, так как если $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \mathbb{R}$, то $L_r^{(1)} \neq L_r^{(2)}$ по лемме 6.3, противоречие с (6.34).

(b) Три вещественных собственных значения оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$. Предположим, что

$$\mathrm{Sp}^{(1)} = \{\lambda, \bar{\lambda}, c, d, e\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad c, d, e \in \mathbb{R}$$

(несколькие или все из чисел c, d, e могут совпадать между собой). Тогда имеем разложение

$$L^{(1)} = L^{(1)}(\lambda) \oplus L_r^{(1)}, \tag{6.35}$$

где $\dim L^{(1)}(\lambda) = 2$ и $L_r^{(1)} = L^{(1)}(c) + L^{(1)}(d) + L^{(1)}(e)$,

$$\dim L_r^{(1)} = 3. \tag{6.36}$$

Поэтому

$$L^{(2)} = [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] + [L^{(1)}(\lambda), L_r^{(1)}] + [L_r^{(1)}, L_r^{(1)}].$$

Учитывая лемму 6.1 и разложение (6.35), получаем

$$[L^{(1)}(\lambda), L_r^{(1)}] \subset L^{(2)}(\lambda) \subset L_c^{(2)},$$
$$[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] \subset L^{(2)}(2 \operatorname{Re} \lambda) \subset L_r^{(2)}.$$

Следовательно,

$$L_r^{(2)} = [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] + [L_r^{(1)}, L_r^{(1)}].$$

Теперь оценим размерности слагаемых в правой части.

Пространство $L^{(1)}(\lambda)$ двумерно: поэтому $\dim[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] \leqslant 1$.

Пространство $L_r^{(1)}$ трехмерно, и по лемме 6.1

$$[L_r^{(1)}, L_r^{(1)}] \subset L_r^{(1)},$$

т.е. $L_r^{(1)}$ есть алгебра Ли. Но L разрешима, поэтому $L_r^{(1)} \subset L^{(1)}$ нильпотентна. Следовательно, $L_r^{(1)}$ — трехмерная нильпотентная алгебра Ли. Следовательно, $L_r^{(1)}$ либо абелева, либо (единственная) трехмерная нильпотентная неабелева алгебра Ли. В обоих случаях $\dim[L_r^{(1)}, L_r^{(1)}] \leqslant 1$.

Поэтому $\dim L_r^{(2)} \leqslant \dim[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] + \dim[L_r^{(1)}, L_r^{(1)}] \leqslant 2$, что противоречит равенствам (6.34) и (6.36). Следовательно, случай (b) невозможен.

(c) Одно вещественное значение оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$. Так как оба случая (a) и (b) невозможны, остается случай

$$\mathrm{Sp}^{(1)} = \{\lambda, \bar{\lambda}, \mu, \bar{\mu}, e\}, \quad \lambda = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad \mu = c + di \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad e \in \mathbb{R}.$$

Можно предположить, что $b, d > 0$. Заменяя при необходимости B на $-B$, получаем $e \geqslant 0$.

(c.1) Пусть $\lambda \neq \mu$. Тогда оператор $\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}}$ имеет простой спектр, и имеется следующее разложение на одномерные собственные пространства:

$$L_c^{(1)} = L_c^{(1)}(\lambda) \oplus L_c^{(1)}(\bar\lambda) \oplus L_c^{(1)}(\mu) \oplus L_c^{(1)}(\bar\mu) \oplus L_c^{(1)}(e).$$

Выберем соответствующие собственные векторы

$$\mathbb{C}f_\lambda = L_c^{(1)}(\lambda), \quad \mathbb{C}f_{\bar\lambda} = L_c^{(1)}(\bar\lambda), \quad \mathbb{C}f_\mu = L_c^{(1)}(\mu), \quad \mathbb{C}f_{\bar\mu} = L_c^{(1)}(\bar\mu),$$
$$\text{и} \;\; \mathbb{C}f_e = L_c^{(1)}(e),$$

так что их комплексные сопряжения в L_c удовлетворяют условиям

$$\overline{f_\lambda} = f_{\bar\lambda}, \quad \overline{f_\mu} = f_{\bar\mu}, \;\; \text{и} \;\; \overline{f_e} = f_e.$$

По лемме 6.1,

$$[f_\lambda, f_\mu] \in L_c^{(1)}(\lambda+\mu) = L_c^{(1)}(a+c+(b+d)i) = \{0\},$$

поэтому

$$[f_\lambda, f_\mu] = 0. \tag{6.37}$$

Перейдем к комплексному сопряжению и получим

$$[f_{\bar\lambda}, f_{\bar\mu}] = 0. \tag{6.38}$$

(c.1.1) Пусть $b = \operatorname{Im}\lambda \neq \operatorname{Im}\mu = d$. Покажем, что $[f_\lambda, f_e] = 0$. От противного, предположим, что $[f_\lambda, f_e] \neq 0$. По лемме 6.1,

$$[f_\lambda, f_e] \in L_c^{(1)}(\lambda+e) = L_c^{(1)}(a+e+bi).$$

Так как $[f_\lambda, f_e] \neq 0$, имеем $a+e+bi \in \operatorname{Sp}^{(1)}$. Очевидно, что $a+e+bi$ не может равняться ни одному из собственных значений e, $\bar\lambda = a-bi$, и $\bar\mu = c-di$ (напомним, что $b, d > 0$). Далее, $a+e+bi \neq \mu = c+di$, так как $b \neq d$. Следовательно, $a+e+bi = \lambda = a+bi$ и $[f_\lambda, f_e] \in L_c^{(1)}(\lambda)$, т.е. $[f_\lambda, f_e] = kf_\lambda$, $k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Но это противоречит нильпотентности оператора $\operatorname{ad} f_e : L_c^{(1)} \to L_c^{(1)}$ (L разрешима, поэтому $L^{(1)}$ нильпотентна, и $\operatorname{ad} f_e|_{L_c^{(1)}}$ нильпотентен). Это противоречие показывает, что

$$[f_\lambda, f_e] = 0. \tag{6.39}$$

Аналогично показываем, что

$$[f_{\bar\lambda}, f_e] = [f_\mu, f_e] = [f_{\bar\mu}, f_e] = 0. \tag{6.40}$$

Теперь покажем, что $[f_\lambda, f_{\bar\mu}] = 0$. От противного, предположим, что $[f_\lambda, f_{\bar\mu}] \neq 0$. Тогда

$$[f_\lambda, f_{\bar\mu}] \in L_c^{(1)}(\lambda+\bar\mu) = L_c^{(1)}(a+c+(b-d)i).$$

Легко видеть, что $\lambda + \bar{\mu} = a + c + (b-d)i$ не может равняться ни одному из собственных значений e (т.к. $b \neq d$), $\lambda = a + bi$ (т.к. $c - di = \bar{\mu} \neq 0$), и $\bar{\mu} = c - di$ (т.к. $a + bi = \lambda \neq 0$). Имеются две взаимно исключающие возможности:

$$a + c + (b-d)i = \bar{\lambda} = a - bi \quad \Leftrightarrow \quad c = 0,\ d = 2b$$

или

$$a + c + (b-d)i = \mu = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = 0,\ b = 2d.$$

Пусть $a = 0$ и $b = 2d$ (случай $c = 0$, $d = 2b$ рассматривается аналогично). Имеем

$$[f_\lambda, f_{\bar{\mu}}] \in L_c^{(1)}(a + c + (b-d)i) = L_c^{(1)}(c + di) = L_c^{(1)}(\mu);$$

поэтому

$$[f_\lambda, f_{\bar{\mu}}] = k f_\mu, \quad k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Переходя к комплексному сопряжению, получим

$$[f_{\bar{\lambda}}, f_\mu] = \bar{k} f_{\bar{\mu}}.$$

Тогда, ввиду (6.37) и (6.38), имеем

$$[(1/k) f_\lambda + (1/\bar{k}) f_{\bar{\lambda}}, f_\mu + f_{\bar{\mu}}] = f_\mu + f_{\bar{\mu}}.$$

Это противоречит нильпотентности оператора $\mathrm{ad}((1/k) f_\lambda + (1/\bar{k}) f_{\bar{\lambda}})|_{L_c^{(1)}}$. Следовательно,

$$[f_\lambda, f_{\bar{\mu}}] = 0 \tag{6.41}$$

и

$$[f_{\bar{\lambda}}, f_\mu] = 0. \tag{6.42}$$

Теперь рассмотрим оставшиеся скобки

$$[f_\lambda, f_{\bar{\lambda}}] \in L_c^{(1)}(2a) \ \text{ и } \ [f_\mu, f_{\bar{\mu}}] \in L_c^{(1)}(2c).$$

Если $2a \neq e$ и $2c \neq e$, то $[f_\lambda, f_{\bar{\lambda}}] = [f_\mu, f_{\bar{\mu}}] = 0$, и производная подалгебра $L_c^{(1)}$ абелева (см. (6.37)–(6.42)). Тогда $L^{(1)}$ абелева и $L^{(2)} = \{0\}$, что противоречит условию (6.34), т.к. $L_r^{(1)} = L^{(1)}(e)$.

(c.1.1.1) Пусть $2a = e$ и $2c \neq e$. Тогда

$$[f_\mu, f_{\bar{\mu}}] = 0; \tag{6.43}$$

$$[f_\lambda, f_{\bar{\lambda}}] = k f_e, \quad k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{6.44}$$

где $k \neq 0$, т.к. $L_r^{(2)} = L_r^{(1)} = L^{(1)}(e)$. Поэтому единственной ненулевой скобкой в $L_c^{(1)}$ (см. (6.37)–(6.44)) является скобка (6.44). Возьмем комплексное сопряжение этого соотношения и получим $[f_{\bar{\lambda}}, f_\lambda] = \bar{k} f_e$; таким образом, $\bar{k} = -k$, т.е. $k = il$, $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Возвратимся из $L_c^{(1)}$ в $L^{(1)}$. Введем обозначения

$$x = B; \tag{6.45}$$
$$y = (f_\lambda + f_{\bar\lambda})/2, \quad z = (f_\lambda - f_{\bar\lambda})/(2i); \tag{6.46}$$
$$u = (f_\mu + f_{\bar\mu})/2, \quad v = (f_\mu - f_{\bar\mu})/(2i); \tag{6.47}$$
$$w = -(l/2)f_e. \tag{6.48}$$

Теперь непосредственная проверка правил умножения в алгебре Ли $L = \mathrm{span}(x, y, z, u, v, w)$ показывает, что $L = L_{6,I}(\lambda, \mu)$.

(c.1.1.2) Пусть $2a \neq e$ и $2c = e$. Этот случай полностью аналогичен случаю (c.1.1.1); достаточно поменять местами λ и μ. Поэтому $L = L_{6,I}(\mu, \lambda)$.

(c.1.1.3) Пусть $2a = 2c = e$. Тогда

$$[f_\lambda, f_{\bar\lambda}] = kf_e, \quad [f_\mu, f_{\bar\mu}] = lf_e, \quad k,\ l \in \mathbb{C}.$$

Если $k \neq 0$ и $l = 0$, то $L = L_{6,I}(\lambda, \mu)$.

Если $k = 0$ и $l \neq 0$, то $L = L_{6,I}(\mu, \lambda)$. Если $k \neq 0$ и $l \neq 0$, то $L = L_{6,II}(\lambda, \mu)$.

(c.1.2) Пусть $b = \mathrm{Im}\,\lambda = \mathrm{Im}\,\mu = d$. Рассмотрим скобку

$$[f_\lambda, f_e] \in L_c^{(1)}(\lambda + e) = L_c^{(1)}(a + e + bi). \tag{6.49}$$

Очевидно, что $a + e + bi \neq e, a - bi, c - di$. Могут быть только две взаимно исключающие возможности:

$$a + e + bi = c + di \ \Leftrightarrow\ a + e = c$$

или

$$a + e + bi = a + bi \ \Leftrightarrow\ e = 0.$$

(c.1.2.1) Пусть $a + e = c$ и $e \neq 0$; тогда $e > 0$. Имеем

$$[f_\lambda, f_e] \in L_c^{(1)}(a + e + bi) = L_c^{(1)}(c + di);$$

следовательно,

$$[f_\lambda, f_e] = kf_\mu, \quad k \in \mathbb{C}; \tag{6.50}$$
$$[f_{\bar\lambda}, f_e] = \bar{k}f_{\bar\mu}. \tag{6.51}$$

Теперь рассмотрим скобку

$$[f_\mu, f_e] \in L_c^{(1)}(\mu + e) = L_c^{(1)}(c + e + bi) = L_c^{(1)}(a + 2e + bi).$$

Очевидно, что число $c + e + bi = a + 2e + bi$ не является собственным значением $\mathrm{ad}\,B|_{L^{(1)}}$ т.к. оно не равняется ни одному из чисел e, $a \pm bi$, и $c \pm bi$. Следовательно,

$$[f_\mu, f_e] = [f_{\bar\mu}, f_e] = 0.$$

(c.1.2.1.1) Пусть $e = 2a \neq 2c$. Тогда

$$[f_\mu, f_{\bar{\mu}}] \in L_c^{(1)}(2c) = \{0\};$$

поэтому

$$[f_\mu, f_{\bar{\mu}}] = 0.$$

Далее,

$$[f_\lambda, f_{\bar{\mu}}] \in L_c^{(1)}(a + c),$$

но $a + c \neq e = 2a$; следовательно, $L_c^{(1)}(a + c) = \{0\}$ и

$$[f_\lambda, f_{\bar{\mu}}] = [f_{\bar{\lambda}}, f_\mu] = 0.$$

Наконец,

$$[f_\lambda, f_{\bar{\lambda}}] = lf_e, \quad l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{6.52}$$

где $l \neq 0$, т.к. в противном случае $\mathbb{R}f_e = L_r^{(1)} \neq L_r^{(2)} = \{0\}$. Перейдем к комплексному сопряжению равенства (6.52) и получим

$$\operatorname{Re} l = 0.$$

Следовательно, ненулевые скобки в $L_c^{(1)}$ суть (6.52) и, быть может, (6.50) и (6.51).

Перейдем к вещественному базису в L, соответствующему базису B, f_λ, $f_{\bar{\lambda}}$, f_μ, $f_{\bar{\mu}}$, f_e в L_c и заметим, что если $k \neq 0$ в (6.50) и (6.51), то $L = L_{6,III}(\lambda)$. Если $k = 0$ в (6.50) и (6.51), то $L = L_{6,I}(\lambda, \mu)$.

(c.1.2.1.2) Пусть $e = 2c \neq 2a$. Тогда

$$[f_\lambda, f_{\bar{\lambda}}] \in L_c^{(1)}(\lambda + \bar{\lambda}) = L_c^{(1)}(2a) = \{0\};$$

поэтому

$$[f_\lambda, f_{\bar{\lambda}}] = 0.$$

Аналогично

$$[f_\lambda, f_{\bar{\mu}}] \in L_c^{(1)}(a + c) = \{0\},$$

так как $a + c \neq e = 2c$, имеем

$$[f_\lambda, f_{\bar{\mu}}] = 0.$$

Но

$$[f_\mu, f_{\bar{\mu}}] \in L_c^{(1)}(\mu + \bar{\mu}) = L_c^{(1)}(2c) = L_c^{(1)}(e);$$

поэтому

$$[f_\mu, f_{\bar{\mu}}] = lf_e, \quad l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{6.53}$$

где $l \neq 0$, т.к. в противном случае условие (6.34) нарушается, как в предыдущем пункте. Из тождества Якоби для тройки $f_\mu, f_{\bar{\mu}}, f_\lambda$ получаем $kl = 0$. Но $l \neq 0$; следовательно, $k = 0$ в (6.50)и (6.51).

Следовательно, единственной ненулевой скобкой в $L_c^{(1)}$ является (6.53). Поэтому $L = L_{6,I}(\mu, \lambda)$.

(c.1.2.2) Пусть $e = 0$ и $a+e \neq c$. Ввиду (6.49), имеем $[f_\lambda, f_e] \in L_c^{(1)}(a+bi)$; поэтому $[f_\lambda, f_e] = kf_\lambda$. Оператор $\operatorname{ad} f_e|_{L_c^{(1)}}$ нильпотентен, поэтому $k = 0$, т.е.

$$[f_\lambda, f_e] = [f_{\bar\lambda}, f_e] = 0.$$

Аналогично

$$[f_\mu, f_e] = [f_{\bar\mu}, f_e] = 0.$$

Теперь рассмотрим скобку

$$[f_\lambda, f_{\bar\mu}] \in L_c^{(1)}(a + c).$$

(c.1.2.2.1) Пусть $a + c = 0$. Тогда

$$[f_\lambda, f_{\bar\mu}] \in L_c^{(1)}(e);$$

следовательно,

$$[f_\lambda, f_{\bar\mu}] = kf_e, \quad k \in \mathbb{C}; \tag{6.54}$$

$$[f_{\bar\lambda}, f_\mu] = \bar{k} f_e. \tag{6.55}$$

Далее, $[f_\lambda, f_{\bar\lambda}] \in L^{(1)}(2a) = \{0\}$ ($a \neq 0$, т.к. в противном случае $c = 0$ и $\lambda = \mu$, что противоречит условию (c.1)). Следовательно,

$$[f_\lambda, f_{\bar\lambda}] = 0.$$

Аналогично

$$[f_\mu, f_{\bar\mu}] = 0.$$

Поэтому все возможные ненулевые скобки в $L_c^{(1)}$ описываются равенствами (6.54) и (6.55). Если $k = 0$ в этих соотношениях, то $L_c^{(1)}$ абелева, что противоречит условию (6.34). Следовательно, $k \neq 0$. Переходя к вещественному базису в L, получаем $L = L_{6,IV}(\lambda)$.

(c.1.2.2.2) Пусть $a + c \neq 0$. Тогда $[f_\lambda, f_{\bar\mu}] \in L_c^{(1)}(a + c) = \{0\}$, поэтому

$$[f_\lambda, f_{\bar\mu}] = [f_{\bar\lambda}, f_\mu] = 0.$$

Теперь рассмотрим скобку

$$[f_\lambda, f_{\bar\lambda}] \in L_c^{(1)}(2a).$$

(c.1.2.2.2.1) Пусть $a \neq 0$. Тогда

$$[f_\lambda, f_{\bar\lambda}] = 0.$$

Далее, $[f_\mu, f_{\bar\mu}] \in L_c^{(1)}(2c)$. Если $c \neq 0$, то $[f_\mu, f_{\bar\mu}] = 0$ и $L_c^{(1)}$ абелева, что противоречит условию (6.34). Следовательно, $c = 0$, и

$$[f_\mu, f_{\bar\mu}] = kf_e, \quad k \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

есть единственная ненулевая скобка в $L_c^{(1)}$. Переходя к вещественному базису в L, получаем $L = L_{6,I}(\mu, \lambda)$.

(c.1.2.2.2.2) Пусть $a = 0$. Тогда $[f_\lambda, f_{\bar\lambda}] \in L_c^{(1)}(2a) = L_c^{(1)}(e)$; следовательно,

$$[f_\lambda, f_{\bar\lambda}] = kf_e, \quad k \in \mathbb{C}. \tag{6.56}$$

По условию (c.1.2.2.2), имеем $a + c \neq 0$; следовательно, $c \neq 0$. Поэтому $[f_\mu, f_{\bar\mu}] \in L_c^{(1)}(2c) = \{0\}$ и

$$[f_\mu, f_{\bar\mu}] = 0.$$

Единственная ненулевая скобка в $L_c^{(1)}$ дается равенством (6.56). Если $k = 0$ в этом соотношении, то $L_c^{(1)}$ абелева, что невозможно ввиду (6.34). Поэтому $k \neq 0$ и $L = L_{6,I}(\lambda, \mu)$.

(c.2) Пусть $\lambda = \mu$. Оператор $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ имеет кратный спектр

$$\mathrm{Sp}^{(1)} = \{\lambda, \bar\lambda, e\},$$

где $\lambda = a + bi$, $b > 0$, двукратное собственное значение, а $e \geqslant 0$ — простое. Имеем разложение

$$L^{(1)} = L^{(1)}(\lambda) \oplus L^{(1)}(e) \quad \text{где} \quad \dim L^{(1)}(\lambda) = 4 \quad \text{и} \quad \dim L^{(1)}(e) = 1.$$

Поэтому

$$L^{(2)} = [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] + [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(e)],$$

где

$$\begin{aligned} &[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(e)] \subset L^{(1)}(\lambda + e), \\ &[L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] \subset L^{(1)}(2a). \end{aligned}$$

Тогда из условия $L_r^{(1)} = L_r^{(2)} = L^{(1)}(e)$ следует, что $e = 2a$.

(c.2.1) Пусть $a \neq 0$.

(c.2.1.1) Пусть оператор $\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}}$ недиагонализируем, т.е. в некотором базисе $f_\lambda, g_\lambda, f_{\bar\lambda}, g_{\bar\lambda}, f_e$ пространства $L_c^{(1)}$, для которого

$$\overline{f_\lambda} = f_{\bar\lambda}, \quad \overline{g_\lambda} = g_{\bar\lambda}, \quad \text{и} \quad \overline{f_e} = f_e,$$

этот оператор имеет матрицу

$$\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \bar\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Имеем разложение

$$L_c^{(1)} = L_c^{(1)}(\lambda) \oplus L_c^{(1)}(\bar\lambda) \oplus L_c^{(1)}(e),$$

где $L_c^{(1)}(\lambda) = \mathrm{span}(f_\lambda, g_\lambda)$, $L_c^{(1)}(\bar\lambda) = \mathrm{span}(f_{\bar\lambda}, g_{\bar\lambda})$, и $L_c^{(1)}(e) = \mathbb{C}f_e$.

В силу того, что $[f_\lambda, f_e] \in L_c^{(1)}(\lambda + e) = \{0\}$, получаем

$$[f_\lambda, f_e] = 0.$$

Аналогично

$$[g_\lambda, f_e] = [f_{\bar\lambda}, f_e] = [g_{\bar\lambda}, f_e] = 0.$$

Далее, все попарные скобки векторов f_λ, g_λ, $f_{\bar\lambda}$, и $g_{\bar\lambda}$ содержатся в $L_c^{(1)}(e)$; поэтому

$$\begin{aligned}
&[f_\lambda, g_\lambda] = \alpha f_e, \quad \alpha = c + di, \quad c, d \in \mathbb{R};\\
&[f_\lambda, g_{\bar\lambda}] = \beta f_e, \quad \beta = p + qi, \quad p, q \in \mathbb{R};\\
&[f_\lambda, f_{\bar\lambda}] = \gamma f_e, \quad \gamma \in \mathbb{C};\\
&[g_\lambda, g_{\bar\lambda}] = \delta f_e, \quad \delta \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Применяя комплексное сопряжение к последним двум соотношениям, получаем

$$\begin{aligned}
&\gamma = -\bar\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = ik, \quad k \in \mathbb{R},\\
&\delta = -\bar\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = il, \quad l \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующий вещественный базис в $L^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
&y = (f_\lambda + f_{\bar\lambda})/2, \quad z = (f_\lambda - f_{\bar\lambda})/(2i),\\
&u = (g_\lambda + g_{\bar\lambda})/2, \quad v = (g_\lambda - g_{\bar\lambda})/(2i),\\
&w = f_e
\end{aligned}$$

и получим следующую таблицу умножения:

	y	z	u	v
y	0	$(k/2)w$	$((c+p)/2)w$	$((d-q)/2)w$
z	$(-k/2)w$	0	$((d+q)/2)w$	$((p-c)/2)w$
u	$(-(c+p)/2)w$	$(-(d+q)/2)w$	0	$(-l/2)w$
v	$(-(d-q)/2)w$	$(-(p-c)/2)w$	$(l/2)w$	0

Из тождества Якоби для соответствующих троек элементов получаем

$$\begin{aligned}
&(B, y, z) \quad \Rightarrow \quad (d+q)/2 = (d-q)/2,\\
&(B, y, z) \quad \Rightarrow \quad b((p-c)/2 - (c+p)/2) = -l/2,\\
&(B, z, u) \quad \Rightarrow \quad b((c+p)/2 - (p-c)/2) = -l/2,\\
&(B, z, v) \quad \Rightarrow \quad (d+q)/2 = -(d-q)/2.
\end{aligned}$$

Поэтому $d = q = l = c = 0$, т.е. таблица умножения принимает вид

	y	z	u	v
y	0	$(k/2)w$	$(p/2)w$	0
z	$(-k/2)w$	0	0	$(p/2)w$
u	$(-p/2)w$	0	0	0
v	0	$(-p/2)w$	0	0

Отметим, что $k^2 + p^2 \neq 0$, т.к. при $k = p = 0$ производная подалгебра $L^{(1)}$ абелева, что противоречит (6.34). Если $p = 0$, то $L = L_{6,V}(\lambda)$, а если $p \neq 0$, то $L = L_{6,VI}(\lambda)$.

(c.2.1.2) Пусть оператор $\mathrm{ad}_c B|_{L_c^{(1)}}$ диагонализируем. Тогда существует базис $\{y, z, u, v, w\}$ пространства $L^{(1)}$, в котором оператор $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$ имеет матрицу

$$\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \quad \lambda = a + bi.$$

Таким же образом как в пункте (c.2.1.1), показываем, что

$$[y, w] = [z, w] = [u, w] = [v, w] = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} L^{(2)} &= [L^{(1)}, L^{(1)}] = [L^{(1)}(\lambda) \oplus L^{(1)}(e), L^{(1)}(\lambda) \oplus L^{(1)}(e)] = \\ &= [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] \oplus [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(e)] = [L^{(1)}(\lambda), L^{(1)}(\lambda)] = \\ &= L^{(1)}(e). \end{aligned}$$

Следовательно, $L^{(1)}/L^{(2)} = L^{(1)}(\lambda)$, и присоединенный оператор

$$\widetilde{\mathrm{ad}\, B} : L^{(1)}/L^{(2)} \to L^{(1)}/L^{(2)}$$

имеет матрицу

$$\widetilde{\mathrm{ad}\, B} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

Комплексификация этого оператора $\widetilde{\mathrm{ad}_c\, B}$ имеет два линейно независимых собственных вектора, т.е. $\mathrm{j}\,(\lambda) = 2$, см. определение 4.1. По теореме 4.1, система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ не может быть управляемой, поэтому случай (c.2.1.2) невозможен.

(c.2.2) Пусть $a = 0$. Тогда $\mathrm{Sp}^{(1)} = \{\pm bi, 0\}$, $b \neq 0$. Оба собственных значения $\pm bi$ имеют алгебраическую кратность два, а 0 есть простое собственное значение.

Для того, чтобы получить $b = 1$, заменим элемент B элементом B/b и будем его обозначить в дальнейшем как x. Поэтому $\mathrm{Sp}^{(1)} = \mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\, x|_{L^{(1)}}) = \{\pm i, 0\}$.

(c.2.2.1) Пусть оба собственных значения i, $-i$ имеют геометрическую кратность один. В комплексификации L_c можно выбрать жорданов базис оператора $\mathrm{ad}_c\, x|_{L^{(1)}}$:

$$L_c = \mathrm{span}(x, e_1, e_2, f_1, f_2, g), \tag{6.57}$$

$$\overline{e}_1 = f_1, \quad \overline{e}_2 = f_2, \quad \overline{g} = g, \tag{6.58}$$

$$L_c^{(1)} = \mathrm{span}(e_1, e_2, f_1, f_2, g), \tag{6.59}$$

$$\mathrm{ad}_c\, x|_{\mathrm{span}(e_1,e_2,f_1,f_2,g)} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.60}$$

Исследуем скобки Ли в производной подалгебре $L_c^{(1)}$.

Векторы e_1 и e_2 принадлежат $L_c^{(1)}(i)$; поэтому, по лемме 6.1,

$$[e_1, e_2] \in L_c^{(1)}(2i) = \{0\},$$

то есть

$$[e_1, e_2] = 0. \tag{6.61}$$

Аналогично

$$[f_1, f_2] = 0. \tag{6.62}$$

Аналогичные рассуждения с использованием леммы 6.1 дают

$$[e_1, f_1] = ag, \qquad a \in \mathbb{C}; \tag{6.63}$$

$$[e_2, f_2] = bg, \qquad b \in \mathbb{C}; \tag{6.64}$$

$$[e_1, f_2] = cg, \qquad c \in \mathbb{C}; \tag{6.65}$$

$$[e_2, f_1] = dg, \qquad d \in \mathbb{C}. \tag{6.66}$$

Далее,

$$\overline{a}g = \overline{ag} = \overline{[e_1, f_1]} = [\overline{e}_1, \overline{f}_1] = [f_1, e_1] = -ag,$$

следовательно,

$$a = -\overline{a} = i\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{6.67}$$

Аналогично

$$b = -\overline{b} = i\beta, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{6.68}$$

и

$$c = -\overline{d} = \gamma + i\delta, \quad \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}. \tag{6.69}$$

Ввиду (6.67)–(6.69), коммутационные соотношения (6.63)–(6.66) переписываются как

$$[e_1, f_1] = i\alpha g, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \tag{6.70}$$

$$[e_2, f_2] = i\beta g, \quad \beta \in \mathbb{R}; \tag{6.71}$$

$$[e_1, f_2] = (\gamma + i\delta)g, \quad \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}; \tag{6.72}$$

$$[e_2, f_1] = (-\gamma + i\delta)g. \tag{6.73}$$

Теперь рассмотрим скобки Ли с элементом g. По лемме 6.1, для оператора $\operatorname{ad} g$ подпространство $L_c^{(1)}(i) = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ является инвариантным. Более того, в силу нильпотентности $L^{(1)}$, оператор

$$\operatorname{ad} g : L_c^{(1)}(i) \to L_c^{(1)}(i) \tag{6.74}$$

также нильпотентен.

(c.2.2.1.1) Пусть оператор (6.74) отличен от нуля. Тогда его образ одномерен.

(c.2.2.1.1.1) Пусть $\operatorname{Im}\left(\operatorname{ad} g|_{L_c^{(1)}(i)}\right) \neq \mathbb{C}\, e_2$. Выберем такой вектор

$$e_1' \in L_c^{(1)}(i) = \operatorname{span}(e_1, e_2)$$

что

$$e_1' = e_1 + ke_2, \quad k \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}\left(\operatorname{ad} g|_{L_c^{(1)}(i)}\right) = \mathbb{C}\, e_1'. \tag{6.75}$$

Оператор $\operatorname{ad} x : L_c^{(1)}(i) \to L_c^{(1)}(i)$ имеет одну и ту же матрицу

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

в обоих случаях $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_1', e_2\}$. Поэтому мы можем переобозначить e_1' через e_1, выбрать соответствующий вектор $f_1 = \overline{e}_1$, и сохранить предыдущие обозначения для нового базиса $L_c = \operatorname{span}(x, e_1, e_2, f_1, f_2, g)$ с дополнительным свойством (см. (6.75))

$$\operatorname{Im}\left(\operatorname{ad} g|_{L_c^{(1)}(i)}\right) = \mathbb{C}\, e_1.$$

Тогда, в силу того, что оператор $\operatorname{ad} g \;:\; L_c^{(1)}(i) \to L_c^{(1)}(i)$ нильпотентен и отличен от нуля, он имеет матрицу

$$\operatorname{ad} g|_{\operatorname{span}(e_1, e_2)} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Но тождество Якоби для тройки (x, g, e_2) дает $r = 0$. Полученное противоречие показывает, что случай (c.2.2.1.1.1) невозможен.

(c.2.2.1.1.2) Пусть $\operatorname{Im}\left(\operatorname{ad} g|_{L_c^{(1)}(i)}\right) = \mathbb{C}\, e_2$. Тогда

$$\operatorname{ad} g|_{\operatorname{span}(e_1, e_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbb{C} \setminus \{0\};$$
$$\operatorname{ad} g|_{\operatorname{span}(f_1, f_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{q} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из тождества Якоби получаем

$$\begin{aligned} (x, e_1, f_1) \;&\Rightarrow\; \delta = 0, \\ (x, e_1, f_2) \;&\Rightarrow\; \beta = 0, \\ (e_1, e_2, f_1) \;&\Rightarrow\; \gamma = 0. \end{aligned}$$

Поэтому предыдущие соотношения должны выполняться; если они справедливы, то тождество Якоби выполняется для всех возможных троек базисных элементов в L_c. Наконец, правила умножения в алгебре Ли $L_c = \mathrm{span}(x, e_1, e_2, f_1, f_2, g)$ определяются следующими скобками Ли: (6.60) и

$$\begin{aligned}
&[e_1, f_1] = i\alpha g, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
&\mathrm{ad}\, g|_{\mathrm{span}(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad q = q_1 + iq_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\
&\mathrm{ad}\, g|_{\mathrm{span}(f_1,f_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{q} & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{6.76}$$

все остальные скобки между базисными элементами либо равны нулю, либо следуют из указанных соотношений по кососимметричности (отметим, что $\alpha \neq 0$ в (6.77) так как $g \in L_c^{(1)}$).

Выберем новый базисный вектор

$$x' = x + \gamma g, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \tag{6.77}$$

в L_c; значение параметра γ будет определено позже. Имеем

$$\begin{aligned}
&[x', e_1] = ie_1 + e_2 + q\gamma e_2 = ie_1 + (1 + q\gamma)e_2; \\
&[x', f_1] = -if_1 + f_2 + \bar{q}\gamma f_2 = -if_1 + (1 + \bar{q}\gamma)f_2.
\end{aligned}$$

(c.2.2.1.1.2.1) Пусть $q \notin \mathbb{R}$. Выберем новые базисные вектора

$$\begin{aligned}
&e_1' = e_1, \quad e_2' = (1 + q\gamma)e_2, \\
&f_1' = f_1, \quad f_2' = (1 + \bar{q}\gamma)f_2, \\
&g' = -(\alpha/2)g
\end{aligned}$$

в L_c и определим константы

$$\gamma = -\frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2} \quad \text{и} \quad K = -\frac{\alpha}{2}\frac{q_1^2 + q_2^2}{q_2} \neq 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&[g', e_1'] = iKe_2'; \\
&[g', f_1'] = -iKf_2'.
\end{aligned}$$

Далее, разделим базисные векторы e_1', f_1', e_2', и f_2' на $\sqrt{|K|}$, вектор g' на $|K|$, обозначим полученные векторы через e_1, f_1, e_2, f_2 и g, и получим правила умножения в L_c

$$\begin{aligned}
&[e_1, f_1] = -2ig; \\
&[g, e_1] = \pm ie_2; \\
&[g, f_1] = \mp if_2.
\end{aligned}$$

Переходя к вещественному базису в L, получаем $L = L_{6,VII}$ или $L = L_{6,VIII}$.

