

УДК 517.977

А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков

## Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля

Рассматривается нильпотентная субриманова задача на группе Энгеля – четырехмерная задача оптимального управления с двумерным линейным управлением и интегральным функционалом качества. Эта задача возникает как нильпотентная аппроксимация неголономных систем в четырехмерном пространстве с двумерным управлением (например, для системы, описывающей движение мобильного робота с прицепом). Получена параметризация экстремальных траекторий функциями Якоби. Описана дискретная группа симметрий и ее неподвижные точки – точки Максвелла. На этой основе получена верхняя оценка времени разреза (времени потери оптимальности) вдоль экстремальных траекторий.

Библиография: 25 названий.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, субриманова геометрия, геометрические методы, группа Энгеля.

### § 1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию нильпотентной субримановой задачи на группе Энгеля – задачи оптимального управления с четырехмерным нелинейным состоянием, двумерным линейным управлением и интегральным функционалом качества. Нильпотентные субримановы задачи играют фундаментальную роль в субримановой геометрии, так как они доставляют локальную квазиоднородную аппроксимацию общих субримановых задач (см. работы [1]–[4]). Например, нильпотентная субриманова задача на трехмерной группе Гейзенберга (см. [5]) служит краеугольным камнем всей субримановой геометрии. Инвариантные субримановы задачи на группах Ли активно исследуются методами геометрической теории управления в течение последних 10 лет (см. [6]–[12]).

Инвариантная субриманова задача на группе Энгеля обладает рядом важных свойств, определяющих ее особую роль в субримановой геометрии. Во-первых, это – простейшая субриманова задача с нетривиальными аномальными экстремальными траекториями (как известно, в трехмерных контактных задачах аномальные экстремальные траектории постоянны; см. [13]). Во-вторых, эта задача проецируется в субриманову задачу в плоском случае Мартине

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00246-а), а также Программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

(см. [14]), поэтому задача на группе Энгеля является простейшей инвариантной субримановой задачей на нильпотентной группе Ли с несубаналитической субримановой сферой. В-третьих, векторное распределение в этой задаче не является 2-порождающим (см. [15]): вектор роста этой задачи  $(2, 3, 4)$  имеет длину 3. Поэтому, в частности, она является простейшей из субримановых задач, в которой нарушается свойство перемежаемости сопряженных точек и точек Максвелла, характерное для субримановых задач с 2-порождающими распределениями.

Инвариантная задача на группе Энгеля играет важную роль в приложениях, в частности в робототехнике, так как она служит нильпотентной аппроксимацией системы, описывающей движение мобильного робота с прицепом на плоскости или на двумерной поверхности (см. [2], [16]).

В силу описанных фактов важность исследования инвариантной субримановой задачи на группе Энгеля не вызывает сомнений. В настоящей работе к этой задаче применяются новые методы геометрической теории управления, успешно зарекомендовавшие себя в недавних работах, посвященных задаче Эйлера об эластике [17], [18], нильпотентной субримановой задаче с вектором роста  $(2, 3, 5)$  [9], субримановой задаче на группе движений плоскости [12] и задаче о качении сферы по плоскости [10].

Работа имеет следующую структуру. В § 2 приводится и обсуждается постановка задачи. В § 3 к задаче применяется принцип максимума Понтрягина, а в § 4 и § 5 получена параметризация экстремальных траекторий; в частности, в § 5 получено описание экспоненциального отображения, параметризующего все экстремальные траектории. В § 6 описаны дискретные симметрии экспоненциального отображения, а в § 7 изучены соответствующие точки Максвелла – неподвижные точки этих симметрий. На этой основе в теореме 3 получен основной результат настоящей работы – верхняя оценка времени разреза (времени потери оптимальности) вдоль экстремальных траекторий.

## § 2. Постановка задачи оптимального управления

В работе рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \\ \frac{x^2 + y^2}{2} \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbb{R}^4, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$q(0) = q_0 = (x_0, y_0, z_0, v_0), \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1, v_1) \quad (2.2)$$

и функционалом качества

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min, \quad (2.3)$$

где точка  $q = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 = M$  задает состояние системы,  $u = (u_1, u_2)$  есть управление, а терминальное время  $t_1$  фиксировано.

Обозначим векторные поля при управлениях в правой части системы (2.1)

$$X_1 = \left(1, 0, -\frac{y}{2}, 0\right)^T, \quad X_2 = \left(0, 1, \frac{x}{2}, \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^T,$$

и вычислим их коммутаторы:

$$\begin{aligned} X_3 &= [X_1, X_2] = \frac{\partial X_2}{\partial q} X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial q} X_2 = (0, 0, 1, x)^T, \\ X_4 &= [X_1, X_3] = \frac{\partial X_3}{\partial q} X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial q} X_3 = (0, 0, 0, 1)^T. \end{aligned}$$

Векторные поля  $X_1(q), \dots, X_4(q)$  линейно независимы в любой точке  $q \in \mathbb{R}^4$ , поэтому в силу теоремы Рашевского–Чжоу (см. [15]) система (2.1) вполне управляема в  $\mathbb{R}^4$  (т.е. любые точки  $q_0, q_1 \in M$  можно соединить траекторией этой системы).

Поля  $X_1, X_2$  порождают четырехмерную нильпотентную алгебру Ли

$$\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4)$$

со следующей таблицей умножения:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_1, X_4] = [X_2, X_3] = [X_2, X_4] = 0.$$

Эта алгебра Ли называется *алгеброй Энгеля* (см. [1]). На пространстве  $\mathbb{R}^4$  можно ввести групповую структуру (закон умножения) так, что  $\mathbb{R}^4$  станет группой Ли, а поля  $X_1, \dots, X_4$  станут базисными левоинвариантными полями на этой группе Ли. Несложно проверить, что этот закон умножения имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} \\ v_1 + v_2 + \frac{y_1 y_2}{2} (y_1 + y_2) + x_1 z_2 + \frac{x_1 y_2}{2} (x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

Пространство  $\mathbb{R}^4$  с такой групповой структурой называется *группой Энгеля*.

