

УДК 517.97

Устойчивость инфлекссионных эластик, центрированных в вершинах или точках перегиба¹

©2010 г. Ю. Л. Сачков², С. В. Левяков³

Поступило в феврале 2010 г.

Получены условия устойчивости для инфлекссионных эластик Эйлера, средняя точка которых есть вершина или точка перегиба. Теоретические результаты сопоставляются с экспериментальными данными для упругих стержней.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1744 г. Леонард Эйлер опубликовал решение следующей задачи о стационарных конфигурациях упругого стержня [12]. Дан упругий стержень на плоскости, у которого закреплены положения концов, а также углы наклона стержня на концах. Требуется определить возможные профили стержня при заданных граничных условиях. Эйлер получил дифференциальные уравнения для стационарных конфигураций стержня и описал их возможные качественные типы. Эти конфигурации называются эйлеровыми эластичками.

Эйлеровы эластички суть критические точки функционала упругой энергии на пространстве кривых с фиксированными концами и касательными на концах. Целью данной работы является исследование локальной оптимальности эластик: является ли критическая точка точкой локального минимума функционала энергии? Мы интересуемся тем, какие эластички доставляют минимальное значение функционалу энергии среди достаточно близких кривых, удовлетворяющих граничным условиям (локальная оптимальность). Этот вопрос не исследован в полной мере, несмотря на очевидную важность для механики и инженерных приложений.

Локальная оптимальность является существенной для теории упругости задач, так как она соответствует устойчивости эйлеровых эластик при малых возмущениях, сохраняющих граничные условия. В вариационном исчислении и оптимальном управлении точка, в которой экстремальная траектория теряет локальную оптимальность, называется сопряженной точкой. Мы дадим точное описание сопряженных точек для эластик специального вида (середины которых является вершиной эластички, т.е. экстремумом кривизны, или точкой перегиба).

Эйлер вывел дифференциальное уравнение, известное сейчас как уравнение Эйлера–Лагранжа для соответствующей задачи оптимального управления, и свел его к квадратурам. В современной терминологии Эйлер исследовал качественное поведение функций Якоби, параметризующих упругие кривые, с помощью качественного анализа задающих их ОДУ. Эйлер описал все возможные типы упругих кривых и указал значения параметров, при которых эти типы реализуются. Исследуя эластички, бесконечно близкие к прямой линии, Эйлер получил знаменитую формулу для критической нагрузки сжатого стержня.

Задача об эластичках долгое время представляла лишь теоретический интерес и служила одним из примеров приложения теории эллиптических функций (см., например, [22, 6]). В связи

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00246-а).

²Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, 152020 Россия.
E-mail: sachkov@sys.botik.ru

³Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, 630092 Россия.
E-mail: stan-levyakov@yandex.ru

с широким внедрением стали в практику проектирования и с появлением гибких тонкостенных конструкций, стимулировавшим развитие теории устойчивости деформируемых систем, решение об эластике стало приобретать практическое значение. Возникли, в частности, важные для инженерных приложений вопросы: каково поведение сжатой стойки при нагрузках, превышающих эйлерово критическое значение, какова при этом форма стойки, единственна ли эта форма и устойчива ли она? Решению этих вопросов посвящены многочисленные исследования [3, 8, 20, 14, 28, 42, 35, 39, 34, 40], где рассматривались различные условия опирания и нагружения гибких нерастяжимых стержней. В последние десятилетия интерес к эластикам возрос в связи с применением теории гибких стержней к анализу микро- и наноструктур в биологии и нанотехнологиях [21, 41, 33, 23]. Подтверждено существование множественных форм равновесия при фиксированной нагрузке. Выяснение вопроса о том, какие из возможных состояний равновесия стержня могут быть реализованы в действительности, приводит к анализу устойчивости этих состояний.

Важные математические результаты по вопросу устойчивости эластик получены в 1906 г. будущим нобелевским лауреатом Максом Борном в диссертации “Устойчивость упругих линий на плоскости и в пространстве” [15]. Борн доказал, что дуга эластики, не содержащая точек перегиба, устойчива. Для общего случая он записал якобиан, обращающийся в нуль в сопряженных точках. Из-за сложности функций, входящих в этот якобиан, Борн ограничился численным исследованием сопряженных точек. Он первым начертил эластики на основе приближенных вычислений и проверил соответствие теории экспериментальным данным для упругих стержней.

Вопросы устойчивости плоских равновесных состояний стержня обсуждались также в [8, 9]. В [32] рассматривается задача устойчивости эластики при действии консервативных сжимающих осевых сил. С помощью аналитических методов исследуется знак второй вариации функционала энергии стержня. Впервые показана возможность вторичной потери устойчивости для искривленного стержня при нагрузках, превышающих эйлеров предел.

Другие известные авторам теоретические результаты по исследованию устойчивости криволинейных состояний получены в основном численными методами путем замены упругого стержня его дискретными аналогами, что позволяет применить критерии для анализа знакоопределенности гессиана энергии системы с конечным числом степеней свободы. Так, в [19, 36] рассмотрен простейший случай консольного стержня под действием поперечной нагрузки на свободном конце. В работах [4, 5] с использованием метода конечных элементов решены задачи о закритическом деформировании сжатых стержней, исследована вторичная потеря устойчивости [2, 17] и определены устойчивые и неустойчивые состояния в закритической области. В [27, 31] предложен численно-аналитический метод, основанный на разложении второй вариации полной энергии стержня в ряд по собственным функциям вспомогательной задачи Штурма–Лиувилля. В [25] и [30] с использованием понятия сопряженных точек исследована устойчивость стержней с заземленными концами при сжатии. Анализ литературы показывает, что вопросы устойчивости равновесных форм гибких стержней рассматривались в основном для силового нагружения. Практически отсутствуют работы, где устойчивость деформированных состояний анализируется для произвольных кинематических условий на концах стержня. Очевидно, это связано с серьезными математическими трудностями, возникающими при нахождении самих форм равновесия. В работах [23, 24] содержатся экспериментальные данные по изучению эластик, подтверждающие теоретические выводы о существовании множественных форм равновесия при заданных условиях на концах стержней. Экспериментально-теоретическому исследованию потери устойчивости эластик посвящены работы [18, 16].

В работе [38] получены двусторонние оценки первой сопряженной точки на эластиках, на основе которых получены условия устойчивости эластик в терминах точек перегиба. Эти результаты приведены далее в разд. 3.

В теоретическом плане данная работа является продолжением работ [37, 38] и имеет следующую структуру. В разд. 2 задача об эластике формулируется как задача оптимального управления и приводится полученная в работе [37] параметризация эластик функциями Якоби. В разд. 3 напоминаются необходимые далее результаты работы [38] о сопряженных точках на эластике с точками перегиба (такие эластики называются инфлекссионными). В разд. 4 и 5 доказаны условия устойчивости инфлекссионных эластик, средняя точка которых является соответственно их вершиной или точкой перегиба. Получены верхние грани длин устойчивых эластик, центрированных в вершине или точке перегиба. В разд. 6 теоретические результаты об устойчивости эластик подтверждены опытами с образцами в виде полосок из тонкой целлюлозной пленки. Приведен ряд фотографий, демонстрирующих устойчивость и неустойчивость стационарных конфигураций упругой полоски. В заключительном разд. 7 подводятся итоги работы и приводятся некоторые открытые проблемы для дальнейших исследований.

2. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ИНФЛЕКСИОННЫЕ ЭЛАСТИКИ

Задача о нахождении форм равновесия гибкого нерастяжимого стержня γ при заданных кинематических условиях на его концах a_0, a_1 формализуется как следующая задача оптимального управления [26, 37]:

$$\dot{x} = \cos \theta, \quad \dot{y} = \sin \theta, \quad \dot{\theta} = u, \quad (1)$$

$$q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \theta_0), \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1), \quad t_1 \text{ фиксировано}, \quad (3)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

где x, y — координаты текущей точки эластике; θ — угол между касательной к эластике и осью x (см. рис. 1); t — длина дуги; точкой обозначена производная по t ; интеграл J пропорционален энергии деформации стержня при изгибе.