(c.2.2.1.1.2.2) Пусть $q \in \mathbb{R}$.

Положим $\gamma = -1/q$ в (6.77) и выберем следующие новые базисные векторы в L_c:

$$\begin{aligned}
&e_1' = e_1, \quad e_2' = -\alpha(q/2)e_2,\\
&f_1' = f_1, \quad f_2' = -\alpha(q/2)f_2,\\
&g' = -(\alpha/2)g;
\end{aligned}$$

сохраняя старые обозначения для новых векторов, получаем правила умножения

$$\begin{aligned}
&[e_1, f_1] = -2ig,\\
&[g, e_1] = e_2,\\
&[g, f_1] = f_2.
\end{aligned}$$

В соответствующем вещественном базисе:

$$L = \operatorname{span}(x, y, z, u, v, w), \tag{6.78}$$
$$y = (e_1 + f_1)/2, \quad z = (e_1 - f_1)/(2i), \tag{6.79}$$
$$u = (e_2 + f_2)/2, \quad v = (e_2 - f_2)/(2i), \tag{6.80}$$
$$w = g, \tag{6.81}$$

имеем $L = L_{6,III}(i)$.

(c.2.2.1.2) Теперь пусть оператор (6.74) нулевой:

$$\operatorname{ad} g|_{\operatorname{span}(e_1,e_2)} = 0; \tag{6.82}$$

поэтому

$$\operatorname{ad} g|_{\operatorname{span}(f_1,f_2)} = 0. \tag{6.83}$$

Правила умножения в L_c определяются соотношениями (6.60)–(6.62), (6.70)–(6.73), (6.82), и (6.83). Из тождества Якоби получаем

$$\begin{aligned}
(x, e_1, f_1) \ &\Rightarrow \quad \delta = 0,\\
(x, e_1, f_2) \ &\Rightarrow \quad \beta = 0.
\end{aligned}$$

Если $\delta = \beta = 0$, то тождество Якоби выполняется для всех базисных элементов в L_c.

Поэтому скобки Ли в L_c определяются следующими соотношениями: (6.60) и

$$\begin{aligned}
&[e_1, f_1] = i\alpha g, \quad \alpha \in \mathbb{R},\\
&[e_1, f_2] = -[e_2, f_1] = \gamma g, \quad \gamma \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

где

$$\alpha^2 + \gamma^2 \neq 0,$$

так как $g \in L_c^{(1)}$.

Теперь поступаем в точности как в пункте (с.2.2.1.1.2): выбираем вещественный базис (6.79)–(6.81) и получаем

$$\begin{aligned}
&[y, z] = kw, \quad k = -\alpha/2 \in \mathbb{R}, \\
&[y, u] = [z, v] = lw, \quad l = \gamma/2 \in \mathbb{R}, \\
&k^2 + l^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Если $l = 0$, то $L = L_{6,V}(i)$, а если $l \neq 0$, то $L = L_{6,VI}(i)$ (см. конструкции 6.9, 6.10) в случае (с.2.2.1.2).

(с.2.2.2) Пусть оба собственных значения $\pm i$ имеют алгебраическую кратность два. Существует базис $e_1,\ e_2,\ f_1,\ f_2,\ g$ производной подалгебры $L_c^{(1)}$, в котором оператор $\operatorname{ad} x$ имеет диагональную матрицу

$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(e_1,e_2,f_1,f_2,g)} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.84}$$

Так же как ранее, получаем скобки Ли

$$\begin{aligned}
&[e_1, f_1] = i\alpha g, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\
&[e_2, f_2] = i\beta g, \quad \beta \in \mathbb{R}, \\
&[e_1, f_2] = (\gamma + i\delta) g, \quad \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}, \\
&[e_2, f_1] = (-\gamma + i\delta) g.
\end{aligned}$$

Оператор $\operatorname{ad} g : \operatorname{span}(e_1, e_2) \to \operatorname{span}(e_1, e_2)$ нильпотентен; более того, он отличен от нуля так как в противном случае $L_c^{(2)} = \mathbb{C}\, g$; поэтому $\mathrm{j}\,(\pm i) = 2$, противоречие с теоремой 4.1. Поэтому существует базис e_1, e_2 в $L_c^{(1)}(i)$ и соответствующий базис $f_1 = \overline{e}_1,\ f_2 = \overline{e}_2$ в $L_c^{(1)}(-i)$, в котором

$$\operatorname{ad} g|_{\operatorname{span}(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \operatorname{ad} g|_{\operatorname{span}(f_1,f_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{6.85}$$

отметим, что матрица в (6.84) остается неизменной в новом базисе.

Выпишем тождество Якоби для троек элементов и получим

$$\begin{aligned}
(g, e_2, f_1) \ &\Rightarrow \quad \alpha = 0; \\
(g, e_2, f_2) \ &\Rightarrow \quad \delta = 0; \\
(f_2, e_1, e_2) \ &\Rightarrow \quad \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Если $\alpha = \delta = \gamma = 0$, то тождество Якоби выполняется для всех возможных троек базисных элементов в L_c.

Поэтому правила умножения в L_c определяются соотношениями (6.84), (6.85), и

$$[e_2, f_2] = i\beta g, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{6.86}$$

где $\beta \neq 0$ так как $g \in L_c^{(1)}$.

Теперь выберем новые базисные векторы

$$e_1' = \beta e_1, \quad f_1' = \beta f_1, \quad \text{и} \quad g' = \beta g,$$

обозначим их как раньше через e_1, f_1, и g соответственно, и получим

$$[e_2, f_2] = ig$$

вместо (6.86).

Наконец, перейдем к вещественному базису (6.79)–(6.81) в L и получим $L = L_{6,III}(i)$; см. конструкцию 6.7.

Поэтому все возможные случаи расположения спектра $\mathrm{Sp}^{(1)}$ на комплексной плоскости рассмотрены, и во всех этих случаях алгебра Ли L имеет один из типов $L_{6,I}$–$L_{6,VIII}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Все алгебры Ли, перечисленные в пунктах (1)–(8) теоремы 6.20, управляемы в силу теорем 6.14–6.19, (c).

Теорема 6.20 полностью доказана. □

6.6.4 Изоморфизмы управляемых алгебр Ли

Теорема 6.21. *Любые две шестимерные алгебры Ли, принадлежащие разным классам* (1)–(8)*, указанным в теореме* 6.20*, неизоморфны между собой. Все изоморфизмы внутри этих классов суть следующие.*

(1) $L_{6,I}(\lambda_1, \mu_1) \simeq L_{6,I}(\lambda_2, \mu_2)$, $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_j \neq \mu_j, \bar{\mu}_j$, $j = 1, 2$, *тогда и только тогда, когда* $\{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\} = k\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\}$ *и* $\{\mu_2, \bar{\mu}_2\} = k\{\mu_1, \bar{\mu}_1\}$ *для некоторого* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) $L_{6,II}(\lambda_1, \mu_1) \simeq L_{6,II}(\lambda_2, \mu_2)$, $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j = \mathrm{Re}\,\mu_j$, $\lambda_j \neq \mu_j, \bar{\mu}_j$, $j = 1, 2$, *тогда и только тогда, когда* $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \mu_1, \bar{\mu}_1\} \sim \{\lambda_2, \bar{\lambda}_2, \mu_2, \bar{\mu}_2\}$.

(3) $L_{6,III}(\lambda_1) \simeq L_{6,III}(\lambda_2)$, $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, *тогда и только тогда, когда* $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\} \sim \{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\}$.

(4) $L_{6,IV}(\lambda_1) \simeq L_{6,IV}(\lambda_2)$, $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\,\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, *тогда и только тогда, когда* $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\} \sim \{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\}$.

(5) $L_{6,V}(\lambda_1) \simeq L_{6,V}(\lambda_2)$, $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, *тогда и только тогда, когда* $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\} \sim \{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\}$.

(6) $L_{6,VI}(\lambda_1) \simeq L_{6,VI}(\lambda_2)$, $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, *тогда и только тогда, когда* $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\} \sim \{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\}$.

Доказательство. В этом доказательстве обозначим алгебру Ли $L_{6,III}(bi) \simeq L_{6,III}(i)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, через $L_{6,IX}$.

(1) Алгебры Ли $L_{6,III}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\,\mathbb{R})$, неизоморфны алгебрам Ли всех других классов $L_{6,I}$, $L_{6,II}$, $L_{6,IV}$–$L_{6,IX}$, так как $\dim L^{(2)} = 3$ и спектр $\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\,x|_{L^{(1)}}) = \{\lambda, \bar{\lambda}, \lambda + 2a, \bar{\lambda} + 2a, 2a\}$ алгебраически прост для $L =$

$L_{6,III}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\,\mathbb{R})$, что неверно для алгебр Ли во всех остальных классах.

(2) Покажем, что $L_{6,I}(\lambda_1, \mu_1) \not\simeq L_{6,II}(\lambda_2, \mu_2)$. От противного, предположим, что $L_{6,I}(\lambda_1, \mu_1) \simeq L_{6,II}(\lambda_2, \mu_2)$. Отождествим обе эти алгебры Ли с $L = L_{6,I}(\lambda, \mu)$, и зафиксируем базис $\{x, y, z, u, v, w\}$ в L как в конструкции 6.5. Существует другой базис $\{x', y', z', u', v', w'\}$ в L с правилами умножения как в конструкции 6.6. По лемме 6.2, $\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\, x|_{L^{(1)}}) \sim \mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\, x'|_{L^{(1)}})$. При необходимости применяя гомотетии и перестановки базисных векторов, можно получить равенства $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ и $\mu = \mu_1 = \mu_2$.

Перейдем к соответствующим комплексным базисам в L_c:

$$
\begin{gathered}
x,\ e_1 = y + iz,\ f_1 = y - iz,\ e_2 = u + iv,\ f_2 = u - iv,\ g = w,\\
x',\ e_1' = y' + iz',\ f_1' = y' - iz',\ e_2' = u' + iv', f_2' = u' - iv',\ g' = w'.
\end{gathered}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}\, x|_{\mathrm{span}(e_1, f_1, e_2, f_2, g)} &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \\
[e_1, f_1] &= -2ig, \\
[e_2', f_2'] &= -2ig'.
\end{aligned} \tag{6.87}
$$

Далее, имеем разложение

$$
x' = x + \alpha e_1 + \overline{\alpha} f_1 + \beta f_1 + \overline{\beta} f_2 + \gamma g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{R};
$$

поэтому

$$
\mathrm{ad}\, x'|_{\mathrm{span}(e_1, f_1, e_2, f_2, g)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mu} & 0 \\ -2i\alpha & 2i\overline{\alpha} & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}.
$$

Следовательно,

$$
e_1' = p(e_1 - 2i(\alpha/\lambda)g), \quad e_2' = qe_2, \quad p,\ q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \tag{6.88}
$$

$$
f_1' = \overline{p}(f_1 + 2i(\overline{\alpha}/\overline{\lambda})g), \quad f_2' = \bar{q} e_2, \tag{6.89}
$$

$$
g' = rg, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{6.90}
$$

Теперь

$$
[e_2', f_2'] = 0,
$$

что противоречит (6.87). Поэтому $L_{6,I}(\lambda_1, \mu_1) \not\simeq L_{6,II}(\lambda_2, \mu_2)$.

(3) Покажем, что $L_{6,I}(\lambda_1, \mu_1) \not\simeq L_{6,IV}(\lambda_2)$. Как в пункте **(2)**, имеем

$$
[e_1', f_2'] = -2ig'
$$

из конструкции 6.8 и

$$[e'_1, f'_2] = 0$$

из (6.88) и (6.89), противоречие.

(4) Алгебры Ли $L_{6,I}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$, неизоморфны ни одной из алгебр Ли $L_{6,V}$–$L_{6,IX}$ так как спектр $\{\lambda,\bar{\lambda},\mu,\bar{\mu}\}$ оператора $\operatorname{ad} x|_{L^{(1)}}$ алгебраически прост при $L = L_{6,I}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu,\bar{\mu}$, что неверно в случае алгебр Ли из классов $L_{6,V}$–$L_{6,IX}$.

(5) $L_{6,II}(\lambda_1,\mu_1) \not\simeq L_{6,IV}(\lambda_2)$, $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\mu_1$, $\lambda_1 \neq \mu_1,\bar{\mu}_1$, так как $\{\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\mu_1,\bar{\mu}_1,2a_1\} \not\sim \{\lambda_2,\bar{\lambda}_2,-\lambda_2,-\bar{\lambda}_2,0\}$.

(6) Алгебры Ли $L_{6,II}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\mu$, $\lambda \neq \mu,\bar{\mu}$, неизоморфны ни одной из алгебр Ли $L_{6,V}$–$L_{6,IX}$, так как спектр $\{\lambda,\bar{\lambda},\mu,\bar{\mu}\}$ алгебраически прост для $L = L_{6,II}(\lambda,\mu)$, что неверно в случае алгебр Ли классов $L_{6,V}$–$L_{6,IX}$.

(7) Алгебры Ли $L_{6,IV}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\,\mathbb{R})$, неизоморфны ни одной из алгебр Ли $L_{6,V}$–$L_{6,IX}$ в силу тех же причин, что и в пункте **(6)**.

(8) Покажем теперь, что $L_{6,V}(\lambda_1) \not\simeq L_{6,VI}(\lambda_2)$, $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Предположим, что $L_{6,V}(\lambda_1) \simeq L_{6,VI}(\lambda_2)$. Выберем канонические базисы как в конструкциях 6.9, 6.10:

$$L_{6,V}(\lambda_1) = \operatorname{span}(x_1,y_1,z_1,u_1,v_1,w_1);$$
$$L_{6,VI}(\lambda_2) = \operatorname{span}(x_2,y_2,z_2,u_2,v_2,w_2).$$

Производная подалгебра $L^{(1)}_{6,V}(\lambda_1)$ содержит 3-мерное подпространство

$$I_1 = \operatorname{span}(u_1,v_1,w_1)$$

в своем центре. Поэтому существует 3-мерное подпространство I_2 в центре алгебры $L^{(1)}_{6,VI}(\lambda_2)$. Имеем

$$\dim(I_2 \cap \operatorname{span}(y_2,z_2,u_2,v_2)) \geqslant 1.$$

Возьмем любой вектор

$$0 \neq f = ay_2 + bz_2 + cu_2 + dv_2 \in I_2.$$

Умножая это разложение на векторы y_2, z_2, u_2, и v_2, получаем

$$a = b = c = d = 0,$$

противоречие.

(9) Алгебры Ли $L_{6,V}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, неизоморфны ни одной из алгебр Ли $L_{6,VII}$, $L_{6,VIII}$, и $L_{6,IX}$ так как $\dim L^{(2)}_{6,V}(\lambda) = 1$, а $\dim L^{(2)}_{6,VII} = \dim L^{(2)}_{6,VIII} = \dim L^{(2)}_{6,IX} = 3$.

(10) Показываем, что $L_{6,VI}(\lambda) \not\simeq L_{6,VII},\ L_{6,VIII},\ L_{6,IX}$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, как выше в пунктах **(8)** и **(9)**.

(11) Покажем, что $L_{6,VII} \not\simeq L_{6,VIII}$. От противного, предположим, что $L = L_{6,VII} = L_{6,VIII}$, и выберем канонические базисы как в конструкциях 6.11 и 6.12:

$$\begin{aligned}
&L_{6,VII} = \operatorname{span}(x, y, z, u, v, w);\\
&L_{6,VIII} = \operatorname{span}(x', y', z', u', v', w');\\
&e_1 = y + iz,\ f_1 = y - iz,\ e_2 = u + iv,\ f_2 = u - iv,\ g = w;\\
&e_1' = y' + iz',\ f_1' = y' - iz',\ e_2' = u' + iv',\ f_2' = u' - iv',\ g' = w'.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(e_1,f_1,e_2,f_2,g)} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\\
&[g, e_1] = ie_2, \quad [g, f_1] = -if_2,\\
&[g', e_1'] = -ie_2', \quad [g', f_1'] = if_2'.
\end{aligned} \tag{6.91}$$

Далее,

$$x' = x + \alpha e_1 + \beta e_2 + \overline{\alpha} f_1 + \overline{\beta} f_2 + \gamma g, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

следовательно,

$$\operatorname{ad} x'|_{\operatorname{span}(e_1,f_1,e_2,f_2,g)} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1+i\gamma & i & 0 & 0 & i\alpha\\ 0 & 0 & -i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-i\gamma & -i & -i\overline{\alpha}\\ 2i\overline{\alpha} & 0 & -2i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&e_1' = k(e_1 + 2\overline{\alpha} g), \quad e_2' = k(1+i\gamma)e_2, \quad k \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\\
&f_1' = \overline{k}(f_1 + 2\alpha g), \quad f_2' = \overline{k}(1-i\gamma)f_2,\\
&g' = -1/(2i)[e_1', f_1'] = k\overline{k}(g + \alpha e_2 + \overline{\alpha} f_2),\\
&[g', e_1'] = \frac{ik\overline{k}}{1+i\gamma} e_2'.
\end{aligned}$$

Сравнивая последнее соотношение с (6.91), получаем

$$\frac{k\overline{k}}{1+i\gamma} = -1, \tag{6.92}$$

что невозможно. Это противоречие показывает, что $L_{6,VII} \not\simeq L_{6,VIII}$.

(12) Покажем, что $L_{6,VII} \not\simeq L_{6,IX}$. С помощью рассуждений, подобных приведенным в пункте **(11)**, заключаем из таблицы умножения в $L_{6,IX}$, что

$$[g', e_1'] = e_2'$$

вместо (6.91). Теперь

$$\frac{ik\overline{k}}{1+i\gamma} = 1$$

вместо (6.92), противоречие.

(13) Аналогичным рассуждением доказываем, что $L_{6,VIII} \not\simeq L_{6,IX}$.

Итак, доказано, что все классы алгебр Ли $L_{6,I}$–$L_{6,IX}$ попарно неизоморфны. Переходим к исследованию изоморфизмов внутри этих классов.

(14) Докажем утверждение (1) теоремы 6.8.

Необходимость. По лемме 6.2, существует такое число $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что

$$\{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\, \mu_2, \bar{\mu}_2\} = k\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\, \mu_1, \bar{\mu}_1\}.$$

Из правил умножения в конструкции 6.5 следует, что в любой алгебре Ли $L_{6,I}(\lambda, \mu) = \mathrm{span}(x, y, z, u, v, w)$, идеал $I = \mathrm{span}(u, v) = L^{(1)}(\mu)$ определен инвариантно (см. выражения для e_2' и f_2' в (6.88) и (6.89)). Пусть $I_j \subset L_{6,I}(\lambda_j, \mu_j)$, $j = 1, 2$, суть такие идеалы в изоморфных алгебрах Ли. Тогда

$$L_4(\lambda_1) = L_{6,I}(\lambda_1, \mu_1)/I_1 \simeq L_{6,I}(\lambda_2, \mu_2)/I_2 = L_4(\lambda_2).$$

По теореме 6.9,

$$\{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\} = k\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\}.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть

$$\{\lambda_2, \bar{\lambda}_2\} = k\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\}, \quad \{\mu_2, \bar{\mu}_2\} = k\{\mu_1, \bar{\mu}_1\}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Могут быть следующие четыре случая:

1. $\lambda_2 = k\lambda_1$, $\mu_2 = k\mu_1$;
2. $\lambda_2 = k\lambda_1$, $\mu_2 = k\bar{\mu}_1$;
3. $\lambda_2 = k\bar{\lambda}_1$, $\mu_2 = k\mu_1$;
4. $\lambda_2 = k\bar{\lambda}_1$, $\mu_2 = k\bar{\mu}_1$.

В каждом из этих случаев искомое соответствие между каноническими базисными векторами в $L_{6,I}(\lambda_1, \mu_1) = \mathrm{span}(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1)$ и $L_{6,I}(\lambda_2, \mu_2) = \mathrm{span}(x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, w_2)$ задается следующим образом:

1. $x_2 \mapsto kx_1$, $y_2 \mapsto y_1$, $z_2 \mapsto z_1$, $u_2 \mapsto u_1$, $v_2 \mapsto v_1$, $w_2 \mapsto w_1$;
2. $x_2 \mapsto kx_1$, $y_2 \mapsto y_1$, $z_2 \mapsto z_1$, $u_2 \mapsto v_1$, $v_2 \mapsto u_1$, $w_2 \mapsto w_1$;
3. $x_2 \mapsto kx_1$, $y_2 \mapsto z_1$, $z_2 \mapsto y_1$, $u_2 \mapsto u_1$, $v_2 \mapsto v_1$, $w_2 \mapsto w_1$;
4. $x_2 \mapsto kx_1$, $y_2 \mapsto z_1$, $z_2 \mapsto y_1$, $u_2 \mapsto v_1$, $v_2 \mapsto u_1$, $w_2 \mapsto w_1$.

(15) Докажем утверждение (2) теоремы 6.8.

Необходимость следует из леммы 6.2.

Достаточность доказывается построением соответствия между каноническими базисами как в пункте **(14)**.

(16) Утверждения (3)–(6) доказываются рассуждениями, аналогичными использованным в предыдущем пункте. □

6.7 Разрешимые алгебры Ли малой размерности

В этом разделе собрано несколько предложений, справедливых для всех управляемых разрешимых алгебр Ли малой размерности.

Теорема 6.22. *Пусть L есть управляемая разрешимая алгебра Ли размерности не больше шести. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(*a*) *Единственной подалгеброй коразмерности один в L является ее производная подалгебра $L^{(1)}$.*

(*b*) *Пусть $A, B \in L$. Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(1) $B \notin L^{(1)}$;

(2) $\mathrm{Lie}(A, B) = L$.

(*c*) *Пусть $B \in L \setminus L^{(1)}$. Тогда система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема для почти всех $A \in L$.*

Доказательство. Это предложение следует непосредственно из результатов разделов 6.1–6.6. □

Простое описание всех подалгебр коразмерности один, представленное в предыдущей теореме, дает следующий критерий управляемости для *всех* (а не только аффинных по скалярному управлению) правоинвариантных систем.

Теорема 6.23. *Пусть L есть управляемая разрешимая алгебра Ли размерности не больше шести. Тогда произвольная правоинвариантная система $\Sigma \subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) $\mathrm{Lie}(\Sigma) = L$;

(2) *система Σ не содержится ни в одном из двух полупространств в L, ограниченных гиперплоскостью $L^{(1)}$.*

Доказательство. Применим теорему 1.24 и теорему 6.22, (*a*). □

6.8 Управляемость отрезков

Приведенные выше результаты данной главы относились к системам вида

$$\Gamma = A + \mathbb{R}B = \{A + uB \mid u \in \mathbb{R}\} \subset L, \tag{6.93}$$

т.е. к аффинным прямым в алгебре Ли L. Более того, мы определили управляемую алгебру Ли как алгебру Ли, содержащую хотя бы одну управляемую прямую Γ. Теперь перейдем к правоинвариантным системам с ограниченным управлением вида

$$S = \{(1-u)A + uB \mid u \in [0, 1]\} \subset L, \tag{6.94}$$

т.е. к *отрезкам* в L. Мы получим полные условия управляемости для отрезков и покажем, что определение управляемой алгебры Ли L можно эквивалентным образом задавать в терминах управляемых отрезков в L.

Замечание. В классических обозначениях отрезок (6.94) записывается как управляемая система

$$\dot{X} = (1-u)A(X) + uB(X), \quad u \in [0, 1], \quad X \in G,$$

где пространство состояний G есть связная односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли L.

Для подмножества Σ линейного пространства L, будем обозначать через $\operatorname{cone}(\Sigma)$ замкнутый выпуклый положительный конус, порожденный множеством Σ. Напомним, что правоинвариантная система Σ в алгебре Ли L управляема тогда и только тогда, когда управляема система $\operatorname{cone}(\Sigma)$.

Для произвольной алгебры Ли L управляемость отрезка $S \subset L$ очевидно влечет управляемость любой такой прямой $\Gamma \subset L$, что $\operatorname{cone}(S) \subset \operatorname{cone}(\Gamma)$. Обратное утверждение справедливо для разрешимых алгебр Ли.

Теорема 6.24. *Пусть L есть разрешимая алгебра Ли. Отрезок $S \subset L$ управляем тогда и только тогда, когда управляема любая такая прямая $\Gamma \subset L$, что* $\operatorname{cone}(S) \subset \operatorname{cone}(\Gamma)$.

Доказательство. Необходимость уже известна, перейдем к достаточности. Пусть $S \subset L$ есть неуправляемый отрезок. Чтобы доказать данную теорему, построим такую неуправляемую прямую $\Gamma \subset L$, что $\operatorname{cone}(S) \subset \operatorname{cone}(\Gamma)$. По теореме 1.24, имеем

(1) $\operatorname{Lie}(S) \neq L$ или

(2) существует такая подалгебра коразмерности один $l \subset L$, что S содержится в полупространстве $\Pi \subset L$, ограниченном гиперплоскостью l.

В случае (1) прямая $\Gamma \supset S$ удовлетворяет нужным условиям:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Lie}(\Gamma) = \operatorname{Lie}(A, B) = \operatorname{Lie}(S) \neq L, \\ &\operatorname{cone}(S) \subset \operatorname{cone}(\Gamma). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай (2). Если пространство $\operatorname{span}(S)$ содержится в подалгебре l, то

$$\operatorname{Lie}(S) \subset l \neq L,$$

и мы рассуждаем как в случае (1). Пусть $\mathrm{span}(S) \not\subset l$. Если $\dim \mathrm{span}(S) = 1$, то $\mathrm{Lie}(S) = \mathrm{span}(S) \neq L$. Поэтому $\dim \mathrm{span}(S) = 2$, т.е. гиперплоскость l и плоскость $\mathrm{span}(S)$ пересекаются трансверсально. Далее, пересечение $\Pi_1 = \mathrm{span}(S) \cap \Pi$ есть полуплоскость и очевидно, что $S \subset \Pi_1$. Поэтому $\mathrm{cone}(S) \subset \mathrm{cone}(\Pi_1) = \Pi_1$. Возьмем любую такую прямую Γ в полупространстве Π_1, что $\mathrm{cone}(\Gamma) = \Pi_1$. Прямая Γ удовлетворяет нужным условиям т.к.

$$\mathrm{cone}(S) \subset \Pi_1 = \mathrm{cone}(\Gamma)$$

и

$$\Gamma \subset \Pi_1 \subset \Pi \;\Rightarrow\; \Gamma \text{ неуправляема.} \qquad \square$$

Теорема 6.25. *Алгебра Ли L управляема* (*т.е. L содержит управляемую прямую* (6.93)) *тогда и только тогда, когда L содержит управляемый отрезок* (6.94).

Доказательство. Достаточность. Если отрезок $S \subset L$ управляем, то прямая $\Gamma \supset S$ также управляема.

Необходимость. Если прямая $\Gamma \subset L$ управляема, то достаточно длинный отрезок $S \subset \Gamma$ также управляем. Действительно, пусть $O \subset \mathrm{span}(\Gamma)$ есть окружность с центром в начале координат. В силу управляемости прямой Γ, дуга

$$A = O \cap \mathrm{cone}(\Gamma)$$

также управляема т.к. $\mathrm{cone}(A) = \mathrm{cone}(\Gamma)$. Далее, управляемость правоинвариантных систем сохраняется при малых шевелениях (см. теорему 1.10); поэтому любая дуга A_1, содержащаяся внутри A и достаточно близкая к A, управляема. Тогда отрезок

$$S = \Gamma \cap \mathrm{cone}(A_1) \subset \Gamma$$

управляем т.к. $\mathrm{cone}(S) = \mathrm{cone}(A_1)$. $\square$

Итак, если разрешимая алгебра Ли L неуправляема, то неуправляем и любой отрезок $S \subset L$. Если L управляема, то она содержит управляемый отрезок S. Критерий управляемости для отрезков (как и для произвольной правоинвариантной системы) в управляемых алгебрах Ли дается теоремой 6.23.

6.9 Заключительные замечания

Полное описание управляемых разрешимых алгебр Ли вплоть до размерности 6, полученное в данной главе, возможно в основном благодаря необходимым и достаточным условиям управляемости для разрешимых групп Ли (теоремы 4.1, 4.2). Самый существенный зазор между этими условиями, отсутствие N-пар для оператора $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$, почти исчезает в размерностях 1–6. Однако уже в размерности 7 появляются семейства алгебр Ли L и векторов

$A, B \in L$, для которых наши необходимые условия выполняются, а достаточные условия нарушаются (см. конструкцию 6.13 ниже). Поэтому наш подход к классификации не работает начиная с размерности 7. Впрочем, это ограничение кажется чисто техническим и вероятно, что результаты раздела 6.7, общие для всех размерностей 1–6, могут быть продолжены на высшие размерности. Результат Дж. Лоусона (теорема 1.24) утверждает, что в разрешимых алгебрах Ли за управляемость отвечают подалгебры коразмерности один (вместе с ранговым условием). Видимо, в разрешимых алгебрах Ли L, выполняется следующая альтернатива:

1. либо производная подалгебра $L^{(1)}$ является единственной подалгеброй коразмерности один;

2. либо есть бесконечное множество подалгебр коразмерности один.

Если эта альтернатива справедлива, то управляемые разрешимые алгебры Ли — это в точности разрешимые алгебры Ли с единственной подалгеброй коразмерности один, производной подалгеброй. В этом направлении может оказаться полезной теория К.Х. Хоффманна подалгебр коразмерности один [73].

Мы закончим эту главу семимерным примером, демонстрирующим зазор между нашими необходимыми и достаточными условиями управляемости.

Конструкция 6.13. Алгебра Ли $L_7(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; см. рис. 6.11.

$$L_7(\lambda, \mu) = \operatorname{span}(x, y, z, u, v, s, t);$$

$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,s,t)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c \end{pmatrix};$$

$$\lambda = a + bi,\ \mu = c + di;$$

$$[y, z] = s, \quad [u, v] = t.$$

Пусть $L = L_7(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, причем $c = \operatorname{Re} \mu < 0 < \operatorname{Re} \lambda = a$, и пусть $A, B \in L$ суть любые такие элементы, что $B \notin L^{(1)}$ и $A(B_x \lambda) \neq 0$, $A(B_x \mu) \neq 0$. Тогда все условия теоремы 4.1 выполняются. С другой стороны, пара $(B_x \cdot 2c, B_x \cdot 2a)$ есть N-пара собственных значений; поэтому условие (6) теоремы 4.2 нарушается.

Замечание. После доказательства данных результатов Д. Миттенхубер [93] получил общее чисто алгебраическое описание управляемых алгебр Ли в произвольных размерностях. Из них следует, что алгебра Ли $L_7(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$, управляема.

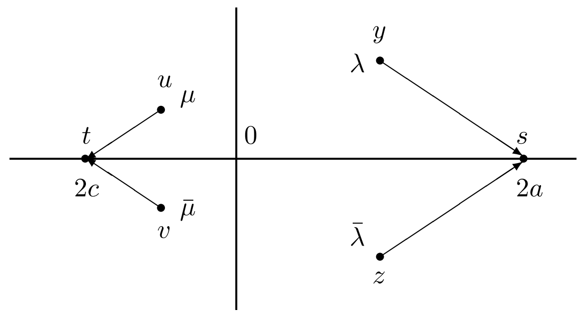


Рис. 6.11: Алгебра $L_7(\lambda,\mu)$.

6.10 Приложение: вспомогательные предложения

Лемма 6.1. *Пусть L — вещественная конечномерная алгебра Ли и $B \in L \setminus L^{(1)}$. Тогда*

(1) $[L_c^{(1)}(a), L_c^{(1)}(b)] \subset L_c^{(1)}(a+b)$ *при* $a, b \in \mathrm{Sp}^{(1)}$;

(2) $$[L^{(1)}(a), L^{(1)}(b)] \subset \begin{cases} L^{(1)}(a+b) & \text{если } a, b \in \mathrm{Sp}_r^{(1)}, \\ L^{(1)}(a+b) & \text{если } a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}, \\ & \quad b \in \mathrm{Sp}_r^{(1)}, \\ L^{(1)}(a+b) + L^{(1)}(a+\bar b) & \text{если } a, b \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}\,; \end{cases}$$

(3) $[L^{(1)}(a), L^{(1)}(a)] \subset L^{(1)}(2\operatorname{Re} a)$ *если* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$.