Задача (2.1)–(2.3) является левоинвариантной субримановой задачей на группе Энгеля для субримановой структуры на  $\mathbb{R}^4$ , заданной полями  $X_1, X_2$  как ортонормированным базисом. Как известно (см. [19]), все вполне неголомомные инвариантные субримановы задачи на группе Энгеля переводятся одна в другую гомоморфизмом Ли группы Энгеля и задача (2.1)–(2.3) служит конкретной моделью для всего класса таких задач.

В силу инвариантности задачи относительно левых сдвигов на группе Энгеля можно считать, что начальная точка есть единичный элемент группы  $q_0 = (x_0, y_0, z_0, v_0) = (0, 0, 0, 0)$ .

Легко видеть, что задача (2.1)–(2.3) эквивалентна следующей геометрической задаче. Пусть на плоскости имеются точки  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , соединенные кривой  $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$ . Пусть также имеются число  $S \in \mathbb{R}$  и прямая  $l \subset \mathbb{R}^2$ . Требуется соединить точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  кратчайшей кривой  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  так, чтобы кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma$  ограничивали на плоскости область площади  $S$  с центром масс, принадлежащим прямой  $l$ .

### § 3. Принцип максимума Понтрягина

Существование оптимальных траекторий в задаче (2.1)–(2.3) следует из теоремы Филлипова (см. [15]). Из неравенства Коши–Буняковского следует, что задача минимизации субримановой длины (2.3) равносильна задаче минимизации действия

$$\int_0^{t_1} \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} dt \rightarrow \min. \quad (3.1)$$

К полученной задаче оптимального управления (2.1), (2.2), (3.1) применим принцип максимума Понтрягина (см. [20], [15]). Введем вектор сопряженных переменных  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$  и функцию Гамильтона

$$H(\psi, q, u) = \psi_0 \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \psi_3 \frac{xu_2 - yu_1}{2} + \psi_4 \frac{x^2 + y^2}{2} u_2.$$

Из принципа максимума Понтрягина для этой функции Гамильтона получаем уравнения гамильтоновой системы для сопряженных переменных

$$\dot{\psi}_1 = -H_x = -\psi_3 \frac{u_2}{2} - \psi_4 x u_2, \quad \dot{\psi}_2 = -H_y = \psi_3 \frac{u_1}{2} - \psi_4 y u_2, \quad \dot{\psi}_3 = \dot{\psi}_4 = 0,$$

условие максимума

$$\max_{u \in \mathbb{R}^2} H(\psi(t), \hat{q}(t), u) = H(\psi(t), \hat{q}(t), \hat{u}(t)), \quad \psi_0 \leq 0, \quad (3.2)$$

где  $\hat{u}(t), \hat{q}(t)$  – оптимальный процесс, и условие нетривиальности сопряженных переменных

$$\psi(t) \neq 0.$$

### § 4. Анормальные экстремальные траектории

Исследуем анормальный случай  $\psi_0 = 0$ . Из условия максимума (3.2) получаем

$$H_{u_1} = \psi_1 - \psi_3 \frac{y}{2} = 0, \quad (4.1)$$

$$H_{u_2} = \psi_2 + \psi_3 \frac{x}{2} + \psi_4 \frac{x^2 + y^2}{2} = 0. \quad (4.2)$$

Из уравнения (4.1) получаем

$$0 = \dot{\psi}_1 - \psi_3 \frac{u_2}{2} = -u_2(\psi_3 + \psi_4 x),$$

аналогично из уравнения (4.2) получаем

$$0 = \dot{\psi}_2 + \psi_3 \frac{u_1}{2} + \psi_3(xu_1 + yu_2) = u_1(\psi_3 + \psi_4x).$$

Можно считать, что  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ , поэтому  $\psi_3 + \psi_4x = 0$ . Если  $\psi_4 = 0$ , то  $\psi_3 = 0$ , а значит,  $\psi = 0$ , что противоречит условию нетривиальности сопряженных переменных. Следовательно,  $\psi_4 \neq 0$ ; отсюда получаем уравнения экстремальных кривых для аномального случая

$$x = 0, \quad y = \pm t, \quad z = 0, \quad v = \pm \frac{t^3}{6}. \quad (4.3)$$

Проекция этих кривых на плоскость  $(x, y)$  – прямая.

## § 5. Нормальные экстремальные траектории

**5.1. Нормальная гамильтонова система.** Изучим нормальный случай  $\psi_0 = -1$ . Из условия максимума (3.2) следует, что  $H_{u_1} = 0, H_{u_2} = 0$ . Отсюда получаем

$$u_1 = \psi_1 - \psi_3 \frac{y}{2}, \quad u_2 = \psi_2 + \psi_3 \frac{x}{2} + \psi_4 \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Введем линейные на слоях касательного расслоения  $T^*M$  гамильтонианы  $h_i = \langle \psi, X_i \rangle$ , соответствующие базисным в касательном пространстве  $T_qM$  векторным полям  $X_i$ :

$$h_1 = \psi_1 - \psi_3 \frac{y}{2}, \quad h_2 = \psi_2 + \psi_3 \frac{x}{2} + \psi_4 \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad h_3 = \psi_3 + \psi_4x, \\ h_4 = \psi_4.$$

Дифференцируя эти функции в силу гамильтоновой системы принципа максимума, получаем уравнения

$$\dot{h}_1 = -h_2h_3, \quad \dot{h}_2 = h_1h_3, \quad \dot{h}_3 = h_1h_4, \quad \dot{h}_4 = 0.$$

Ограничимся поверхностью уровня  $\{H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2) = \frac{1}{2}\}$  и перейдем на этой поверхности к координатам  $(\theta, c, \alpha)$ :

$$h_1 = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \quad h_2 = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \quad h_3 = c, \quad h_4 = \alpha.$$