Ниже при исследовании устойчивости состояний стержня, которые описываются решением вариационной задачи (1)–(4), используется терминология теории оптимального управления [1, 7, 26]. В частности, принимая во внимание кинетическую аналогию Кирхгофа эластик с маятником [6], параметр t будем называть временем.

Задача Эйлера имеет очевидные симметрии — параллельные переносы и вращения двумерной плоскости, поэтому она является левоинвариантной задачей на группе движений

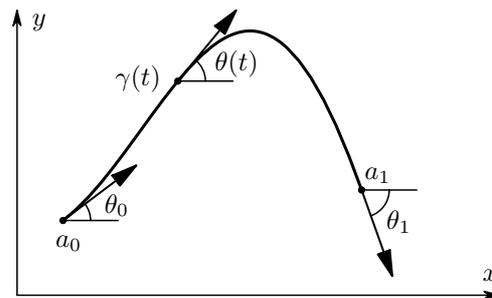


Рис. 1. Дуга эластике и обозначения

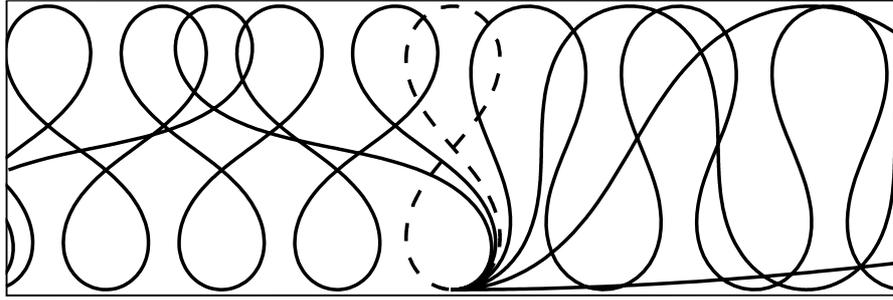


Рис. 2. Инфлекссионные элаستيки

плоскости. Учитывая эти симметрии задачи, будем далее считать, что начальная точка есть

$$q_0 = (x_0, y_0, \theta_0) = (0, 0, 0),$$

т.е. при $t = 0$ элаستيки выходят из начала координат в направлении оси x .

Элаستيки (проекции экстремальных траекторий в задаче (1)–(4)) делятся на два класса:

- 1) инфлекссионные (имеющие точки перегиба);
- 2) неинфлекссионные (не имеющие точек перегиба).

В этой работе мы интересуемся только инфлекссионными эластиками (как было уже отмечено, все неинфлекссионные элаستيки устойчивы [15]).

В работе [37] получена следующая параметризация инфлекссионных эластиков:

$$x_t = \frac{2}{\sqrt{r}} \operatorname{dn}^2(\sqrt{r}\varphi) (E(\sqrt{r}\varphi_t) - E(\sqrt{r}\varphi)) + \frac{4k^2}{\sqrt{r}} \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) (\operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi) - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t)) + \frac{2k^2}{\sqrt{r}} \operatorname{sn}^2(\sqrt{r}\varphi) (\sqrt{rt} + E(\sqrt{r}\varphi) - E(\sqrt{r}\varphi_t)) - t, \quad (5)$$

$$y_t = \frac{2k}{\sqrt{r}} (2 \operatorname{dn}^2(\sqrt{r}\varphi) - 1) (\operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi) - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t)) - \frac{2k}{\sqrt{r}} \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) (2(E(\sqrt{r}\varphi_t) - E(\sqrt{r}\varphi)) - \sqrt{rt}), \quad (6)$$

$$\sin \frac{\theta_t}{2} = k \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t) - k \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t), \quad (7)$$

$$\cos \frac{\theta_t}{2} = \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t) + k^2 \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t). \quad (8)$$

Здесь и далее $\operatorname{sn}(p)$, $\operatorname{dn}(p)$ — эллиптические функции Якоби; $E(p)$ — эллиптическая функция Якоби; $k \in (0, 1)$ — модуль функций Якоби; $F(p, k)$ и $E(p, k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода; $K(k) = F(\pi/2, k)$ и $E(k) = E(\pi/2, k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода [11, 29]; $\varphi_t = \varphi + t$.

Параметры φ , k , r имеют следующий смысл:

- k определяет форму элаستيки;
- параметр r характеризует величину результирующей реактивных сил на закрепленном конце стержня;
- отношение $\frac{k}{\sqrt{r}}$ определяет размер элаستيки: амплитуда элаستيки (максимальное отклонение от прямой, проходящей через точки перегиба) равна $\frac{2k}{\sqrt{r}}$;
- φ есть начальная фаза дуги элаستيки.

Несколько инфлекссионных эластик разной формы, но одинаковой амплитуды изображены на рис. 2. Штриховой линией изображена замкнутая эластика в форме цифры 8, соответствующая модулю $k = k_0$ (см. ниже лемму 3.1).

Семейство инфлекссионных эластик параметризуется тройками

$$\lambda = (\varphi, k, r) \in N_1 = \{(\varphi, k, r) \mid r > 0, k \in (0, 1), \sqrt{r}\varphi \pmod{4K(k)} \in [0, 4K(k)]\}.$$

Таким образом, для любого $t \in \mathbb{R}$ определено экспоненциальное отображение

$$\text{Exp}_t: \lambda = (\varphi, k, r) \mapsto q_t = (\theta_t, x_t, y_t), \quad \lambda \in N_1, \quad q_t \in M,$$

переводящее тройку $\lambda = (\varphi, k, r)$ в конец соответствующей экстремальной траектории, проектирующейся в инфлекссионную эластику.

3. СОПРЯЖЕННЫЕ ТОЧКИ

Напомним результаты работ [10, 37], связанные с описанием сопряженных точек в задаче Эйлера на инфлекссионных эластике. Как известно, момент t является сопряженным временем тогда и только тогда, когда отображение Exp_t вырождено, т.е. его якобиан $J = \frac{\partial(x_t, y_t, \theta_t)}{\partial(\varphi, k, r)}$ обращается в нуль. Непосредственное вычисление с использованием параметризации экстремальных траекторий (5)–(8) дает следующее:

$$J = \frac{\partial(x_t, y_t, \theta_t)}{\partial(\varphi, k, r)} = -\frac{32k}{(1-k^2)r^{3/2}\Delta^2} J_1, \quad (9)$$

$$J_1 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2, \quad z = \text{sn}^2 \tau \in [0, 1], \quad (10)$$

$$a_2 = -k^2 \text{sn } p \cdot x_1, \quad (11)$$

$$a_2 + a_1 + a_0 = (1 - k^2) \text{sn } p \cdot x_1, \quad (12)$$

$$a_0 = f_1(p, k) x_2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x_1 = & -\text{dn } p \left(2 \text{sn } p \cdot \text{dn } p E^3(p) + ((4k^2 - 5)p \text{sn } p \cdot \text{dn } p + \text{cn } p (3 - 6k^2 \text{sn}^2 p)) E^2(p) + \right. \\ & + ((4k^2 - 5) \text{cn } p (1 - 2k^2 \text{sn}^2 p)p + \text{sn } p \cdot \text{dn } p (4p^2 - 1 + k^2(6 \text{sn}^2 p - 4 - 4p^2))) E(p) + \\ & + p \text{sn } p \cdot \text{dn } p (1 - (1 - k^2)p^2 + k^2(4k^2 - 5) \text{sn}^2 p) + \\ & \left. + 2 \text{cn } p (k^2 \text{sn}^2 p \cdot \text{dn}^2 p + (1 - k^2)(1 - 2k^2 \text{sn}^2 p)p^2) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$x_2 = \text{cn } p (2(1 - k^2) E(p) - E^2(p) - (1 - k^2)p^2) + \text{sn } p \cdot \text{dn } p (E(p) - (1 - k^2)p), \quad (15)$$

$$f_1(p, k) = \text{sn } p \cdot \text{dn } p - (2E(p) - p) \text{cn } p, \quad (16)$$

$$p = \sqrt{rt}/2, \quad \tau = \sqrt{r}(\varphi + t/2), \quad \Delta = 1 - k^2 \text{sn}^2 p \cdot \text{sn}^2 \tau.$$

Лемма 3.1 [10]. *Уравнение*

$$2E(k) - K(k) = 0, \quad k \in [0, 1),$$

имеет единственный корень $k_0 \in (0, 1)$.