Доказательство. (1) следует из тождества Якоби.
(2) и (3) следуют из овеществления (1). □

Лемма 6.2. *Пусть L есть вещественная алгебра Ли и $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$. Для любых элементов $x, B \in L \setminus L^{(1)}$, рассмотрим разложение*

$$B = B_x x + B^1, \quad B^1 \in L^{(1)}.$$

Тогда

$$\mathrm{Sp}(\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}) = B_x \cdot \mathrm{Sp}(\operatorname{ad} x|_{L^{(1)}});$$
$$\mathrm{Sp}(\operatorname{ad} B|_{L^{(2)}}) = B_x \cdot \mathrm{Sp}(\operatorname{ad} x|_{L^{(2)}}).$$

Доказательство. Хорошо известно, что в любой комплексной разрешимой алгебре Ли существует базис, в котором операторы внутреннего дифференцирования треугольны (см., например, теорему 3.7.3 в [116]).Выберем такой базис в комплексификации L_c:

$$\operatorname{ad}_c z|_{L_c^{(1)}} = \begin{pmatrix} \lambda_1(z) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n(z) \end{pmatrix}, \quad z \in L_c;$$

тогда

$$\operatorname{Sp}(\operatorname{ad}_c z|_{L_c^{(1)}}) = \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} z|_{L^{(1)}}) = \{\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z)\}, \quad z \in L.$$

Но алгебра Ли $L_c^{(1)}$ нильпотентна как производная подалгебра разрешимой алгебры Ли; следовательно, оператор $\operatorname{ad}_c B^1|_{L_c^{(1)}}$ нильпотентен, т.е.

$$\lambda_1(B^1) = \cdots = \lambda_n(B^1) = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}} = B_x \operatorname{ad}_c x|_{L_c^{(1)}} + \operatorname{ad}_c B^1|_{L_c^{(1)}} = B_x \begin{pmatrix} \lambda_1(z) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n(z) \end{pmatrix};$$

следовательно

$$\operatorname{Sp}(\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}) = B_x \cdot \{\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z)\} = B_x \cdot \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} x|_{L^{(1)}}).$$

Соотношение для спектров в $L^{(2)}$ доказывается аналогично. □

Лемма 6.3. *Пусть L есть вещественная алгебра Ли, для которой $L \neq L^{(1)} \neq L^{(2)}$. Пусть $B \in L \setminus L^{(1)}$ и $\operatorname{Sp}^{(1)} \subset \mathbb{R}$. Тогда $L_r^{(1)} \neq L_r^{(2)}$.*

Доказательство. $L_r^{(1)} = L^{(1)} \neq L^{(2)} = L_r^{(2)}$. □

Лемма 6.4. *Пусть L есть вещественная алгебра Ли, $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$, $A, B \in L$, $B \notin L^{(1)}$, и пусть спектр $\operatorname{Sp}^{(1)} = \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}})$ геометрически прост. Рассмотрим разложение*

$$A = A_B B + A^1, \quad A_B \in \mathbb{R}, \; A^1 \in L^{(1)}. \tag{6.95}$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $\operatorname{top}(A, \lambda) \neq 0$ *для всех* $\lambda \in \operatorname{Sp}^{(1)}$;

(2) *вектор A^1 не принадлежит никакому собственному инвариантному подпространству оператора* $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$;

(3) $\operatorname{span}(B, A, (\operatorname{ad} B)A, \dots, (\operatorname{ad} B)^{n-2}A) = L$, $n = \dim L$.

Доказательство. Согласно лемме 5.1, условие (1) равносильно следующему:

$$\operatorname{rank}(A^1, (\operatorname{ad} B)A^1, \dots, (\operatorname{ad} B)^{n-2}A^1) = n - 1 \tag{6.96}$$

(достаточно заменить в этой лемме $\mathbb{R}^n$, b, и A соответственно на $L^{(1)}$, A^1, и $\operatorname{ad} B$). Далее, (6.96) эквивалентно условию

$$\operatorname{span}(A^1, (\operatorname{ad} B)A^1, \dots, (\operatorname{ad} B)^{n-2}A^1) = L^{(1)}, \tag{6.97}$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{span}(B, A^1, (\operatorname{ad} B)A^1, \dots, (\operatorname{ad} B)^{n-2}A^1) = L.$$

Ввиду (6.95) и в силу равенства $(\operatorname{ad} B)A^1 = (\operatorname{ad} B)A$, вышеуказанное соотношение равносильно условию (2) данной леммы. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (3) доказана.

Утверждение (2) $\Leftrightarrow$ (3) следует из того, что (6.97) равносильно (2). □

Лемма 6.5. *Пусть L есть вещественная разрешимая алгебра Ли с производной подалгеброй $L^{(1)}$ коразмерности один. Предположим, что для любого элемента $B \in L \setminus L^{(1)}$ существует такой элемент $A \in L$, что система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема. Тогда производная подалгебра $L^{(1)}$ является единственной подалгеброй коразмерности один в L.*

Доказательство. Предположим, $l \neq L^{(1)}$ есть другая подалгебра коразмерности один в L. Возьмем любой элемент $B \in l \setminus L^{(1)}$. По теореме 1.24, для любого $A \in L$ система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ неуправляема т.к. Γ содержится в полупространстве, ограниченном подалгеброй l. Полученное противоречие с условием леммы завершает доказательство. □

6.11 Библиографические замечания

Результаты данной главы были впервые опубликованы в работе [105].

Ряд интересных результатов по управляемости инвариантных систем управлением получен Д.Миттенхубером [93], [94]. Им описаны алгебры Ли, в которых существуют глобально управляемые инвариантные системы с векторным управлением.

Часть II

Управляемость билинейных систем в ортантах

Глава 7

Введение

7.1 Постановка задачи

Во второй части монографии рассматривается задача глобальной управляемости для билинейных систем вида

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i x, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u_i \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

где A и B_i — постоянные вещественные $n \times n$ матрицы. Такие системы индуцированы правоинвариантными системами вида

$$\dot{X} = AX + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i X, \qquad X \in G, \quad u_i \in \mathbb{R}, \tag{7.2}$$

на матричных группах Ли, см. раздел 1.2. Если группа G действует транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то из управляемости инвариантной системы (7.2) на группе G следует управляемость билинейной системы (7.1) на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, см. следствие 1.1.

Сейчас нас будет интересовать ситуация, когда нет глобальной управляемости ни для билинейной системы (7.1), ни тем более для инвариантной системы (7.2). А именно, мы займемся случаем, когда билинейная система (7.1) имеет инвариантный координатный ортант в $\mathbb{R}^n$, например, *положительный ортант*

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n\},$$

и будем интересоваться управляемостью билинейной системы в таком ортанте. Такая постановка задачи естественна для билинейных систем в приложениях, описывающих процессы с неотрицательными переменными.

Первым естественно возникает следующий вопрос: при каких условиях билинейная система (7.1) имеет (положительно или отрицательно) инвариантный координатный ортант в $\mathbb{R}^n$? Эта задача полностью решена в главе 8. Данный вопрос имеет непосредственное отношение к управляемости инвариантных систем (7.2): существование инвариантных ортантов для билинейной системы (7.1) влечет неуправляемость инвариантной системы (7.2).

Далее, предположим, что билинейная система (7.1) имеет положительно инвариантный координатный ортант. Отражениями в $\mathbb{R}^n$ вида $x_i \mapsto -x_i$ можно добиться, чтобы инвариантным стал положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$, а потому и его внутренность, *открытый положительный ортант*

$$\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0,\ i = 1, \dots, n\}.$$

Тогда естественно возникает следующее понятие.

Определение 7.1. Система (7.1) называется *управляемой в положительном ортанте*, если для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$ имеем $\mathcal{A}(x) \supset \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$.

Через $\mathcal{A}(x)$ будем обозначать множество достижимости системы (7.1) из точки $x \in \mathbb{R}^n$ за произвольное неотрицательное время.

В последующих главах 9–11 мы исследуем управляемость билинейной системы (7.1) в положительном ортанте для различных m и n. В главе 9 рассматривается случай $n = 2$ и любого m; в главе 10 изучается случай $n > 2$ и $m = 1$; наконец, глава 11 посвящена случаям $m = n - 1$, $m = n - 2$, а также некоторым другим случаям.

7.2 Библиографические замечания

Задача управляемости системы (7.1) в положительном ортанте была впервые рассмотрена У.М. Бутби в работе [51]. Помимо постановки задачи, в этой работе получены некоторые результаты для случая $m = 1$, а также показано, что в случае $m = n$ и линейно независимых матриц B_i система (7.1) управляема в положительном ортанте.

Билинейные управляемые системы возникают в разнообразных прикладных задачах, см., например, работы [59], [95], [97].

Глава 8

Инвариантные ортанты билинейных систем

В данной главе получены условия существования инвариантных ортантов для билинейных систем вида

$$\dot{x} = Ax + uBx, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{8.1}$$

т.е. достаточные условия глобальной неуправляемости таких систем. Все инвариантные ортанты описаны, дан конструктивный способ их нахождения, вычислено их количество.

Для этого находится критерий существования инвариантных ортантов линейного поля Ax. Поиск таких ортантов основывается на двух моментах. Во-первых, общеизвестно, что положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$ положительно инвариантен для поля Ax тогда и только тогда, когда все внедиагональные элементы матрицы A неотрицательны. Во-вторых, если поле Ax имеет некоторый инвариантный ортант, то последовательными заменами переменных вида $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$ в $\mathbb{R}^n$ этот ортант можно перевести в $\mathbb{R}^n_+$. При этом можно следить за преобразованием знаков элементов a_{ij} матрицы A и получить условия существования инвариантных ортантов в терминах комбинаций знаков a_{ij}. Эти условия можно удобно выразить через некоторый граф $\Gamma(A)$, который строится по матрице A.

Данная глава имеет следующую структуру. В разделе 8.1 излагаются метод построения графа $\Gamma(A)$ для знакосимметрической матрицы A и теорема М. Хирша, описывающая некоторые комбинаторные свойства таких графов. Затем приводится и доказывается конструктивная версия этого результата — теорема 8.2. В разделе 8.2 получены условия существования положительно (соотв. отрицательно) инвариантных ортантов для поля Ax (теоремы 8.3, 8.4) в терминах графа $\Gamma(A)$. В случае общего положения, когда все внедиагональные элементы матрицы A отличны от нуля, получаются более простые критерии (теорема 8.5). В разделе 8.3 с помощью этих условий получены основные результаты главы — критерии существования инвариантных ортантов системы (8.1). В разделе 8.4 обсуждается связь полученных результатов с гипотезой В. Джарджевича о неуправляемости системы (8.1) в случае симметрических матриц A и B.

Приведем некоторые обозначения и определения, используемые в этой главе.

Множество индексов

$$\Sigma_n = \{\, \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \mid \sigma_i = \pm 1 \ \forall i = 1, \ldots, n \,\}$$

будем использовать для параметризации ортантов, т.е. множеств вида

$$\mathbb{R}^n_\sigma = \{\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \sigma_i \geqslant 0 \ \forall i = 1, \ldots, n \,\}.$$

Подмножество пространства состояний называется *положительно* (*отрицательно*) *инвариантным* для векторного поля или управляемой системы, если все траектории поля или системы, начинающиеся в этом множестве (соотв. в его дополнении), не покидают его (соотв. его дополнения) в любые положительные моменты времени. Управляемая система называется *глобально управляемой*, если любые две точки ее пространства состояний могут быть соединены некоторой траекторией системы (проходимой в положительном направлении).

Замечание. Глобальная управляемость системы равносильна тому, что у нее нет ни положительно, ни отрицательно инвариантных множеств (кроме тривиальных: всего пространства состояний и пустого множества). Поэтому условия существования инвариантных множеств являются достаточными условиями неуправляемости.

8.1 Знакосимметрические матрицы и их графы

Определение 8.1. Матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *знакосимметрической*, если $a_{ij}a_{ji} \geqslant 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$.

Важность этого определения для данной работы объясняет следствие 8.1 в начале следующего раздела.

Замечание. Любая симметрическая матрица знакосимметрична. Это очевидный факт будет существенным при рассмотрении гипотезы Джарджевича в разделе 8.4.

Конструкция 8.1. (М. Хирш [71]) Каждой знакосимметрической $n \times n$ матрице A сопоставляется *граф* $\Gamma(A)$, который строится по следующему правилу. Граф $\Gamma(A)$ имеет n вершин $1, 2, \ldots, n$. Его вершины i, j соединены ребром (i, j) в том и только том случае, когда хотя бы одно из чисел a_{ij}, a_{ji} отлично от нуля. При этом каждое ребро (i, j) помечается знаком $+$ или $-$: если $a_{ij} \geqslant 0$ и $a_{ji} \geqslant 0$, то ставится знак $+$, а если $a_{ij} \leqslant 0$ и $a_{ji} \leqslant 0$, то ставится знак $-$ (других сочетаний знаков не может быть из-за знакосимметричности A). Ребро со знаком $+$ называется *положительным*, а со знаком $-$ *отрицательным*. (Только такие графы с ребрами, помеченными знаками $+$ и $-$, и будут рассматриваться в данной работе.) По графу $\Gamma(A)$ построим функцию $s(i,j)$, $i,j=1,\ldots,n$, $i\neq j$, следующим образом: $s(i,j)=0$ если вершины i,j не соединены ребром в графе $\Gamma(A)$, $s(i,j)=1$ для положительного, и $s(i,j)=-1$ для отрицательного ребра (i,j) в графе $\Gamma(A)$.

Определение 8.2. Будем говорить, что граф Γ *имеет только четные циклы*, если любой цикл (т.е. замкнутый путь, составленный из ребер) этого графа содержит четное количество отрицательных ребер.

Замечание. Четность цикла $(i_1,i_2,\ldots,i_k,i_{k+1}=i_1)$ в графе $\Gamma(A)$ равносильна тому, что $s(i_1,i_2)s(i_2,i_3)\ldots s(i_k,i_1)=1$.

Теорема 8.1. (М. Хирш [71]) *Если граф Γ имеет только четные циклы, то существует такое подмножество V множества его вершин, что:*

а) любое отрицательное ребро графа Γ имеет в V ровно одну вершину;

б) любое положительное ребро графа Γ имеет в V либо 0, либо 2 вершины.

В работе [71] приведен также алгоритм построения множества V.

Ниже в теореме 8.2 мы получим некоторое усиление теоремы 8.1, дающее явный способ построения указанного множества V и количество таких множеств для фиксированного графа Γ. Наше рассуждение не будет формально использовать теорему 8.1 и может рассматриваться и как новое доказательство этой теоремы.

Определение 8.3. Пусть граф Γ имеет только четные циклы и связен (т.е. любые две вершины Γ можно соединить путем из его ребер), а v — любая вершина Γ. Вершина графа Γ называется *четной* (*нечетной*) *относительно* v, если ее можно соединить с v путем, содержащим четное (соотв. нечетное) количество отрицательных ребер. Множество вершин, четных (нечетных) относительно v, будем обозначать V_v^+ (соотв. V_v^-).

Замечание. 1) Четность вершины p относительно v не зависит от пути, соединяющего p и v: число отрицательных ребер на разных путях, соединяющих фиксированные p и v, имеет одну и ту же четность, т.к. все циклы графа Γ четны.

2) В силу связности графа Γ, любая его вершина либо четна, либо нечетна относительно v, т.е. множество всех вершин Γ представляется в виде $V_v^+\cup V_v^-$, причем в силу предыдущего замечания $V_v^+\cap V_v^-=\emptyset$.

3) Для любой вершины p графа Γ имеем

$$\begin{aligned} p\in V_v^+ \quad &\Rightarrow \quad V_p^+=V_v^+,\ V_p^-=V_v^-,\\ p\in V_v^- \quad &\Rightarrow \quad V_p^+=V_v^-,\ V_p^-=V_v^+. \end{aligned}$$

Действительно, при $p \in V_v^+$ четности относительно вершин p и v совпадают, а при $p \in V_v^-$ четность относительно p есть нечетность относительно v, и наоборот.

Теорема 8.2. *Пусть граф* Γ *имеет только четные циклы.*

(1) *Если граф* Γ *связен, то существует ровно два различных подмножества* V *множества его вершин, удовлетворяющих условиям а), б) теоремы* 8.1. *Они имеют вид* V_v^+ *и* V_v^-, *где* v *— любая вершина* Γ.

(2) *Если граф* Γ *несвязен и имеет* c *компонент связности, то множество* V *можно выбрать* 2^c *различными способами, строя его независимо в каждой компоненте связности, как в пункте* (1).

Доказательство. Пусть граф Γ связен и v — любая его вершина.

Покажем, что оба множества V_v^+, V_v^- удовлетворяют условиям а), б) теоремы 8.1. Действительно, на каждом отрицательном ребре его вершины имеют разную четность относительно v, поэтому одна из них содержится в V_v^+, а другая — в V_v^-. А вершины любого положительного ребра имеют одинаковую четность относительно v, и потому обе содержатся либо в V_v^+, либо в V_v^-. Итак, оба множества V_v^+, V_v^- удовлетворяют условиям теоремы 8.1.

Покажем, что других таких множеств нет. Пусть V — любое такое множество. Если $V = \emptyset$, то все ребра Γ положительны, поэтому $V_v^- = \emptyset = V$. Предположим поэтому, что $V \neq \emptyset$ и выберем любую вершину $p \in V$. По свойствам а), б) теоремы 8.1, все вершины Γ, четные относительно p, содержатся в V, а все нечетные относительно p вершины не принадлежат V, т.е. $V = V_p^+$. Согласно замечанию 3) перед данной теоремой, $V_p^+ = V_v^+$ или V_v^-. Итак, любое множество V, удовлетворяющее условиям а), б) теоремы 8.1, равно V_v^+ или V_v^+.

Утверждение теоремы для связного графа Γ доказано, а для несвязного графа очевидно. □

8.2 Инвариантные ортанты линейного поля

Лемма 8.1. *Пусть* A *есть* $n \times n$ *матрица,* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma_n$. *Ортант* $\mathbb{R}^n_\sigma$ *является положительно (отрицательно) инвариантным для векторного поля* Ax, *если и только если*

$$a_{ij}\sigma_i\sigma_j \geqslant 0 \ (\textit{соотв.} \leqslant 0) \quad \forall i \neq j. \tag{8.2}$$

Доказательство. Докажем только утверждение о положительной инвариантности. Легко видеть, что $\partial\mathbb{R}^n_\sigma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma^i_\sigma$, где

$$\Gamma^i_\sigma = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \quad x_i = 0, \quad \forall\, j \neq i \quad x_i\sigma_j \geq 0\}.$$

Поле Ax направлено внутрь $\mathbb{R}^n_\sigma$ во всех точках Γ^i_σ, если и только если

$$\sigma_i(Ax)_i|_{\Gamma^i_\sigma} \geq 0. \tag{8.3}$$

Но $(Ax)_i|_{\Gamma^i_\sigma} = \sum_{i \neq j} a_{ij}x_j$. Поэтому (8.3) равносильно условию

$$\forall j \neq i \quad \sigma_i a_{ij} x_j|_{\sigma_j x_j \geq 0} \geq 0,$$

т.е.

$$\forall j \neq i \quad a_{ij}\sigma_i\sigma_j \geq 0.$$

□

Следствие 8.1. *Если поле Ax имеет положительно или отрицательно инвариантный ортант, то матрица A знакосимметрична.*

Доказательство. $a_{ij}\sigma_i\sigma_j a_{ji}\sigma_j\sigma_i = a_{ij}a_{ji}\sigma_i^2\sigma_j^2 = a_{ij}a_{ji} \geqslant 0$, см. (8.2). □

Следствие 8.2. *Если существует положительно и отрицательно инвариантный ортант для поля Bx, то матрица B диагональна.*

Доказательство. Пусть $B = (b_{ij})$; возьмем любые $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$ и покажем, что $b_{ij} = 0$. Учитывая лемму 8.1, имеем $b_{ij}\sigma_i\sigma_j \geqslant 0$ и $b_{ij}\sigma_i\sigma_j \leqslant 0$, т.е. $b_{ij}\sigma_i\sigma_j b_{ij}\sigma_i\sigma_j = b_{ij}^2\sigma_i^2\sigma_j^2 = b_{ij}^2 \leqslant 0$, откуда $b_{ij} = 0$. □

Конструкция 8.2. Пусть граф Γ имеет только четные циклы, а V — любое подмножество его вершин, удовлетворяющее условиям а), б) теоремы 8.1. Тогда *индексом* графа Γ называется набор $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma_n$, который определяется так: $\sigma_i = +1$ если $i \notin V$ и $\sigma_i = -1$ если $i \in V$.

Замечание. Индекс определяется не самим графом Γ, а множеством V. Из теоремы 8.2 видно, что для связного графа индекс может быть выбран ровно двумя разными способами (отличающимися общим множителем -1). Для несвязного графа, имеющего c компонент связности, есть 2^c разных индексов.

Теорема 8.3. *Пусть A — знакосимметрическая $n \times n$ матрица. Поле Ax имеет положительно инвариантные ортанты тогда и только тогда, когда соответствующий граф $\Gamma(A)$ имеет только четные циклы. Положительно инвариантными будут тогда ортанты $\mathbb{R}^n_\sigma$, где σ — любой индекс графа $\Gamma(A)$; их количество равно 2^c, где c — количество компонент связности графа $\Gamma(A)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть поле Ax имеет положительно инвариантный ортант $\mathbb{R}^n_\sigma$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma_n$. Согласно лемме 8.1, тогда выполнены неравенства (8.2), поэтому

$$\operatorname{sgn} a_{ij} = \sigma_i\sigma_j \text{ или } 0. \tag{8.4}$$

Возьмем любой цикл $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1} = i_1)$ в графе $\Gamma(A)$. Любая пара вершин (i_l, i_{l+1}), $l = 1, \ldots, k$, соединена ребром в $\Gamma(A)$, поэтому $s(i_l, i_{l+1}) \neq 0$ (функция $s(i, j)$, задающая положительность ребра (i, j), определена в конструкции 8.1). Учитывая (8.4), получаем $s(i_l, i_{l+1}) = \sigma_{i_l}\sigma_{i_{l+1}}$, $l = 1, \ldots, k$. Следовательно, имеем

$$s(i_1, i_2)s(i_2, i_3)\ldots s(i_k, i_1) = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}\ldots\sigma_{i_k}\sigma_{i_1} = \sigma_{i_1}^2\sigma_{i_2}^2\ldots\sigma_{i_k}^2 = 1,$$

т.е. цикл $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ является четным.

Достаточность. Пусть граф $\Gamma(A)$ содержит только четные циклы, V — подмножество его вершин, определенное в теореме 8.1, а σ — его индекс. Покажем, что ортант $\mathbb{R}^n_\sigma$ положительно инвариантен для поля Ax. Согласно лемме 8.1, для этого достаточно доказать неравенства (8.2).

Выберем любую пару (i, j), $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Если вершины i, j не соединены ребром в графе $\Gamma(A)$, то $a_{ij} = 0$ и условие (8.2) выполнено.

Пусть вершины i, j соединены положительным ребром. Согласно правилу расстановки знаков в $\Gamma(A)$, это означает, что $a_{ij} \geqslant 0$. Далее, положительное ребро (i, j) содержит во множестве V либо ноль, либо две вершины. По определению индекса σ, если $i \notin V$, $j \notin V$, то $\sigma_i = \sigma_j = 1$; если же $i \in V$, $j \in V$, то $\sigma_i = \sigma_j = -1$. В любом случае $\sigma_i\sigma_j = 1$ и условие (8.2) выполнено.

Пусть, наконец, вершины i, j соединены отрицательным ребром. Во-первых, тогда $a_{ij} \leqslant 0$. А во-вторых, отрицательное ребро (i, j) содержит во множестве V ровно одну вершину. Если $i \in V$, $j \notin V$, то $\sigma_i = -1$, $\sigma_j = 1$; а если $i \notin V$, $j \in V$, то $\sigma_i = 1$, $\sigma_j = -1$. Поэтому всегда $\sigma_i\sigma_j = -1$ и неравенство (8.2) выполнено и в этом случае.

Следовательно, ортант $\mathbb{R}^n_\sigma$ положительно инвариантен для поля Ax. Достаточность доказана. Формула 2^c для количества инвариантных ортантов следует из теоремы 8.2. $\square$

Замечание. Координатный ортант $\mathbb{R}^n_\sigma$ отрицательно инвариантен для поля Ax тогда и только тогда, когда он положительно инвариантен для поля $-Ax$. Отсюда получаем следующее предложение.

Теорема 8.4. *Пусть A — знакосимметрическая $n \times n$ матрица. Поле Ax имеет отрицательно инвариантные ортанты тогда и только тогда, когда граф $\Gamma(-A)$ противоположной матрицы $-A$ имеет только четные циклы. Отрицательно инвариантными будут тогда ортанты $\mathbb{R}^n_\sigma$, где σ — любой индекс графа $\Gamma(-A)$; их количество равно 2^c, где c — количество компонент связности графа $\Gamma(-A)$ (или, что то же самое, графа $\Gamma(A)$).*

Пример 8.1. Пусть $A = (a_{ij})$ — любая 4×4 матрица вида

$$\begin{pmatrix} * & + & 0 & + \\ + & * & + & 0 \\ 0 & + & * & - \\ + & 0 & - & * \end{pmatrix},$$

т.е. $a_{12}, a_{21}, a_{14}, a_{41}, a_{23}, a_{32} > 0$, $a_{34}, a_{43} < 0$, $a_{13} = a_{31} = a_{24} = a_{42} = 0$, а диагональные элементы любые. Соответствующий граф $\Gamma(A)$ изображен на рис. 8.1. Единственный цикл $(1, 2, 3, 4)$ отрицателен в обоих графах $\Gamma(A)$

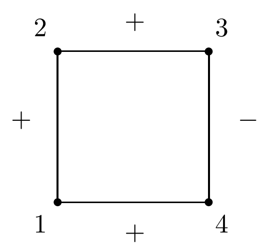


Рис. 8.1: Граф $\Gamma(A)$, пример 8.1

и $\Gamma(-A)$. Поэтому поле Ax не имеет инвариантных ортантов (это можно проверить и непосредственным перебором 16 ортантов в $\mathbb{R}^4$).

Пример 8.2. Пусть $A = (a_{ij})$ — любая 5×5 матрица вида

$$\begin{pmatrix} * & - & + & 0 & + \\ - & * & - & + & 0 \\ + & - & * & - & + \\ 0 & + & - & * & - \\ + & 0 & + & - & * \end{pmatrix},$$

т.е. $a_{13}, a_{31}, a_{15}, a_{51}, a_{24}, a_{42}, a_{35}, a_{53} > 0$, $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}, a_{34}, a_{43}, a_{45}, a_{54} < 0$, $a_{14} = a_{41} = a_{25} = a_{52} = 0$, а диагональные элементы любые. Граф $\Gamma(A)$ изображен на рис. 8.2; он имеет только четные циклы. Для построения множества V выберем вершину $v = 2$. Тогда $V = V_v^+ = \{2, 4\}$, а $\sigma = (+, -, +, -, +)$ является соответствующим индексом графа $\Gamma(A)$. Для поля Ax положительно инвариантными является ортанты

$$\mathbb{R}^5_\sigma = \{\, (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \leqslant 0,\ x_5 \geqslant 0 \,\}$$

и противоположный к нему

$$\mathbb{R}^5_{-\sigma} = \{\, (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \leqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \leqslant 0 \,\}.$$

Граф $\Gamma(A)$ связен, поэтому других положительно инвариантных ортантов нет.

Граф $\Gamma(-A)$ имеет нечетные циклы (например, $(1, 2, 3)$), поэтому отрицательно инвариантных ортантов у поля Ax нет.

Теорема 8.5. *Пусть $A = (a_{ij})$ — знакосимметрическая $n \times n$ матрица, причем*

$$a_{ij} \neq 0 \quad \forall i \neq j. \tag{8.5}$$

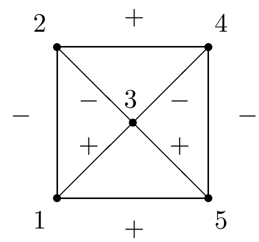


Рис. 8.2: Граф $\Gamma(A)$, пример 8.2

Поле Ax имеет положительно (отрицательно) инвариантные ортанты тогда и только тогда, когда все циклы длины три графа $\Gamma(A)$ (соотв. графа $\Gamma(-A)$) четны, или, что эквивалентно,

$$a_{ij}a_{ji}a_{ik} > 0 \ (\textit{соотв.} < 0) \quad \forall i \neq j \neq k \neq i. \tag{8.6}$$

Доказательство. Из условия (8.5) следует, что в графе $\Gamma(A)$ любые две вершины соединены ребром. Покажем, что тогда из четности всех циклов длины три следует четность всех циклов. Возьмем любой цикл в графе $\Gamma(A)$ и представим его в виде суммы циклов длины три. При сложении четных циклов получается четный цикл, т.к. отрицательные ребра слагаемых либо уничтожаются парами и не входят в сумму (когда они лежат на примыкающих границах слагаемых циклов), либо входят в сумму (в противном случае). Итак, произвольно выбранный цикл в $\Gamma(A)$ оказывается четным. Теперь утверждение настоящей теоремы следует из теорем 8.3, 8.4.

Очевидно, что в предположении условия (8.5) четность цикла длины три (i, j, k) равносильна неравенству $a_{ij}a_{ji}a_{ik} > 0$. Для графа $\Gamma(-A)$ это неравенство переходит в $(-a_{ij})(-a_{jk})(-a_{ki}) = -a_{ij}a_{jk}a_{ki} > 0$. □

Замечание. Условие (8.5) можно ослабить до требования, чтобы для любых $i \neq j$ было $a_{ij} \neq 0$ или $a_{ji} \neq 0$. Но тогда неравенства $a_{ij}a_{ji}a_{ik} > 0$ (соотв. < 0), характеризующие четность цикла (i, j, k), необходимо заменить неравенством $s(i, j)s(j, k)s(k, i) > 0$ (соотв. < 0) с использованием функции $s(i, j)$, задающей положительность ребра (i, j).

8.3 Инвариантные ортанты билинейных систем

Лемма 8.2. *Если система* (8.1) *имеет положительно или отрицательно инвариантный ортант, то матрица A знакосимметрична, а B диагональна.*

Доказательство. Покажем, что ортант, положительно (отрицательно) инвариантный для системы (8.1):

1. положительно (отрицательно) инвариантен для поля Ax;

2. положительно и отрицательно инвариантен для поля Bx.

1. При $u \equiv 0$ траектории системы (8.1) становятся траекториями поля Ax.

2. При $u \neq 0$ имеем $Ax + uBx = (|u|Ax + \operatorname{sgn} u \cdot Bx)/|u|$. Положительно (отрицательно) инвариантный ортант для поля $Ax + uBx$ положительно (отрицательно) инвариантен для поля $|u|Ax + \operatorname{sgn} u \cdot Bx$. Переходя к пределам $u \to +0$, $u \to -0$ и используя непрерывную зависимость решения дифференциального уравнения от правой части, получим, что рассматриваемый ортант одновременно положительно и отрицательно инвариантен для поля Bx.

Утверждения 1, 2 доказаны, а, значит, с учетом следствий 8.1, 8.2, доказана и настоящая лемма. □

Теорема 8.6. *Пусть A, B — $n \times n$ матрицы, причем A знакосимметрична, а B диагональна. Система* (8.1) *имеет положительно (отрицательно) инвариантные ортанты тогда и только тогда, когда граф* $\Gamma(A)$ *(соотв.* $\Gamma(-A)$*) имеет только четные циклы. Положительно (отрицательно) инвариантными будут тогда ортанты $\mathbb{R}^n_\sigma$, где σ — любой индекс графа* $\Gamma(A)$ *(соотв.* $\Gamma(-A)$*), а их количество равно 2^c, где c — количество компонент связности графа* $\Gamma(A)$.

Доказательство. Все ортанты в $\mathbb{R}^n$ положительно и отрицательно инвариантны для поля Bx с диагональной матрицей B, поэтому данная теорема следует из леммы 8.2 и теорем 8.3, 8.4. □

Замечание. 1) Если к условиям теоремы 8.6 добавить условие (8.5), то, согласно теореме 8.5, можно ограничиться проверкой четности циклов длины три, т.е. проверкой неравенств (8.6).

2) Индекс σ графа $\Gamma(A)$ однозначно определяется подмножеством V множества вершин $\Gamma(A)$, удовлетворяющим условиям а), б) теоремы 8.1. Теорема 8.2 описывает все такие множества и дает способ их построения.

8.4 Симметрические матрицы и управляемость

В. Джарджевичем и И. Купкой [82] была высказана следующая

Гипотеза 1. Если матрицы A и B симметрические, то система (8.1) не является глобально управляемой в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Замечание. Симметрическая матрица B диагонализируема ортогональным преобразованием в $\mathbb{R}^n$, при этом симметрическая матрица A перейдет в симметрическую. Поэтому в гипотезе Джарджевича можно считать, что B диагональна, а A симметрична.

Из результатов предыдущего раздела легко вытекает, что эта гипотеза верна в размерностях 2 и 3 (это было известно ранее). Имеет место даже более сильное утверждение:

Теорема 8.7. *Пусть $n = 2$ или 3, A и B — $n \times n$ матрицы, причем B диагональная, а A знакосимметрическая. Тогда система* (8.1) *имеет положительно или отрицательно инвариантный ортант и потому не является глобально управляемой в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 8.6.

Если $n = 2$, то граф $\Gamma(A)$ имеет две вершины и потому не может иметь циклов.

Пусть $n = 3$. Если в графе $\Gamma(A)$ есть цикл, то он имеет длину три и знаки на его ребрах могут быть расставлены (с точностью до циклических перестановок) одним из четырех способов: 1) $(+,+,+)$; 2) $(+,+,-)$; 3) $(+,-,-)$; 4) $(-,-,-)$. В случаях 1), 3) граф $\Gamma(A)$ имеет единственный четный цикл, а в случаях 2), 4) единственный четный цикл будет у графа $\Gamma(-A)$.

Теперь утверждение настоящей теоремы следует из теоремы 8.6. □

Замечание. Уже при $n = 4$ существуют симметрические матрицы A, для которых поле Ax и система (8.1) не имеют инвариантных ортантов (см. пример 8.1). Вопрос глобальной управляемости, т.е. отсутствия *любых* инвариантных множеств, остается здесь открытым. Но для тех симметрических матриц A, для которых выполняется условие теоремы 8.6, гипотеза Джарджевича теперь доказана. Впрочем, в этих случаях достаточно знакосимметричности A. Возникает следующая

Гипотеза 2. Если матрица B диагональна, а A знакосимметрична, то система (8.1) не является глобально управляемой в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

8.5 Библиографические замечания

Результаты данной главы были впервые опубликованы в работах [19], [103].