В координатах  $(\theta, c, \alpha, x, y, z, v)$  гамильтонова система принципа максимума Понтрягина для нормального случая принимает форму

$$\dot{\theta} = c, \quad (5.1)$$

$$\dot{c} = -\alpha \sin \theta, \quad (5.2)$$

$$\dot{\alpha} = 0, \quad (5.3)$$

$$\dot{x} = -\sin \theta, \quad (5.4)$$

$$\dot{y} = \cos \theta, \quad (5.5)$$

$$\dot{z} = \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{2}, \quad (5.6)$$

$$\dot{v} = \cos \theta \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (5.7)$$

Заметим, что подсистема для сопряженных переменных сводится к уравнению маятника

$$\ddot{\theta} = -\alpha \sin \theta, \quad \alpha = \text{const}. \quad (5.8)$$

Поэтому проекции экстремальных кривых на плоскость  $(x, y)$  суть эйлеровы эластики – стационарные конфигурации упругого стержня на плоскости (см. [17], [18], [21]–[23]).

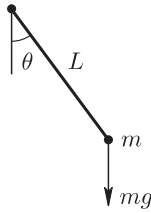


Рис. 1. Маятник (5.8) при  $\alpha > 0$

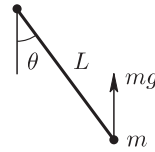


Рис. 2. Маятник (5.8) при  $\alpha < 0$

Физический смысл параметра  $\alpha$  для уравнения маятника таков:

$$\alpha = \frac{g}{L},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, а  $L$  – длина маятника. Таким образом, если  $\alpha = 0$ , то маятник движется в невесомости, при  $\alpha > 0$  сила тяжести маятника направлена вниз (рис. 1), при  $\alpha < 0$  сила тяжести направлена вверх (рис. 2).

**5.2. Разбиение начального цилиндра  $C$ .** Введем интеграл энергии маятника (5.8):

$$E = \frac{h_3^2}{2} - h_2 h_4 = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos \theta \in [-|\alpha|, +\infty), \quad \dot{E} = h_3 \dot{h}_3 - \dot{h}_2 h_4 = 0.$$

Семейство всех нормальных экстремальных траекторий параметризуется точками цилиндра

$$\begin{aligned} C &= T_{q_0}^* M \cap \left\{ H = \frac{1}{2} \right\} = \{(h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathbb{R}^4 \mid h_1^2 + h_2^2 = 1\} \\ &= \{(\theta, c, \alpha) \mid \theta \in S^1, c, \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Разобьем цилиндр  $C$  на подмножества, соответствующие разным типам траекторий маятника:

$$C = \bigcup_{i=1}^7 C_i, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \lambda = (\theta, c, \alpha),$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E \in (-|\alpha|, |\alpha|)\}, \\
 C_2 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E \in (|\alpha|, +\infty)\}, \\
 C_3 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = |\alpha|, c \neq 0\}, \\
 C_4 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = -|\alpha|\}, \\
 C_5 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = |\alpha|, c = 0\}, \\
 C_6 &= \{\lambda \in C \mid \alpha = 0, c \neq 0\}, \\
 C_7 &= \{\lambda \in C \mid \alpha = c = 0\}.
 \end{aligned}$$

Далее, множества  $C_i, i = 1, \dots, 5$ , разбиваются на подмножества в зависимости от знака переменной  $\alpha$ :

$$C_i^+ = C_i \cap \{\alpha > 0\}, \quad C_i^- = C_i \cap \{\alpha < 0\}, \quad i \in \{1, \dots, 5\}.$$

Более того, подмножества  $C_6, C_2^\pm, C_3^\pm$  разбиваются на связные компоненты в зависимости от знака переменной  $c$ :

$$\begin{aligned}
 C_{6+} &= C_6 \cap \{c > 0\}, & C_{6-} &= C_6 \cap \{c < 0\}, \\
 C_{i+}^\pm &= C_i^\pm \cap \{c > 0\}, & C_{i-}^\pm &= C_i^\pm \cap \{c < 0\}, \quad i \in \{2, 3\}.
 \end{aligned}$$

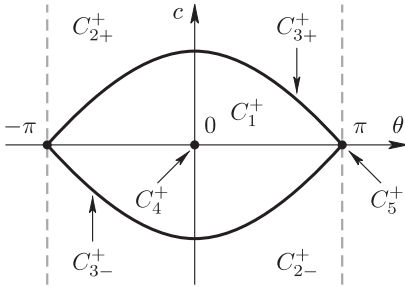


Рис. 3. Разбиение  $C$  для  $\alpha > 0$

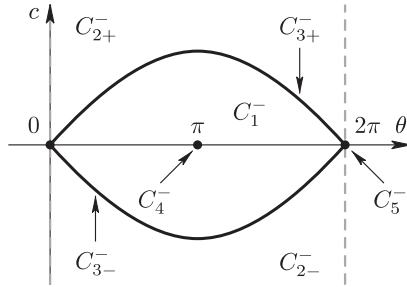


Рис. 4. Разбиение  $C$  для  $\alpha < 0$

Разбиение сечения цилиндра  $\{\lambda \in C \mid \alpha = \text{const} \neq 0\}$  показано на рис. 3 (при  $\alpha > 0$ ) и рис. 4 (при  $\alpha < 0$ ).

**5.3. Эллиптические координаты.** Для вычисления экстремальных траекторий введем на подмножествах  $C_1, C_2, C_3$  координаты  $(\varphi, k, \alpha)$ , в которых подсистема для сопряженных переменных (5.1)–(5.3) выпрямляется. Подобные координаты использовались в работах [9], [17], [10], [12] для исследования нескольких родственных задач оптимального управления, в которых подсистема гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для сопряженных переменных сводится к уравнению маятника.