Компьютерные вычисления в системе Mathematica [43] дают приближенное значение $k_0 = 0.908908557548541478236118908744 \dots$. Модулю $k = k_0$ соответствует замкнутая эйлерова эластика-восьмерка, показанная штриховой линией на рис. 2 (см. также ниже рис. 8, а).

Предложение 3.1 [10]. Для любого $k \in [0, 1)$ функция $f_1(p, k)$ (16) имеет счетное число корней $p = p_n^1$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти корни нечетны по n , в частности, $p_0^1 = 0$. Корни p_n^1 локализуются следующим образом:

$$p_n^1 \in (-K + 2Kn, K + 2Kn), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В частности, корни p_n^1 монотонны по n . Более того, при $n \in \mathbb{N}$

$$k \in [0, k_0) \Rightarrow p_n^1 \in (2Kn, K + 2Kn),$$

$$k = k_0 \Rightarrow p_n^1 = 2Kn,$$

$$k \in (k_0, 1) \Rightarrow p_n^1 \in (-K + 2Kn, 2Kn),$$

где k_0 есть единственный корень уравнения $2E(k) - K(k) = 0$ (см. лемму 3.1).

В следующей лемме описаны нули функции x_2 (15), входящей в разложение (13) функции a_0 .

Лемма 3.2 [38]. Для любого $k \in (0, 1)$ функция $x_2(p)$ (15) имеет счетное число корней $p = p_n^{x_2} \geq 0$. Далее, $p_0^{x_2} = 0$ и $p_n^{x_2} \in (2Kn, K + 2Kn)$ при $n \in \mathbb{N}$; более того,

$$k < k_0 \Rightarrow p_n^{x_2} \in (p_n^1, K + 2Kn). \quad (17)$$

В следующей теореме получены оценки первого сопряженного времени на инфлекссионных эластиках:

$$t_1^{\text{conj}}(\lambda) = \min\{t > 0 \mid t - \text{сопряженное время вдоль траектории } q(s) = \text{Exp}_s(\lambda)\}.$$

Теорема 3.1 [38]. Пусть $\lambda = (\varphi, k, r) \in N_1$. Тогда число $t_1^{\text{conj}}(\lambda)$ принадлежит отрезку, ограниченному точками $\frac{4K(k)}{\sqrt{r}}$, $\frac{2p_1^1(k)}{\sqrt{r}}$, а именно:

$$k \in (0, k_0) \Rightarrow t_1^{\text{conj}} \in \left[\frac{4K(k)}{\sqrt{r}}, \frac{2p_1^1(k)}{\sqrt{r}} \right],$$

$$k = k_0 \Rightarrow t_1^{\text{conj}} = \frac{4K(k)}{\sqrt{r}} = \frac{2p_1^1(k)}{\sqrt{r}},$$

$$k \in (k_0, 1) \Rightarrow t_1^{\text{conj}} \in \left[\frac{2p_1^1(k)}{\sqrt{r}}, \frac{4K(k)}{\sqrt{r}} \right].$$

Естественной мерой времени на экстремальных траекториях в задаче Эйлера является период эластик $T(k) = 4K(k)/\sqrt{r}$ (период колебаний маятника — кинетического аналога Кирхгофа для эластик). В терминах периода T оценки теоремы 3.1 записываются следующим образом.

Следствие 3.1 [38]. Пусть $\lambda \in N_1$. Тогда

$$k \in (0, k_0) \Rightarrow t_1^{\text{conj}} \in [T, t_1^1] \subset [T, 3T/2), \quad t_1^1 = 2p_1^1/\sqrt{r} \in (T, 3T/2),$$

$$k = k_0 \Rightarrow t_1^{\text{conj}} = T,$$

$$k \in (k_0, 1) \Rightarrow t_1^{\text{conj}} \in [t_1^1, T] \subset (T/2, T], \quad t_1^1 = 2p_1^1/\sqrt{r} \in (T/2, T).$$

Поучительно выразить условия локальной оптимальности эластик в терминах их точек перегиба.

Следствие 3.2 [38]. Пусть $\lambda \in N_1$, $q(s) = (x_s, y_s, \theta_s) = \text{Exp}(\lambda_s)$, и пусть $\Gamma = \{\gamma_s = (x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$ есть соответствующая инфлекссионная эластика.

1. Если дуга Γ не содержит точек перегиба, то она локально оптимальна.
2. Если $k \in (0, k_0]$ и дуга Γ содержит в точности одну точку перегиба, то она локально оптимальна.
3. Если дуга Γ содержит не менее трех точек перегиба внутри себя, то она не является локально оптимальной.

Следующее утверждение описывает сопряженные точки для эластик, центрированных в точке перегиба или вершине.

Следствие 3.3 [38]. Пусть $\lambda \in N_1$, $q(s) = (x_s, y_s, \theta_s) = \text{Exp}(\lambda_s)$, и пусть $\Gamma = \{\gamma_s = (x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$ есть соответствующая инфлекссионная эластика.

1. Если эластика Γ центрирована в вершине, то конечный момент t есть сопряженное время тогда и только тогда, когда

$$p = \frac{\sqrt{rt}}{2} \in \{p_n^1 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{p_m^{x_2} \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

2. Если эластика Γ центрирована в точке перегиба, то конечный момент t есть сопряженное время тогда и только тогда, когда

$$p = \frac{\sqrt{rt}}{2} \in \{2Kn \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{p_m^{x_1} \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Здесь через $p_m^{x_1}$ обозначены нули функции $x_1(p)$ (14), а через $p_m^{x_2}$ нули функции $x_2(p)$ (15) (см. лемму 3.2).

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛАСТИК, ЦЕНТРИРОВАННЫХ В ВЕРШИНЕ

Получим условия устойчивости для инфлекссионных эластик, средняя точка которых является вершиной:

$$\Gamma = \{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}, \quad q(s) = (x_s, y_s, \theta_s) = \text{Exp}_s(\lambda), \quad \lambda = (\varphi, k, r) \in N_1, \quad (18)$$

$$\text{Точка } (x_{t/2}, y_{t/2}) \text{ есть вершина эластики } \Gamma. \quad (19)$$

Как известно [37, 38], условие (19) эквивалентно равенству

$$\text{sn}(\tau, k) = 0, \quad \tau = \sqrt{r}(\varphi + t/2).$$

Обозначим

$$t_1^1 = t_1^1(k, r) = \frac{2}{\sqrt{r}} p_1^1(k),$$

где число p_1^1 определено в предложении 3.1.

Теорема 4.1. Пусть инфлекссионная эластика Γ (18) центрирована в вершине.

1. Если $t < t_1^1$, то эластика Γ устойчива.
2. Если $t = t_1^1$, то эластика Γ критическая, т.е. ее конец является первой сопряженной точкой.
3. Если $t > t_1^1$, то эластика Γ неустойчива.

Доказательство. Рассмотрим наряду с эластикой Γ также эластикку сравнения

$$\tilde{\Gamma} = \{(\tilde{x}_s, \tilde{y}_s) \mid s \in [0, \tilde{t}]\}, \quad \tilde{q}(s) = (\tilde{x}_s, \tilde{y}_s, \tilde{\theta}_s) = \text{Exp}_s(\tilde{\lambda}), \quad \tilde{\lambda} = (\tilde{\varphi}, k, r) \in N_1,$$

где

$$\tilde{t} = t_1^1, \quad \tilde{\varphi} = \varphi + (t - \tilde{t})/2.$$

В силу совпадения параметров (k, r) элаستيки Γ и $\tilde{\Gamma}$ являются конечными дугами одной и той же бесконечной элаستيки (с точностью до движения плоскости⁴). Равенство $\varphi + t/2 = \tilde{\varphi} + \tilde{t}/2$ означает, что эластика $\tilde{\Gamma}$, как и Γ , центрирована в вершине. Эластики $\tilde{\Gamma}$ и Γ имеют одну и ту же вершину и вложены одна в другую: если $t \leq \tilde{t}$, то $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$, а если $t \geq \tilde{t}$, то $\Gamma \supset \tilde{\Gamma}$.