Метод кодирования свойств инвариантности линейного поля Ax в терминах графа $\Gamma(A)$ был применен М. Хиршем [71] для изучения предельных свойств траекторий динамических систем.

Глава 9

Управляемость двумерных билинейных систем в положительном ортанте

В главах 9–11 для билинейной системы

$$\dot{x} = (A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u_i \in \mathbb{R}, \tag{9.1}$$

рассматривается задача управляемости в положительном ортанте, см. определение 7.1.

Эту задачу имеет смысл рассматривать, лишь если ортант $\mathbb{R}^n_+$ положительно инвариантен для системы (9.1), т.е. если

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij}), \quad \forall i \neq j \quad a_{ij} \geqslant 0, \\ \text{матрицы} \;\; B_i \;\; \text{диагональны.} \end{array}\right\} \tag{9.2}$$

Поэтому далее в главах 9–11 будем предполагать, что условие (9.2) выполняется.

В данной главе дается решение задачи управляемости системы (9.1) в положительном ортанте при $n = 2$. В разделах 9.1 – 9.3 эта задача решается для $m = 1$, т.е. для системы

$$\dot{x} = (A + uB)x, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{9.3}$$

при выполнении условий

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij}), \quad \forall i \neq j \quad a_{ij} \geqslant 0, \\ \text{матрица} \;\; B \;\; \text{диагональна} \;:\; B = \operatorname{diag}(b_1, b_2), \end{array}\right\} \tag{9.4}$$

а в разделе 9.4 приводится решение для произвольного m.

9.1 Управляемость в открытом положительном ортанте

Введем следующее полезное

Определение 9.1. Система (9.3) называется *управляемой в открытом положительном ортанте* $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$, если для всех $x \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ имеем $\mathcal{A}(x) \supset \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$.

Из определений 7.1 и 9.1 непосредственно вытекает следующее предложение.

Лемма 9.1. *Если система* (9.3) *управляема в положительном ортанте, то она также управляема в открытом положительном ортанте.*

Напомним, что $n \times n$ матрица A называется *неразложимой* [10], если линейный оператор, соответствующий A, не имеет k-мерных инвариантных координатных ортантов с $0 < k < n$.

Лемма 9.2. *Пусть система* (9.3) *управляема в открытом положительном ортанте. Тогда она управляема в положительном ортанте, если и только если матрица A неразложима.*

Доказательство. Пусть система (9.3) управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$. Тогда она управляема в положительном ортанте, если и только если любая точка $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ достижима из любой точки $\mathbb{R}^n_+ \setminus (\{0\} \cup \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+)$. Но это условие равносильно несуществованию собственных инвариантных координатных подпространств у линейного поля Ax, т.е. неразложимости A. $\square$

Нам потребуется следующее простое утверждение, которое может быть доказано либо непосредственно, либо с использованием предыдущей леммы.

Лемма 9.3. *Если матрица A разложима, то система* (9.3) *не является управляемой в положительном ортанте.*

Мы будем изучать свойство управляемости системы (9.3) в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ и возвращаться к управляемости в положительном ортанте с использованием леммы 9.2 или получать неуправляемость с помощью управляемости в положительном ортанте с использованием леммы 9.3.

9.2 Расширенная система

Рассмотрим, наряду с системой (9.3), следующую систему:

$$\dot{x} = (vA + uB)x, \qquad v \geqslant 0, \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{9.5}$$

где A и B — постоянные вещественные $n \times n$ матрицы.

Множества достижимости системы (9.5) за произвольное неотрицательное (неположительное) время обозначим через $\tilde{\mathcal{A}}(x)$ (соотв. $\tilde{\mathcal{A}}^-(x)$), а ее свойство управляемости в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ определим так же, как и для системы (9.1). Следующие две леммы посвящены соотношению множеств достижимости систем (9.3) и (9.5).

Лемма 9.4. *Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеют место включения:*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}(x) &\supset \mathcal{A}(x), \\ \tilde{\mathcal{A}}^-(x) &\supset \mathcal{A}^-(x). \end{aligned} \tag{9.6}$$

Доказательство. Любая траектория $x(t)$ системы (9.3) является также траекторией системы (9.5). □

Лемма 9.5. *Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеют место включения:*

$$\operatorname{cl}(\mathcal{A}(x)) \supset \tilde{\mathcal{A}}(x), \tag{9.7}$$

$$\operatorname{cl}(\mathcal{A}^-(x)) \supset \tilde{\mathcal{A}}^-(x). \tag{9.8}$$

Доказательство. Любая траектория $x(t)$ системы (9.5) может быть приближена траекторией системы (9.3). □

Основанием для рассмотрения системы (9.5) является следующая

Лемма 9.6. *Система* (9.3) *управляема в* $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ *тогда и только тогда, когда система* (9.5) *управляема в* $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$.

Доказательство. Если система (9.3) управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$, то управляемость системы (9.5) в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ следует из включения (9.6).

Пусть система (9.5) управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$, т. е.

$$\forall x \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ \qquad \tilde{\mathcal{A}}(x) \supset \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+, \tag{9.9}$$

$$\forall y \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ \qquad \tilde{\mathcal{A}}^-(y) \supset \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ . \tag{9.10}$$

Поэтому для всех $x \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ имеем $\operatorname{int}(\tilde{\mathcal{A}}(x)) \neq \emptyset$. Тогда

$$\forall x \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ \qquad \dim \operatorname{Lie}(A, B)(x) = n.$$

Таким образом, система (9.3) является системой полного ранга. Из последнего равенства выше следует [3], что

$$\forall x \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ \qquad \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\mathcal{A}(x))) \supset \mathcal{A}(x), \tag{9.11}$$

$$\forall y \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ \qquad \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\mathcal{A}^-(y))) \supset \mathcal{A}^-(y). \tag{9.12}$$

Выберем две произвольные точки x, $y \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ и покажем, что $y \in \mathcal{A}(x)$. Последовательно используя (9.11), (9.7), (9.9), и (9.12), (9.8), (9.10), получаем

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ \qquad & \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathcal{A}(x))) \supset \mathrm{cl}(\mathcal{A}(x)) \supset \tilde{\mathcal{A}}(x) \supset \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+, \\
\forall y \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ \qquad & \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathcal{A}^-(y))) \supset \mathrm{cl}(\mathcal{A}^-(y)) \supset \tilde{\mathcal{A}}^-(y) \supset \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ .
\end{aligned}
$$

Множества $\mathrm{int}(\mathcal{A}(x))$ и $\mathrm{int}(\mathcal{A}^-(y))$ открыты и плотны в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$, поэтому существует $z \in \mathrm{int}(\mathcal{A}(x)) \cap \mathrm{int}(\mathcal{A}^-(y))$. Поэтому $z \in \mathcal{A}(x)$, $y \in \mathcal{A}(z)$, следовательно, $y \in \mathcal{A}(x)$. В силу произвольности точек x и y в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$, система (9.3) управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$. □

9.3 Управляемость двумерных систем со скалярным управлением

В этом разделе будут получены условия управляемости системы (9.3) для случая $n = 2$ в предположении (9.4).

Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданная равенством

$$f(x) = \det(Ax, Bx),$$

определяет направление пересечения траекторий поля Bx полем Ax.

Лемма 9.7. *Пусть $b_1 \neq b_2$. Система* (9.5) *управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ тогда и только тогда, когда поле Ax пересекает каждую траекторию поля Bx в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ в обоих направлениях.*

Доказательство. Предположим, что в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ существует траектория $x(t)$ поля Bx, пересекаемая полем Ax в обоих направлениях. Тогда функция $f(x(t))$ не меняет знака при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому получаем, с использованием равенства $\det((vA + uB)x, Bx) = vf(x)$, что каждое поле $(vA + uB)x$, $v \geqslant 0$, пересекает $x(t)$ только в одном направлении и может ее касаться. Поэтому система (9.5) не является управляемой в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$, т.к. при $b_1 \neq b_2$ любая траектория Bx разделяет $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ на две несвязные части.

Теперь предположим, что поле Ax пересекает любую траекторию Bx в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ в обоих направлениях. Траектории Bx в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ образуют слоение коразмерности 1, и возможно движение вдоль этих траекторий в обоих направлениях (с использованием управлений $v = 0$, $u = \pm 1$ в системе (9.5)). Возможно также пересечение любой траектории Bx в обоих направлениях (с использованием управлений $v = 1$, $u = 0$). Поэтому из любой точки в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$

вдоль траекторий системы (9.5) достижима любая другая точка в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$, т.е. система (9.5) управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$. □

Введем обозначение $d = b_1a_{22} - b_2a_{11}$, где b_i и a_{ii} — диагональные элементы матриц A и B.

Лемма 9.8. *Пусть $b_1 \neq b_2$. Поле Ax пересекает каждую траекторию поля Bx в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ в обоих направлениях тогда и только тогда, когда*

$$\left.\begin{array}{l} a_{12}a_{21}b_1b_2 > 0 \\ \textit{или} \\ d^2 > -4a_{12}a_{21}b_1b_2 \geqslant 0, \quad d(b_1a_{21} - b_2a_{12}) < 0. \end{array}\right\} \tag{9.13}$$

Доказательство. Любая траектория Bx в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ пересекается полем Ax в обоих направлениях тогда и только тогда, когда функция $f(x) = \det(Ax, Bx)$ меняет знак в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$. Для $x = (x_1, x_2)$ имеем

$$f(x) = b_1a_{21}x_1^2 + (b_1a_{22} - b_2a_{11})x_1x_2 - b_2a_{12}x_2^2.$$

Рассмотрим функцию $g(k) = c_2k^2 + c_1k + c_0$, где $c_2 = b_1a_{21}$, $c_1 = b_1a_{22} - b_2a_{11}$, $c_0 = -b_2a_{12}$. Функция $f(x)$ меняет знак в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен $g(k)$ имеет хотя бы один простой положительный корень. Это условие эквивалентно дизъюнкции следующих двух условий:

$$\begin{array}{rl} c_0c_2 < 0, & \\ c_1^2 > 4c_0c_2 \geqslant 0, & \qquad c_1(c_0 + c_2) < 0. \end{array}$$

Выражая эти условия через элементы матриц A и B и учитывая (9.4), получаем (9.13). □

Лемма 9.9. *Пусть $b_1 = b_2$. Тогда система* (9.5) *не является управляемой в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$.*

Доказательство. Если $b_1 = b_2 \neq 0$, то траекториями Bx в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ являются лучи с началом в нуле, поэтому каждая из них либо пересекается полем Ax в одном направлении, либо касается поля Ax. Если $b_1 = b_2 = 0$, то поле Bx — нулевое. □

Теперь из лемм 9.6 и 9.7–9.9 немедленно получаем следующее предложение.

Теорема 9.1. *Пусть $n = 2$ и выполнены условия* (9.4). *Система* (9.3) *управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ тогда и только тогда, когда выполнено условие* (9.13) *и $b_1 \neq b_2$.*

Для получения условий управляемости системы (9.3) в положительном ортанте используем леммы 9.2 и 9.3 и заметим, что 2×2 матрица $A = (a_{ij})$ неразложима тогда и только тогда, когда $a_{12} \neq 0$ и $a_{21} \neq 0$. Таким образом, доказано следующее предложение.

Теорема 9.2. *Пусть $n = 2$ и выполнены условия* (9.4). *Система* (9.3) *управляема в положительном ортанте тогда и только тогда, когда выполнено условие* (9.13) *и $b_1 \neq b_2$, $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$.*

9.4 Системы с векторным управлением

Для формулировки условий управляемости в положительном ортанте системы (9.1) при $n = 2$ в предположении условий (9.2) введем необходимые обозначения. Положим $L = \operatorname{span}(B_1, \ldots, B_m)$ — линейная оболочка матриц, и пусть $r = \dim L$. Легко видеть, что r может принимать лишь значения 0, 1 и 2. Рассмотрим отдельно эти три случая.

9.4.1 Случай $r = 0$

Тогда $B_1 = \ldots = B_m = 0$ и система (9.1) не является управляемой в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ и в положительном ортанте.

9.4.2 Случай $r = 1$

Возьмем такую диагональную матрицу B, что $L = \mathbb{R}B$. Тогда траектории системы (9.1) совпадают с траекториями системы (9.3) с такой матрицей B, и условия управляемости системы с векторным управлением (9.1) даются условиями управляемости системы со скалярным управлением (9.3) (теоремы 9.1, 9.2).

9.4.3 Случай $r = 2$

Для любого $x \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ симметричная система

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} B_i x$$

является системой полного ранга и, следовательно, локально управляемой в точке x; в силу линейной связности $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$ эта система управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$. Поэтому при $r = 2$ система (9.1) управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^2_+$, а ее управляемость в положительном ортанте равносильна неразложимости матрицы A (т.е. условию $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$).

9.5 Библиографические замечания

Управляемость двумерных билинейных систем со скалярным управлением была впервые полностью исследована А. Баччиотти в [44]. Результаты, изложенные в данной главе, были получены автором независимо и позднее [17], [18].

Глава 10

Управляемость билинейных систем со скалярным управлением в положительном ортанте

Рассмотрим билинейную систему со скалярным управлением:

$$\dot{x} = (A + uB)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{10.1}$$

где A и B — постоянные вещественные $n \times n$ матрицы.

Как уже отмечалось в главе 7, управляемость системы (10.1) в положительном ортанте имеет смысл рассматривать, лишь когда этот ортант инвариантен для данной системы, т.е. когда

$$\left.\begin{array}{l} \text{все внедиагональные элементы } A = (a_{ij}) \text{ неотрицательны} \\ \text{и } B \text{ диагональна : } B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n). \end{array}\right\} \tag{10.2}$$

В данной главе изучается вопрос об управляемости системы (10.1) в положительном ортанте в предположении условий (10.2) при $n > 2$. Показано, что в случае общего положения ответ на этот вопрос отрицателен. Это следует из существования гиперповерхностей, разделяющих $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ на две части и пересекаемых всеми траекториями системы (10.1) только в одном направлении.

Отметим, что в двумерном случае множество пар матриц (A, B), удовлетворяющих (10.2), для которых система (10.1) управляема в положительном ортанте, имеет непустую внутренность и не является всюду плотным, см. теорему 9.2.

10.1 Предварительные леммы

Рассмотрим сначала случай общего положения, когда наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы B отличны от всех остальных:

$$B = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n), \quad b_1 < b_2 \leqslant \dots \leqslant b_{n-1} < b_n. \tag{10.3}$$

Рассмотрим следующую функцию, определенную на $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$:

$$H(x) = \sum_{i=2}^{n-1} x_1^{c_i} x_i x_n^{d_i},$$

где при $i = 1, \dots, n$ коэффициенты c_i и d_i определяются равенствами

$$c_i = (b_i - b_n)/(b_n - b_1), \qquad d_i = (b_1 - b_i)/(b_n - b_1).$$

Отметим следующие свойства этих коэффициентов :

$$\begin{aligned}
&c_1 = d_n = -1, \quad c_n = d_1 = 0,\\
&-1 < c_i < 0, \quad -1 < d_i < 0, \quad i = 2, \dots, n-1,\\
&c_i + d_i = -1, \quad i = 1, \dots, n,\\
&b_1 c_i + b_i + b_n d_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{10.4}$$

Лемма 10.1. *Пусть выполнены условия* (10.3). *Тогда функция* $H(x)$ *является первым интегралом уравнения* $\dot{x} = Bx$ *в* $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$.

Доказательство. Вычислим производную $H(x)$ в силу этого уравнения:

$$dH/dt = \sum_{i=2}^{n-1} (c_i b_1 + b_i + d_i b_n) x_1^{c_i} x_i x_n^{d_i} \equiv 0$$

из-за равенств (10.4). □

Итак, векторное поле Bx касается любой гиперповерхности $\{H(x) = C\}$ во всех ее точках в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$. Направление пересечения гиперповерхности $\{H(x) = C\}$ полем Ax определяется знаком функции

$$f(x) = \langle \operatorname{grad} H(x), Ax \rangle.$$

Лемма 10.2. *Пусть* $n > 2$, $A = (a_{ij})$ *—* $n \times n$ *матрица такая, что:*

$$\begin{aligned}
&a_{1n} > 0, \quad a_{n1} > 0,\\
&a_{1j} \geqslant 0, \quad a_{nj} \geqslant 0, \quad a_{1j} + a_{nj} > 0, \quad j = 2, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Пусть также выполнено условие (10.3). *Тогда при достаточно больших* C *выполнено неравенство*

$$\big(f(x)|_{H(x)=C}\big) < 0.$$

Доказательство. Введем однородные координаты

$$u = (u_2, \dots, u_n): \qquad u_i = x_i/x_1, \quad i = 2, \dots, n,$$

и, кроме того, положим $u_1 \equiv 1$. В новых координатах имеем:

$$f(u) = \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} u_j u_n^{d_i} (c_i a_{1j} u_i + a_{ij} + d_i a_{nj} u_i / u_n), \quad H(u) = \sum_{i=2}^{n-1} u_i u_n^{d_i}.$$

Мы хотим показать, что

$$\text{для достаточно больших } C \quad \left(f(u)|_{H(u)=C}\right) < 0. \tag{10.5}$$

Легко видеть, что

$$f(u) = P_1(u) + N_1(u) + P_2(u) + N_2(u) + P_3(u) + N_3(u),$$

где $N_i(u)$ отрицательные члены, а $P_i(u)$ — члены с неопределенным знаком:

$$N_1(u) = a_{1n} \sum_{i=2}^{n-1} c_i u_i u_n^{d_i+1}, \quad N_2(u) = a_{n1} \sum_{i=2}^{n-1} d_i u_i u_n^{d_i-1},$$

$$N_3(u) = \sum_{i,j=2}^{n-1} \left(c_i a_{1j} u_i u_j u_n^{d_i} + d_i a_{nj} u_i u_j u_n^{d_i-1}\right),$$

$$P_1(u) = a_{11} \sum_{i=2}^{n-1} c_i u_i u_n^{d_i}, \quad P_2(u) = \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j u_n^{d_i},$$

$$P_3(u) = a_{nn} \sum_{i=2}^{n-1} d_i u_i u_n^{d_i}.$$

Докажем утверждение (10.5), разделяя область изменения u на три части и делая необходимые оценки в каждой части.

А) Сначала доказываем, что

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall C > 0 \quad \left(f(u)|_{H(u)=C, u_n<\varepsilon}\right) < 0.$$

Действительно, для малых u_n знак $\left(f(u)|_{H(u)=C}\right)$ определяется слагаемым $N_2(u)$: легко видеть, что

$$P_k(u) = o(N_2(u)), \quad u_n \to 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Б) Затем делаем аналогичные оценки для больших u_n, т.е. показываем, что

$$\exists K > 0 \ \forall C > 0 \quad \left(f(u)|_{H(u)=C, u_n>K}\right) < 0,$$

используя то, что при больших u_n знак $\left(f(u)|_{H(u)=C}\right)$ определяется членом $N_1(u)$.

В) После этого доказываем, что

$$\forall\varepsilon > 0 \ \forall K > 0 \ \forall\text{достаточно больших} \ \ C \quad \left(f(u)|_{H(u)=C,\varepsilon\leqslant u_n\leqslant K}\right) < 0.$$

Сейчас главным является член $N_3(u)$: при $\varepsilon \leqslant u_n \leqslant K$ и достаточно больших C все члены $P_k(u)$, $k = 1, 2, 3$, подавляются отрицательным членом $N_3(u)$.

Теперь (10.5) очевидно следует из А), Б) и В). □

10.2 Условия управляемости

В этом разделе даются два условия, достаточные для неуправляемости системы (10.1) в положительном ортанте. Первый результат охватывает случай общего положения:

Теорема 10.1. *Пусть $n > 2$ и выполнены условия* (10.2). *Пусть также имеют место следующие неравенства:*

$$\begin{aligned}
&a_{1n} > 0, \quad a_{n1} > 0,\\
&a_{1j} + a_{nj} > 0, \quad j = 2, \dots, n-1,\\
&b_1 < b_2 \leqslant \dots \leqslant b_{n-1} < b_n.
\end{aligned}$$

Тогда система (10.1) *не является управляемой в положительном ортанте.*

Доказательство. При достаточно больших C гиперповерхность $\{H(x) = C\}$ пересекается всеми траекториями системы (10.1) только в одном направлении — направлении убывания $H(x)$ (см. леммы 10.1 и 10.2). □

Докажем еще одно условие, достаточное для неуправляемости; оно касается некоторых вырожденных случаев, не охваченных условиями теоремы 10.1.

Теорема 10.2. *Пусть $n > 2$ и выполнены условия* (10.2). *Пусть для некоторых i, j, таких что $1 \leqslant i < j \leqslant n$, имеем:*

$$\begin{aligned}
&b_i = b_j,\\
&(\forall k \neq i \quad a_{ik} > 0) \quad \text{\textit{или}} \quad (\forall k \neq j \quad a_{jk} > 0).
\end{aligned}$$

Тогда система (10.1) *не является управляемой в положительном ортанте.*

Доказательство. Предположим, что выполнено первое условие, т.е. $(\forall k \neq i \quad a_{ik} > 0)$; если выполнено второе, заменим j на i.

Рассмотрим функцию $G(x) = x_j/x_i$ и покажем, что при достаточно больших C гиперплоскость $\{G(x) = C\}$ пересекается всеми траекториями системы (10.1) в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ только в одном направлении.

Действительно, поле Bx касается гиперплоскости $\{G(x) = C\}$ в силу равенства $b_i = b_j$. Направление пересечения этой гиперплоскости полем Ax определяется знаком функции

$$p(x) = \langle \operatorname{grad} G(x), Ax \rangle.$$

Введем однородные координаты: $v = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, где $v_k = x_k/x_i$ при $k \neq i$. В этих координатах имеем:

$$\begin{aligned} &G(v) = v_j, \\ &p(v) = \sum_{k \neq i,j} (a_{jk} - G(v)a_{ik})v_k + a_{ji} + a_{jj}G(v) - G(v)a_{ii} - G^2(v)a_{ij}. \end{aligned}$$

Методом, примененным в лемме 10.2, легко показывается, что для достаточно больших C имеем

$$\big(p(v)|_{G(v)=C}\big) < 0.$$

Поэтому для достаточно больших C все траектории системы (10.1) пересекают гиперплоскость $\{G(x) = C\}$ в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ только в одном направлении — направлении убывания $G(x)$. $\square$

Хотя при $n > 2$ почти все системы (10.1), удовлетворяющие условиям (10.2), не являются управляемыми в положительном ортанте, при $n = 3$ можно привести примеры таких управляемых в положительном ортанте систем и вообще дать некоторые достаточные условия управляемости (касающиеся лишь вырожденных случаев).

10.3 Библиографические замечания

Результаты данной главы были впервые опубликованы в работе [21].

Глава 11

Управляемость билинейных систем малой коразмерности в положительном ортанте

В данной главе рассматривается задача управляемости в положительном ортанте для билинейной системы

$$\dot{x} = (A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m, \qquad (11.1)$$

где A, $B_1, \dots, B_m$ суть постоянные $n \times n$ матрицы, при естественных предположениях

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij}), \quad \forall i \neq j \quad a_{ij} \geqslant 0, \\ \text{матрицы} \ \ B_i \ \ \text{диагональны.} \end{array}\right\} \qquad (11.2)$$

Будем также предполагать, что матрицы B_i (или, что равносильно, векторы b_i) линейно независимы: для линейной оболочки $l = \mathrm{span}(b_1, \dots, b_m)$ имеем $\dim l = m$. Этого всегда можно добиться, при необходимости исключая некоторые из B_i и уменьшая m.

Легко видеть, что при $m = n$ система (11.1) управляема в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$. Полное решение задачи при $m = 1$, $n = 2$ изложено в главе 9. В главе 10 показано, что при $m = 1$, $n > 2$ система неуправляема в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ в случае общего положения. Поэтому задача решена для крайних коразмерностей: $n - m = 0$ и $n - m = n - 1$.

В этой главе дается решение задачи управляемости в положительном ортанте для систем коразмерности 1 и 2 (т.е. при $m = n - 1$ и $m = n - 2$), а также получены некоторые достаточные условия для неуправляемости при $m \leqslant n - 2$.

Основная идея вполне естественна: если односвязное пространство состояний расслоено на интегральные многообразия полей $B_i x$ коразмерности один, то система (11.1) глобально управляема тогда и только тогда, когда все эти многообразия пересекаются полем Ax в обоих направлениях. Соответствующий общий результат был получен А.Баччиотти и Ж.Стефани в [45].

Эта глава имеет следующую структуру. В разделе 11.1 вводится функция, определяющая направление пересечения интегральных многообразий полей $B_i x$ полем Ax, и получаем условия знакопеременности этой функции. В разделе 11.2 эти условия применяются для получения условий управляемости при $m = n - 1$. В разделе 11.3 дается критерий управляемости в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ в терминах понятия управляемости по направлениям. Наконец, в разделах 11.4, 11.5 даются условия управляемости в других случаях с помощью полученных ранее результатов.

11.1 Условия перемены знака

Для любого фиксированного вектора $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ определим следующую функцию H на $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$:

$$H(x) = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots x_n^{h_n}.$$

Лемма 11.1. *Пусть $B = \operatorname{diag}(b)$ есть $n \times n$ диагональная матрица, и пусть $h \in \mathbb{R}^n$. Соответствующая функция H есть первый интеграл поля Bx тогда и только тогда, когда векторы h и b ортогональны.*

Здесь и далее мы используем стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Доказательство. $\langle \operatorname{grad} H(x), Bx \rangle = \langle h, b \rangle H(x)$. □

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \langle \operatorname{grad} H(x), Ax \rangle / H(x),$$

задающую направление пересечения поверхностей уровня $\{H(x) = C\}$ полем Ax. Далее в этом разделе мы получим, в терминах вектора h и матрицы A, условия того, что

$$\forall C > 0 \text{ функция } \varphi(x)|_{\{H(x)=C\}} \text{ меняет знак.} \tag{11.3}$$

Эти условия (теоремы 11.1 и 11.2) будут использоваться в последующих разделах для получения условий управляемости системы (11.1) в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$.

Напомним, что $n \times n$ матрица A называется *неразложимой* [10], если соответствующий линейный оператор A не имеет k-мерных инвариантных координатных подпространств в $\mathbb{R}^n$ для $0 < k < n$; $A = (a_{ij})$ называется *существенно положительной*, если $a_{ij} > 0$ для всех $i \neq j$.

Теорема 11.1. *Пусть $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, и пусть $\sum_{i=1}^n h_i \neq 0$.*

(1) *Если матрица A неразложима, а вектор h имеет пару компонент противоположных знаков, то условие* (11.3) *выполняется.*

(2) *Если $h_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, и $\sum_{i=1}^n h_i a_{ii} \geqslant 0$, то условие* (11.3) *не выполняется.*

Доказательство. Утверждение (1). Без потери общности можно предполагать, что $h_1 > 0$ и $h_n < 0$. Далее, H есть однородная функция порядка $\sum_{i=1}^n h_i \neq 0$, и каждый луч с вершиной в начале координат, проходящий через точку x, пересекает все гиперповерхности $\{H(x) = C\}$. Поэтому условие (11.3) выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi(x)$ меняет знак в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$.

При $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$ и малых $x_1 > 0$ знак функции $\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i x_j / x_i$ определяется доминирующим положительным слагаемым $h_1 \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j / x_1$. А при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 1$ и малых $x_n > 0$ функция $\varphi(x)$ отрицательна из-за слагаемого $h_n \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j / x_n$. Поэтому $\varphi(x)$ меняет знак в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$. Утверждение (1) доказано.

Утверждение (2) следует непосредственно из разложения

$$\varphi(x) = \sum_{i \neq j} a_{ij} h_i x_j / x_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} h_i.$$

□

Теорема 11.2. *Пусть матрица A существенно положительна, а вектор $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^n h_i = 0$. В этом случае условие* (11.3) *выполняется тогда и только тогда, когда вектор h имеет по меньшей мере две положительные и две отрицательные компоненты.*

Эта теорема следует из приведенных ниже лемм 11.2 – 11.4.

Лемма 11.2. *Пусть $n = 4$, а матрица A существенно положительна; предположим, что $\sum_{i=1}^4 h_i = 0$; $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $h_3 < 0$, $h_4 < 0$. Тогда условие* (11.3) *выполняется.*

Доказательство. Предположим, что существует такое $C > 0$, что $\varphi(x)$ не меняет знака на $\{H(x) = C\}$. Можно считать, что $\varphi(x) \geqslant 0$ на $\{H(x) = C\}$.

В однородных координатах $u_i = x_i / x_4$, $i = 1, 2, 3$, $u_4 \equiv 1$, имеем $H(u) = u_1^{h_1} u_2^{h_2} u_3^{h_3}$, $\varphi(u) = \sum_{i,j=1}^4 h_i a_{ij} u_j / u_i$, и $\varphi(u) \geqslant 0$ на $\{H(u) = C\}$.

На поверхности $\{H(u) = C\}$ имеем $u_3 = C^{1/h_3} u_1^{p_1} u_2^{p_2}$, где

$$p_1 = -h_1 / h_3 > 0, \quad p_2 = -h_2 / h_3 > 0.$$

A) Сначала покажем, что $p_2 \leqslant 1$.

Введем следующее семейство кривых, параметризованное параметром α:

$$\gamma_\alpha(s) = (s, s^\alpha, C^{1/h_3} s^{p_1 + \alpha p_2}). \tag{11.4}$$

Отметим, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и $s > 0$ имеем $H(\gamma_\alpha(s)) \equiv C$.

Пусть $\alpha < 0$. На кривой $\gamma_\alpha(s)$ при $s \to +\infty$ имеем $u_1 \to \infty$, $u_2 \to 0$. Тогда наибольшими положительными слагаемыми в $\varphi(u)$ являются $h_2 a_{21} u_1/u_2$ и $h_2 a_{23} u_3/u_2$. Покажем, что если $p_2 > 1$, то параметр α можно подобрать так, чтобы эти положительные слагаемые были по модулю меньше, чем отрицательный член $h_3 a_{31} u_1/u_3 = h_3 a_{31} C^{-1/h_3} s^{1-p_1-\alpha p_2}$. Действительно, на кривой $\gamma_\alpha(s)$ имеем $u_1/u_2 = s^{1-\alpha}$, $u_3/u_2 = C^{1/h_3} s^{p_1+\alpha p_2-\alpha}$, и существование указанного α следует из совместности системы неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} 1-p_1-\alpha p_2 > 1-\alpha \\ 1-p_1-\alpha p_2 > p_1+\alpha p_2-\alpha \\ \alpha < 0 \end{array}\right. \quad \underset{(\text{при } p_2 > 1)}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha > p_1/(1-p_2) \\ \alpha < (2p_1-1)/(1-2p_2) \\ \alpha < 0 \end{array}\right.$$

Итак, указанное α существует, и противоречие с $(\varphi(u)|_{H(u)=C}) \geqslant 0$ показывает, что утверждение A) доказано.

B) Затем таким же образом показываем, что $p_1 \leqslant 1$.

C) Теперь покажем, что $p_1 + p_2 \leqslant 1$. Рассмотрим семейство (11.4) при $\alpha > 0$ и $s \to 0$, и покажем, аналогично A), что $p_1 + p_2 > 1$, $p_1 \leqslant 1$, $p_2 \leqslant 1$ влечет $\varphi(\gamma_\alpha(s)) < 0$ для этих α и s.

Но неравенство $p_1+p_2 \leqslant 1$ эквивалентно $h_1+h_2+h_3 \leqslant 0$, что противоречит условиям $h_1+h_2+h_3+h_4 = 0$ и $h_4 < 0$. Это противоречие показывает, что $\varphi(x)$ меняет знак на поверхности $\{H(x) = C\}$. $\square$

Теперь получим обобщение леммы 11.2 на случай произвольного $n > 4$.

Лемма 11.3. *Пусть $n > 4$, матрица A существенно положительна; $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n h_i = 0$; $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $h_3 < 0$, $h_4 < 0$. Тогда условие* (11.3) *выполняется.*

Доказательство. Общий случай сводится к случаю $n = 4$ «замораживанием» лишних координат.

В однородных координатах $u_i = x_i/x_4$, $i \neq 4$, $u_4 \equiv 1$, рассмотрим для любого $K > 0$ плоскость

$$\Pi_K = \{u = (u_1, \dots, u_n) : u_5 = \ldots = u_n = K\}.$$

Имеем $H(u)|_{\Pi_K} = u_1^{h_1} u_2^{h_2} u_3^{h_3} K^{h_5+\ldots+h_n}$, и плоскость Π_K пересекается с поверхностью $\{H(u) = C\}$ для любых $C > 0$, $K > 0$. Поэтому для доказательства данной леммы достаточно показать, что

$$\forall C > 0 \quad \exists K > 0 \text{ такое, что } \ \varphi(u)|_{\{H(u)=C\}\cap\Pi_K} \text{ меняет знак.} \tag{11.5}$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\varphi(u)|_{\Pi_K} = \sum_{i,j=1}^{4} h_i \tilde{a}_{ij}(K) u_j/u_i,$$

где

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{ij}(K) &\equiv a_{ij} \quad \text{при } i,j=1,2,3;\\
\tilde{a}_{i4}(K) &= a_{i4} + K\sum_{j=5}^{n} a_{ij} \quad \text{при } i=1,2,3;\\
\tilde{a}_{4j}(K) &= a_{4j} + 1/K\sum_{i=5}^{n} h_i/h_4 a_{ij} \quad \text{при } j=1,2,3;\\
\tilde{a}_{44}(K) &= a_{44} + K\sum_{j=5}^{n} a_{4j} + 1/K\sum_{i=5}^{n} h_i/h_4 a_{i4} + \sum_{i,j=5}^{n} h_i/h_4 a_{ij}.
\end{aligned}
$$

Поэтому функция $\varphi(u)|_{\Pi_K}$ совпадает с функцией перемены знака

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\varphi}_K(x) = \langle \operatorname{grad} \tilde{H}(x), \tilde{A}(K)x\rangle, \qquad x\in\mathbb{R}^4,\\
&\tilde{H}(x) = x_1^{h_1}x_2^{h_2}x_3^{h_3}x_4^{h_4}, \qquad \tilde{A}(K) = (\tilde{a}_{ij}(K)), \quad i,j=1,\dots,4,
\end{aligned}
$$

после того, как $\tilde{\varphi}_K(x)$ выражено в обычных однородных координатах u_i. При достаточно больших K матрица $\tilde{A}(K)$ существенно положительна, поэтому можем использовать полученные выше условия перемены знака при $n=4$. Если $h_1+h_2+h_3+h_4\neq 0$, то из утверждения (1) теоремы 11.1 следует, что $\tilde{\varphi}_K(x)|_{H(x)=C}$ меняет знак при любом $C>0$. А если $h_1+h_2+h_3+h_4=0$, то такой же результат следует из леммы 11.2. Поэтому утверждение (11.5) доказано, так же как и лемма 11.3. □

Теперь рассмотрим случай, когда h имеет только одну компоненту, знак которой отличается от знака всех остальных компонент (заметим, что при условии $\sum_{i=1}^n h_i = 0$, $h\neq 0$ всегда существует хотя бы одна такая компонента).