В области  $C_1^+$

$$k = \sqrt{\frac{E + \alpha}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{c^2}{4\alpha} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \in (0, 1),$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha}\varphi), \quad \cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{dn}(\sqrt{\alpha}\varphi), \quad \frac{c}{2} = k\sqrt{\alpha} \operatorname{cn}(\sqrt{\alpha}\varphi),$$

$$\varphi \in [0, 4K].$$

В области  $C_2^+$

$$k = \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{c^2/(4\alpha) + \sin^2(\theta/2)}} \in (0, 1),$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{sgn} c \operatorname{sn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{cn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}, \quad \frac{c}{2} = \operatorname{sgn} c \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \operatorname{dn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k},$$

$$\varphi \in [0, 2kK], \quad \psi = \frac{\varphi}{k}.$$

На множестве  $C_3^+$

$$k = 1,$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{sgn} c \operatorname{th}(\sqrt{\alpha}\varphi), \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}\varphi)}, \quad \frac{c}{2} = \operatorname{sgn} c \frac{\sqrt{\alpha}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}\varphi)},$$

$$\varphi \in (-\infty, +\infty).$$

Здесь и далее  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$ ,  $E$  – эллиптические функции Якоби (см. [24]).

На множествах  $C_1^-$ ,  $C_2^-$ ,  $C_3^-$  определим новые координаты следующим образом:

$$\varphi(\theta, c, \alpha) = \varphi(\theta - \pi, c, -\alpha), \quad (5.9)$$

$$k(\theta, c, \alpha) = k(\theta - \pi, c, -\alpha). \quad (5.10)$$

Непосредственное дифференцирование показывает, что подсистема для сопряженных переменных (5.1)–(5.3) принимает в новых координатах следующую форму:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{k} = 0, \quad \dot{\alpha} = 0,$$

поэтому ее решения имеют вид

$$\varphi(t) = \varphi_t = \varphi + t, \quad k = \operatorname{const}, \quad \alpha = \operatorname{const}. \quad (5.11)$$

**5.4. Параметризация экстремальных траекторий при  $\lambda \in \bigcup_{i=1}^3 C_i$  в случае  $\alpha = 1$ .** Пусть  $\alpha = 1$ . Из определения координат  $\varphi$ ,  $k$  получаем следующую параметризацию компоненты  $\theta_t$  вдоль экстремальных траекторий.

Если  $\lambda \in C_1^+$ , то

$$\sin \theta_t = 2k \operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t, \quad \cos \theta_t = 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi_t.$$

Если  $\lambda \in C_2^+$ , то

$$\sin \theta_t = 2 \operatorname{sgn} c \operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t, \quad \cos \theta_t = \operatorname{cn}^2 \psi_t - \operatorname{sn}^2 \psi_t, \quad \psi_t = \frac{\varphi + t}{k}.$$



Если  $\lambda \in C_3^+$ , то

$$\sin \theta_t = 2 \operatorname{sgn} c \frac{\operatorname{th} \varphi_t}{\operatorname{ch} \varphi_t}, \quad \cos \theta_t = \frac{1 - \operatorname{sh}^2 \varphi_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi_t}.$$

Интегрируя уравнения (5.4)–(5.7), получаем параметризацию экстремальных траекторий для случая  $\alpha = 1$ .

Если  $\lambda \in C_1$ , то

$$x_t = 2k(\operatorname{cn} \varphi_t - \operatorname{cn} \varphi),$$

$$y_t = 2(\operatorname{E}(\varphi_t) - \operatorname{E}(\varphi)) - t,$$

$$z_t = 2k \left( \operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi - \frac{y_t}{2} (\operatorname{cn} \varphi_t + \operatorname{cn} \varphi) \right),$$

$$v_t = \frac{y_t^3}{6} + 2k^2 \operatorname{cn}^2 \varphi y_t - 4k^2 \operatorname{cn} \varphi (\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) + 2k^2 \left( \frac{2}{3} \operatorname{cn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t \operatorname{sn} \varphi_t - \frac{2}{3} \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi + \frac{1 - k^2}{3k^2} t + \frac{2k^2 - 1}{3k^2} (\operatorname{E}(\varphi_t) - \operatorname{E}(\varphi)) \right).$$

Если  $\lambda \in C_2$ , то

$$x_t = \frac{2 \operatorname{sgn} c}{k} (\operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{dn} \psi),$$

$$y_t = \frac{k^2 - 2}{k^2} t + \frac{2}{k} (\operatorname{E}(\psi_t) - \operatorname{E}(\psi)),$$

$$z_t = -\frac{x_t y_t}{2} - \frac{2 \operatorname{sgn} c \operatorname{dn} \psi}{k} y_t + 2 \operatorname{sgn} c (\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi \operatorname{sn} \psi),$$

$$v_t = \frac{4}{k} \left( \frac{1}{3} \operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t - \frac{1}{3} \operatorname{cn} \psi \operatorname{dn} \psi \operatorname{sn} \psi - \frac{1 - k^2}{3k^3} t - \frac{k^2 - 2}{6k^2} (\operatorname{E}(\psi_t) - \operatorname{E}(\psi)) \right) + \frac{y_t^3}{6} + \frac{2y_t}{k^2} \operatorname{dn}^2 \psi - \frac{4}{k} \operatorname{dn} \psi (\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi \operatorname{sn} \psi),$$

$$\psi = \frac{\varphi}{k}, \quad \psi_t = \frac{\psi + t}{k}.$$

Если  $\lambda \in C_3$ , то

$$x_t = 2 \operatorname{sgn} c \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} - \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} \right),$$

$$y_t = 2(\operatorname{th} \varphi_t - \operatorname{th} \varphi) - t,$$

$$z_t = -\frac{x_t y_t}{2} - \frac{2 \operatorname{sgn} c}{\operatorname{ch} \varphi} y_t + 2 \operatorname{sgn} c \left( \frac{\operatorname{th} \varphi_t}{\operatorname{ch} \varphi_t} - \frac{\operatorname{th} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi} \right),$$

$$v_t = \frac{2}{3} \left( \operatorname{th} \varphi_t - \operatorname{th} \varphi + 2 \frac{\operatorname{th} \varphi_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi_t} - 2 \frac{\operatorname{th} \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right) + \frac{y_t^3}{6} + \frac{2y_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi} - \frac{4}{\operatorname{ch} \varphi} \left( \frac{\operatorname{th} \varphi_t}{\operatorname{ch} \varphi_t} - \frac{\operatorname{th} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi} \right).$$

**5.5. Параметризация экстремальных траекторий при  $\lambda \in \bigcup_{i=1}^3 C_i$  в общем случае  $\alpha \neq 0$ .** Параметризация экстремальных траекторий в общем случае получается из формул для частного случая  $\alpha = 1$  с помощью симметрий гамильтоновой системы (5.1)–(5.7).