В силу равенства $\tilde{t} = t_1^1 = (2/\sqrt{r})p_1^1$ и утверждения 1 следствия 3.3 момент \tilde{t} есть сопряженное время для $\tilde{q}(s)$.

1. Пусть $t < t_1^1$.

1.1. Пусть $k \in [k_0, 1)$. Тогда согласно теореме 3.1 выполнено неравенство $t_1^{\text{conj}}(\tilde{\lambda}) \geq \tilde{t}$. Поэтому $t_1^{\text{conj}}(\tilde{\lambda}) = \tilde{t}$. Траектория $\tilde{q}(s)$, $s \in [0, (\tilde{t} + t)/2]$, не содержит сопряженных точек, потому локально оптимальна, т.е. эластика $\{(\tilde{x}_s, \tilde{y}_s) \mid s \in [0, (\tilde{t} + t)/2]\}$ устойчива. Но тогда устойчива и содержащаяся в ней дуга Γ .

1.2. Пусть $k \in (0, k_0)$. Рассмотрим вспомогательное непрерывное семейство эластик, центрированных в одной и той же вершине:

$$\Gamma^\alpha = \{(x_s^\alpha, y_s^\alpha) \mid s \in [0, t^\alpha]\}, \quad q^\alpha(s) = (x_s^\alpha, y_s^\alpha, \theta_s^\alpha) = \text{Exp}_s(\lambda^\alpha), \quad \lambda^\alpha = (\varphi^\alpha, k, r) \in N_1, \quad (20)$$

$$t^\alpha = \alpha, \quad \varphi^\alpha = \tilde{\varphi} + (\tilde{t} - t^\alpha)/2, \quad \alpha \in (0, \tilde{t}).$$

В силу регулярности нормальных экстремалей в задаче Эйлера об эластках [38] достаточно малые их дуги локально оптимальны, поэтому существует $\alpha_0 \in (0, \tilde{t})$, для которого траектория $q^{\alpha_0}(s)$, $s \in [0, t^{\alpha_0}]$, не содержит сопряженных точек. Рассмотрим непрерывное семейство экстремальных траекторий $q^\alpha(s)$, $s \in [0, t^\alpha]$, $\alpha \in [\alpha_0, \tilde{t})$.

1.2а. Докажем, что для любого $\alpha \in [\alpha_0, \tilde{t})$ точка $q^\alpha(t^\alpha)$ не является сопряженной для траектории $q^\alpha(s)$, $s \in [0, t^\alpha]$. От противного, пусть для некоторого $\alpha \in [\alpha_0, \tilde{t})$ точка $q^\alpha(t^\alpha)$ является сопряженной для траектории $q^\alpha(s)$. Эластика Γ^α центрирована в вершине, поэтому в силу следствия 3.3

$$\frac{\sqrt{r}}{2}t^\alpha \in \{p_n^1 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{p_m^{x_2} \mid m \in \mathbb{N}\}. \quad (21)$$

Но $t^\alpha = \alpha < \tilde{t} = \frac{2}{\sqrt{r}}p_1^1$, поэтому $\frac{\sqrt{r}}{2}t^\alpha < p_1^1$. С другой стороны, из неравенства $k < k_0$ и леммы 3.2 следует, что $p_m^{x_2} > p_1^1$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Поэтому включение (21) невозможно, противоречие. Утверждение 1.2а доказано.

1.2б. В силу гомотопической инвариантности индекса второй вариации [38, 13] любая траектория $q^\alpha(s)$, $s \in [0, t^\alpha]$, $\alpha \in [\alpha_0, \tilde{t})$, не содержит сопряженных точек, потому локально оптимальна. В частности, устойчивой является эластика $\Gamma = \Gamma^\alpha$, $\alpha = t$.

2. Воспользуемся семейством эластик Γ^α (20). Из устойчивости этих эластик при $\alpha < t_1^1$ и гомотопической инвариантности индекса второй вариации следует, что при $\alpha = t_1^1$ эластика Γ^α не содержит сопряженных точек. Но t_1^1 является сопряженным временем, поэтому $t_1^{\text{conj}}(\tilde{\lambda}) = t_1^1$.

3. Пусть $t > t_1^1$. Для любого $\varepsilon \in (0, t - t_1^1)$ эластика Γ содержит неустойчивую эластику $\{(\tilde{x}_s, \tilde{y}_s) \mid s \in [0, \tilde{t} + \varepsilon]\}$, поэтому Γ также неустойчива. \square

Для фиксированной бесконечной инфлекссионной элаستيки

$$\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}, \quad q(s) = (x_s, y_s, \theta_s) = \text{Exp}_s(\lambda), \quad \lambda = (\varphi, k, r) \in N_1,$$

т.е. для фиксированных параметров (k, r) , теорема 4.1 устанавливает верхнюю грань длин устойчивых эластик, центрированных в вершине: эта верхняя грань равна $t_1^1 = \frac{2}{\sqrt{r}}p_1^1(k)$. Естественно сравнить эту величину с длиной периода элаستيки $T = \frac{4}{\sqrt{r}}K(k)$. График отношения $\frac{t_1^1}{T} = \frac{p_1^1(k)}{2K(k)}$ представлен на рис. 3. Этот график имеет вертикальную касательную в точке $(k_0, 1)$.

⁴Далее это дополнение будет для краткости опускаться.

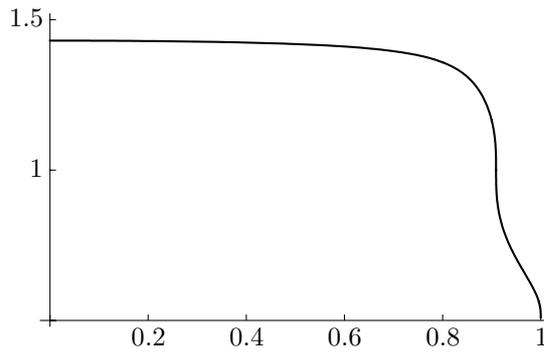


Рис. 3. График функции $k \mapsto \frac{p_1^1(k)}{2K(k)}$

Все устойчивые инфлекссионные эластики, центрированные в вершине, содержат две точки перегиба внутри себя, так как $t_1^1 \in (\frac{1}{2}T, \frac{3}{2}T)$.

Центрированная в вершине инфлекссионная эластика, длина которой равна периоду T , является

- устойчивой при $k < k_0$, так как в этом случае $t_1^1 > T$ (случай 1 теоремы 4.1);
- критической при $k = k_0$, так как в этом случае $t_1^1 = T$ (случай 2);
- неустойчивой при $k > k_0$, так как в этом случае $t_1^1 < T$ (случай 3).

Изображения таких эластик и их фото приведены ниже (см. рис. 6, рис. 7 для случая 1, рис. 8, а для случая 2 и рис. 8, б, в для случая 3). В критическом и неустойчивом случаях эластики слегка придерживаются пальцем для придания устойчивости.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛАСТИК, ЦЕНТРИРОВАННЫХ В ТОЧКЕ ПЕРЕГИБА

Получим условия устойчивости для эластик, средняя точка которых является точкой перегиба:

$$\Gamma = \{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}, \quad q(s) = (x_s, y_s, \theta_s) = \text{Exp}_s(\lambda), \quad \lambda = (\varphi, k, r) \in N_1, \quad (22)$$

$$\text{Точка } (x_{t/2}, y_{t/2}) \text{ есть точка перегиба элаستيки } \Gamma. \quad (23)$$

Как известно [37, 38], условие (23) эквивалентно равенству

$$\text{cn}(\tau, k) = 0, \quad \tau = \sqrt{r}(\varphi + t/2).$$

Напомним, что длина одного периода элаستيки равна $T = \frac{4K(k)}{\sqrt{r}}$.