Лемма 11.4. *Пусть матрица A существенно положительна, а вектор $h\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $\sum_{i=1}^n h_i=0$, $h_1\geqslant 0$, $h_2\geqslant 0,\dots$, $h_{n-1}\geqslant 0$, $h_n<0$. Тогда условие* (11.3) *не выполняется.*

Доказательство. В координатах $u_i = x_i/x_n$, $i=1,\dots,n-1$, $u_n\equiv 1$ имеем $H(u)=u_1^{h_1}u_2^{h_2}\dots u_{n-1}^{h_{n-1}}$. Из неравенств $h_1\geqslant 0, h_2\geqslant 0,\dots,h_{n-1}\geqslant 0$, следует, что

$$\lim_{C\to 0}\ \sup_{H(u)=C}\ \min_{h_i>0}\{u_i\} = 0,$$

т.е. при малых $C>0$ по крайней мере одна из тех компонент u_i вектора u, для которых $h_i>0$, становится малой на поверхности $\{H(u)=C\}$. Выберем достаточно малое $C>0$, и пусть u_k есть такая малая компонента в некоторой окрестности точки u, $H(u)=C$, что $h_k>0$.

В разложении $\varphi(u)=\sum_{i,j=1}^n h_i a_{ij}u_j/u_i$ отрицательными членами являются $h_n\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}u_j$ и, быть может, $\sum_{i=1}^n h_i a_{ii}$. Но для малых u_k модули всех этих членов меньше, чем большой положительный член $h_k \sum_{j\neq k} a_{kj}u_j/u_k$. Действительно, разложим отрицательные члены в виде

$$h_n\left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{nj}u_j + a_{nk}u_k + \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{nj}u_j\right) + \sum_{i=1}^{n} h_i a_{ii},$$

а положительные члены в виде

$$h_k\left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}u_j/u_k + \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{kj}u_j/u_k + a_{kn}/u_k\right).$$

Для достаточно малых u_k имеем:

$$\begin{aligned}
h_k\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}u_j/u_k &> |h_n\sum_{j=1}^{k-1} a_{nj}u_j|,\\
h_k\sum_{j=k+1}^{n-1} a_{kj}u_j/u_k &> |h_n\sum_{j=k+1}^{n-1} a_{nj}u_j|,\\
h_k a_{kn}/u_k &> |h_n a_{nk}u_k| + |\sum_{i=1}^{n} h_i a_{ii}|.
\end{aligned}$$

Поэтому положительные члены доминируют над отрицательными, и функция φ положительна в окрестности выбранной точки u. В силу произвольности u, имеем $\left(\varphi(u)|_{H(u)=C}\right) > 0$ при малых $C > 0$. □

11.2 Системы коразмерности один

В этом разделе будем предполагать, что $m = n - 1$, и получим условия управляемости системы (11.1) в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ для этого случая.

Существует единственный (с точностью до скалярного множителя) ненулевой вектор $h \in \mathbb{R}^n$, ортогональный гиперплоскости $l = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{n-1})$. Зафиксируем такой вектор $h = (h_1, \ldots, h_n)$ и соответствующую функцию $H(x) = x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$.

Лемма 11.5. *Система* (11.1) *управляема в* $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ *тогда и только тогда, когда поле* Ax *пересекает любую поверхность уровня* $\{H(x) = C\}$ *в обоих направлениях.*

Доказательство. Используем теорию глобальной управляемости систем с $n-1$ управлениями на n-мерном многообразии, построенную А.Баччиотти и Ж.Стефани в работе [45]. Из теоремы 5.1 в [45] следует, что система (11.1) управляема в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in \mathring{\mathbb{R}}^n_+$ максимальное интегральное многообразие полей B_1x, …, $B_{n-1}x$, проходящее через точку x, пересекается полем Ax в обоих направлениях. Но семейство полей $B_1x, \ldots, B_{n-1}x$ инволютивно (все скобки Ли $[B_ix, B_jx] = [B_i, B_j]x$ равны нулю), поэтому это интегральное многообразие имеет размерность $n-1$. С другой стороны, функция H есть первый интеграл полей $B_1x, \ldots, B_{n-1}x$ (см. лемму 11.1). Поверхности уровня функции H связны, поэтому они совпадают с максимальными интегральными многообразиями этих полей. $\square$

Направление пересечения поверхности уровня функции H полем Ax определяется знаком функции $\varphi(x) = \langle \operatorname{grad} H(x), Ax \rangle$, поэтому из леммы 11.5 получаем следующее предложение.

Теорема 11.3. *Пусть $m = n-1$, $h \perp l$, $h \neq 0$. Система* (11.1) *управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ тогда и только тогда, когда для любого $C > 0$ функция $\varphi(x)|_{H(x)=C}$ меняет знак.*

Теперь используем условия перемены знака для функции φ, полученные выше (теоремы 11.1, 11.2) для вывода следующих условий управляемости.

Теорема 11.4. *Пусть $m = n-1$, $h \perp l$, $\sum_{i=1}^n h_i \neq 0$.*

(1) *Если матрица A неразложима, а вектор h имеет пару компонент противоположного знака, то система* (11.1) *управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$.*

(2) *Если $h_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, и $\sum_{i=1}^n h_i a_{ii} \geqslant 0$, то система* (11.1) *неуправляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$.*

Теорема 11.5. *Пусть $m = n-1$, $h \perp l$, $h \neq 0$, $\sum_{i=1}^n h_i = 0$. Предположим, что матрица A существенно положительна. Система* (11.1) *управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ тогда и только тогда, когда вектор h имеет по меньшей мере две положительные и две отрицательные компоненты.*

11.3 Управляемость по направлениям

В этом разделе мы используем понятие управляемости по направлениям для системы (11.1) и получим критерий управляемости в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$.

Система (11.1) называется *управляемой по направлениям в* $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$, если для любых x, $y \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ существует такое $r \in \mathbb{R}_+$, что $ry \in \mathcal{A}(x)$.

Будем говорить, что вектор $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ задает *направление входа в начало координат (выхода из начала координат) для системы (11.1), если $rx \in \mathcal{A}(x)$ для всех $r \in (0;1)$ (соответственно $rx \in \mathcal{A}(x)$ для всех $r \in (1;+\infty)$).*

Теорема 11.6. *Система* (11.1) *управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ тогда и только тогда, когда:*

(1) *она управляема по направлениям в* $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ *и*

(2) *существуют векторы в* $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$, *задающие направление входа в начало координат и направление выхода из начала координат.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть x задает направление входа, а y — направление выхода; $x, y \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$. Тогда возможно движение вдоль интервала $\{rx : r \in (0;1)\}$ к началу координат, а вдоль луча $\{ry : r \in (1;+\infty)\}$ от начала координат. Но управляемость по направлениям системы (11.1) в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ означает, что $\mathcal{A}(z)$ пересекается с любым лучом вида $\{rw : r \in \mathbb{R}_+\}$ in $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$. Поэтому для любого $z \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ множество достижимости $\mathcal{A}(z)$ инвариантно при гомотетиях относительно начала координат, следовательно, $\mathcal{A}(z) = \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$. □

11.4 Системы коразмерности два

В этом разделе рассматривается случай $m = n - 2$. Мы воспользуемся критерием управляемости, полученным в предыдущем разделе, и сведем этот случай к случаю коразмерности один.

Предположим, что $(n-2)$-мерная плоскость $l = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_{n-2})$ не содержит вектор $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Зафиксируем ненулевой вектор $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, ортогональный гиперплоскости $\mathrm{span}(e, l)$, и соответствующие функции $H(x) = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots x_n^{h_n}$ и $\varphi(x) = \langle \mathrm{grad}\, H(x), Ax \rangle / H(x)$.

Отметим, что для выбранного вектора h имеем $\sum_{i=1}^n h_i = 0$.

Лемма 11.6. *Пусть матрица A существенно положительна. Система* (11.1) *управляема по направлениям в* $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ *тогда и только тогда, когда вектор h имеет по меньшей мере две положительные и две отрицательные компоненты.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{x} = (A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i + u_{m+1} E)x, \tag{11.6}$$

где A, B_i, u_i, $i = 1, \ldots, m$, те же, что и в системе (11.1), E — единичная $n \times n$ матрица, u_{m+1} — неограниченное скалярное управление. Легко видеть, что система (11.1) управляема по направлениям в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ тогда и только тогда, когда система (11.6) управляема в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$. Но система (11.6) имеет коразмерность один, и можно применить теорему 11.5 для получения условий управляемости системы (11.6) в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$. □

Лемма 11.7. *Пусть матрица A неразложима. Если существует вектор $b \in l \cap \mathring{\mathbb{R}}^n_+$ с попарно различными компонентами, то для системы* (11.1) *существуют направление входа в начало координат и направление выхода из начала координат в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$.*

Доказательство. Применяя предложение 4.3 работы [51] к матрице $B = \mathrm{diag}(b)$, получаем, что для достаточно больших по модулю положительных u (соотв. отрицательных u) все собственные значения матрицы $A + uB$ положительны (соотв. отрицательны). Но матрица $A + uB$ существенно неотрицательна и неразложима. Поэтому, применяя теорему Фробениуса о спектральных свойствах неотрицательных неразложимых матриц [10] и рассуждение У.М. Бутби из раздела 4 [51], получим, что соответствующие собственные векторы x с положительным собственным значением и y с отрицательным собственным значением принадлежат $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$. Но тогда x и y задают направление входа в начало координат и выхода из начала координат в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ соответственно. □

Применяя теорему 11.6, леммы 11.6 и 11.7, получаем следующие условия управляемости для систем коразмерности 2.

Теорема 11.7. *Пусть $m = n - 2$, $e \notin l$, $h \perp \mathrm{span}(e, l)$. Предположим, что выполняются следующие условия:*

(1) *вектор h имеет по меньшей мере две положительные и две отрицательные компоненты;*

(2) *матрица A существенно положительна;*

(3) *существует вектор $b \in l \cap \mathring{\mathbb{R}}^n_+$ с попарно различными компонентами.*

Тогда система (11.1) *управляема в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$.*

Теорема 11.8. *Пусть $m = n-2$, матрица A существенно положительна, $e \notin l$, $h \perp \mathrm{span}(e, l)$. Предположим, что для некоторого $i = 1, \ldots, n$ имеем $h_i > 0$ и $h_j \leqslant 0$ для всех $j \neq i$. Тогда система* (11.1) *неуправляема в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$.*

11.5 Системы произвольной коразмерности

Для систем, не затронутых условиями управляемости разделов 11.2 и 11.4, мы можем дать некоторые условия, достаточные для неуправляемости (т.е., по сути, необходимые для управляемости) благодаря следующему простому факту: если систему (11.1) можно так дополнить до системы

$$\dot{x} = (A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i + \sum_{i=m+1}^{m+k} u_i B_i)x$$

для некоторого $k > 0$, что вышеуказанная система неуправляема в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$, то и исходная система (11.1) также неуправляема в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$.

Теорема 11.9. *Пусть $m < n - 1$, и пусть существует такой вектор $h \in \mathbb{R}^n$, $h \perp l$, что $h_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и $\sum_{i=1}^n a_{ii} h_i \geqslant 0$. Тогда система* (11.1) *неуправляема в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$.*

Доказательство. Пусть L есть гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, ортогональная вектору h. Имеем $L \supset l = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_m)$, поэтому можно выбрать векторы $b_{m+1}, \ldots, b_{n-1}$, дополняющие $b_1, \ldots, b_m$ до базиса пространства гиперплоскости L. Введем диагональные матрицы $B_i = \operatorname{diag}(b_i)$ для $i = m+1, \ldots, n-1$. Тогда система $\dot{x} = (A + \sum_{i=1}^{n-1} u_i B_i)x$ имеет коразмерность один и неуправляема по утверждению (2) теоремы 11.4. Поэтому система (11.1) также неуправляема. □

Теорема 11.10. *Пусть $m < n-2$, матрица A существенно положительна, и существует такой вектор $h \in \mathbb{R}^n$, $h \perp \operatorname{span}(e, l)$, что для некоторого $i = 1, \ldots, n$ имеем $h_i > 0$ и $h_j \leqslant 0$ при $j \neq i$. Тогда система* (11.1) *неуправляема в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$.*

Доказательство. С помощью такого же рассуждения, как выше в теореме 11.9, дополняем систему (11.1) до системы коразмерности два, и получаем неуправляемость по теореме 11.8. □

11.6 Библиографические замечания

Результаты данной главы были впервые опубликованы в работе [101].

Часть III

Симметрии инвариантных систем на группах Ли

В третьей части монографии мы исследуем плоские распределения и субримановы структуры — локальные нильпотентные аппроксимации распределений и субримановых структур в регулярных точках. Вычисляются алгебры Ли симметрий плоских распределений и субримановых структур максимального роста в размерностях 3, 4, и 5.

Плоские распределения и субримановы структуры моделируются симметричными инвариантными системами на нильпотентных группах Ли. Эти системы по определению имеют полный ранг, поэтому являются глобально управляемыми.

Такие системы привлекают большое внимание в теории и приложениях оптимального управления, и исследование их симметрий представляет естественный первый шаг в их изучении.

Глава 12

Плоские распределения и субримановы структуры

Субримановой геометрией называется тройка $(M, \Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где M — гладкое многообразие, $\Delta \subset TM$ гладкое распределение на M,

$$\Delta = \{\Delta_q \text{ — линейное подпространство в } T_qM \mid q \in M\},$$

а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в Δ, гладко зависящее от точки в M,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \{\langle \cdot, \cdot \rangle_q \text{ — скалярное произведение в } \Delta_q \mid q \in M\}.$$

Пара $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется *субримановой структурой* на M; если $\dim M = n$ и $\dim \Delta_q = k$, $q \in M$, то будем говорить, что $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ есть (k, n)-*структура*. Число k называется *рангом* распределения Δ или структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, оно предполагается постоянным для данного распределения или субримановой структуры.

Нас будет интересовать специальный класс распределений и субримановых структур, которые называются *плоскими*. Пусть G — связная односвязная нильпотентная группа Ли. Предположим, что ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ градуирована:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^s,$$
$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}, \quad \mathfrak{g}^r = \{0\} \ \forall r > s,$$

и порождена как алгебра Ли своей компонентой степени 1:

$$\mathrm{Lie}(\mathfrak{g}^1) = \mathfrak{g}. \tag{12.1}$$

Тогда

$$\Delta = \mathfrak{g}^1$$

может рассматриваться как вполне неинтегрируемое левоинвариантное распределение на группе Ли G. Такое распределение Δ будем называть *плоским*. Далее, если Δ снабжено левоинвариантным скалярным произведением

$\langle\cdot,\cdot\rangle$, полученным из скалярного произведения $\mathfrak{g}^1$, то $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *плоской* субримановой структурой на G. Плоские субримановы структуры возникают как локальные нильпотентные аппроксимации произвольных субримановых структур в регулярных точках (см. [2], [46], [35]).

Замечание. Плоское распределение Δ есть симметричная левоинвариантная система на группе Ли G. Равенство (12.1) означает, что система Δ имеет полный ранг, поэтому она управляема на группе Ли G.

Для распределения $\Delta \subset TM$, его *флаг Ли* определяется следующим образом:

$$\Delta \subset \Delta^2 = \Delta + [\Delta, \Delta] \subset \Delta^3 = \Delta^2 + [\Delta, \Delta^2] \subset \cdots \subset TM$$

(здесь Δ обозначает также $C^\infty(M)$-модуль векторных полей на M, касающихся распределения Δ). Тогда *вектор роста* распределения Δ в точке $q \in M$ есть вектор

$$(n_1, n_2, n_3, \dots), \qquad n_i = \dim \Delta^i(q).$$

Для плоского распределения $\Delta \subset TG$, можно ограничиться левоинвариантными векторными полями на группе Ли G:

$$\Delta^i(q) = (\mathfrak{g}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^i)(q),$$

тогда вектор роста постоянен и принимает форму

$$(n_1, n_2, n_3, \dots), \qquad n_i = \sum_{j=1}^{i} \dim \mathfrak{g}^j.$$

Два плоских распределения (две субримановы структуры) называются *изоморфными*, если существует изоморфизм алгебр Ли, отображающий первое распределение (субриманову структуру) во второе распределение (вторую структуру), иными словами, если они изоморфны как левоинвариантные объекты на G.

В данной части монографии мы изучаем симметрии плоских распределений и субримановых структур в размерностях $(2, n)$, $n = 3, 4, 5$, для максимальных векторов роста. Точнее, мы рассмотрим следующие случаи:

Размерность	Вектор роста
$(2,3)$	$(2,3)$
$(2,4)$	$(2,3,4)$
$(2,5)$	$(2,3,5)$

Конечно, условие максимального роста существенно лишь для размерности (2,5) т.к. для размерностей (2,3) и (2,4) векторы роста определены однозначно.

Мы интересуемся случаем максимального роста, так как это — случай общего положения: распределение общего положения имеет максимальный рост в точке общего положения. Случай (2,3,5) важен для приложений, субримановы структуры с вектором роста (2,3,5) возникают в следующих системах:

1) пара тел, катящихся одно по другому без прокручивания и проскальзывания [36], [90], [3], в частности, сфера, катящаяся по плоскости [80];

2) машина с двумя прицепами [88], [117].

Отметим, что результаты данной главы о распределениях были известны ранее. В частности, симметрии плоского (2,3,5) распределения были известны еще Э. Картану [61]. Впрочем, кажется, что этот результат нигде не представлен в современной терминологии.

Результаты о симметриях плоских субримановых структур являются новыми.

Глава 13

Симметрии распределений и субримановых структур

Далее термин «гладкий» означает C^∞. Для заданного гладкого векторного поля $X \in \mathrm{Vec}(M)$, будем обозначать через e^{tX} его поток, через $(e^{tX})_*$ действие дифференциала потока на векторные поля, а через $(e^{tX})^*$ действие потока на дифференциальные формы.

Векторное поле $X \in \mathrm{Vec}(M)$ называется (инфинитезимальной) *симметрией*:

1) распределения Δ на M, если его поток сохраняет Δ:

$$(e^{tX})_*\Delta = \Delta, \qquad t \in \mathbb{R};$$

2) субримановой структуры $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ на M, если его поток сохраняет как Δ, так и $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$(e^{tX})_*\Delta = \Delta, \quad (e^{tX})^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Алгебры Ли симметрий распределения Δ и субримановой структуры $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ будут обозначаться как $\mathrm{Sym}(\Delta)$, соответственно, $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Любой левоинвариантный объект на группе Ли G (например, векторное поле, распределение или субриманова структура) по определению сохраняется левыми сдвигами на G. С другой стороны, поток правоинвариантного векторного поля X на G действует как левый сдвиг:

$$e^{tX}(g) = e^{tX}(\mathrm{Id})g, \qquad g \in G, \quad t \in \mathbb{R},$$

где Id — единичный элемент группы G. Поэтому любое правоинвариантное векторное поле есть инфинитезимальная симметрия любого левоинвариантного объекта. В частности, для любого левоинвариантного распределения Δ и левоинвариантной структуры $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ имеем

$$\mathfrak{g}_r \subset \mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle) \subset \mathrm{Sym}(\Delta). \tag{13.1}$$

Здесь $\mathfrak{g}_r$ есть алгебра Ли правоинвариантных векторных полей на G, изоморфная алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G (образованной левоинвариантными полями на G).

Симметрии распределений и субримановых структур могут быть вычислены с помощью следующего утверждения.

Предложение 13.1. *Пусть* $X \in \mathrm{Vec}(M)$.

(1) $X \in \mathrm{Sym}(\Delta)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{ad}\, X(\Delta) \subset \Delta$*, или, что равносильно,*

$$\mathrm{ad}\, X \in \mathrm{gl}(\Delta). \tag{13.2}$$

(2) $X \in \mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{ad}\, X \in \mathrm{so}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle). \tag{13.3}$$

Любое правоинвариантное векторное поле X на группе Ли G коммутирует с любым левоинвариантным векторным полем, поэтому

$$\mathrm{ad}\, X|_{\Delta} = 0$$

для левоинвариантного распределения Δ на G. Это и есть доказательство включения (13.1).

Замечание. Включение (13.2) означает, что для любого векторного поля $\xi \in \mathrm{Vec}(M)$, касающегося распределения Δ, скобка Ли $[X,\xi]$ также касается Δ:

$$\xi \in \Delta \quad \Rightarrow \quad [X,\xi] \in \Delta.$$

То есть определено линейное отображение

$$\mathrm{ad}\, X \,:\, \Delta \to \Delta, \qquad \mathrm{ad}\, X \,:\, \xi \mapsto [X,\xi]. \tag{13.4}$$

В терминах локальных базисов условие (13.2) принимает следующий вид. Для любой точки $q_0 \in M$ и любого локального базиса $\xi_1, \dots, \xi_k$ распределения Δ в окрестности $q_0 \in O \subset M$:

$$\Delta_q = \mathrm{span}(\xi_1(q), \dots, \xi_k(q)), \qquad q \in O,$$

существуют такие гладкие функции $c_{ij} = c_{ij}(q)$, определенные в O, что

$$[X,\xi_i](q) = \sum_{j=1}^{k} c_{ji}(q)\xi_j(q), \qquad q \in O, \quad i = 1, \dots, k. \tag{13.5}$$

Аналогично, включение (13.3) означает, что линейное отображение (13.4) кососимметрично относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. В терминах локальных базисов: для любой точки $q_0 \in M$ и любого ортонормированного локального базиса субримановой структуры $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ в окрестности O точки q_0,

$$\begin{aligned} &\Delta_q = \mathrm{span}(\xi_1(q), \dots, \xi_k(q)), \\ &\langle \xi_i(q), \xi_j(q)\rangle = \delta_{ij}, \qquad q \in O, \quad i,\ j = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

равенство (13.5) удовлетворяется для таких гладких функций $c_{ij} = c_{ij}(q)$, определенных в O, что матрица $C = C(q) = (c_{ij})_{i,j=1}^k$ кососимметрична:

$$C^*(q) = -C(q), \qquad q \in O.$$

Предыдущее равенство эквивалентно следующему:

$$\langle [X, \xi_i], \xi_j \rangle + \langle \xi_i, [X, \xi_j] \rangle = 0, \qquad i,\ j = 1, \ldots, k.$$

Докажем предложение 13.1.

Доказательство. Утверждение (1) хорошо известно, см., например, теорему 3.1 [6]. Докажем утверждение (2).

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_k$ и $\eta_1, \ldots, \eta_k$ суть локальные ортонормированные базисы субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ вблизи точек $q \in M$ и $q_t = e^{tX}(q)$ соответственно. Зафиксируем любую пару индексов $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ и определим гладкую функцию, зависящую от параметра t:

$$\varphi_t = \left\langle (e^{tX})_* \xi_i, (e^{tX})_* \xi_j \right\rangle.$$

Необходимость. Пусть $X \in \operatorname{Sym}(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Тогда

$$\varphi_t \equiv \varphi_0 = \delta_{ij},$$

поэтому

$$0 = \left.\frac{d}{d\,t}\right|_{t=0} \varphi_t = \langle -\operatorname{ad} X(\xi_i), \xi_j \rangle + \langle \xi_i, -\operatorname{ad} X(\xi_j) \rangle.$$

Равенства

$$\langle \operatorname{ad} X(\xi_i), \xi_j \rangle + \langle \xi_i, \operatorname{ad} X(\xi_j) \rangle = 0, \qquad i,\ j = 1, \ldots, k,$$

означают, что оператор $\operatorname{ad} X : \Delta \to \Delta$ кососимметричен относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Достаточность. Предположим, что $\operatorname{ad} X \in \operatorname{so}(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. В частности, выполняется включение (13.2). Согласно пункту (1) данного предложения, поток e^{tX} сохраняет распределение Δ, т.е.

$$(e^{tX})_* \xi_i = \sum_{m=1}^k a_{mi} \eta_m, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

для некоторых гладких функций a_{mi}, определенных в окрестности точки q_t. Тогда

$$\varphi_t = \left\langle \sum_{m=1}^k a_{mi} \eta_m, \sum_{l=1}^k a_{lj} \eta_l \right\rangle = \sum_{m,l=1}^k a_{mi} a_{lj} \underbrace{\langle \eta_m, \eta_l \rangle}_{=\delta_{ml}} = \sum_{l=1}^k a_{li} a_{lj}. \qquad (13.6)$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varphi_t}{dt} &= \langle -\operatorname{ad} X \circ (e^{tX})_*\xi_i, (e^{tX})_*\xi_j\rangle + \langle (e^{tX})_*\xi_i, -\operatorname{ad} X \circ (e^{tX})_*\xi_j\rangle \\
&= -\left\langle \operatorname{ad} X\left(\sum_{m=1}^{k} a_{mi}\eta_m\right), \sum_{l=1}^{k} a_{lj}\eta_l \right\rangle \\
&\qquad -\left\langle \sum_{m=1}^{k} a_{mi}\eta_m, \operatorname{ad} X\left(\sum_{l=1}^{k} a_{lj}\eta_l\right)\right\rangle \\
&= -\sum_{m,l=1}^{k}\left(((Xa_{mi})a_{lj} + a_{mi}(Xa_{lj}))\underbrace{\langle \eta_m, \eta_l\rangle}_{=\delta_{ij}}\right. \\
&\qquad \left. + a_{mi}a_{lj}\underbrace{(\langle(\operatorname{ad} X)\eta_m, \eta_l\rangle + \langle \eta_m, (\operatorname{ad} X)\eta_l\rangle)}_{=0}\right) \\
&= -\sum_{l=1}^{k}(Xa_{li})a_{lj} + a_{li}(Xa_{lj}) \\
&= -X\left(\sum_{l=1}^{k} a_{li}a_{lj}\right).
\end{aligned}
$$

Здесь Xf обозначает производную Ли (производную по направлению) функции f вдоль векторного поля X:

$$Xf = df(X), \qquad f \in C^\infty(M), \quad X \in \operatorname{Vec}(M).$$

Ввиду равенства (13.6), семейство функций φ_t является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = -X\varphi_t. \tag{13.7}$$

Легко видеть, что это ОДУ имеет единственное решение: если φ_t удовлетворяет (13.7), то

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(e^{tX}q) = -X\varphi_t(e^{tX}q) + X\varphi_t(e^{tX}q) = 0,$$

поэтому

$$\varphi_t(e^{tX}q) \equiv \varphi_0(q),$$

то есть

$$\varphi_t(q) = \varphi_0(e^{-tX}q).$$

Но $\varphi_0 \equiv \delta_{ij}$, поэтому

$$\varphi_t = \langle (e^{tX})_*\xi_i, (e^{tX})_*\xi_j\rangle \equiv \delta_{ij}, \qquad i,\ j = 1, \dots, k,$$

т.е. поле X есть инфинитезимальная симметрия субримановой структуры $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. □

Глава 14

Случай Гейзенберга

14.1 Плоское распределение и плоская субриманова структура

Пусть $\mathfrak{g}$ есть трехмерная алгебра Гейзенберга, т.е. (единственная) трехмерная нильпотентная алгебра Ли порядка два:

$$\dim \mathfrak{g} = 3, \quad \dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 1, \quad \dim[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 0, \tag{14.1}$$

а G — трехмерная группа Гейзенберга, т.е. соответствующая связная односвязная группа Ли. Плоское распределение ранга два Δ на G есть любое неинтегрируемое левоинвариантное распределение ранга два на G:

$$\Delta \subset \mathfrak{g}, \quad \dim \Delta = 2, \quad \operatorname{Lie}(\Delta) = \mathfrak{g}.$$

Для получения плоской субримановой структуры на G нужно добавить любое левоинвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в Δ.

Как указано в работе [7], с точностью до изоморфизма, существует единственное плоское распределение на группе Гейзенберга; то же самое справедливо для плоских субримановых структур. Чтобы доказать это, выберем ортонормированный базис:

$$\Delta = \operatorname{span}(\xi_1, \xi_2), \tag{14.2}$$

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}, \ i, j = 1, 2. \tag{14.3}$$

В силу неинтегрируемости Δ,

$$\xi_3 := [\xi_1, \xi_2] \notin \Delta, \tag{14.4}$$

и $\mathfrak{g} = \operatorname{span}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Тогда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}\xi_3$, и в силу (14.1), $\mathbb{R}\xi_3$ есть центр алгебры $\mathfrak{g}$:

$$[\xi_3, \xi_1] = 0, \quad [\xi_3, \xi_2] = 0. \tag{14.5}$$

Следовательно, для любой плоской субримановой структуры на G можно выбрать базис ξ_1, ξ_2, ξ_3 в $\mathfrak{g}$ с правилами умножения (14.4), (14.5). Поэтому все плоские субримановы структуры на группе Гейзенберга изоморфны между собой; это тем более справедливо для плоских распределений.

Любой базис ξ_1, ξ_2, ξ_3 алгебры Гейзенберга, удовлетворяющий условиям (14.4), (14.5) задает градуировку:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2, \qquad \mathfrak{g}^1 = \operatorname{span}(\xi_1, \xi_2), \quad \mathfrak{g}^2 = \operatorname{span}(\xi_3).$$

Правила умножения (14.4), (14.5) в алгебре Гейзенберга $\mathfrak{g}$ схематически изображены на рис. 14.1.

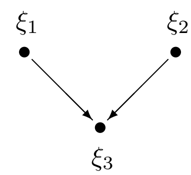


Рис. 14.1: Алгебра Гейзенберга.

Группа Гейзенберга представляется 3×3 треугольными матрицами:

$$G \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

с обычным матричным умножением. Это линейное представление дает еще одну модель группы Гейзенберга:

$$G \cong \mathbb{R}^3_{x,y,z}$$

с помощью отображения

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_{x,y,z}.$$

Тогда умножение в группе Ли $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$ дается соотношениями

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + x_1 y_2 \end{pmatrix},$$

а векторные поля

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad (14.6)$$

$$\xi_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

образуют базис алгебры Ли левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$.

Итак, мы имеем модель группы Гейзенберга как $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$, а векторные поля ξ_1, ξ_2 в (14.6) дают представление плоской субримановой структуры в этой модели т.к. равенства (14.4) и (14.5) выполняются.

Вычислим алгебры Ли симметрий $\mathrm{Sym}(\Delta)$ и $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ в этой модели.

14.2 Симметрии распределения

Теорема 14.1. *Алгебра Ли симметрий плоского распределения Δ на группе Гейзенберга параметризуется произвольными гладкими функциями от трех переменных.*

Для модели в $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$, заданной условиями (14.2), (14.6), *имеем*

$$\mathrm{Sym}(\Delta) = \left\{ X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

где

$$\begin{aligned} P &= -f_y - x f_z, \\ Q &= f_x, \\ R &= x f_x - f, \end{aligned}$$

а $f = f(x,y,z)$ есть произвольная гладкая функция.

Здесь и далее мы обозначаем через f_x, f_y, f_z частные производные функции f по x, y, z соответственно.

Функция f называется порождающей функцией симметрии X.

Замечание. Хорошо известно, что локально все контактные структуры в $\mathbb{R}^3$ (т.е. неинтегрируемые распределения ранга два в $\mathbb{R}^3$) изоморфны. Поэтому теорема 14.1 описывает симметрии ростка контактных структур в $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Возьмем произвольное гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$: $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$, где P, Q, и R суть функции переменных x, y, z. Имеем

$$[\xi_1, X] = P_x\frac{\partial}{\partial x} + Q_x\frac{\partial}{\partial y} + R_x\frac{\partial}{\partial z}, \tag{14.7}$$

$$[\xi_2, X] = E_P\frac{\partial}{\partial x} + E_Q\frac{\partial}{\partial y} + (E_R - P)\frac{\partial}{\partial z}, \tag{14.8}$$

где

$$E_P = P_y + xP_z, \quad E_Q = Q_y + xQ_z, \quad E_R = R_y + xR_z.$$

Тогда утверждение (1) предложения 13.1 принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ Q_x \\ R_x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} E_P \\ E_Q \\ E_R - P \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$$

для некоторых вещественнозначных функций $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Эта система двух векторных уравнений совместна тогда и только тогда, когда выполняется следующая система скалярных равенств:

$$R_x = xQ_x, \tag{14.9}$$

$$P = E_R - xE_Q. \tag{14.10}$$

Проинтегрируем по частям первое уравнение:

$$R = \int xQ_x\,dx = xQ - \int Q\,dx$$

и обозначим $f = \int Q\,dx$. Тогда

$$Q = f_x, \tag{14.11}$$

$$R = xQ - f = xf_x - f, \tag{14.12}$$

$$P = R_y + xR_z - x(Q_y + xQ_z) = -f_y - xf_z. \tag{14.13}$$

Поэтому система (14.9), (14.10) влечет систему (14.11)–(14.13) для некоторой функции $f = f(x, y, z)$. Следовательно, если $X \in \mathrm{Sym}(\Delta)$, то система (14.11)–(14.13) выполняется для некоторой f. Обратно, легко проверить, что для любой функции f векторное поле $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$, заданное системой (14.11)–(14.13), является симметрией распределения Δ.