5.5.1. Случай  $\alpha > 0$ . Система (5.1)–(5.7) имеет симметрию (растяжение)

$$(\theta, c, \alpha, x, y, z, v, t) \mapsto \left( \theta, \frac{c}{\sqrt{\alpha}}, 1, \sqrt{\alpha}x, \sqrt{\alpha}y, \alpha z, \alpha^{3/2}v, \sqrt{\alpha}t \right),$$

под действием которой переменные  $\varphi, k$  преобразуются следующим образом:

$$(\varphi, k, \alpha) \mapsto (\sqrt{\alpha}\varphi, k, 1).$$

Поэтому экстремальные траектории для случая  $\alpha > 0$  выражаются следующим образом через экстремальные траектории для случая  $\alpha = 1$  (вычисленные в п. 5.4):

$$(x_t, y_t, z_t, v_t)(\varphi, k, \alpha) = \left( \frac{x\sqrt{\alpha}t}{\sqrt{\alpha}}, \frac{y\sqrt{\alpha}t}{\sqrt{\alpha}}, \frac{z\sqrt{\alpha}t}{\alpha}, \frac{v\sqrt{\alpha}t}{\alpha^{3/2}} \right) (\sqrt{\alpha}\varphi, k, 1).$$

5.5.2. Случай  $\alpha < 0$ . Гамильтонова система (5.1)–(5.7) имеет симметрию (отражение)

$$(\theta, c, \alpha, x, y, z, v, t) \mapsto (\theta - \pi, c, -\alpha, -x, -y, z, -v, t),$$

не изменяющую значения координат  $\varphi$  и  $k$  (см. (5.9), (5.10)). Поэтому экстремальные траектории для случая  $\alpha < 0$  выражаются следующим образом через экстремальные траектории для случая  $\alpha > 0$ :

$$(x_t, y_t, z_t, v_t)(\varphi, k, \alpha) = (-x_t, -y_t, z_t, -v_t)(\varphi, k, -\alpha).$$

5.5.3. Общий случай  $\alpha \neq 0$ . Обозначим  $\sigma = \sqrt{|\alpha|}$ ,  $s_1 = \text{sgn } \alpha$ . Учитывая результаты предыдущих пунктов, получаем следующее выражение для экстремальных траекторий:

$$(x_t, y_t, z_t, v_t)(\varphi, k, \alpha) = \left( \frac{s_1}{\sigma} x_{\sigma t}, \frac{s_1}{\sigma} y_{\sigma t}, \frac{1}{\sigma^2} z_{\sigma t}, \frac{s_1}{\sigma^3} v_{\sigma t} \right) (\sigma\varphi, k, 1). \quad (5.12)$$

Отсюда получаем параметризацию экстремальных траекторий для общего случая.

Если  $\lambda \in C_1$ , то

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{2k\sigma}{\alpha} (\text{cn}(\sigma\varphi_t) - \text{cn}(\sigma\varphi)), \\ y_t &= \frac{2\sigma}{\alpha} (\text{E}(\sigma\varphi_t) - \text{E}(\sigma\varphi)) - \text{sgn } \alpha t, \\ z_t &= \frac{2k}{|\alpha|} \left( \text{sn}(\sigma\varphi_t) \text{dn}(\sigma\varphi_t) - \text{sn}(\sigma\varphi) \text{dn}(\sigma\varphi) - \frac{\sigma k y_t}{2\alpha} (\text{cn}(\sigma\varphi_t) + \text{cn}(\sigma\varphi)) \right), \\ v_t &= \frac{y_t^3}{6} + \frac{2k^2}{|\alpha|} \text{cn}^2(\sigma\varphi) y_t - \frac{4k^2}{\sigma\alpha} \text{cn}(\sigma\varphi) (\text{sn}(\sigma\varphi_t) \text{dn}(\sigma\varphi_t) - \text{sn}(\sigma\varphi) \text{dn}(\sigma\varphi)) \\ &\quad + \frac{2k^2}{\sigma\alpha} \left( \frac{2}{3} \text{cn}(\sigma\varphi_t) \text{dn}(\sigma\varphi_t) \text{sn}(\sigma\varphi_t) - \frac{2}{3} \text{cn}(\sigma\varphi) \text{dn}(\sigma\varphi) \text{sn}(\sigma\varphi) + \frac{1-k^2}{3k^2} \sigma t \right. \\ &\quad \left. + \frac{2k^2-1}{3k^2} (\text{E}(\sigma\varphi_t) - \text{E}(\sigma\varphi)) \right). \end{aligned}$$