Теорема 5.1. Пусть эластика Γ (22) центрирована в точке перегиба. Пусть также $k \in (0, k_0]$.

1. Если $t < T$, то эластика Γ устойчива.
2. Если $t = T$, то эластика Γ критическая, т.е. ее конец является первой сопряженной точкой.
3. Если $t > T$, то эластика Γ неустойчива.

Доказательство. 1. Пусть $t < T$. В силу теоремы 3.1 $t_1^{\text{conj}}(\lambda) > T > t$. Поэтому экстремальная траектория $q(s)$, $s \in [0, t]$, не содержит сопряженных точек и локально оптимальна. Иными словами, эластика Γ устойчива.

2. В случае $t = T$ доказательство аналогично доказательству утверждения 2 теоремы 4.1.

3. Пусть $t > T$. Построим эластику сравнения

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} &= \{(\tilde{x}_s, \tilde{y}_s) \mid s \in [0, T]\}, & \tilde{q}(s) &= (\tilde{x}_s, \tilde{y}_s, \tilde{\theta}_s) = \text{Exp}_s(\tilde{\lambda}), & \tilde{\lambda} &= (\tilde{\varphi}, k, r) \in N_1, \\ \tilde{t} &= T, & \tilde{\varphi} &= \varphi + (t - \tilde{t})/2.\end{aligned}$$

В силу следствия 3.3 точка $\tilde{q}(\tilde{t})$ является сопряженной для траектории $\tilde{q}(s)$. Поэтому эластика $\tilde{\Gamma}$ неустойчива. Следовательно, неустойчива и дуга Γ , содержащая эту эластику. \square

При $k > k_0$ утверждение 1 теоремы 5.1, вообще говоря, неверно. Эластика будет заведомо неустойчивой при $t > T$, но при k , достаточно близких к 1,⁵ она становится неустойчивой для некоторых $t < T$, так как первое сопряженное время возникает раньше периода T .

Теорема 5.1 устанавливает верхнюю грань T длин устойчивых эластик, центрированных в точке перегиба. Центрированные в точке перегиба эластики длины T содержат три точки перегиба: одну в центре и две на границе.

Эластики, центрированные в точке перегиба, и их фото изображены ниже (см. рис. 9 и 10; на рис. 10, a на фото упругой пластинки наложена соответствующая эластика, построенная в системе Mathematica: близость экспериментальной и математической эластик свидетельствует о высокой точности математической модели упругих стержней).

6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛАСТИК

Рассмотрим несколько однопараметрических семейств инфлекссионных эластик, центрированных в вершине или точке перегиба:

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha &= \{(x_t^\alpha, y_t^\alpha) \mid t \in [0, t^\alpha]\}, & q^\alpha(t) &= (x_t^\alpha, y_t^\alpha, \theta_t^\alpha) = \text{Exp}_t(\lambda^\alpha), \\ \lambda^\alpha &= (\varphi^\alpha, k^\alpha, r^\alpha) \in N_1, & \alpha &\in [\alpha_0, \alpha_1].\end{aligned}\tag{24}$$

Рассмотрены четыре семейства эластик. Для каждого из этих семейств 1–4 наблюдается потеря устойчивости, т.е. существует такое критическое значение параметра семейства $\alpha_* \in (\alpha_0, \alpha_1)$, что при $\alpha < \alpha_*$ эластика Γ^α устойчива, а при $\alpha > \alpha_*$ эластика Γ^α неустойчива (или наоборот). Для каждого семейства это критическое значение вычисляется.

6.1. Экспериментальная установка. Теоретические выводы об устойчивости эластик подтверждены опытами с образцами из тонкой целлулоидной пленки, допускающей значительные искривления без появления остаточных деформаций. Экспериментальная установка представляет собой толстый лист из оргстекла, на который нанесена равномерная сетка с шагом 10 мм. В узлах сетки выполнены отверстия для установки болтов с продольными прорезями для закрепления концов образца. Поскольку устойчивость эластик исследуется в широком диапазоне изменения граничных условий, возникает необходимость воспроизведения сильно искривленных, в том числе самопересекающихся, равновесных конфигураций. Экспериментальное исследование таких состояний для образцов прямоугольного поперечного сечения вызывает определенные трудности, так как из-за невозможности физического самопересечения образца его упругая ось выходит из плоскости изгиба и принимает форму пространственной кривой. Для того чтобы упругая линия стержня оставалась плоской кривой, изготовлены специальные образцы в виде полоски переменного сечения с прорезью (рис. 4). Ширина прорези выбрана несколько большей, чем ширина сплошной узкой части образца для обеспечения свободного прохождения одной части образца через другую. При этом выполнено важное условие неизменяемости ширины образца в свету, что гарантирует постоянство изгибной жесткости $Eah^3/12$ (E — модуль Юнга материала; a , h — размеры поперечного сечения образца) по

⁵При $k \in (\bar{k}, 1)$, $\bar{k} \approx 0.998$.

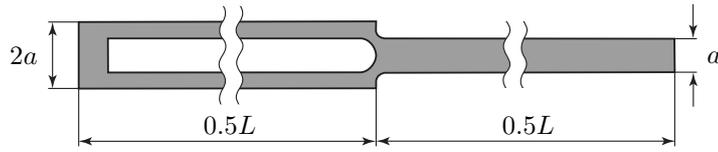


Рис. 4. Упругая полоска для моделирования самопересекающихся эластик

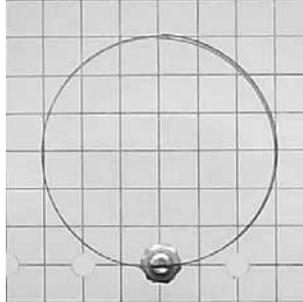


Рис. 5. Неинфлексионная эластика-окружность

длине образца, за исключением узкой зоны в средней части. Условие неизменяемости изгибной жесткости подтверждено воспроизведением состояния чистого изгиба (неинфлексионная эластика): при взаимном повороте концов на угол π и защемлении их на одной опоре образец с прорезью принимает форму окружности (рис. 5). На фотографии приведена упругая полоска длиной $L = 198$ мм и шириной $a = 4.5$ мм.

6.2. Семейство эластик 1. Рассмотрим следующее семейство эластик (24), центрированных в вершине:

$$\varphi^\alpha \equiv -t_1/2, \quad k^\alpha = \alpha, \quad \sqrt{r^\alpha} = 4K(\alpha)/t_1, \quad t^\alpha \equiv t_1, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Для этого семейства имеем

$$y_{t_1} = 0, \quad \theta_{t_1} = 0$$

(см. рис. 6 и фото на рис. 7, 8). Критическое значение параметра

$$\alpha_* = k_0,$$

что согласуется с устойчивостью эластик на рис. 7 и неустойчивостью на рис. 8, б, в. Критической является замкнутая эластика на рис. 8, а.