Соответствие между симметриями X и из порождающими функциями f взаимно однозначно т.к. $f = xQ - R$. $\square$

14.3 Симметрии субримановой структуры

Теорема 14.2. *Симметрии плоской субримановой структуры* $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *на группе Гейзенберга образуют четырехмерную «алмазную» алгебру Ли*

$$\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle) = \mathrm{span}(X_0, X_1, X_2, X_3)$$

с правилами умножения

$$[X_0, X_1] = -X_2, \quad [X_0, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_2] = X_3. \tag{14.14}$$

Для модели в $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$*, заданной соотношениями* (14.2), (14.3), (14.6)*, имеем*

$$X_0 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z}, \tag{14.15}$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \tag{14.16}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \tag{14.17}$$

$$X_3 = -\frac{\partial}{\partial z}. \tag{14.18}$$

Замечание. (1) Правила умножения (14.14) в алгебре $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ схематически представлены на рис. 14.2, объясняющем название «алмазная» этой алгебры Ли.

(2) В терминах теоремы 14.1, симметрии $X_0, \ldots, X_3$ имеют следующие порождающие функции соответственно:

$$f_0 = \frac{x^2+y^2}{2}, \quad f_1 = -y, \quad f_2 = x, \quad f_3 = 1.$$

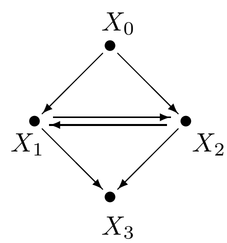


Рис. 14.2: Алгебра $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, случай Гейзенберга.

Симметрии X_1, X_2, X_3 суть левые сдвиги на группе Гейзенберга G (ср. с рис. 14.1), а X_0 есть вращение в G — симметрия, сохраняющая единичный элемент в G.

Доказательство. В силу соотношений (14.7), (14.8), утверждение (2) предложения 13.1 принимает форму

$$\begin{pmatrix} P_x \\ Q_x \\ R_x \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} E_P \\ E_Q \\ E_R - P \end{pmatrix} = -\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

для некоторой вещественнозначной функции β. Эта векторная система влечет следующую:

$$R_x = xQ_x, \tag{14.19}$$
$$P = E_R, \tag{14.20}$$
$$P_x = 0, \tag{14.21}$$
$$E_Q = 0, \tag{14.22}$$
$$E_P = -Q_x. \tag{14.23}$$

Как в теореме 14.1, возьмем $f = f(x,y,z) = \int Q\,dx$. Это, вместе с равенствами (14.19), (14.20), означает, что

$$Q = f_x, \tag{14.24}$$
$$R = xQ - f = xf_x - f, \tag{14.25}$$
$$P = R_y + xR_z = xf_{xy} - f_y + x^2 f_{xz} - xf_z. \tag{14.26}$$

Из равенств (14.26), (14.21), (14.24), (14.22) следует, что

$$\begin{aligned} P_x &= x f_{xxy} + x f_{xz} + x^2 f_{xxz} - f_z = 0, \\ E_Q &= f_{xy} + x f_{xz} = 0. \end{aligned} \tag{14.27}$$

Поэтому

$$P_x - x(E_Q)_x = -f_z = 0,$$

откуда

$$f = f(x, y).$$

Тогда равенство (14.27) влечет $f_{xy} = 0$; это означает, что

$$f = a(x) + b(y).$$

Из (14.26)получаем $P = -b_y$, откуда $E_P = P_y + xP_z = -b_{yy}$. С другой стороны, равенство (14.24) дает $Q = a_x$. Теперь (14.23) принимает форму $-b_{yy} = -a_{xx}$. Но правая часть этого равенства зависит от y, в то время как левая зависит от x, это значит, что они обе постоянны. Обозначая эту константу через $-c$, получаем

$$\begin{aligned} b &= \frac{c}{2} y^2 + dy + e, \\ a &= \frac{c}{2} x^2 + gx \end{aligned}$$

для некоторых $c, d, e, g \in \mathbb{R}$. Отсюда

$$f = \frac{c}{2}(x^2 + y^2) + dy + gx + e$$

и

$$X = (-cy - d)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + g)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{c}{2}(x^2 - y^2) - dy - e\right)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{14.28}$$

Подытоживая приведенные выше вычисления, заключаем, что если векторное поле X есть симметрия нашей субримановой структуры, то оно имеет вид (14.28). Обратное утверждение проверяется непосредственным вычислением. Поэтому

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle) = \\ &\left\{(-cy - d)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + g)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{c}{2}(x^2 - y^2) - dy - e\right)\frac{\partial}{\partial z} \mid c, d, e, g \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим базис 4-мерной алгебры Ли $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

$$\begin{aligned} c = 1, d = e = g = 0 \quad &\Rightarrow \quad X_0 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z}, \\ c = 0, d = -1, e = g = 0 \quad &\Rightarrow \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \\ c = d = e = 0, g = 1 \quad &\Rightarrow \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \\ c = d = 0, e = 1, g = 0 \quad &\Rightarrow \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ненулевые скобки между базисными векторами суть в точности коммутационные соотношения в «алмазной» алгебре Ли, см. (14.14). □

Глава 15

Случай Энгеля

15.1 Алгебра Энгеля и группа Энгеля

Пусть $\mathfrak{g}$ есть алгебра Энгеля, т.е. (единственная) четырехмерная нильпотентная алгебра Ли порядка три, а G — группа Энгеля, т.е. соответствующая связная односвязная группа Ли. Существует базис ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 в алгебре $\mathfrak{g}$ с ненулевыми скобками

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, \qquad [\xi_2, \xi_3] = \xi_4.$$

Умножение в алгебре Энгеля в этом базисе схематически представлено диаграммой на рис. 15.1.

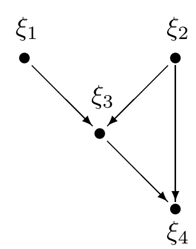


Рис. 15.1: Алгебра Энгеля.

Алгебра Энгеля градуирована:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \mathfrak{g}^3,$$

где

$$\mathfrak{g}^1 = \mathrm{span}(\xi_1, \xi_2), \quad \mathfrak{g}^2 = \mathrm{span}(\xi_3), \quad \mathfrak{g}^3 = \mathrm{span}(\xi_4).$$

15.2 Плоское распределение и плоская субриманова структура

Как показано в работе [67], все плоские распределения на группе Энгеля изоморфны. Мы докажем что, более того, все плоские субримановы структуры на группе Энгеля также изоморфны.

Пусть $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ есть плоская субриманова структура на группе Энгеля G, соответствующая некоторой градуировке алгебры $\mathfrak{g}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \mathfrak{g}^3,\\
&\Delta = \mathfrak{g}^1, \quad \dim \mathfrak{g}^1 = 2,\\
&\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1], \quad \dim \mathfrak{g}^2 = 1,\\
&\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2], \quad \dim \mathfrak{g}^3 = 1
\end{aligned}
$$

(естественно, эти однородные компоненты $\mathfrak{g}^i$ не обязаны совпадать с компонентами из предыдущего раздела, но их количество и размерности очевидно те же).

Выберем любой ненулевой вектор

$$\xi_3 \in \mathfrak{g}^2.$$

Оператор

$$\operatorname{ad} \xi_3 \ : \ \mathfrak{g}^1 \to \mathfrak{g}^3$$

имеет одномерный образ, поэтому и одномерное ядро. Можно выбрать такой ортонормированный репер в $\mathfrak{g}^1$, что

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{g}^1 = \operatorname{span}(\xi_1, \xi_2),\\
&\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}, \ i, j = 1, 2,\\
&\ker(\operatorname{ad} \xi_3)|_{\mathfrak{g}^1} = \operatorname{span}(\xi_1).
\end{aligned} \tag{15.1}
$$

Более того,

$$[\xi_1, \xi_2] = k\xi_3, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Теперь переобозначим $k\xi_3$ как ξ_3 и получим

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3. \tag{15.2}$$

Наконец, вектор

$$\xi_4 = [\xi_2, \xi_3] \tag{15.3}$$

порождает однородную компоненту $\mathfrak{g}^3$. Равенство (15.1) и включение $\xi_4 \in \mathfrak{g}^3$ означают, что все скобки Ли между векторными полями ξ_1, ξ_2, ξ_3, и ξ_4 равны нулю кроме (15.2) и (15.3). Следовательно, любая плоская субриманова структура $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ на группе Энгеля имеет ортонормированный базис с правилами умножения (15.2) и (15.3). (Будем далее называть такой базис *стандартным* левоинвариантным базисом на группе Энгеля.) Это доказывает единственность плоских субримановых структур с точностью до изоморфизма. Отсюда следует и единственность плоских распределений.

Поэтому для вычисления алгебр Ли симметрий $\mathrm{Sym}(\Delta)$ и $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ можно использовать любые конкретные плоские распределение и субриманову структуру. Мы сделаем это в модели, описанной далее в разделе 15.3.

Отметим, что векторное поле ξ_1, которое однозначно, с точностью до ненулевого множителя, определяется условием

$$(\mathrm{ad}\,\xi_1)\Delta^2 \subset \Delta^2$$

называется *каноническим векторным полем* распределения Δ.

15.3 Модель в $\mathbb{R}^4$

Четырехмерное пространство $\mathbb{R}^4_{x,y,z,u}$ есть группа Энгеля с правилами умножения

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + x_1 y_2 \\ u_1 + u_2 + y_1 z_2 + x_1 y_1 y_2 + x_1 y_2^2/2 \end{pmatrix}.$$

Тогда векторные поля

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{15.4}$$

$$\xi_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} + xy\frac{\partial}{\partial u}, \tag{15.5}$$

$$\xi_3 = [\xi_1, \xi_2] = \frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\xi_4 = [\xi_2, \xi_3] = \frac{\partial}{\partial u}$$

образуют стандартный левоинвариантный репер на $\mathbb{R}^4_{x,y,z,u}$.

Поэтому имеем следующую модель плоского распределения Δ и субримановой структуры $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ на группе Энгеля в $\mathbb{R}^4_{x,y,z,u}$:

$$\Delta = \mathrm{span}(\xi_1, \xi_2), \tag{15.6}$$

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, \tag{15.7}$$

Вычислим алгебры симметрий $\mathrm{Sym}(\Delta)$ и $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ в этой модели.

15.3.1 Симметрии распределения

Теорема 15.1. *Алгебра Ли симметрий плоского распределения Δ на группе Энгеля параметризована функциями 4 переменных, постоянных вдоль канонического векторного поля.*

Для модели в $\mathbb{R}^4_{x,y,z,u}$, *заданной соотношениями* (15.4)–(15.6), *имеем*

$$\mathrm{Sym}(\Delta) = \left\{ X = S\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial y} + Q\frac{\partial}{\partial z} + R\frac{\partial}{\partial u} \right\},$$

где

$$S = f_{yy} + 2xf_{yz} + 2xyf_{yu} + xf_u + x^2 f_{zz} + 2x^2 y f_{zu} + x^2y^2 f_{uu}, \tag{15.8}$$
$$P = -f_z - yf_u, \tag{15.9}$$
$$Q = f_y, \tag{15.10}$$
$$R = yf_y - f, \tag{15.11}$$

и

$$f = f(y, z, u)$$

есть произвольная функция переменных y, z, u.

Замечание. Известно, что локально все энгелевы структуры в $\mathbb{R}^4$ (т.е. распределения максимального роста ранга два в $\mathbb{R}^4$) изоморфны. Поэтому теорема 15.1 описывает симметрии ростка энгелевой структуры в $\mathbb{R}^4$. Мы вернемся к этому вопросу в разделе 15.4.

Доказательство. Возьмем произвольное гладкое векторное поле $X = S\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial y} + Q\frac{\partial}{\partial z} + R\frac{\partial}{\partial u} \in \mathrm{Vec}(\mathbb{R}^4)$. Ввиду равенств

$$[\xi_1, X] = S_x\frac{\partial}{\partial x} + P_x\frac{\partial}{\partial y} + Q_x\frac{\partial}{\partial z} + R_x\frac{\partial}{\partial u},$$
$$[\xi_2, X] = E_S\frac{\partial}{\partial x} + E_P\frac{\partial}{\partial y} + (E_Q - S)\frac{\partial}{\partial z} + (E_R - yS - xP)\frac{\partial}{\partial u},$$

где

$$E_S = \xi_2 S = S_y + xS_z + xyS_u, \quad E_P = \xi_2 P = P_y + xP_z + xyP_u,$$
$$E_Q = \xi_2 Q = Q_y + xQ_z + xyQ_u, \quad E_R = \xi_2 R = R_y + xR_z + xyR_u,$$

и в силу предложения 13.1, векторное поле X является симметрией распределения Δ тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} S_x \\ P_x \\ Q_x \\ R_x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ xy \end{pmatrix}, \tag{15.12}$$

$$\begin{pmatrix} E_S \\ E_P \\ E_Q - S \\ E_R - yS - xP \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ xy \end{pmatrix} \tag{15.13}$$

для некоторых гладких вещественнозначных функций $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Эти равенства для $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ разрешимы тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&Q_x = xP_x,\\
&R_x = xyP_x\\
&E_Q - S = E_P x,\\
&E_R - yS - xP = E_P xy,
\end{aligned}$$

что эквивалентно

$$Q_x = xP_x, \tag{15.14}$$
$$R_x = yQ_x \tag{15.15}$$
$$S = E_Q - xE_P, \tag{15.16}$$
$$E_Q y = E_R - xP. \tag{15.17}$$

Равенство (15.15) дает

$$yQ_x = R_x \iff \int yQ_x\,dx = \int R_x\,dx \iff yQ = R + f,$$

где

$$f = f(y, z, u)$$

есть некоторая гладкая функция переменных y, z, u. Поэтому

$$R = yQ - f. \tag{15.18}$$

Тогда из равенства (15.17) получаем

$$P = \frac{1}{x}(E_R - yE_Q) = \frac{1}{x}(Q - (f_y + xf_z + xyf_u)). \tag{15.19}$$

Наконец, равенство (15.14) принимает форму

$$Q_x = \frac{1}{x}(Q_x x - Q + f_y),$$

то есть

$$Q = f_y. \tag{15.20}$$

Это означает, с учетом (15.18), что

$$R = yf_y - f. \tag{15.21}$$

Теперь из (15.19) получаем

$$P = -f_z - yf_u, \tag{15.22}$$

а из (15.16)

$$S = f_{yy} + 2xf_{yz} + 2xyf_{yu} + xf_u + x^2 f_{zz} + 2x^2 y f_{zu} + x^2 y^2 f_{uu}. \tag{15.23}$$

Приведенные выше вычисления показывают, что если векторное поле $X = S\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial y} + Q\frac{\partial}{\partial z} + R\frac{\partial}{\partial u}$ является симметрией распределения Δ, то его компоненты S, P, Q, R удовлетворяют равенствам (15.23), (15.22), (15.20), (15.21) для некоторой функции $f = f(y, z, u)$.

Непосредственное вычисление показывает, что для любой гладкой функции $f = f(y, z, u)$, векторное поле $X = S\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial y} + Q\frac{\partial}{\partial z} + R\frac{\partial}{\partial u}$ с компонентами S, P, Q, R, определяемыми равенствами (15.23), (15.22), (15.20), (15.21) принадлежит алгебре $\mathrm{Sym}(\Delta)$.

Соответствие между симметриями X и порождающими функциями f взаимно однозначно так как $f = yQ - R$. □

15.3.2 Симметрии субримановой структуры

Теорема 15.2. *Алгебра Ли симметрий плоской субримановой структуры* $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *на группе Энгеля есть алгебра Энгеля.*

Для модели в $\mathbb{R}^4_{x,y,z,u}$, *определенной соотношениями* (15.4)–(15.7), *имеем*

$$\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle) = \mathrm{span}(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

где

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}y^2\frac{\partial}{\partial u},\\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial u},\\
X_3 &= -\frac{\partial}{\partial z},\\
X_4 &= \frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}$$

Замечание. Ненулевые скобки Ли в алгебре Ли $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ схематически представлены на рис. 15.2, сравните со схемой для алгебры Энгеля на рис. 15.1.

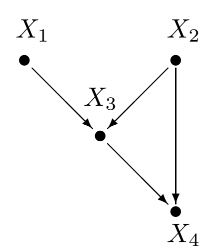


Рис. 15.2: Алгебра $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, случай Энгеля.

Доказательство. Если векторное поле $X = S\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial y} + Q\frac{\partial}{\partial z} + R\frac{\partial}{\partial u} \in \mathrm{Vec}(\mathbb{R}^4)$ есть симметрия субримановой структуры $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, то должны выполняться равенства (15.12), (15.13), где

$$\alpha = \delta = 0, \quad \beta = -\gamma.$$

Поэтому S, P, Q, R удовлетворяют как старым уравнениям (15.14)–(15.17), означающим, что X есть симметрия распределения Δ, так и следующим новым равенствам, означающим, что X сохраняет также и скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$S_x = 0, \tag{15.24}$$

$$E_S = -P_x, \tag{15.25}$$

$$E_P = 0. \tag{15.26}$$

Поэтому, по теореме 15.1, для компонент S, P, Q, R должны выполняться равенства (15.8)–(15.11).

Из равенств (15.8) и (15.24) получаем

$$S_x = 2f_{yz} + 2yf_{yu} + f_u + 2xf_{zz} + 4xyf_{zu} + 2xy^2 f_{uu} = 0.$$

Но f не зависит от x, поэтому разложим предыдущее равенство по степеням x:

$$2f_{yz} + f_u + 2yf_{yu} = 0, \tag{15.27}$$

$$2f_{zz} + 4yf_{zu} + 2y^2 f_{uu} = 0. \tag{15.28}$$

Аналогично равенства (15.10) и (15.26) дают

$$f_{zy} + f_u + yf_{yu} + xf_{zz} + 2xyf_{zu} + xy^2 f_{uu} = 0,$$

что мы также раскладываем по степеням x:

$$f_{zy} + f_u + yf_{yu} = 0, \tag{15.29}$$

$$f_{zz} + 2yf_{zu} + y^2 f_{uu} = 0. \tag{15.30}$$

Вычитая равенство (15.27) из удвоенного равенства (15.29), получаем

$$f_u = 0,$$

то есть

$$f = f(y, z).$$

Теперь равенства (15.29), (15.30) принимают форму

$$f_{yz} = 0, \tag{15.31}$$

$$f_{zz} = 0. \tag{15.32}$$

Тогда условие (15.31) эквивалентно равенству

$$f = a(y) + b(z),$$

а равенство (15.32) дает

$$b(z) = bz + c, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$f = a(y) + bz + c. \tag{15.33}$$

Наконец, из (15.8) и (15.33) получаем

$$S = a''(y),$$

а из (15.9)

$$P = -b.$$

Тогда последнее пока не использованное дополнительное равенство (15.25) дает

$$a'''(y) = 0,$$

поэтому

$$a(y) = ay^2 + dy + \mathrm{const}, \quad a, d \in \mathbb{R}.$$

откуда

$$f = ay^2 + dy + bz + c, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Теперь находим компоненты S, P, Q, R из (15.8)–(15.11) и получаем, что любое векторное поле $X \in \mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ должно иметь вид

$$X = 2a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y} + (2ay + d)\frac{\partial}{\partial z} + (ay^2 - bz - c)\frac{\partial}{\partial u}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \tag{15.34}$$

Непосредственное вычисление показывает, что для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ векторное поле X, заданное условием (15.34), является симметрией субримановой структуры $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Поэтому алгебра Ли $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ четырехмерна. Вычислим ее базис:

$$\begin{aligned}
a = \frac{1}{2}, b = c = d = 0 \quad &\Rightarrow \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}y^2\frac{\partial}{\partial u},\\
a = 0, b = -1, c = d = 0 \quad &\Rightarrow \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial u},\\
a = b = c = 0, d = -1 \quad &\Rightarrow \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial z},\\
a = b = 0, c = -1, d = 0 \quad &\Rightarrow \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}$$

Ненулевые скобки между базисными векторами суть следующие:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_4.$$

Следовательно, $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle) = \mathrm{span}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ есть алгебра Энгеля. $\square$

15.4 Энгелева структура и трансверсальная контактная структура

Энгелева структура на четырехмерном многообразии M_4 есть распределение ранга два максимального роста Δ на M_4, т.е. распределение ранга два Δ с вектором роста $(2, 3, 4)$, см., например [67].

Одно из векторных полей, допустимых для распределения Энгеля Δ, а именно ξ_1, удовлетворяет свойству

$$(\operatorname{ad} \xi_1)\Delta^2 \subset \Delta^2.$$

Это свойство определяет векторное поле ξ_1 однозначно с точностью до ненулевого множителя. Такое векторное поле называется *каноническим векторным полем* распределения Δ.

Если задано распределение Энгеля Δ на четырехмерном многообразии M_4, его каноническое векторное поле ξ_1, и трехмерное подмногообразие $N_3 \subset M_4$, трансверсальное полю ξ_1, то распределение

$$D = \Delta^2 \cap TN_3$$

задает контактную структуру на N_3 (см. [67]), называемую *трансверсальной контактной структурой* .

Локально все энгелевы структуры изоморфны (см. [60], [67]); в частности, росток любой энгелевой структуры моделируется на модели

$$\Delta = \operatorname{span}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1, \xi_2 \in \operatorname{Vec}(\mathbb{R}^4_{x,y,z,u})$$

рассмотренной в разделе 15.3. Это означает, что алгебра Ли симметрий плоского распределения Энгеля, вычисленная в теореме 15.1, есть алгебра Ли симметрий ростка произвольного распределения Энгеля.

С другой стороны, все контактные структуры также локально изоморфны (теорема Дарбу). В частности, любая контактная структура на трехмерном многообразии локально изоморфна плоскому распределению ранга два на группе Гейзенберга, см. раздел 14.1, и алгебра Ли симметрий, вычисленная в теореме 14.1 является алгеброй Ли симметрий ростка контактной структуры на трехмерном многообразии.

Поэтому, сравнивая теоремы 14.1 и 15.1, получаем следующее утверждение.

Теорема 15.3. *Пусть Δ есть росток распределения Энгеля на четырехмерном многообразии M_4 с каноническим векторным полем ξ_1, и пусть D есть росток трансверсальной контактной структуры на трехмерном многообразии $N_3 \subset M_4$, трансверсальном полю ξ_1. Тогда имеется взаимно однозначное соответствие между:*

1) *симметриями распределения Δ;*

2) *симметриями распределения D;*

3) *функциями $f : M_4 \to \mathbb{R}$, постоянными вдоль канонического векторного поля ξ_1.*

Глава 16

Случай Картана

Распределения ранга два в пятимерном пространстве изучались Э. Картаном [61], этот факт дал название случаю, рассматриваемому в данной главе.

16.1 Алгебра Ли и группа Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ есть пятимерная нильпотентная алгебра Ли порядка три с правилами умножения в некотором базисе

$$\mathfrak{g} = \operatorname{span}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$$

следующего вида:

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, \quad [\xi_1, \xi_3] = \xi_4, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_5$$

(все остальные скобки равны нулю или вычисляются по кососимметричности). Будем называть такой базис $\xi_1, \ldots, \xi_5$ *стандартным* левоинвариантным базисом на $\mathfrak{g}$. Правила умножения в стандартном базисе в $\mathfrak{g}$ схематически представлены на рис. 16.1.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ градуирована:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \mathfrak{g}^3,$$

где

$$\mathfrak{g}^1 = \operatorname{span}(\xi_1, \xi_2), \quad \mathfrak{g}^2 = \operatorname{span}(\xi_3), \quad \mathfrak{g}^3 = \operatorname{span}(\xi_4, \xi_5).$$

Обозначим через G односвязную группу Ли, соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

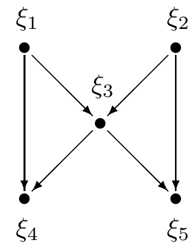


Рис. 16.1: Алгебра Ли $\mathfrak{g}$, случай Картана.

16.2 Плоское распределение и субриманова структура

Мы утверждаем, что любое плоское распределение и плоская структура на группе Ли G изоморфны следующим распределению и структуре, определенным с помощью стандартного базиса в $\mathfrak{g}$:

$$\Delta = \operatorname{span}(\xi_1, \xi_2), \qquad \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}, \; i, j = 1, 2. \tag{16.1}$$

Как и раньше, мы докажем изоморфность субримановых структур, из которой будет следовать изоморфность для распределений. Возьмем любую плоскую субриманову структуру $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ на группе Ли G, соответствующую градуировке алгебры $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \mathfrak{g}^3,\\
&\Delta = \mathfrak{g}^1, \quad \dim \mathfrak{g}^1 = 2,\\
&\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1], \quad \dim \mathfrak{g}^2 = 1,\\
&\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2], \quad \dim \mathfrak{g}^3 = 2
\end{aligned}$$

(как и в случае Энгеля, эти однородные компоненты $\mathfrak{g}^i$ не обязаны совпадать с компонентами из предыдущего раздела, но их число и размерности очевидно те же).

Выберем любой ортонормированный базис как в (16.1). Тогда вектор

$$\xi_3 = [\xi_1, \xi_2]$$

порождает $\mathfrak{g}^2$, а векторы

$$\xi_4 = [\xi_1, \xi_3], \qquad \xi_5 = [\xi_2, \xi_3]$$

порождают однородную компоненту $\mathfrak{g}^3$. Поэтому ортонормированный базис ξ_1, ξ_2 субримановой структуры $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ порождает стандартный базис в $\mathfrak{g}$. Это доказывает единственность плоских субримановых структур на группе Ли G с точностью до изоморфизма; плоские распределения тем более изоморфны.

16.3 Модель Картана

В этом разделе мы опишем локальную модель плоского распределения на группе Ли G, принадлежащую Э. Картану.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2$ есть (единственная) некомпактная вещественная форма простой комплексной 14-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$, а G — соответствующая связная односвязная группа Ли. Будем рассматривать $\mathfrak{g}$ как алгебру Ли левоинвариантных векторных полей на G, и выберем такой базис

$$\mathfrak{g} = \mathrm{span}(Z_1, \dots, Z_{14}),$$

что Z_{13} и Z_{14} порождают (двумерную) подалгебру Картана в $\mathfrak{g}$, а $Z_1, \dots, Z_{12}$ соответствуют корневым векторам, см. рис. 16.2. (Сравните с описанием линейного представления алгебры $\mathfrak{g}_2$ в главе 18 и рис. 18.1.)

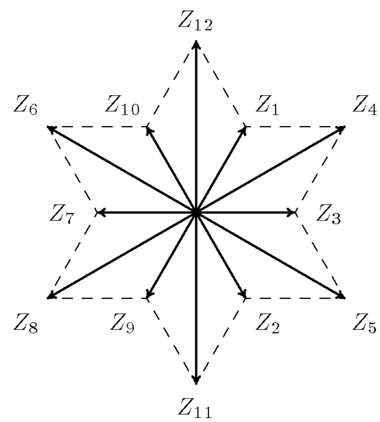


Рис. 16.2: Корневые векторы алгебры $\mathfrak{g}$, случай Картана.

Векторные поля Z_1, Z_2 порождают левоинвариантное 2-распределение

$$D = \mathrm{span}(Z_1, Z_2)$$

на G и 5-мерную нильпотентную алгебру Ли

$$\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(Z_1, Z_2) = \mathrm{span}(Z_1, \dots, Z_5),$$

что очевидно из схемы корневых векторов на рис. 16.2. Этот же рисунок показывает, что линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, трансверсальное алгебре $\mathfrak{n}$

$$\mathfrak{h} = \operatorname{span}(Z_6, \dots, Z_{14})$$

оказывается подалгеброй, удовлетворяющей свойству

$$\operatorname{ad} \mathfrak{h}(D) \subset D + \mathfrak{h}. \tag{16.2}$$

То есть подалгебра $\mathfrak{h}$ сохраняет распределение D по модулю самой подалгебры $\mathfrak{h}$; следовательно, можно факторизовать по $\mathfrak{h}$.

Пусть H есть локальная подгруппа в G, соответствующая подалгебре Ли $\mathfrak{h}$, и

$$M = G/H = \{\, xH \mid x \in G \,\}$$

есть пространство левых смежных классов, гладкое 5-мерное многообразие. Рассмотрим соответствующую проекцию и ее дифференциал

$$\pi \ : \ G \to G/H = M, \quad \pi \ : \ x \mapsto xH, \qquad \pi_* \ : \ \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

и положим

$$\Delta = \pi_*(D).$$

В силу (16.2), Δ есть корректно определенное 2-распределение на M.

Выберем базис векторных полей в Δ следующим образом. Пусть N есть локальная подгруппа в G, соответствующая нильпотентной подалгебре $\mathfrak{n}$. Так как

$$\mathfrak{n} \cap \mathfrak{h} = \{0\},$$

ограничение

$$\pi|_N \ : \ N \to M$$

есть диффеоморфизм. Обозначим обратный диффеоморфизм через

$$\tau \ : \ M \to N, \qquad \tau = (\pi|_N)^{-1}$$

и зададим векторные поля на M следующим образом:

$$\xi_i(q) = \pi_* Z_i(x), \qquad x = \tau(q), \quad i = 1, 2.$$

Во-первых,

$$\Delta_q = \operatorname{span}(\xi_1(q), \xi_2(q)), \quad q \in M.$$

А во-вторых, векторные поля ξ_i, $i = 1, 2$, являются π-связанными с векторными полями Z_i, $i = 1, 2$ соответственно. Следовательно,

$$\operatorname{Lie}(\xi_1, \xi_2) \cong \operatorname{Lie}(Z_1, Z_2) = \mathfrak{n}.$$

Подводя итоги, получаем, что $\Delta \subset TM$ есть 2-распределение на 5-мерном многообразии M, а допустимые векторные поля распределения D образуют 5-мерную нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{n}$. Поэтому распределение

Δ есть (локальная) модель плоского (2,5)-распределения. Будем называть ее *моделью Картана.*

Вычислим некоторые из симметрий распределения Δ в модели Картана.

Левоинвариантное распределение D сохраняется всеми левыми сдвигами на группе Ли G. Поток *право*инвариантного векторного поля на G реализуется *левыми* сдвигами на G, поэтому все правоинвариантные векторные поля на G суть инфинитезимальные симметрии распределения D:

$$\mathfrak{g}_r \subset \operatorname{Sym}(D)$$

(мы обозначаем через $\mathfrak{g}_r$ алгебру Ли правоинвариантных векторных полей на G).

Спроецируем эти симметрии на M. Действие группы G левыми сдвигами естественно проецируется с G на ее однородное пространство $M = G/H$, поэтому правоинвариантные векторные поля на G корректно проецируются в векторные поля

$$\pi_*(\mathfrak{g}_r) \subset \operatorname{Vec}(M).$$

Левые сдвиги группы G на M сохраняют распределение Δ, поэтому

$$\pi_*(\mathfrak{g}_r) \subset \operatorname{Sym}(\Delta).$$

Чтобы показать, что проекция π_* не переводит никакую симметрию из $\mathfrak{g}_r$ в ноль, предположим обратное:

$$\exists\ v \in \mathfrak{g}_r\ :\ v(x) \in \ker \pi_{*x} \quad \forall x \in G.$$

Применяя это включение в единичном элементе $\mathrm{Id} \in G$, видим, что

$$v \in \mathfrak{h}_r$$

(обозначаем через $\mathfrak{h}_r$ алгебру Ли всех правоинвариантных векторных полей на G, касающихся подгруппы H в единичном элементе Id). С другой стороны,

$$\ker \pi_{*x} = \mathfrak{h}(x)$$

(в правой части стоит векторное пространство, состоящее из значений левоинвариантных векторных полей из $\mathfrak{h}$ в точке $x \in G$.) Следовательно,

$$v \in \mathfrak{h}_r \cap \mathfrak{h}.$$

Но

$$\mathfrak{h}_r \cap \mathfrak{h} = \{0\}$$

так как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ простая. Это означает, что $v = 0$. Поэтому

$$\dim \pi_*(\mathfrak{g}_r) = 14,$$

и

$$\pi_*(\mathfrak{g}_r) \cong \mathfrak{g}_r \cong \mathfrak{g} \subset \operatorname{Sym}(\Delta). \tag{16.3}$$

То есть в модели Картана получаем, что локально плоское (2,5)-распределение имеет 14-мерную алгебру симметрий, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{g}_2$. В разделе 16.4.1 мы покажем, что включение (16.3) в действительности является равенством.

16.4 Модель в $\mathbb{R}^5$

Пятимерное пространство $\mathbb{R}^5_{x,y,z,u,v}$ с правилом умножения

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + x_1 y_2 \\ u_1 + u_2 + z_1 y_2 + x_1 y_2^2/2 \\ v_1 + v_2 + 2x_1 z_2 + x_1^2 y_2 \end{pmatrix}$$

становится пятимерной нильпотентной группой Ли G, описанной в разделе 16.1 со стандартным левоинвариантным базисом

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{16.4}$$

$$\xi_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial u} + x^2\frac{\partial}{\partial v}, \tag{16.5}$$

$$\xi_3 = [\xi_1, \xi_2] = \frac{\partial}{\partial z} + 2x\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\xi_4 = [\xi_1, \xi_3] = 2\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\xi_5 = [\xi_2, \xi_3] = -\frac{\partial}{\partial u}.$$

Поэтому можно использовать соответствующую модель плоского распределения и субримановой структуры на группе G:

$$\Delta = \operatorname{span}(\xi_1, \xi_2), \tag{16.6}$$

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}, \ i, j = 1, 2. \tag{16.7}$$

Вычислим симметрии $\operatorname{Sym}(\Delta)$ и $\operatorname{Sym}(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ в этой модели.