Если  $\lambda \in C_2$ , то

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{2\sigma \operatorname{sgn} c}{\alpha k} (\operatorname{dn}(\sigma\psi_t) - \operatorname{dn}(\sigma\psi)), \\ y_t &= \frac{k^2 - 2}{k^2} \operatorname{sgn} \alpha t + \frac{2\sigma}{\alpha k} (\operatorname{E}(\sigma\psi_t) - \operatorname{E}(\sigma\psi)), \\ z_t &= -\frac{x_t y_t}{2} - \frac{2\sigma \operatorname{sgn} c \operatorname{dn}(\sigma\psi)}{\alpha k} y_t + \frac{2 \operatorname{sgn} c}{|\alpha|} (\operatorname{cn}(\sigma\psi_t) \operatorname{sn}(\sigma\psi_t) - \operatorname{cn}(\sigma\psi) \operatorname{sn}(\sigma\psi)), \\ v_t &= \frac{4}{\sigma \alpha k} \left( \frac{1}{3} \operatorname{cn}(\sigma\psi_t) \operatorname{dn}(\sigma\psi_t) \operatorname{sn}(\sigma\psi_t) - \frac{1}{3} \operatorname{cn}(\sigma\psi) \operatorname{dn}(\sigma\psi) \operatorname{sn}(\sigma\psi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - k^2}{3k^3} \sigma t - \frac{k^2 - 2}{6k^2} (\operatorname{E}(\sigma\psi_t) - \operatorname{E}(\sigma\psi)) \right) + \frac{y_t^3}{6} + \frac{2y_t}{|\alpha| k^2} \operatorname{dn}^2(\sigma\psi) \\ &\quad - \frac{4}{\sigma \alpha k} \operatorname{dn}(\sigma\psi) (\operatorname{cn}(\sigma\psi_t) \operatorname{sn}(\sigma\psi_t) - \operatorname{cn}(\sigma\psi) \operatorname{sn}(\sigma\psi)). \end{aligned}$$

Если  $\lambda \in C_3$ , то

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{2\sigma \operatorname{sgn} c}{\alpha} \left( \frac{1}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi_t)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi)} \right), \\ y_t &= \frac{2\sigma}{\alpha} (\operatorname{th}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{th}(\sigma\varphi)) - \operatorname{sgn} \alpha t, \\ z_t &= -\frac{x_t y_t}{2} - \frac{2\sigma \operatorname{sgn} c}{\alpha \operatorname{ch}(\sigma\varphi)} y_t + 2 \frac{\operatorname{sgn} c}{|\alpha|} \left( \frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi_t)}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi_t)} - \frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi)}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi)} \right), \\ v_t &= \frac{2}{3\sigma \alpha} \left( \operatorname{th}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{th}(\sigma\varphi) + 2 \frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi_t)}{\operatorname{ch}^2(\sigma\varphi_t)} - 2 \frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi)}{\operatorname{ch}^2(\sigma\varphi)} \right) + \frac{y_t^3}{6} \\ &\quad + \frac{2y_t}{|\alpha| \operatorname{ch}^2 \varphi} - \frac{4}{\sigma \alpha \operatorname{ch}(\sigma\varphi)} \left( \frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi_t)}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi_t)} - \frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi)}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi)} \right). \end{aligned}$$

### 5.6. Параметризация экстремальных траекторий для $C_4$ , $C_5$ , $C_6$ .

Если  $\lambda \in C_4$ , то  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = \operatorname{sgn} \alpha$  и гамильтонова система легко интегрируется:

$$x_t = 0, \quad y_t = t \operatorname{sgn} \alpha, \quad z_t = 0, \quad v_t = \frac{t^3}{6} \operatorname{sgn} \alpha.$$

В случае  $\lambda \in C_5$  имеем  $\cos \theta = -\operatorname{sgn} \alpha$ , откуда

$$x_t = 0, \quad y_t = -t \operatorname{sgn} \alpha, \quad z_t = 0, \quad v_t = -\frac{t^3}{6} \operatorname{sgn} \alpha.$$

Пусть  $\lambda \in C_6$ , тогда  $\alpha = 0$ ,  $c \neq 0$ . Поэтому  $\ddot{\theta}_t = 0$ , следовательно  $\theta_t = ct + \theta$ , где  $c = \operatorname{const}$ ,  $\theta = \operatorname{const}$ . Откуда получаем

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\cos(ct + \theta) - \cos \theta}{c}, \quad y_t = \frac{\sin(ct + \theta) - \sin \theta}{c}, \quad z_t = \frac{ct - \sin(ct)}{2c^2}, \\ v_t &= -\frac{2c \cos \theta t - 4 \sin(ct + \theta) + \sin(2ct + \theta)}{4c^3}. \end{aligned}$$

В случае  $\lambda \in C_7$  имеем  $\alpha = c = 0$ ,  $\theta_t \equiv \theta = \operatorname{const}$ , откуда

$$x_t = -t \sin \theta, \quad y_t = t \cos \theta, \quad z_t = 0, \quad v_t = \frac{t^3}{6} \cos \theta.$$

Заметим, что нормальные экстремальные траектории для случаев  $C_4$ ,  $C_5$  совпадают с аномальными траекториями (4.3), поэтому последние не являются строго аномальными.