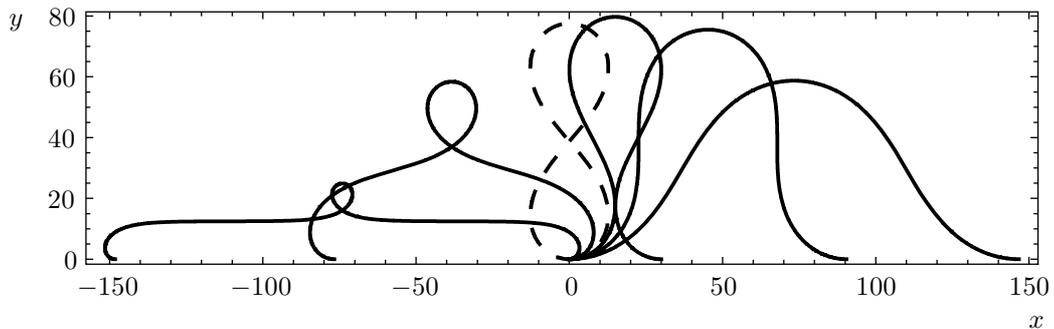


Рис. 6. Семейство эластик 1, центрированных в вершине

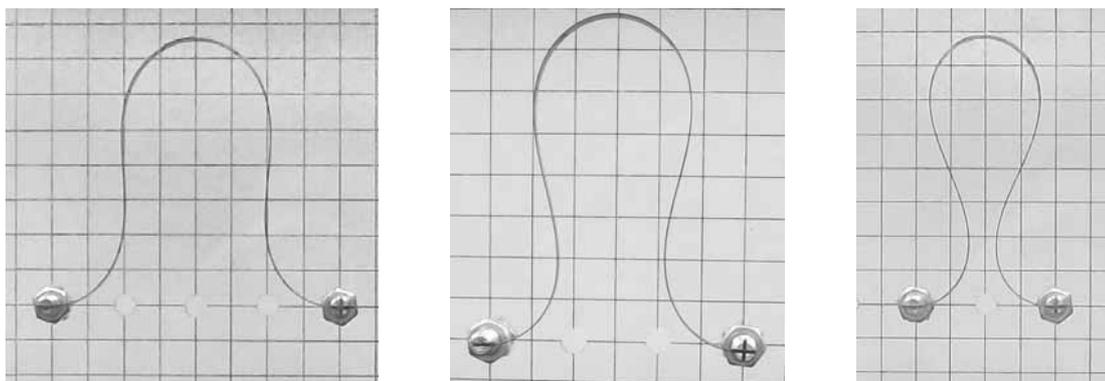


Рис. 7. Семейство 1: устойчивые эластики

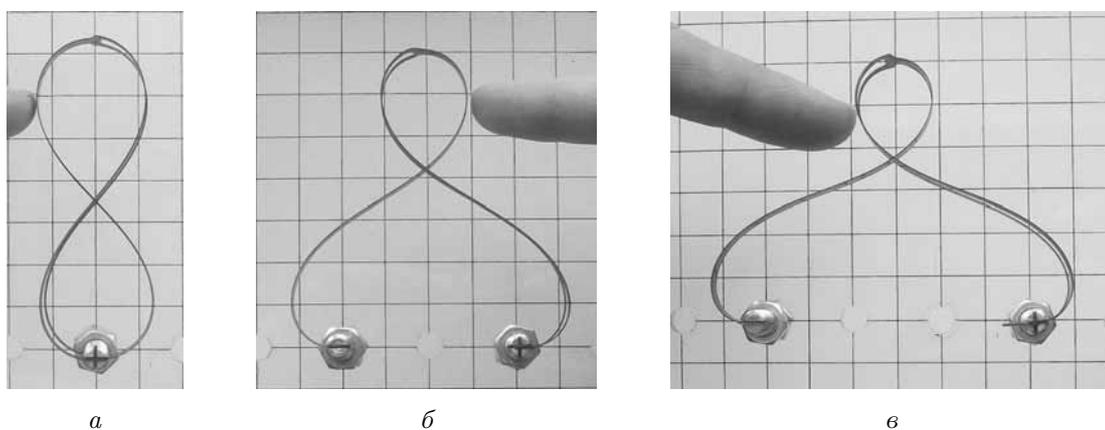


Рис. 8. Семейство 1: критическая эластика-восьмерка (а) и неустойчивые эластики (б, в)

6.3. Семейство эластик 2. Рассмотрим следующее семейство эластик (24), центрированных в точке перегиба:

$$\varphi^\alpha = t_1(3K(\alpha) - p_1^1(\alpha))/(2p_1^1(\alpha)), \quad k^\alpha = \alpha, \quad \sqrt{r^\alpha} = 2p_1^1(\alpha)/t_1, \quad t^\alpha \equiv t_1, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Для этого семейства имеем

$$y_{t_1} = 0, \quad \theta_{t_1} = 0$$

(см. рис. 9 и фото на рис. 10, 11). Критическое значение параметра

$$\alpha_* = k_0,$$

что согласуется с устойчивостью эластик на рис. 10. Критической является замкнутая эластика.

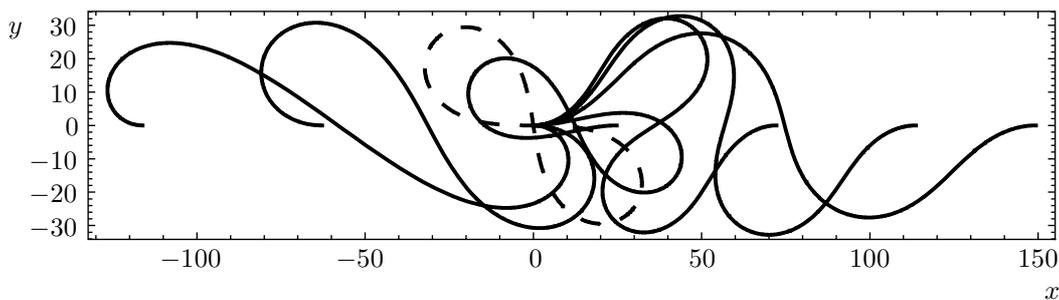


Рис. 9. Семейство эластик 2, центрированных в точке перегиба

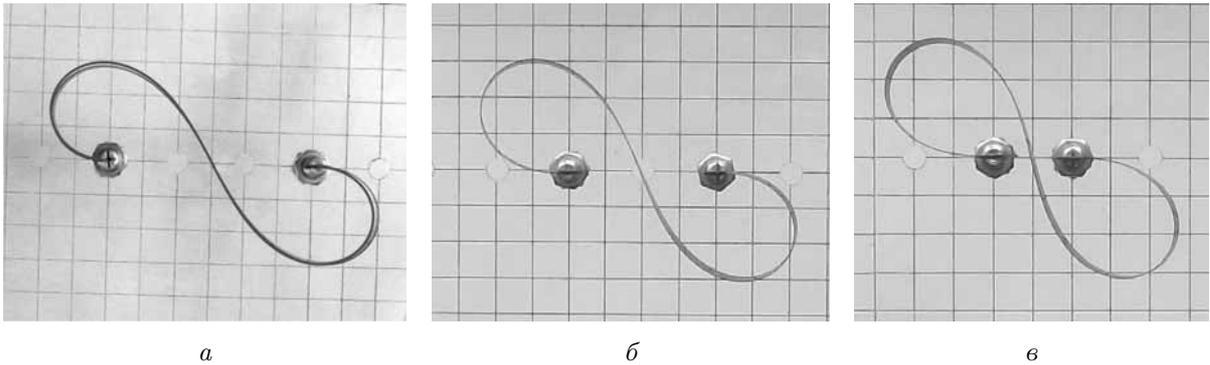


Рис. 10. Семейство 2: устойчивые эластики; *a* — на фото экспериментальной эластики наложена математическая эластика

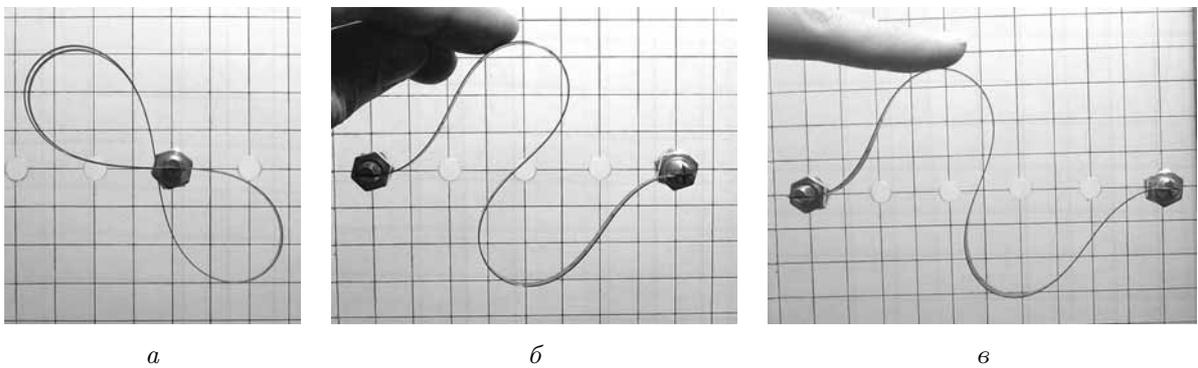


Рис. 11. Семейство 2: критическая эластика-восьмерка (*a*) и неустойчивые эластики (*б, в*)

6.4. Семейство эластик 3. Рассмотрим следующее семейство эластик (24), центрированных в вершине:

$$\varphi^\alpha \equiv -t_1/2, \quad k^\alpha = \alpha, \quad \sqrt{r^\alpha} = \frac{2}{t_1} F\left(\pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}, \alpha\right), \quad t_1^\alpha \equiv t_1, \quad \alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Для этого семейства имеем

$$x_{t_1} = 0, \quad \theta_{t_1} = \pi.$$

Эластики этого семейства изображены на рис. 12 (где ось *x* направлена вверх, а ось *y* вправо для согласованности с последующими фото).