16.4.1 Симметрии распределения

Теорема 16.1. *Алгебра Ли симметрий плоского распределения Δ на пятимерной нильпотентной группе Ли G, описанной в разделе* 16.1*, есть* 14*-мерная алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ — (единственная) некомпактная вещественная форма комплексной исключительной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$.*

Для модели Δ в $\mathbb{R}^5$, заданной соотношениями (16.4)–(16.6)*, имеем*

$$\operatorname{Sym}(\Delta) = \operatorname{span}(Y_1, \dots, Y_{14}),$$

где

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{36}\left(2\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial z}+y^2\frac{\partial}{\partial u}+4z\frac{\partial}{\partial v}\right),\\
Y_2 &= -3\frac{\partial}{\partial y},\\
Y_3 &= \frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial z}+y\frac{\partial}{\partial u}\right),\\
Y_4 &= -\frac{1}{324}\frac{\partial}{\partial v},\\
Y_5 &= \frac{1}{12}\frac{\partial}{\partial u},\\
Y_6 &= \frac{1}{3}\Bigg((6x^2y^2-12xyz+24z^2-18yv)\frac{\partial}{\partial x}+(6xy^3-24zy^2+36yu)\frac{\partial}{\partial y}\\
&\qquad +(3x^2y^3-12yz^2-9y^2v+36zu)\frac{\partial}{\partial z}\\
&\qquad +(6xy^3z-12y^2z^2-3y^3v+36u^2)\frac{\partial}{\partial u}\\
&\qquad +(2x^3y^3-36yzv+16z^3+36uv)\frac{\partial}{\partial v}\Bigg),\\
Y_7 &= 3\Bigg((-4x^2y+4xz+6v)\frac{\partial}{\partial x}+(-6xy^2+16yz-12u)\frac{\partial}{\partial y}\\
&\qquad +(-3x^2y^2+4z^2+6vy)\frac{\partial}{\partial z}+(-6xy^2z+8yz^2+3y^2v)\frac{\partial}{\partial u}\\
&\qquad +(-2x^3y^2+12zv)\frac{\partial}{\partial v}\Bigg),\\
Y_8 &= 36\Bigg((6x^2z-9xv)\frac{\partial}{\partial x}+(18xu-12z^2)\frac{\partial}{\partial y}+(9x^2u-9zv)\frac{\partial}{\partial z}\\
&\qquad +(18xzu-8z^3-9uv)\frac{\partial}{\partial u}+(6x^3u-9v^2)\frac{\partial}{\partial v}\Bigg),\\
Y_9 &= 9\Bigg(2x^2\frac{\partial}{\partial x}+(6xy-8z)\frac{\partial}{\partial y}+(3x^2y-3v)\frac{\partial}{\partial z}\\
&\qquad +(6xyz-4z^2-3yv)\frac{\partial}{\partial u}+2x^3y\frac{\partial}{\partial v}\Bigg),\\
Y_{10} &= \frac{1}{3}\left((xy-4z)\frac{\partial}{\partial x}-y^2\frac{\partial}{\partial y}-(zy+3u)\frac{\partial}{\partial z}-3yu\frac{\partial}{\partial u}-4z^2\frac{\partial}{\partial v}\right),\\
Y_{11} &= -9\left(6x\frac{\partial}{\partial y}+3x^2\frac{\partial}{\partial z}+(6xz-3v)\frac{\partial}{\partial u}+2x^3\frac{\partial}{\partial v}\right),\\
Y_{12} &= \frac{1}{324}\left(6y\frac{\partial}{\partial x}+3y^2\frac{\partial}{\partial z}+y^3\frac{\partial}{\partial u}+(12yz-12u)\frac{\partial}{\partial v}\right),\\
Y_{13} &= -x\frac{\partial}{\partial x}-z\frac{\partial}{\partial z}-u\frac{\partial}{\partial u}-2v\frac{\partial}{\partial v},\\
Y_{14} &= -x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}.
\end{aligned}
$$

Следствие 16.1. *Векторные поля* $Y_1, \dots, Y_{14} \in \mathrm{Vec}(\mathbb{R}^5)$ *определенные в теореме* 16.1*, задают точное представление алгебры Ли* $\mathfrak{g}_2$.

Доказательство теоремы 16.1 сводится к следующим двум независимым леммам.

Лемма 16.1. $\mathrm{Sym}(\Delta) = \mathrm{span}(Y_1, \dots, Y_{14})$.

Лемма 16.2. $\mathrm{span}(Y_1, \dots, Y_{14}) \cong \mathfrak{g}_2$.

Докажем лемму 16.1.

Доказательство. Возьмем произвольное гладкое векторное поле

$$Y = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z} + S\frac{\partial}{\partial u} + T\frac{\partial}{\partial v} \in \mathrm{Vec}(\mathbb{R}^5),$$

вычислим скобки

$$[\xi_1, Y] = P_x\frac{\partial}{\partial x} + Q_x\frac{\partial}{\partial y} + R_x\frac{\partial}{\partial z} + S_x\frac{\partial}{\partial u} + T_x\frac{\partial}{\partial v},$$

$$[\xi_2, Y] = E_P\frac{\partial}{\partial x} + E_Q\frac{\partial}{\partial y} + (E_R - P)\frac{\partial}{\partial z} + (E_S - R)\frac{\partial}{\partial u} + (E_T - 2xP)\frac{\partial}{\partial v},$$

где

$$E_P = \xi_2 P = P_y + xP_z + zP_u + x^2 P_v, \tag{16.8}$$

$$E_Q = \xi_2 Q = Q_y + xQ_z + zQ_u + x^2 Q_v, \tag{16.9}$$

$$E_R = \xi_2 R = R_y + xR_z + zR_u + x^2 R_v,$$

$$E_S = \xi_2 S = S_y + xS_z + zS_u + x^2 S_v,$$

$$E_T = \xi_2 T = T_y + xT_z + zT_u + x^2 T_v.$$

По предложению 13.1, векторное поле Y является симметрией распределения Δ тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} P_x \\ Q_x \\ R_x \\ S_x \\ T_x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ z \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_P \\ E_Q \\ E_R - P \\ E_S - R \\ E_T - 2xP \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ z \\ x^2 \end{pmatrix} \tag{16.10}$$

для некоторых гладких вещественнозначных функций $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Эти векторные уравнения разрешимы относительно $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:

$$R_x = xQ_x, \tag{16.11}$$

$$S_x = zQ_x, \tag{16.12}$$

$$T_x = x^2 Q_x \tag{16.13}$$

$$P = E_R - xE_Q, \tag{16.14}$$

$$R = E_S - zE_Q, \tag{16.15}$$

$$x^2 E_Q - 2xE_R + E_T = 0. \tag{16.16}$$

Равенство (16.12) очевидно равносильно равенству

$$S = zQ + \varphi \tag{16.17}$$

для некоторой гладкой функции

$$\varphi = \varphi(y, z, u, v).$$

Вычислим R в терминах Q и φ:

$$\begin{aligned} E_S &= \xi_2 S = \xi_2(zQ + \varphi) = z\xi_2 Q + xQ + \xi_2\varphi \\ &= zE_Q + xQ + \varphi_y + x\varphi_z + z\varphi_u + x^2\varphi_v, \end{aligned}$$

поэтому в силу (16.15) имеем

$$R = E_S - zE_Q = xQ + \varphi_y + x\varphi_z + z\varphi_u + x^2\varphi_v. \tag{16.18}$$

Продифференцируем предыдущее равенство по x:

$$R_x = xQ_x + Q + \varphi_z + 2x\varphi_v,$$

и в силу (16.11) получим

$$Q = -\varphi_z - 2x\varphi_v. \tag{16.19}$$

Тогда (16.17) переписывается в виде

$$S = zQ + \varphi = \varphi - z\varphi_z - 2xz\varphi_v, \tag{16.20}$$

а (16.13) в виде

$$T_x = x^2 Q_x = -2x^2\varphi_v.$$

Проинтегрируем предыдущее равенство по x:

$$T = -\frac{2}{3}x^3\varphi_v + \psi, \quad \psi = \psi(y, z, u, v). \tag{16.21}$$

Учитывая равенства (16.19), (16.18), (16.20), и (16.21), видим, что условия (16.11)–(16.16) эквивалентны следующим:

$$P = E_R - xE_Q, \tag{16.22}$$
$$Q = -\varphi_z - 2x\varphi_v, \tag{16.23}$$
$$R = \varphi_y + z\varphi_u - x^2\varphi_v, \tag{16.24}$$
$$S = \varphi - z\varphi_z - 2xz\varphi_v, \tag{16.25}$$
$$T = -\frac{2}{3}x^3\varphi_v + \psi, \tag{16.26}$$
$$x^2 E_Q - 2xE_R + E_T = 0. \tag{16.27}$$

Поэтому все компоненты нашего векторного поля P, Q, R, S, T однозначно определяются двумя функциями $\varphi = \varphi(y, z, u, v)$ и $\psi = \psi(y, z, u, v)$, удовлетворяющими равенству (16.27). Подставим выражения для P, Q, R, S, T

в терминах φ, ψ в это равенство и найдем независимые параметры, задающие φ, ψ.

В терминах φ, ψ, равенство (16.27) принимает форму

$$\begin{aligned} &x^5\left(-\frac{2}{3}\varphi_{vv}\right)+x^4\left(-\frac{5}{3}\varphi_{zv}\right)+x^3\left(-\frac{8}{3}\varphi_{yv}-\varphi_{zz}-\frac{8}{3}z\varphi_{uv}\right)\\ &\quad+x^2(-3\varphi_{yz}-3z\varphi_{zu}-2\varphi_u+\psi_v)\\ &\quad+x(-2\varphi_{yy}-4z\varphi_{yu}-2z^2\varphi_{uu}+\psi_z)+(\psi_y+z\psi_u)=0. \end{aligned}$$

Напомним, что φ не зависит от x, поэтому

$$\varphi_{vv}=0, \tag{16.28}$$
$$\varphi_{zv}=0, \tag{16.29}$$
$$\varphi_{yv}+\frac{3}{8}\varphi_{zz}+z\varphi_{uv}=0, \tag{16.30}$$
$$3\varphi_{yz}+3z\varphi_{zu}+2\varphi_u-\psi_v=0, \tag{16.31}$$
$$2\varphi_{yy}+4z\varphi_{yu}+2z^2\varphi_{uu}-\psi_z=0, \tag{16.32}$$
$$\psi_y+z\psi_u=0. \tag{16.33}$$

Равенства (16.28), (16.29) означают, что φ_v не зависит от v, z:

$$\varphi_v=\alpha(y,u),$$

поэтому

$$\varphi=v\alpha(y,u)+\beta(y,z,u) \tag{16.34}$$

для некоторых функций $\alpha(y,u)$ и $\beta(y,z,u)$. Ввиду предыдущего равенства, условия (16.30)–(16.33) принимают форму

$$\alpha_y+\frac{3}{8}\beta_{zz}+z\alpha_u=0, \tag{16.35}$$
$$3\beta_{yz}+3z\beta_{zu}+2v\alpha_u+2\beta_u-\psi_v=0, \tag{16.36}$$
$$2v\alpha_{yy}+2\beta_{yy}+4zv\alpha_{yu}+4z\beta_{yu}+2z^2v\alpha_{uu}+2z^2\beta_{uu}-\psi_z=0, \tag{16.37}$$
$$\psi_y+z\psi_u=0. \tag{16.38}$$

Дифференцируя равенство (16.35) по z, получаем

$$\frac{3}{8}\beta_{zzz}=-\alpha_u.$$

Затем трижды интегрируем предыдущее равенство по z и получаем

$$\beta=-\frac{4}{9}z^3\alpha_u+\frac{1}{2}z^2\gamma+z\delta+\sigma \tag{16.39}$$

для некоторых функций

$$\gamma=\gamma(y,u), \quad \delta=\delta(y,u), \quad \sigma=\sigma(y,u).$$

Подставляя выражение (16.39) в (16.35), получаем

$$\gamma = -\frac{8}{3}\alpha_y,$$

поэтому

$$\beta = -\frac{4}{9}z^3\alpha_u - \frac{4}{3}z^2\alpha_y + z\delta + \sigma, \tag{16.40}$$

и это равенство эквивалентно равенству (16.35).

Подставляя выражение для β из (16.40) в равенства (16.36) и (16.37), получаем, после преобразований,

$$\begin{aligned}
\psi_v &= z^3\left(-\frac{44}{9}\alpha_{uu}\right) + z^2\left(-\frac{44}{3}\alpha_{yu}\right) + z(-8\alpha_{yy} + 5\delta_u) \\
&\quad +(3\delta_y + 2v\alpha_u + 2\sigma_u), \qquad (16.41)\\
\psi_z &= z^5\left(-\frac{8}{9}\alpha_{uuu}\right) + z^4\left(-\frac{40}{9}\alpha_{yuu}\right) + z^3\left(-\frac{56}{9}\alpha_{yyu} + 2\delta_{uu}\right) \\
&\quad +z^2\left(-\frac{8}{3}\alpha_{yyy} + 4\delta_{yu} + 2v\alpha_{uu} + 2\sigma_{uu}\right) \\
&\quad +z(2\delta_{yy} + 4v\alpha_{yu} + 4\sigma_{yu}) + (2v\alpha_{yy} + 2\sigma_{yy}). \qquad (16.42)
\end{aligned}$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned}
\psi_{vz} &= -\frac{44}{3}z^2\alpha_{uu} + 2z\left(-\frac{44}{3}\alpha_{yu}\right) + (-8\alpha_{yy} + 5\delta_u), \\
\psi_{zv} &= 2z^2\alpha_{uu} + 4z\alpha_{yu} + 2\alpha_{yy},
\end{aligned}$$

приравниваем эти смешанные производные и их члены при одинаковых степенях z, и получаем

$$\alpha_{uu} = 0, \tag{16.43}$$

$$\alpha_{yu} = 0, \tag{16.44}$$

$$\alpha_{yy} = \frac{1}{2}\delta_u. \tag{16.45}$$

Равенства (16.43) и (16.44) означают, что

$$\alpha_u = c, \quad c \in \mathbb{R},$$ [1]

поэтому

$$\alpha = cu + \pi(y). \tag{16.46}$$

Тогда условие (16.45) принимает форму

$$\pi_{yy} = \frac{1}{2}\delta_u,$$

[1] c — первый одномерный параметр в $\mathrm{Sym}(\Delta)$. Мы на пути отыскания остальных тринадцати ...

поэтому

$$\delta = 2u\pi_{yy} + \lambda(y). \tag{16.47}$$

Ввиду (16.46) и (16.47), равенства (16.41) и (16.42) переписываются в виде

$$\begin{aligned}
\psi_v &= z(2\pi_{yy}) + 6u\pi_{yyy} + 3\lambda_y + 2cv + 2\sigma_u, && (16.48)\\
\psi_z &= z^2\left(\frac{16}{3}\pi_y^{(3)} + 2\sigma_{uu}\right) + z(4u\pi_y^{(4)} + 2\lambda_{yy} + 4\sigma_{yu}) \\
&\quad +(2v\pi_{yy} + 2\sigma_{yy}), && (16.49)
\end{aligned}$$

и первое равенство после интегрирования по v дает

$$\psi = cv^2 + v(2z\pi_{yy} + 6u\pi_{yyy} + 3\lambda_y + 2\sigma_u) + \tau(y, z, u). \tag{16.50}$$

Дифференцируя предыдущее равенство по z, получаем

$$\psi_z = 2v\pi_{yy} + \tau_z,$$

затем сравниваем с (16.49) и получаем

$$\tau_z = z^2\left(\frac{16}{3}\pi_y^{(3)} + 2\sigma_{uu}\right) + z(4u\pi_y^{(4)} + 2\lambda_{yy} + 4\sigma_{yu}) + 2\sigma_{yy}.$$

Интегрирование по z дает

$$\tau = z^3\left(\frac{16}{9}\pi_y^{(3)} + \frac{2}{3}\sigma_{uu}\right) + z^2(2u\pi_y^{(4)} + \lambda_{yy} + 2\sigma_{yu}) + 2\sigma_{yy}z + \varepsilon(y, u).$$

Подставляя это равенство в (16.50), получаем

$$\begin{aligned}
\psi &= cv^2 + v(2z\pi_y^{(2)} + 6u\pi_y^{(3)} + 3\lambda_y + 2\sigma_u) + z^3\left(\frac{16}{9}\pi_y^{(3)} + \frac{2}{3}\sigma_{uu}\right) \\
&\quad +z^2(2u\pi_y^{(4)} + \lambda_{yy} + 2\sigma_{yu}) + 2\sigma_{yy}z + \varepsilon. && (16.51)
\end{aligned}$$

Подставим это выражение для ψ в (16.38) и получим

$$\begin{aligned}
&z^4\left(\frac{2}{3}\sigma_{uuu}\right) + z^3\left(\frac{34}{9}\pi_y^{(4)} + \frac{8}{3}\sigma_{yuu}\right) + z^2(2u\pi_y^{(5)} + \lambda_y^{(3)} + 4\sigma_{yyu}) \\
&\quad +zv(8\pi_y^{(3)} + 2\sigma_{uu}) + z(2\sigma_{yyy} + \varepsilon_u) + v(6u\pi_y^{(4)} + 3\lambda_y^{(2)} + 2\sigma_{yu}) + \varepsilon_y = 0.
\end{aligned}$$

Приравнивая члены при степенях z и v нулю, получаем

$$\sigma_{uuu} = 0, \tag{16.52}$$

$$\frac{34}{9}\pi_y^{(4)} + \frac{8}{3}\sigma_{yuu} = 0, \tag{16.53}$$

$$2u\pi_y^{(5)} + \lambda_y^{(3)} + 4\sigma_{yyu} = 0, \tag{16.54}$$

$$8\pi_y^{(3)} + 2\sigma_{uu} = 0, \tag{16.55}$$

$$2\sigma_{yyy} + \varepsilon_u = 0, \tag{16.56}$$

$$6u\pi_y^{(4)} + 3\lambda_y^{(2)} + 2\sigma_{yu} = 0, \tag{16.57}$$

$$\varepsilon_y = 0. \tag{16.58}$$

Равенство (16.58) означает, что

$$\varepsilon = \varepsilon(u),$$

а равенство (16.53)дает

$$\sigma = \frac{1}{2}u^2\theta(y) + u\rho(y) + \gamma(y). \tag{16.59}$$

Тогда равенства (16.53)–(16.58) переписываются в виде

$$\frac{34}{9}\pi_y^{(4)} + \frac{8}{3}\theta_y = 0, \tag{16.60}$$

$$2u\pi_y^{(5)} + \lambda_y^{(3)} + 4u\theta_y^{(2)} + 4\rho_y^{(2)} = 0, \tag{16.61}$$

$$8\pi_y^{(3)} + 2\theta = 0, \tag{16.62}$$

$$u^2\theta_y^{(3)} + 2u\rho_y^{(3)} + 2\gamma_y^{(3)} + \varepsilon_u = 0, \tag{16.63}$$

$$6u\pi_y^{(4)} + 3\lambda_y^{(2)} + 2u\theta_y + 2\rho_y = 0, \tag{16.64}$$

Дифференцируем (16.62):

$$8\pi_y^{(4)} + 2\theta_y = 0,$$

что дает в сочетании с (16.60):

$$\pi_y^{(4)} = \theta_y = 0.$$

Поэтому

$$\theta = a, \qquad a \in \mathbb{R}, \tag{16.65}$$

и равенства (16.60)–(16.64) принимают форму

$$\lambda_y^{(3)} + 4\rho_y^{(2)} = 0, \tag{16.66}$$

$$8\pi_y^{(3)} + 2a = 0, \tag{16.67}$$

$$2u\rho_y^{(3)} + 2\gamma_y^{(3)} + \varepsilon_u = 0, \tag{16.68}$$

$$3\lambda_y^{(2)} + 2\rho_y = 0. \tag{16.69}$$

Тогда (16.67) влечет

$$\pi = -\frac{1}{24}ay^3 + by^2 + dy + f, \quad b, d, f \in \mathbb{R}, \tag{16.70}$$

и равенства (16.66)–(16.69) эквивалентны следующим:

$$\lambda_y^{(3)} = 0,$$

$$\rho_y^{(2)} = 0,$$

$$2\gamma_y^{(3)} + \varepsilon_y = 0,$$

$$3\lambda_y^{(2)} + 2\rho_y = 0.$$

Поэтому

$$\lambda = -\frac{1}{3}ny^2 + ly + m,$$
$$\rho = ny + p,$$
$$\gamma = \frac{1}{12}ky^3 + qy^2 + ry + s,$$
$$\varepsilon = -ku + t$$

для некоторых

$$n, l, m, p, k, q, r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Теперь выражаем функции φ и ψ из (16.34), (16.40), (16.46), (16.47), (16.51), (16.59), (16.65), и (16.70):

$$\begin{aligned}
\varphi \; &= \; \frac{1}{6}ay^2z^2 - \frac{1}{24}ay^3v + by^2v - \frac{4}{9}cz^3 - \frac{8}{3}byz^2 - \frac{1}{2}ayzu \\
&\quad -\frac{1}{3}ny^2z + \frac{1}{12}ky^3 + cuv + dyv - \frac{4}{3}dz^2 + 4bzu + lyz + \frac{1}{2}au^2 \\
&\quad +nyu + qy^2 + fv + mz + pu + ry + s, \\
\psi \; &= \; -\frac{1}{2}ayzv + \frac{2}{9}az^3 + cv^2 + 4bzv + \frac{1}{2}auv + \frac{4}{3}nz^2 + kyz + 3lv \\
&\quad +2pv + 4qz - ku + t, \\
&a, b, c, d, f, n, l, m, p, k, q, r, s, t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Подведем итоги: мы доказали, что

$$\mathrm{Sym}(\Delta) \subset \left\{ Y = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z} + S\frac{\partial}{\partial u} + T\frac{\partial}{\partial v} \right\},$$

где

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{12}ax^2y^2 - \frac{4}{3}bx^2y - \frac{2}{3}cx^2z - \frac{1}{6}axyz - \frac{2}{3}dx^2 - \frac{1}{3}nxy + \frac{4}{3}bxz \\
&\quad + cxv + \frac{1}{3}az^2 - \frac{1}{4}ayv + (p+2l)x + \frac{1}{2}ky + \frac{4}{3}nz + 2bv + 2q, \quad (16.71) \\
Q &= \frac{1}{12}axy^3 - 2bxy^2 - \frac{1}{3}azy^2 - 2dxy - 2cxu + \frac{4}{3}cz^2 + \frac{16}{3}byz + \frac{1}{3}ny^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}ayu - 2fx - ly + \frac{8}{3}dz - 4bu - m, \quad (16.72) \\
R &= \frac{1}{24}ax^2y^3 - bx^2y^2 - dx^2y - cx^2u - \frac{1}{6}ayz^2 - \frac{1}{8}ay^2v - fx^2 + \frac{1}{3}nyz \\
&\quad + 2byz + \frac{4}{3}bz^2 + \frac{1}{2}azu + \frac{1}{4}ky^2 + czv + 2qy + lz + nu \\
&\quad + dv + pz + r, \quad (16.73) \\
S &= \frac{1}{12}axy^3z - 2bxy^2z - \frac{1}{6}ay^2z^2 - \frac{1}{24}avy^3 - 2cxzu - 2dxyz + by^2v \\
&\quad + \frac{8}{3}byz^2 + \frac{1}{12}ky^3 + \frac{8}{9}cz^3 - 2fxz + qy^2 + nyu + \frac{1}{2}au^2 + cuv + dyv \\
&\quad + \frac{4}{3}dz^2 + ry + pu + fv + s, \quad (16.74) \\
T &= \frac{1}{36}ax^3y^3 - \frac{2}{3}bx^3y^2 - \frac{2}{3}dx^3y - \frac{2}{3}cx^3u - \frac{2}{3}fx^3 - \frac{1}{2}ayzv + \frac{2}{9}az^3 \\
&\quad + \frac{4}{3}nz^2 + kyz + 4bzv + \frac{1}{2}auv + cv^2 + 4qz - ku \\
&\quad + (3l+2p)v + t. \quad (16.75)
\end{aligned}$$

Базис алгебры Ли $\mathrm{Sym}(\Delta)$, описанный в формулировке теоремы 16.1, получается для следующих значений параметров (указываются только ненулевые значения параметров $k, q, m, r, s, t, a, b, c, d, f, n, p, l$):

$$q = \frac{1}{36} \quad \Rightarrow \quad Y_1, \tag{16.76}$$

$$m = 3 \quad \Rightarrow \quad Y_2, \tag{16.77}$$

$$r = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad Y_3, \tag{16.78}$$

$$t = -\frac{1}{324} \quad \Rightarrow \quad Y_4, \tag{16.79}$$

$$s = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad Y_5, \tag{16.80}$$

$$\begin{aligned}
a = 24 \quad &\Rightarrow \quad Y_6,\\
b = 9 \quad &\Rightarrow \quad Y_7,\\
c = -324 \quad &\Rightarrow \quad Y_8,\\
d = -27 \quad &\Rightarrow \quad Y_9,\\
n = -1 \quad &\Rightarrow \quad Y_{10},\\
f = 27 \quad &\Rightarrow \quad Y_{11},\\
k = \frac{1}{27} \quad &\Rightarrow \quad Y_{12},\\
p = -1 \quad &\Rightarrow \quad Y_{13},\\
p = 1, l = -1 \quad &\Rightarrow \quad Y_{14}.
\end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что векторные поля $Y_1, \dots, Y_{14}$ линейно независимы.

Все векторные поля $Y_1, \dots, Y_{14}$ действительно являются симметриями распределения Δ т.к. выполняются условия предложения 13.1:

$$\begin{array}{llll}
[Y_i, \xi_1] & = 0, & [Y_i, \xi_2] & = 0, \qquad i = 1, \dots, 5,\\
[Y_6, \xi_1] & = (-4xy^2 + 4yz)\xi_1 & [Y_6, \xi_2] & = (6x^2y - 12xz + 6v)\xi_1\\
 & \quad -2y^3\xi_2, & & \quad +(2xy^2 + 4yz - 12u)\xi_2,\\
[Y_7, \xi_1] & = (24xy - 12z)\xi_1 & [Y_7, \xi_2] & = -18x^2\xi_1\\
 & \quad +18y^2\xi_2, & & \quad -(12xy + 12z)\xi_2,\\
[Y_8, \xi_1] & = (-432xz + 324v)\xi_1 & [Y_8, \xi_2] & = 108x^3\xi_1\\
 & \quad -648u\xi_2, & & \quad +216xz\xi_2,\\
[Y_9, \xi_1] & = -36x\xi_1 - 54y\xi_2, & [Y_9, \xi_2] & = 18x\xi_2,\\
[Y_{10}, \xi_1] & = -\frac{1}{3}y\xi_1, & [Y_{10}, \xi_2] & = x\xi_1 + \frac{2}{3}y\xi_2,\\
[Y_{11}, \xi_1] & = 54\xi_2, & [Y_{11}, \xi_2] & = 0,\\
[Y_{12}, \xi_1] & = 0, & [Y_{12}, \xi_2] & = -\frac{1}{54}\xi_1,\\
[Y_{13}, \xi_1] & = \xi_1, & [Y_{13}, \xi_2] & = 0,\\
[Y_{14}, \xi_1] & = \xi_1, & [Y_{14}, \xi_2] & = -\xi_2.
\end{array}$$

Поэтому

$$\mathrm{Sym}(\Delta) = \mathrm{span}(Y_1, \dots, Y_{14}),$$

и лемма 16.1 полностью доказана. □

Теперь докажем лемму 16.2.

Доказательство. Ненулевые скобки в алгебре Ли $\mathrm{Sym}(\Delta)$ в базисе $Y_1, \ldots, Y_{14}$, указанном в формулировке теоремы 16.1, перечислены в таблице 16.1.

$$\begin{array}{lll}
[Y_3, Y_{10}] = -2Y_1, & [Y_3, Y_9] = 2Y_2, & [Y_3, Y_2] = 3Y_5, \\
[Y_3, Y_1] = -3Y_4, & [Y_3, Y_8] = Y_9, & [Y_3, Y_6] = -Y_{10}, \\
[Y_{10}, Y_9] = -2Y_7, & [Y_{10}, Y_7] = -3Y_6 & [Y_{10}, Y_1] = 3Y_{12}, \\
[Y_{10}, Y_5] = Y_3, & [Y_{10}, Y_{11}] = -Y_9, & [Y_9, Y_7] = 3Y_8, \\
[Y_9, Y_2] = -3Y_{11}, & [Y_9, Y_{12}] = Y_{10}, & [Y_9, Y_4] = -Y_3, \\
[Y_7, Y_2] = -2Y_9 & [Y_7, Y_1] = 2Y_{10}, & [Y_7, Y_5] = -Y_2, \\
[Y_7, Y_4] = Y_1, & [Y_2, Y_1] = -2Y_3 & [Y_2, Y_{12}] = -Y_1, \\
[Y_2, Y_6] = Y_7, & [Y_1, Y_8] = -Y_7, & [Y_1, Y_{11}] = Y_2, \\
[Y_{12}, Y_8] = Y_6, & [Y_{12}, Y_5] = -Y_4, & [Y_8, Y_5] = Y_{11}, \\
[Y_{11}, Y_4] = Y_5 & [Y_{11}, Y_6] = -Y_8, & [Y_4, Y_6] = Y_{12}, \\
[Y_{13}, Y_3] = Y_3, & [Y_{13}, Y_9] = -Y_9 & [Y_{13}, Y_7] = -Y_7, \\
[Y_{13}, Y_1] = Y_1, & [Y_{13}, Y_{12}] = Y_{12}, & [Y_{13}, Y_8] = -2Y_8 \\
[Y_{13}, Y_5] = Y_5, & [Y_{13}, Y_{11}] = -Y_{11}, & [Y_{13}, Y_4] = 2Y_4, \\
[Y_{13}, Y_6] = -Y_6, & [Y_{14}, Y_{10}] = Y_{10}, & [Y_{14}, Y_9] = -Y_9, \\
[Y_{14}, Y_2] = -Y_2, & [Y_{14}, Y_1] = Y_1, & [Y_{14}, Y_{12}] = 2Y_{12}, \\
[Y_{14}, Y_8] = -Y_8, & [Y_{14}, Y_5] = -Y_5, & [Y_{14}, Y_{11}] = -2Y_{11} \\
[Y_{14}, Y_4] = Y_4, & [Y_{14}, Y_6] = Y_6, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
[Y_3, Y_7] = -2Y_{13} + Y_{14}, & [Y_{10}, Y_2] = Y_{13} - 2Y_{14}, \\
[Y_9, Y_1] = Y_{13} + Y_{14}, & [Y_{12}, Y_{11}] = -Y_{14}, \\
[Y_8, Y_4] = Y_{13}, & [Y_5, Y_6] = -Y_{13} + Y_{14}.
\end{array}$$

Таблица 16.1: Умножение в $\mathrm{Sym}(\Delta)$, случай Картана.

Искомый изоморфизм

$$F : \mathrm{Sym}(\Delta) \to \mathfrak{g}_2$$

задается на базисных элементах этих алгебр Ли следующей матрицей:

$Y \in \mathrm{Sym}(\Delta)$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
$F(Y) \in \mathfrak{g}_2$	X_{-e_3}	X_{-e_2}	X_{e_1}	X_{-f_2}	X_{f_3}	X_{-f_3}	X_{-e_1}

$Y \in \mathrm{Sym}(\Delta)$	Y_8	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}
$F(Y) \in \mathfrak{g}_2$	X_{f_2}	X_{e_3}	X_{e_2}	X_{-f_1}	X_{f_1}	H_1	H_2

Алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ и ее базис H_1, H_2, $X_{\pm e_i}$, $X_{\pm f_i}$, $i = 1, 2, 3$, описаны в приложении в главе 18. Отображение F действительно является изоморфизмом $\mathrm{Sym}(\Delta)$ и $\mathfrak{g}_2$ так как таблицы умножения 16.1 и 18.1 (см. главу 18) для этих алгебр Ли изоморфны. $\square$

16.4.2 Симметрии субримановой структуры

Теорема 16.2. *Алгебра Ли симметрий плоской субримановой структуры* $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *на пятимерной нильпотентной группе Ли* G*, описанной в разделе* 16.1*, есть шестимерная алгебра Ли*

$$\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle) = \mathrm{span}(X_0, \dots, X_5)$$

со следующими правилами умножения для базисных элементов:

$$\begin{array}{ll} [X_0, X_1] = -X_2, & [X_0, X_2] = X_1, \\ [X_0, X_4] = -X_5, & [X_0, X_5] = X_4, \\ [X_1, X_2] = X_3, & \\ [X_1, X_3] = X_4, & [X_2, X_3] = X_5, \end{array} \tag{16.81}$$

Для модели $(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *в* $\mathbb{R}^5$*, определенной соотношениями* (16.4)–(16.7)*, имеем*

$$X_0 \quad = \quad -\frac{1}{54}Y_{11} - 54Y_{12} \tag{16.82}$$

и

$$X_1 = -3Y_1, \quad X_2 = \frac{1}{18}Y_2, \quad X_3 = -\frac{1}{3}Y_3, \quad X_4 = 3Y_4, \quad X_5 = \frac{1}{18}Y_5, \tag{16.83}$$

где векторные поля $Y_1, \dots, Y_5$ *определены в теореме* 16.1*.*

Замечание. Правила умножения (16.81) в алгебре Ли $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ схематически представлены на рис. 16.3 (элемент X_0 изображен дважды для получения планарного графа).