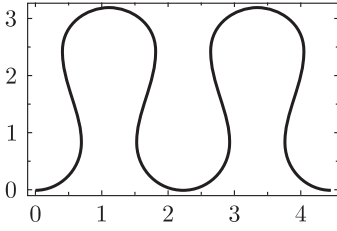


Рис. 5. Инфлекссионная эластика

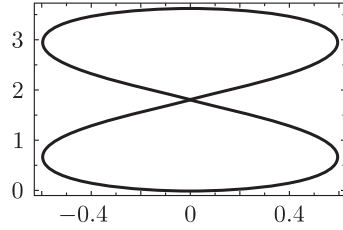


Рис. 6. Инфлекссионная эластика

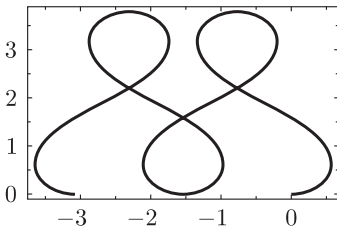


Рис. 7. Инфлекссионная эластика

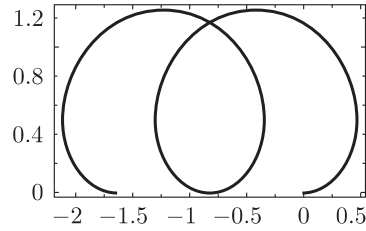


Рис. 8. Неинфлекссионная эластика

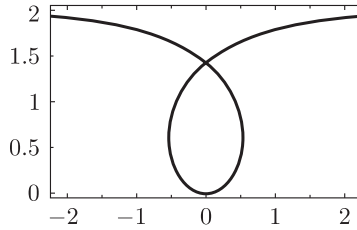


Рис. 9. Критическая эластика

Если маятник (5.8) колеблется с докритической энергией  $E < |\alpha|$  (случай  $C_1$ ), то эластики  $(x_t, y_t)$  имеют точки перегиба и называются *инфлекссионными* (рис. 5–7). Если маятник вращается с посткритической энергией  $E > |\alpha|$  (случай  $C_2$ ), то эластики не имеют точек перегиба и называются *неинфлекссионными* (рис. 8). Наконец, если маятник движется с критической энергией  $E = |\alpha|$  (случай  $C_3$ ), то соответствующая эластика называется *критической* (рис. 9). Для маятника, вращающегося в невесомости (случай  $C_6$ ), проекции экстремальных траекторий на плоскость  $(x, y)$  являются окружностями. Для покоящегося маятника (случай  $C_4, C_5, C_7$ ) эти проекции суть прямые.

**5.7. Экспоненциальное отображение.** Семейство всех экстремальных траекторий описывается экспоненциальным отображением

$$\begin{aligned} \text{Exp}: C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow M, & \text{Exp}(\lambda, t) &= q_t, \\ \lambda = (\theta, c, \alpha) &\in C, & t &\in \mathbb{R}_+, & q_t &\in M. \end{aligned}$$

Экспоненциальное отображение переводит пару  $(\lambda, t)$ , состоящую из начального значения вектора сопряженных переменных  $\lambda \in C$  и времени  $t \in \mathbb{R}_+$ , в конец соответствующей экстремальной траектории  $q_t$ . В предыдущих пунктах получена явная параметризация экспоненциального отображения элементарными функциями и функциями Якоби.

Далее мы исследуем дискретные симметрии экспоненциального отображения и на этой основе получим оценки времени разреза вдоль экстремальных траекторий.

## § 6. Дискретные симметрии экспоненциального отображения

**6.1. Отражения поля направлений маятника.** Подсистема для сопряженных переменных нормальной гамильтоновой системы (5.1)–(5.3) сведена к уравнению маятника (5.8). Очевидно, что следующие отражения  $\varepsilon^i$  сохраняют поле направлений маятника:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: (\theta, c, \alpha) &\mapsto (\theta, -c, \alpha), & \varepsilon^2: (\theta, c, \alpha) &\mapsto (-\theta, c, \alpha), \\ \varepsilon^3: (\theta, c, \alpha) &\mapsto (-\theta, -c, \alpha), & \varepsilon^4: (\theta, c, \alpha) &\mapsto (\theta + \pi, c, -\alpha), \\ \varepsilon^5: (\theta, c, \alpha) &\mapsto (\theta + \pi, -c, -\alpha), & \varepsilon^6: (\theta, c, \alpha) &\mapsto (-\theta + \pi, c, -\alpha), \\ \varepsilon^7: (\theta, c, \alpha) &\mapsto (-\theta + \pi, -c, -\alpha). \end{aligned}$$

Отражения  $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^5, \varepsilon^6$  изменяют направление времени на траекториях, а  $\varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^7$  сохраняют. Эти отражения порождают группу симметрий параллелепипеда  $G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6, \varepsilon^7\}$  с таблицей умножения (таблица 1);

Таблица 1. Правила умножения в группе  $G$

	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^7$
$\varepsilon^1$	Id	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^7$	$\varepsilon^6$
$\varepsilon^2$		Id	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^7$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^5$
$\varepsilon^3$			Id	$\varepsilon^7$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^4$
$\varepsilon^4$				Id	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$
$\varepsilon^5$					Id	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2$
$\varepsilon^6$						Id	$\varepsilon^1$
$\varepsilon^7$							Id

элементы таблицы ниже главной диагонали не заполнены, так как группа  $G$  абелева.

**6.2. Отражения траекторий маятника.** Действие симметрий  $\varepsilon^i$  продолжается на множество траекторий уравнения маятника (5.8) с сохранением направления времени. Обозначим гладкую кривую

$$\gamma = \{(\theta_s, c_s, \alpha) \mid s \in [0, t]\}$$

в фазовом пространстве маятника  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ . Определим действие отражений на