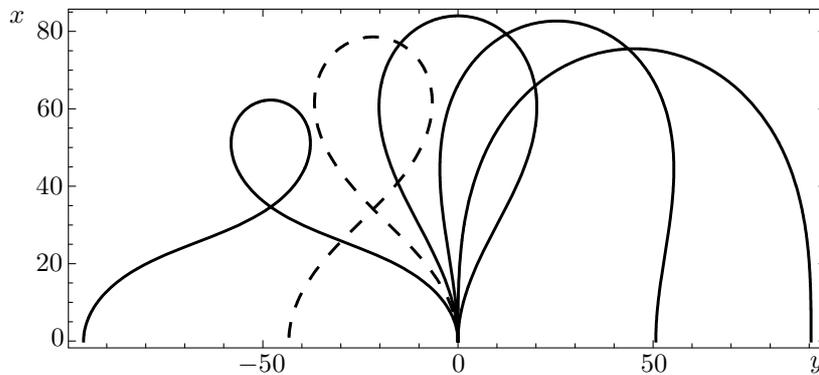


Рис. 12. Семейство эластик 3, центрированных в вершине

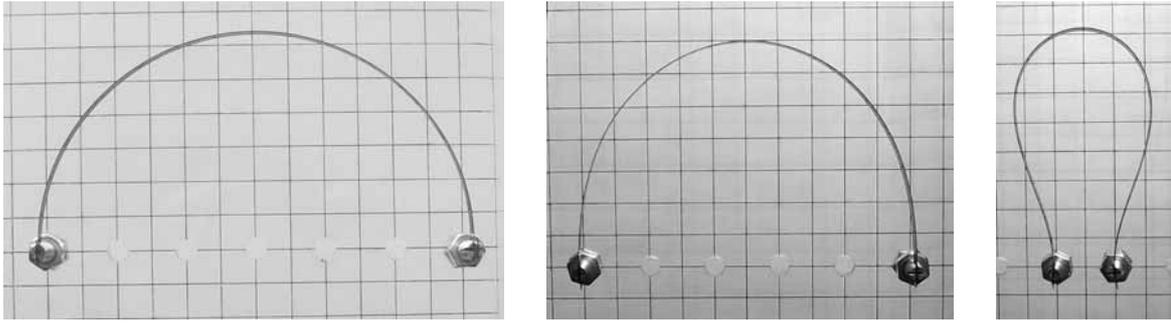


Рис. 13. Семейство 3: устойчивые эластики

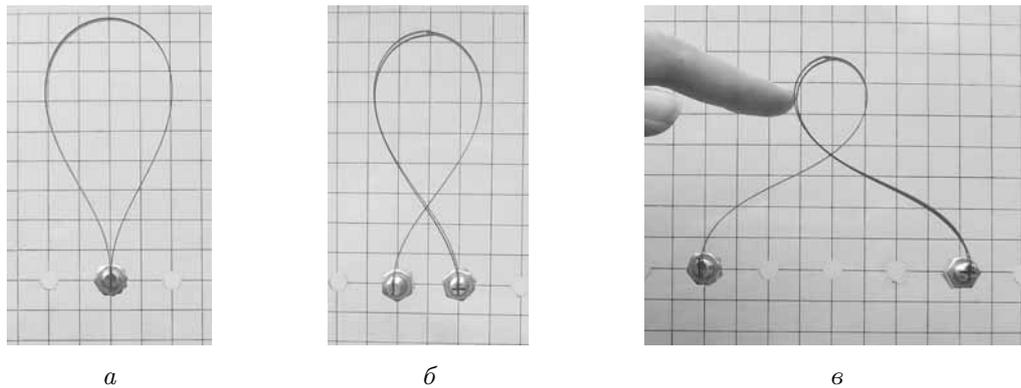


Рис. 14. Семейство 3: устойчивая эластика-капля (а), устойчивая эластика с самопересечением (б) и неустойчивая эластика (в)

Критическое значение α_* определяется из уравнения

$$\operatorname{sn}(p_1^1(\alpha), \alpha) = -1/(\sqrt{2}\alpha),$$

откуда

$$\alpha_* = 0.924902\dots$$

На рис. 13, 14 представлены соответствующие фото упругой полоски длиной $t_1 \approx 198$ мм. Критическое значение y_{t_1} , вычисленное теоретически, равно ≈ 32 мм, что согласуется с устойчивостью эластик на рис. 13 и 14, а, б и неустойчивостью на рис. 14, в. Эластика в форме капли (с самокасанием) на фото 14, а соответствует модулю $k = 0.855092407720382690\dots$

6.5. Семейство эластик 4. Рассмотрим семейство эластик, центрированных в вершине, фото которых приведены на рис. 15 и 16: упругая полоска переменной длины закреплена под углами $\pi/4$ к горизонтальной оси в точках на расстоянии $b = 60$ мм. При уменьшении длины полоски между точками закреплению эластика теряет устойчивость, сохраняя вертикальную ось симметрии. Дуги на рис. 15 устойчивы; дуга на рис. 16, а устойчива и близка к критической, после небольшого укорочения она хлопком переходит в устойчивую эластику на рис. 16, б.

Расчеты для этого семейства дают следующие значения критических параметров:

$$k_* \text{ — корень уравнения } k \operatorname{sn}(p_1^1(k), k) = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}/2, \quad k_* \in (0.3, 0.5),$$

$$p_* = p_1^1(k_*), \quad \sqrt{r_*} = 2(2E(p_*, k_*) - p_*)/b, \quad \varphi_* = -p_*/\sqrt{r_*}, \quad t_{1*} = -2\varphi_*.$$

Приближенные вычисления дают критическое значение модуля $k_* \approx 0.39$, а отклонение критической эластики от горизонтали равно ≈ 7.3 мм, в то время как для докритической эластики на рис. 16, а это отклонение составляет около 8 мм.