Доказательство. Согласно доказательству теоремы 16.1, векторное поле

$$X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z} + S\frac{\partial}{\partial u} + T\frac{\partial}{\partial v} \in \mathrm{Vec}(\mathbb{R}^5)$$

есть симметрия распределения Δ тогда и только тогда, когда функции P, Q, R, S, T имеют вид (16.71)–(16.75). Более того, X также сохраняет скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ тогда и только тогда, когда P, Q, R, S, T удовлетворяют, вдобавок к (16.71)–(16.75), следующим дополнительным равенствам:

$$P_x \quad = \quad 0, \tag{16.84}$$
$$Q_x \quad = \quad -E_P, \tag{16.85}$$
$$E_Q \quad = \quad 0 \tag{16.86}$$

(обозначения E_P, E_Q введены в (16.8), (16.9)).

Но условия (16.84)–(16.86) означают, что

$$a = b = c = d = n = p = l = 0, \quad f = \frac{1}{4}k,$$

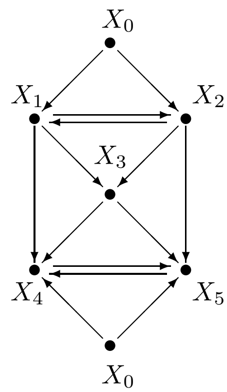


Рис. 16.3: Алгебра $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, случай Картана.

т.е.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}ky + 2q,\\
Q &= -\frac{1}{2}kx - m,\\
R &= -\frac{1}{4}kx^2 + \frac{1}{4}ky^2 + 2qy + r,\\
S &= \frac{1}{12}ky^3 - \frac{1}{2}kxz + qy^2 + ry + \frac{1}{4}kv + s,\\
T &= -\frac{1}{6}kx^3 + kyz + 4qz - ku + t.
\end{aligned}$$

При $k = -2$, $q = m = r = s = t = 0$ получаем векторное поле X_0, определенное в (16.82). Остальные базисные векторные поля X_i, $i = 1, \dots, 5$, определяются соотношениями (16.83), (16.76). Тогда $\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle) = \mathrm{span}(X_0, \dots, X_5)$, а правила коммутирования (16.81) проверяются непосредственно. $\square$

Глава 17

Общая картина

Мы суммируем проведенные в главах 14–16 вычисления симметрий плоских распределений и субримановых структур ранга два в таблице 17.1.

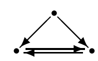
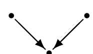
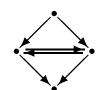
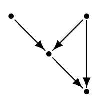
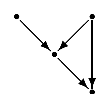
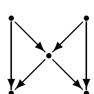
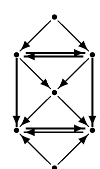
n	$(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$	$\mathrm{Sym}(\Delta)$	dim	$\mathrm{Sym}(\Delta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$	dim
2		$\mathrm{Vec}(\mathbb{R}^2)$	∞		3
3		$f(x,y,z)$	∞		4
4		$f(y,z,v)$	∞		4
5		$\mathfrak{g}_2$	14		6

Таблица 17.1: Симметрии плоских $(2,n)$ распределений и субримановых структур.

Для полноты картины мы включили и двумерный (риманов) случай: любое векторное поле в $G = \mathbb{R}^2$ сохраняет распределение ранга два TG, а плоская риманова структура сохраняется евклидовой группой движений плоскости. В случае Гейзенберга, $n = 3$, симметрии плоских распределений параметризуются произвольными гладкими функциями трех переменных, а плоская субриманова структура сохраняется четырехмерной алгеброй Ли: вдобавок к трем независимым левым сдвигам на группе Гейзенберга имеется одно дополнительное вращение на этой группе. В случае Энгеля, $n = 4$, алгебра Ли $\mathrm{Sym}(\Delta)$ параметризована функциями четырех переменных, постоянными вдоль канонического векторного поля распределения Энгеля (которое здесь выбрано в виде $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ как в модели раздела 15.3). Что касается симметрий плоской субримановой структуры, имеется лишь «тривиальная» четырехмерная группа левых сдвигов на группе Энгеля. А в случае Картана, $n = 5$, имеется 14-мерная алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ симметрий плоского распределения; а плоская субриманова структура сохраняется «тривиальными» левыми сдвигами на 5-мерной нильпотентной группе Ли и одним дополнительным вращением на этой группе.

Глава 18

Приложение: Линейное представление алгебры $\mathfrak{g}_2$

Для полноты изложения опишем точное представление простой исключительной комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ и ее единственной некомпактной вещественной формы с помощью 7×7 комплексных матриц (мы следуем изложению книги М.М. Постникова [14], лекция 14).

Обозначим через

$$E_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, 7,$$

7×7 матрицу со всеми нулевыми элементами кроме единственного единичного элемента в i-ой строке и j-ом столбце; введем также кососимметричные матрицы — базисные элементы алгебры Ли $\mathrm{so}(7)$:

$$E_{[i,j]} = \frac{1}{2}(E_{ij} - E_{ji}), \quad i, j = 1, \ldots, 7, \ i < j.$$

Тогда

$$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(P_0, \ldots, P_6, Q_0, \ldots, Q_6),$$

где

$$\begin{aligned}
P_0 &= 2(E_{[3,2]} + E_{[6,7]}), & Q_0 &= 2(E_{[4,5]} + E_{[6,7]}),\\
P_1 &= E_{[1,3]} + E_{[5,7]}, & Q_1 &= E_{[6,4]} + E_{[5,7]},\\
P_2 &= E_{[2,1]} + E_{[7,4]}, & Q_2 &= E_{[6,5]} + E_{[7,4]},\\
P_3 &= E_{[1,4]} + E_{[7,2]}, & Q_3 &= E_{[3,6]} + E_{[7,2]},\\
P_4 &= E_{[5,1]} + E_{[3,7]}, & Q_4 &= E_{[2,6]} + E_{[3,7]},\\
P_5 &= E_{[1,7]} + E_{[3,5]}, & Q_5 &= E_{[4,2]} + E_{[3,5]},\\
P_6 &= E_{[6,1]} + E_{[4,3]}, & Q_6 &= E_{[5,2]} + E_{[4,3]}.
\end{aligned}$$

Матрицы вида

$$H = aP_0 + bQ_0 = aE_{[3,2]} + bE_{[4,5]} + cE_{[7,6]}, \quad a + b + c = 0, \tag{18.1}$$

образуют двумерную абелеву подалгебру $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ ($\mathfrak{h}$ есть подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$).

Введем элементы

$$\begin{aligned} U_{\pm 1} &= (2P_2 - Q_2) \pm i(2P_1 - Q_1), \qquad & V_{\pm 1} &= Q_2 \mp iQ_1, \\ U_{\pm 2} &= (2P_4 - Q_4) \pm i(2P_3 - Q_3), \qquad & V_{\pm 2} &= Q_4 \pm iQ_3, \\ U_{\pm 3} &= (2P_6 - Q_6) \pm i(2P_5 - Q_5), \qquad & V_{\pm 3} &= Q_6 \pm iQ_5, \end{aligned}$$

порождающие вместе с $\mathfrak{h}$ алгебру $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$.

В двойственном пространстве $\mathfrak{h}^*$ выберем базис e_1, e_2, двойственный базису P_0, Q_0. Тогда для каждого элемента (18.1) пространства $\mathfrak{h}$ имеем

$$e_1(H) = a, \quad e_2(H) = b, \quad e_3(H) = c,$$

где

$$e_3 = -(e_1 + e_2).$$

Будем считать, что сопряженное пространство $\mathfrak{h}^*$ является евклидовым пространством с декартовыми координатами, в которых векторы e_1, e_2 имеют координаты

$$e_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), \quad e_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Введем также векторы

$$f_1 = e_2 - e_3, \quad f_2 = e_3 - e_3, \quad f_3 = e_1 - e_2.$$

Получаем следующие 12 векторов в плоскости $\mathfrak{h}^*$:

$$\mathbf{G}_2 = \{\, \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm f_1, \pm f_2, \pm f_3 \,\},$$

см. рис. 18.1.

Теперь выберем следующие элементы в $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$:

$$X_\alpha = \begin{cases} U_{\pm k} & \text{при} \quad \alpha = \pm e_k, \\ V_{\pm k} & \text{при} \quad \alpha = \pm f_k. \end{cases}$$

$$H_\alpha = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}(aE_{[3,2]} + bE_{[4,5]} + cE_{[7,6]}).$$

Тогда

$$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} = \operatorname{span}(\mathfrak{h}; X_\alpha, \alpha \in \mathbf{G}_2)$$

и правила умножения в алгебре Ли $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ принимают следующую простую форму.

Предложение 18.1. [14] *Для любых векторов $\alpha, \beta \in \mathbf{G}_2$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} &[H, X_\alpha] = i\alpha(H)X_\alpha, \quad H \in \mathfrak{h}, \\ &[X_\alpha, X_{-\alpha}] = iH_\alpha, \\ &[X_\alpha, X_\beta] = 0 \quad \textit{if } \alpha + \beta \neq 0 \textit{ and } \alpha + \beta \notin \mathbf{G}_2, \\ &[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} \textit{ if } \alpha + \beta \in \mathbf{G}_2\,. \end{aligned}$$

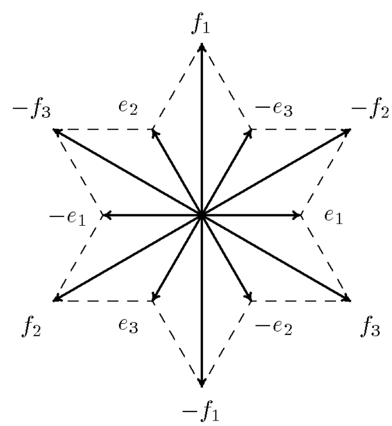


Рис. 18.1: Корневые векторы алгебры $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$.

Здесь $N_{\alpha,\beta}$ суть некоторые целые числа, модули которых удовлетворяют равенству

$$|N_{\alpha,\beta}| = p + 1,$$

где p есть наименьшее такое целое число, что для любых $j = 0, 1, \ldots, p$ вектор $\beta - j\alpha$ принадлежит пространству $\mathbf{G}_2$.

Замечание. Непосредственные вычисления с матрицами X_α дают следующие значения коэффициентов $N_{\alpha,\beta}$:

$N_{\alpha,\beta}$	e_1	e_2	e_3	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	f_1	f_2	f_3	$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$
e_1	0	-2	2		3	-3	0	1	0	0	0	-1
e_2	2	0	-2	-3		3	0	0	1	-1	0	0
e_3	-2	2	0	3	-3		1	0	0	0	-1	0
$-e_1$		3	-3	0	-2	2	0	0	-1	0	1	0
$-e_2$	-3		3	2	0	-2	-1	0	0	0	0	1
$-e_3$	3	-3		-2	2	0	0	-1	0	1	0	0
f_1	0	0	-1	0	1	0	0	1	-1		0	0
f_2	-1	0	0	0	0	1	-1	0	1	0		0
f_3	0	-1	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	
$-f_1$	0	1	0	0	0	-1		0	0	0	1	-1
$-f_2$	0	0	1	-1	0	0	0		0	-1	0	1
$-f_3$	1	0	0	0	-1	0	0	0		1	-1	0

Эту таблицу можно получить непосредственно из коммутационных соотношений таблицы 18.1.

Векторы

$$H_1 = -iP_0, \quad H_2 = -iQ_0$$

образуют базис подалгебры Картана $\mathfrak{h}$. Более того, элементы

$$X_\alpha, \alpha \in \mathbf{G}_2; \quad H_1, H_2$$

образуют базис Картана-Вейля алгебры $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ с вещественными структурными константами. Поэтому множество элементов $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$, инвариантных относительно комплексного сопряжения с помощью этого базиса

$$X \mapsto \overline{X}$$

образуют (единственную) вещественную некомпактную форму комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ (см., например [12]):

$$\mathfrak{g}_2 = \{\, X \in \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} \mid \overline{X} = X \,\}.$$

Имеем

$$\mathfrak{g}_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(X_\alpha, \alpha \in \mathbf{G}_2; H_1, H_2),$$

а ненулевые скобки между этими базисными векторами представлены в таблице 18.1.

$$
\begin{array}{lll}
[X_{e_1}, X_{e_2}] = -2X_{-e_3}, & [X_{e_1}, X_{e_3}] = 2X_{-e_2}, & [X_{e_1}, X_{-e_2}] = 3X_{f_3}, \\
[X_{e_1}, X_{-e_3}] = -3X_{-f_2}, & [X_{e_1}, X_{f_2}] = X_{e_3}, & [X_{e_1}, X_{-f_3}] = -X_{e_2}, \\
[X_{e_2}, X_{e_3}] = -2X_{-e_1}, & [X_{e_2}, X_{-e_1}] = -3X_{-f_3} & [X_{e_2}, X_{-e_3}] = 3X_{f_1}, \\
[X_{e_2}, X_{f_3}] = X_{e_1}, & [X_{e_2}, X_{-f_1}] = -X_{e_3}, & [X_{e_3}, X_{-e_1}] = 3X_{f_2}, \\
[X_{e_3}, X_{-e_2}] = -3X_{-f_1}, & [X_{e_3}, X_{f_1}] = X_{e_2}, & [X_{e_3}, X_{-f_2}] = -X_{e_1}, \\
[X_{-e_1}, X_{-e_2}] = -2X_{e_3}, & [X_{-e_1}, X_{-e_3}] = 2X_{e_2}, & [X_{-e_1}, X_{f_3}] = -X_{-e_2}, \\
[X_{-e_1}, X_{-f_2}] = X_{-e_3}, & [X_{-e_2}, X_{-e_3}] = -2X_{e_1}, & [X_{-e_2}, X_{f_1}] = -X_{-e_3}, \\
[X_{-e_2}, X_{-f_3}] = X_{-e_1}, & [X_{-e_3}, X_{f_2}] = -X_{-e_1}, & [X_{-e_3}, X_{-f_1}] = X_{-e_2}, \\
[X_{f_1}, X_{f_2}] = X_{-f_3}, & [X_{f_1}, X_{f_3}] = -X_{-f_2}, & [X_{f_2}, X_{f_3}] = X_{-f_1}, \\
[X_{-f_1}, X_{-f_2}] = X_{f_3}, & [X_{-f_1}, X_{-f_3}] = -X_{f_2}, & [X_{-f_2}, X_{-f_3}] = X_{f_1}, \\
[H_1, X_{e_1}] = X_{e_1}, & [H_1, X_{e_3}] = -X_{e_3}, & [H_1, X_{-e_1}] = -X_{-e_1}, \\
[H_1, X_{-e_3}] = X_{-e_3}, & [H_1, X_{f_1}] = X_{f_1}, & [H_1, X_{f_2}] = -2X_{f_2}, \\
[H_1, X_{f_3}] = X_{f_3}, & [H_1, X_{-f_1}] = -X_{-f_1}, & [H_1, X_{-f_2}] = 2X_{-f_2}, \\
[H_1, X_{-f_3}] = -X_{-f_3}, & [H_2, X_{e_2}] = X_{e_2}, & [H_2, X_{e_3}] = -X_{e_3}, \\
[H_2, X_{-e_2}] = -X_{-e_2}, & [H_2, X_{-e_3}] = X_{-e_3} & [H_2, X_{f_1}] = 2X_{f_1}, \\
[H_2, X_{f_2}] = -X_{f_2}, & [H_2, X_{f_3}] = -X_{f_3}, & [H_2, X_{-f_1}] = -2X_{-f_1} \\
[H_2, X_{-f_2}] = X_{-f_2}, & [H_2, X_{-f_3}] = X_{-f_3}, &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
[X_{e_1}, X_{-e_1}] = -2H_1 + H_2, & [X_{e_2}, X_{-e_2}] = H_1 - 2H_2, \\
[X_{e_3}, X_{-e_3}] = H_1 + H_2, & [X_{f_1}, X_{-f_1}] = -H_2, \\
[X_{f_2}, X_{-f_2}] = H_1, & [X_{f_3}, X_{-f_3}] = -H_1 + H_2.
\end{array}
$$

Таблица 18.1: Умножение в алгебре $\mathfrak{g}_2$.

Глава 19

Библиографические замечания

Результаты данной главы были впервые опубликованы в работе [106].

Плоская субриманова структура на группе Гейзенберга представляет первый пример фундаментальной важности для всей субримановой геометрии [7]. Соответствующие субримановы геодезические дают решение древнейшей экстремальной задачи — задачи Дидоны [4].

Плоская субриманова структура в случае Картана дает нильпотентную аппроксимацию для задачи качения одного тела по другому без прокручивания и проскальзывания [36], [90], а также для задачи управления тягачем с двумя прицепами [88], [117]. Поэтому геодезические и экспоненциальное отображение для этой субримановой структуры довольно подробно исследованы [56], [22], [23], [24], [25].

Количество публикаций по исследованиям задач субримановой геометрии методами геометрической теории управления необозримо, приведем лишь некоторые из них: [1], [29], [30], [31], [34], [38], [55]; см. также книгу [92] и цитированные в ней работы.

Список иллюстраций

Библиография

[1] А.А. Аграчев, Ж.-П. Готье, Субримановы метрики и изопериметрические задачи в контактном случае. Труды междунар. конф. Понтрягин-90, 1999, т. 3, 5–48.

[2] А.А. Аграчев, А.В. Сарычев, Фильтрации алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем. Докл. Акад. Наук СССР, 1987, Т. 295, 777–781.

[3] А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, М.: Физматлит, 2005.

[4] В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин, *Оптимальное управление*. —М.: Наука, 1979.

[5] В.И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, – М.: Наука, 1974.

[6] А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов и др., Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. —М., Факториал, 1977.

[7] А.М. Вершик, В.Я. Гершкович, Неголономные динамические системы и геометрия распределений. – Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы – 7, 8. – М.:ВИНИТИ, 1986.

[8] Э.Б. Винберг, В.В. Горбацевич, А.Л. Онищик. Конструкция групп Ли и алгебр Ли, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления **41** (1989).

[9] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам, —М., Наука, 1988.

[10] Ф.Р. Гантмахер, Теория матриц. — М., Наука, 1988.

[11] Д.П. Желобенко Компактные группы Ли и их представления. —М., Наука, 1970.

[12] Д.П. Желобенко, А.И. Стерн. Представления групп Ли. —М., Наука, 1983.

[13] М.И. Зеликин. Оптимальное управление и вариационное исчисление. —М.: Едиториал УРСС, 2004.

[14] М.М. Постников, Группы и алгебры Ли. —М., Наука, 1982.

[15] Сачков Ю.Л., Управляемость трехмерных билинейных систем. Вестник МГУ, сер. мат., мех., 1991, No. 3, 26 - 30.

[16] Сачков Ю.Л., Инвариантные области трехмерных билинейных систем. Вестник МГУ, сер. мат., мех., 1991, No. 4, 23 - 26.

[17] Сачков Ю.Л. Управляемость двумерных и трехмерных билинейных систем в положительном ортанте// Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29 С. 361 – 363.

[18] Сачков Ю.Л. Управляемость двумерных систем в положительном ортанте// Теоретические и прикладные основы программных систем, Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, 1994, 309–317.

[19] Сачков Ю.Л., Инвариантные ортанты билинейных систем, *Дифференциальные уравнения*, 1995, No. 6, 1094 – 1095.

[20] Ю.Л. Сачков, Управляемость инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах, *Современная математика и ее приложения, Тематические обзоры*, Т. 59, *Динамические системы-8*, ВИНИТИ, Москва, 1998.

[21] Сачков Ю.Л., Управляемость билинейных систем со скалярным управлением в положительном ортанте. Мат. Заметки, 85 (1995), 3, 419 - 424

[22] Ю.Л. Сачков, Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. сб.*, **194** (2003), 9: 63–90.

[23] Ю.Л. Сачков, *Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны,* Мат. Сборник, 2006, Т. 197, N 2, с. 95-116.

[24] Ю.Л. Сачков, *Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны,* // Мат. Сборник, 2006, Т. 197, № 4, С. 123-150.

[25] Сачков Ю.Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник, 2006, Т. 197, N 6, С. 111-160.

[26] А.И. Третьяк, Достаточные условия локальной управляемости и необходимые условия оптимальности высшего порядка. Дифференциально-геометрический подход // Современная математика и ее приложения. Т. 24. Динамические системы-4. —М.:ВИНИТИ, 1996.

[27] Трофимов В.В. *Введение в геометрию многообразий с симметриями.* – М.: Изд-во МГУ, 1989.

[28] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли.* – М.: Мир, 1987.

[29] A. Agrachev, Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures. J. Dynamical and Control Systems, 1996, v.2, 321–358

[30] A. Agrachev, C. El-Alaoui, J.-P. Gauthier, Sub-Riemannian metrics on $\mathbb{R}^3$. Proc. Canadian Math. Soc., 1998, v.25, 29–78

[31] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka, Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case. J. ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, 1997, v.2, 377–448

[32] A. Agrachev, R. Gamkrelidze, Local controllability for families of diffeomorphisms. Systems and Control Letters, 1993, v.20, 67–76

[33] A. Agrachev, R. Gamkrelidze, Local controllability and semigroups of diffeomorphisms. Acta Appl. Math., 1993, v.32, 1–57

[34] A. Agrachev, J.-P. Gauthier, On subanalyticity of Carnot–Caratheodory distances. Annales de l'Institut Henri Poincaré—Analyse non linéaire, 2001, v.18, 359–382

[35] A. Agrachev, A. Marigo, Nonholonomic tangent spaces: intrinsic construction and rigid dimensions. Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, Vol. 9, 111–120 (November 13, 2003).

[36] A. A. Agrachev, Yu.L. Sachkov, An Intrinsic Approach to the Control of Rolling Bodies, *Proceedings of the 38-th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, USA, December 7–10, 1999, vol. 1, 431–435.

[37] Agrachev A.A., Sachkov Yu. L. , Optimal control problem for a nonlinear driftless 5-dimensional system with 2 inputs, Proc. 5th IFAC Symposium NOLCOS 2001, St. Petersb. July 2001, 60-63

[38] C. El-Alaoui, J.-P. Gauthier, I. Kupka, Small sub-Riemannian balls in $\mathbb{R}^3$. J. Dynamical and Control Systems, 1996, v.2, 359–421

[39] R. El Assoudi and J. P. Gauthier, *Controllability of Right Invariant Systems on Real Simple Lie Groups of Type F_4, G_2, C_n, and B_n*, Math. Control Signals Systems **1** (1988), 293–301.

[40] R. El Assoudi and J.-P. Gauthier, Controllability of right-invariant systems on semi-simple Lie groups. *New Trends in Nonlinear Control Theory*, *Springer-Verlag* **122** (1989), 54–64.

[41] R. El Assoudi, J.P. Gauthier, and I. Kupka, "On subsemigroups of semisimple Lie groups,"Ann. Inst. Henri Poincare, **13**, No. 1, 117–133 (1996).

[42] R. El Assoudi, *Accessibilité par des champs de vecteurs invariants à droite sur un groupe de Lie*, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, 1991.

[43] V. Ayala Bravo, "Controllability of nilpotent systems,"in: *Geometry in nonlinear control and differential inclusions*, Banach Center Publications, Warszawa, **32** (1995), pp. 35–46.

[44] Bacciotti A. On the positive orthant controllability of two- dimensional bilinear systems// Systems and Control Letters. 1983. V. 3 P. 53–55.

[45] A. Bacciotti and G. Stefani, *On the Relationship Between Global and Local Controllability*, Math. Systems Theory, 16 (1983), pp. 79–91.

[46] A. Bellaiche, The tangent space in sub-Riemannian geometry, In: *Sub-Riemannian geometry*, A. Bellaiche and J.-J. Risler, Eds., Birkhäuser, Basel, Swizerland, 1996.

[47] R. M. Bianchini, G. Stefani, Graded approximations and controllability along a trajectory. SIAM J. Control and Optimization, 1990, v.28, 903–924

[48] A. Bloch, *Nonholonomic Mechanics and Control*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Volume 24, Springer, 2003.

[49] B. Bonnard, "Contrôllabilité des systèmes bilinéaires,"Math. Syst. Theory, **15**, 79–92 (1981).

[50] B. Bonnard, V. Jurdjevic, I. Kupka, and G. Sallet, "Transitivity of families of invariant vector fields on the semidirect products of Lie groups," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **271**, No. 2, 525–535 (1982).

[51] W.M. Boothby. Some comments on positive orthant controllability of bilinear systems. SIAM J. Control Optim., 20 (1982), No 5, pp. 634-644.

[52] Boothby W.M., Wilson E., Determination of the transitivity of bilinear systems, *SIAM J. Control Optim.* **20** (1982) 634 – 644.

[53] A. Borel, *Some Remarks about Transformation Groups Transitive on Spheres and Tori*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 580–586.

[54] A. Borel, *Le Plan Projectif des Octaves et les Sphères comme Espaces Homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1950), 1378–1380.

[55] U. Boscain, T. Chambrion, and J.-P. Gauthier, On the $K + P$ problem for a three-level quantum system: Optimality implies resonance, *J. Dynam. Control Systems*, **8** (2002), 547–572.

[56] R. Brockett, L. Dai, Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability, In: *Nonholonomic Motion Planning*, Z. Li and J. Canny, Eds., Kluwer, Boston, 1993, 1–21.

[57] R. W. Brockett, System theory on group manifolds and coset spaces, *SIAM J. Control*, **10**, 265–284 (1972).

[58] R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussmann, Eds., Differential geometric control theory. Birkhäuser Boston, 1983

[59] Bruni C., Di Pillo G., Koch G., Bilinear systems: an appealing class of "nearly linear" systems in theory and applications, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC **19** (1974), 334 – 348.

[60] R. L. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldshmidt, P. A. Griffits, *Exterior differential systems*, Springer-Verlag, 1984.

[61] E. Cartan, Lès systemes de Pfaff a cinque variables et lès equations aux derivees partielles du second ordre, *Ann. Sci. Ècole Normale* **27** (1910), 3: 109–192.

[62] A. A. Davydov, Qualitative theory of control systems. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1994.

[63] M. J. Enos, Controllability of a system of two symmetric rigid bodies in three space. *SIAM J. Control Optim.* **32** (1994), No. 4.

[64] J. P. Gauthier and G. Bornard, Contrôlabilité des systèmes bilinèaires, *SIAM J. Control Optim.*, **20**, No. 3, 377–384 (1982).

[65] J. P. Gauthier, I. Kupka and G. Sallet, *Controllability of Right Invariant Systems on Real Simple Lie Groups*, Systems & Control Letters **5** (1984), 187–190.

[66] J.-P. Gauthier, I. A. K. Kupka, *Deterministic observation theory and applications*, Cambridge University Press, 2001.

[67] V. Ya. Gershkovich, Engel structures on four dimensional manifolds, *Preprint series No. 10*, The University of Melbourne, Dept. of Mathematics, 1992.

[68] J. Hilgert, K. H. Hofmann and J. D. Lawson, *Lie Groups, Convex Cones, and Semigroups*, Oxford University Press, 1989.

[69] J. Hilgert, K. H. Hofmann and J. D. Lawson, "Controllability of systems on a nilpotent Lie group," **20**, 185–190 (1985).

[70] J. Hilgert and K. H. Neeb, *Lie Semigroups and their Applications*, Lecture Notes in Math. **1552** (1993).

[71] Hirsch M.W., Convergence in neural nets, *Proceedings of the International Conference on Neural Networks*, vol. II, 1987, pp. 115–125, IEEE, USA.

[72] K. H. Hofmann, *Lie Algebras with Subalgebras of Codimension One*, Illinois J. Math. **9** (1965), 636–643.

[73] K. H. Hofmann, *Hyperplane Subalgebras of Real Lie Algebras*, Geometriae Dedicata **36** (1990), 207–224.

[74] K. H. Hofmann, *Compact Elements in Solvable Real Lie Algebras*, Seminar Sophus Lie (now: Journal of Lie theory) **2** (1992), 41–55.

[75] K. H. Hofmann and J. D. Lawson, *Foundations of Lie Semigroups*, Lecture Notes in Mathematics **998** (1983), 128–201.

[76] K. R. Hunt, *Controllability of Nonlinear Hypersurface Systems*, In: C.I. Byrnes and C. F. Martin Eds., Algebraic and Geometric Methods in Linear Systems Theory, AMS, Providence, Rhode Island, 1980.

[77] K. R. Hunt, *n-Dimensional Controllability with* $(n-1)$ *Controls*, IEEE Trans. Automatic Control **27** (1982), 113–117.

[78] A. Isidori, *Nonlinear control systems: an introduction*, Springer-Verlag, 1985.

[79] B. Jakubczyk, W. Respondek, Eds., Geometry of feedback and optimal control. Marcel Dekker, 1998

[80] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge University Press, 1997.

[81] V. Jurdjevic and I. Kupka, “Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces," *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble **31**, No. 4, 151–179 (1981).

[82] V. Jurdjevic and I. Kupka, “Control systems subordinated to a group action: Accessibility," *J. Differ. Equat.*, **39**, 186–211 (1981).

[83] V. Jurdjevic, H. J. Sussmann, “Controllability of non-linear systems," *J. Diff. Equat.*, **12**, 95–116 (1972).

[84] V. Jurdjevic and H. Sussmann, “Control systems on Lie groups," *J. Diff. Equat.*, **12**, 313–329 (1972).

[85] M. Kawski, Combinatorics of nonlinear controllability and noncommuting flows. In: Mathematical control theory, ICTP Lecture Notes Series, 2002, v.8, 222–311

[86] A. Krener, “A generalization of Chow’s theorem and the Bang-Bang theorem to non-linear control problems,"*SIAM J. Control*, **12**, 43–51 (1974).

[87] J. D. Lawson, “Maximal subsemigroups of Lie groups that are total," *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **30**, 479–501 (1985).

[88] J.P. Laumond, Nonholonomic motion planning for mobile robots, *LAAS Report 98211*, May 1998, LAAS-CNRS, Toulouse, France.

[89] M. Lovric, Left-invariant control systems on Lie groups. *Preprint* F193-CT03. *The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Canada*, January 1993.

[90] A. Marigo, A. Bicchi, Rolling bodies with regular surface: the holonomic case, In: *Differential geometry and control: Summer Research Institute on Differential Geometry and Control, June 29–July 19, 1997, Univ. Colorado, Boulder*, G. Ferreyra et al., Eds, 1999, 241–256.

[91] D. Montgomery and H. Samelson, *Transformation Groups of Spheres*, Ann. of Math. **44** (1943), 454–470.

[92] R. Montgomery, A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. AMS, 2002, 259pp.

[93] D. Mittenhuber, Controllability of Solvable Lie Algebras. J. Dynam. Control Systems 6 (2000), No. 3, 453–459.

[94] D. Mittenhuber, Controllability of Systems on Solvable Lie Groups: the Generic Case. J. Dynam. Control Systems 7 (2001), No. 1, 61–75.

[95] Möhler R.R., Bilinear control processes, in: *Mathematics in science and Engineering*, **106**, Academic Press, New York, 1973.

[96] H. Nijmeijer, A. van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, 1990.

[97] Rink R.E., Möhler R.R., Completely controllable bilinear systems, *SIAM J. Control*, **6** (1968), 477 – 486.

[98] Sachkov Yu. L. , Invariant Orthants of Bilinear Systems. Proc. Second Europ Contr. Confer., 776–779, Groningen, Netherlands, 1993

[99] Yu. L. Sachkov, “Controllability of hypersurface and solvable invariant systems," *J. Dyn. Control Syst.*, **2**, No. 1, 55–67 (1996).

[100] Yu. L. Sachkov, “Controllability of right-invariant systems on solvable Lie groups," *J. Dyn. Control Syst.*, **3**, No. 4, 531–564 (1997).

[101] Sachkov Yu. L., On Positive Orthant Controllability of Bilinear Systems in Small Codimensions, SIAM Journ. Contr. Optimiz., 35 (1997), 1: 29-35

[102] Sachkov Yu. L., Controllability of Affine Right-Invariant Systems on Solvable Lie Groups, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 1 (1997), 239–246.

[103] Yu. L. Sachkov, “On invariant orthants of bilinear systems," *J. Dyn. Control Syst.*, **4**, No. 1, 137–147 (1998).

[104] Sachkov Yu. L., Survey on Controllability of Invariant Systems on Solvable Lie Groups, Differ. Geometry and Control, Proc. Of Symposia in Pure Mathem. 64 (1999), 297-317

[105] Yu. L. Sachkov, Classification of controllable systems on low-dimensional solvable Lie groups, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6** (2000), 2: 159–217.

[106] Yu. L. Sachkov, Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures, *Transactions of the American Mathematical Society*, **356** (2004), 2: 457–494.

[107] H. Samelson, *Topology of Lie Groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **58** (1952), 2–37.

[108] L. A. B. San Martin, “Invariant control sets on flag manifolds," *Math. Control Signals Systems*, **6**, 41–61 (1993).

[109] L. A. B. San Martin and P. A. Tonelli, “Semigroup actions on homogeneous spaces," *Semigroup Forum*, **14**, 1–30 (1994).

[110] F. Silva Leite and P. C. Crouch, Controllability on classical Lie groups, *Math. Control Signals Syst.* **1** (1988), 31–42.

[111] E.D. Sontag, Mathematical control theory: Deterministic finite dimensional systems. *Spinger-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo*, 1990.

[112] H. J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Am. Math. Soc. **180** (1973), 171–188.

[113] H. J. Sussmann, Ed., Nonlinear controllability and optimal control. Marcel Dekker, 1990

[114] H. J. Sussmann, Lie brackets and local controllability: a sufficient condition for scalar-input systems. SIAM J. Control and Optimization,1983, v.21, 686–713

[115] H. J. Sussmann, A general theorem on local controllability. SIAM J. Control and Optimization,1987, v.25, 158–194

[116] V.S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations. *Spinger-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo*, 1984.

[117] M. Vendittelli, J.P. Laumond, G. Oriolo, Steering nonholonomic systems via nilpotent approximations: The general two-trailer system, *1999 IEEE International Confer. on Robotics and Automation*, May 10–15, 1999, Detroit, MI.