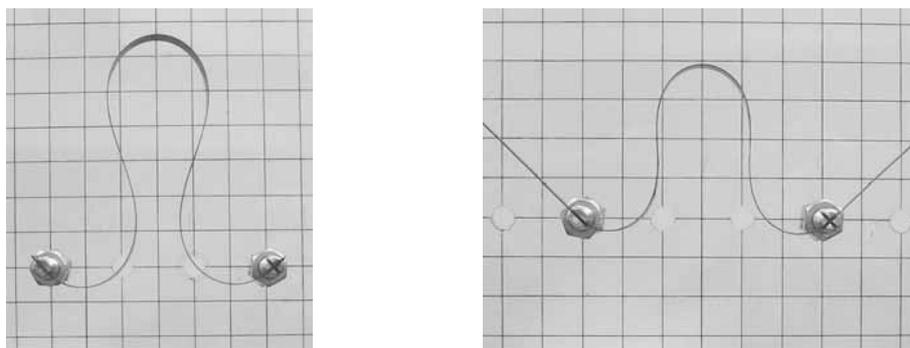


Рис. 15. Семейство 4: устойчивые эластики

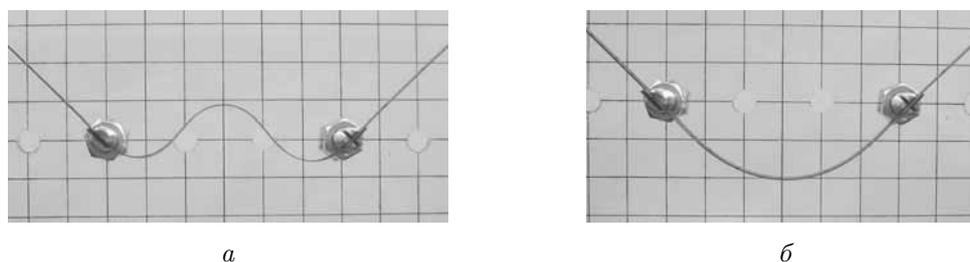


Рис. 16. Семейство 4: устойчивая докритическая эластика (а) и устойчивая закритическая эластика (б)

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены формы равновесия (эластики) гибкого нерастяжимого стержня при заданном расстоянии между его концами и фиксированных направлениях конечных касательных. Детально исследован вопрос устойчивости эластик, центрированных в вершинах или точках перегиба. Для решения этого вопроса, имеющего механическое происхождение, используются современные методы теории оптимального управления. Полученные теоретические результаты подтверждены экспериментально с использованием образцов из тонкой целлюлоидной пленки.

Представляет интерес обобщить рассмотренный подход на случай инфлекссионных эластик, не центрированных в вершине или точке перегиба. Для практических приложений важно также изучить поведение элаستيку с закрепленными концами при кинематическом нагружении, например при непрерывном изменении расстояния между концами или при повороте конечных сечений.

Отметим, что в работе рассмотрен случай кинематических условий на концах стержня (т.е. рассматриваются эластики с закрепленными концами и касательными на концах). Открытым остается вопрос устойчивости эластик для более общего случая закрепления концов стержня, когда одна часть граничных условий формулируется в перемещениях, а другая — в усилиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2004.
2. Коробейников С.Н. Вторичная потеря устойчивости сжатого шарнирно опертого стержня // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике: Тез. докл. IV Междунар. конф. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1995. С. 104.
3. Крылов А.Н. О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе // Избр. труды. Л.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 486–538.
4. Кузнецов В.В., Леваков С.В. О вторичной потере устойчивости эйлера стержня // Прикл. мех. и техн. физ. 1999. Т. 40, № 6. С. 184–185.

5. Кузнецов В.В., Левяков С.В. Эластика эйлера с заземленными концами // Прикл. мех. и техн. физ. 2000. Т. 41, № 3. С. 184–186.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
8. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
9. Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М: Изд-во иностр. лит., 1948.
10. Сачков Ю.Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 6. С. 111–160.
11. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. М.: УРСС, 2002.
12. Эйлер Л. Приложение I: Об упругих кривых // Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934. С. 447–572.
13. Agrachev A.A. Geometry of optimal control problems and Hamiltonian systems // Nonlinear and optimal control theory. Berlin: Springer, 2008. P. 1–59. (Lect. Notes Math.; V. 1932).
14. Bishopp K.E., Drucker D.C. Large deflection of cantilever beams // Quart. Appl. Math. 1945. V. 3. P. 272–275.
15. Born M. Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum, unter verschiedenen Grenzbedingungen: Diss. Göttingen: Dieterich, 1906. Reprint.: Ausgewählte Abhandlungen. Mit einem Verzeichnis der wissenschaftlichen Schriften. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1963. Bd. 1. S. 5–101.
16. Chen J.-S., Lin Y.-Z. Snapping of a planar elastica with fixed end slopes // J. Appl. Mech. 2008. V. 75, N 4. Pap. 041024.
17. Domokos G. Global description of elastic bars // Ztschr. angew. Math. und Mech. 1994. Bd. 74, N 4. S. T 289–T 291.
18. Domokos G., Fraser W.B., Szeberényi I. Symmetry-breaking bifurcations of the uplifted elastic strip // Physica D. 2003. V. 185, N 2. P. 67–77.
19. Fried I. Stability and equilibrium of the straight and curved elastica—finite element computation // Comput. Methods Appl. Mech. and Eng. 1981. V. 28. P. 49–61.
20. Frisch-Fay R. Flexible bars. London: Butterworths, 1962.
21. Glassmaker N.J., Hui C.Y. Elastica solution for a nanotube formed by self-adhesion of a folded thin film // J. Appl. Phys. 2004. V. 96, N 6. P. 3429–3434.
22. Greenhill A.G. The applications of elliptic functions. New York: Macmillan, 1892.
23. van der Heijden G.H.M., Neukirch S., Goss V.G.A., Thompson J.M.T. Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods // Intern. J. Mech. Sci. 2003. V. 45. P. 161–196.
24. Jairazbhoy V.A., Petukhov P., Qu J. Large deflection of thin plates in cylindrical bending—non-unique solutions // Intern. J. Solids and Struct. 2008. V. 45. P. 3203–3218.
25. Jin M., Bao Z.B. Sufficient conditions for stability of Euler elasticas // Mech. Res. Commun. 2008. V. 35. P. 193–200.
26. Jurdjevic V. Geometric control theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
27. Kuznetsov V.V., Levyakov S.V. Complete solution of the stability problem for elastica of Euler's column // Intern. J. Non-Lin. Mech. 2002. V. 37. P. 1003–1009.
28. Lardner T.J. A note on the elastica with large loads // Intern. J. Solids and Struct. 1985. V. 21. P. 21–26.
29. Lawden D.F. Elliptic functions and applications. New York: Springer, 1989.
30. Levyakov S.V. Stability analysis of curvilinear configurations of an inextensible elastic rod with clamped ends // Mech. Res. Commun. 2009. V. 36. P. 612–617.
31. Levyakov S.V., Kuznetsov V.V. Stability analysis of planar equilibrium configurations of elastic rods subjected to end loads // Acta mech. 2010. V. 211. P. 73–87.
32. Maddocks J.H. Stability of nonlinearly elastic rods // Arch. Ration. Mech. Anal. 1984. V. 85. P. 311–354.
33. Mikata Y. Complete solution of elastica for a clamped–hinged beam, and its applications to a carbon nanotube // Acta mech. 2007. V. 190. P. 133–150.
34. El Naschie M.S. Thermal initial post buckling of the extensional elastica // Intern. J. Mech. Sci. 1976. V. 18. P. 321–324.
35. Panayotounakos D.E., Theocaris P.S. Analytic solutions for nonlinear differential equations describing the elastica of straight bars: Theory // J. Franklin Inst. 1988. V. 325, N 5. P. 621–633.
36. Raboud D.W., Lipssett A.W., Faulkner M.G., Diep J. Stability evaluation of very flexible cantilever beams // Intern. J. Non-Lin. Mech. 2001. V. 36. P. 1109–1122.
37. Sachkov Yu.L. Maxwell strata in the Euler elastic problem // J. Dyn. and Control Syst. 2008. V. 14, N 2. P. 169–234.

38. *Sachkov Yu.L.* Conjugate points in the Euler elastic problem // J. Dyn. and Control Syst. 2008. V. 14, N 3. P. 409–439.
39. *Seide P.* Large deflections of a simply supported beam subjected to moment at one end // J. Appl. Mech. 1984. V. 51. P. 519–525.
40. *Stampoulglou I.H., Theotokoglou E.E., Andriotaki P.N.* Asymptotic solutions to the non-linear cantilever elastica // Intern. J. Non-Lin. Mech. 2005. V. 40. P. 1252–1262.
41. *Tang T., Glassmaker N.J.* On the inextensible elastica model for the collapse of nanotubes // Math. and Mech. Solids. 2010. V. 15, N 5. P. 591–606.
42. *Wang C.Y.* Post-buckling of a clamped-simply supported elastica // Intern. J. Non-Lin. Mech. 1997. V. 32. P. 1115–1122.
43. *Wolfram S.* Mathematica: A system for doing mathematics by computer. Reading (MA): Addison-Wesley, 1991.