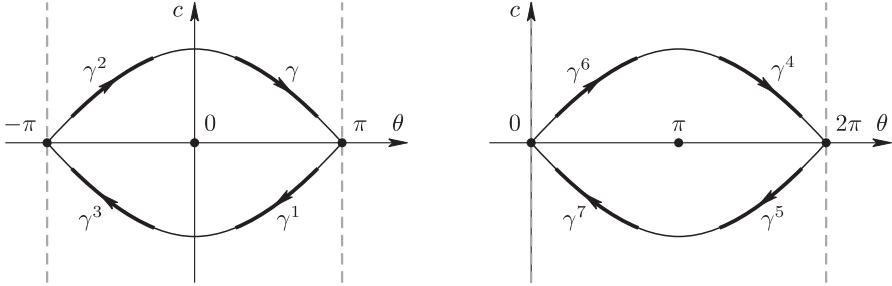


Рис. 10. Отражение траекторий маятника

эти кривые (рис. 10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \gamma &\mapsto \gamma^1 = \{(\theta_s^1, c_s^1, \alpha^1) \mid s \in [0, t]\} = \{(\theta_{t-s}, -c_{t-s}, \alpha) \mid s \in [0, t]\}, \\ \varepsilon^2: \gamma &\mapsto \gamma^2 = \{(\theta_s^2, c_s^2, \alpha^2) \mid s \in [0, t]\} = \{(-\theta_{t-s}, c_{t-s}, \alpha) \mid s \in [0, t]\}, \\ \varepsilon^3: \gamma &\mapsto \gamma^3 = \{(\theta_s^3, c_s^3, \alpha^3) \mid s \in [0, t]\} = \{(-\theta_s, -c_s, \alpha) \mid s \in [0, t]\}, \\ \varepsilon^4: \gamma &\mapsto \gamma^4 = \{(\theta_s^4, c_s^4, \alpha^4) \mid s \in [0, t]\} = \{(\theta_s + \pi, c_s, -\alpha) \mid s \in [0, t]\}, \\ \varepsilon^5: \gamma &\mapsto \gamma^5 = \{(\theta_s^5, c_s^5, \alpha^5) \mid s \in [0, t]\} = \{(\theta_{t-s} + \pi, -c_{t-s}, -\alpha) \mid s \in [0, t]\}, \\ \varepsilon^6: \gamma &\mapsto \gamma^6 = \{(\theta_s^6, c_s^6, \alpha^6) \mid s \in [0, t]\} = \{(-\theta_{t-s} + \pi, c_{t-s}, -\alpha) \mid s \in [0, t]\}, \\ \varepsilon^7: \gamma &\mapsto \gamma^7 = \{(\theta_s^7, c_s^7, \alpha^7) \mid s \in [0, t]\} = \{(-\theta_s + \pi, -c_s, -\alpha) \mid s \in [0, t]\}. \end{aligned}$$

**ЛЕММА 1.** *Отражения  $\varepsilon^i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , переводят траектории маятника (5.8) в траектории.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение проверяется непосредственным дифференцированием. Например, для  $\varepsilon^4$  и  $\varepsilon^7$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\theta_s^4 &= \frac{d}{ds}(\theta_s + \pi) = \dot{\theta}_s = c_s^4, \\ \frac{d}{ds}c_s^4 &= \frac{d}{ds}c_s = \dot{c}_s = -\alpha \sin \theta_s = \alpha^4 \sin(\theta_s^4 + \pi) = -\alpha^4 \sin \theta_s^4, \\ \frac{d}{ds}\theta_s^7 &= \frac{d}{ds}(-\theta_s + \pi) = -\dot{\theta}_s = -c_s = c_s^7, \\ \frac{d}{ds}c_s^7 &= \frac{d}{ds}(-c_s) = -\dot{c}_s = \alpha \sin \theta_s = -\alpha^7 \sin(-\theta_s^7 + \pi) = -\alpha^7 \sin \theta_s^7. \end{aligned}$$

Продолжим действие отражений  $\varepsilon^i$  с вертикальной подсистемы (5.1)–(5.3) на решения полной гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина (5.1)–(5.7)

$$\dot{\theta}_s = c_s, \quad \dot{c}_s = -\alpha \sin \theta_s, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \dot{q}_s = -\sin \theta_s X_1(q_s) + \cos \theta_s X_2(q_s)$$

следующим образом:

$$\varepsilon^i: \{(\theta_s, c_s, \alpha, q_s) \mid s \in [0, t]\} \mapsto \{(\theta_s^i, c_s^i, \alpha^i, q_s^i) \mid s \in [0, t]\}. \quad (6.1)$$

Действие отражений на кривые  $(\theta_s, c_s, \alpha)$  описано явно выше в этом пункте. Далее мы вычислим действие отражений на эластики  $(x_s, y_s)$  и на конечные точки геодезических  $q_t$ .

**6.3. Отражения эластик Эйлера.** Пусть  $q_s = (x_s, y_s, z_s, v_s)$ ,  $s \in [0, t]$ , есть геодезическая, а

$$q_s^i = (x_s^i, y_s^i, z_s^i, v_s^i), \quad s \in [0, t], \quad i = 1, \dots, 7,$$

суть ее образы под действием отражений  $\varepsilon^i$ . Опишем действие отражений на эластики  $(x_s, y_s)$ .

**ЛЕММА 2.** *Отражения  $\varepsilon^i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , преобразуют эластики  $(x_s, y_s)$  следующим образом:*

$$\begin{aligned} x_s^1 &= x_t - x_{t-s}, & y_s^1 &= y_t - y_{t-s}, \\ x_s^2 &= x_{t-s} - x_t, & y_s^2 &= y_t - y_{t-s}, \\ x_s^3 &= -x_s, & y_s^3 &= y_s, \\ x_s^4 &= -x_s, & y_s^4 &= -y_s, \\ x_s^5 &= x_{t-s} - x_t, & y_s^5 &= y_{t-s} - y_t, \\ x_s^6 &= x_t - x_{t-s}, & y_s^6 &= y_{t-s} - y_t, \\ x_s^7 &= x_s, & y_s^7 &= -y_s. \end{aligned}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проверяя непосредственным интегрированием, например для  $\varepsilon^6$ , получаем

$$\begin{aligned} x_s^6 &= \int_0^s (-\sin(-\theta_{t-r} + \pi)) dr = -\int_t^{t-s} (-\sin \theta_p) dp = x_t - x_{t-s}, \\ y_s^6 &= \int_0^s \cos(-\theta_{t-r} + \pi) dr = \int_t^{t-s} \cos \theta_p dp = y_{t-s} - y_t. \end{aligned}$$

Действие симметрий  $\varepsilon^i$  на эластики имеет следующий геометрический смысл (рис. 11):

- $\varepsilon^1$  есть отражение эластики в ее хорде (т.е. отрезке, соединяющем ее начало и конец);
- $\varepsilon^3$  есть отражение эластики в оси  $y$ ;
- $\varepsilon^4$  есть отражение эластики в начальной точке;
- $\varepsilon^7$  есть отражение эластики в оси  $x$ ;

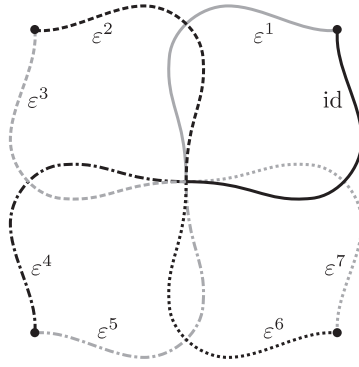


Рис. 11. Отражение эйлеровых эластик

остальные симметрии выражаются через композицию уже описанных по таблице умножения (см. таблицу 1).

#### 6.4. Отражение концов геодезических.

ЛЕММА 3. *Отражения  $\varepsilon^i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , преобразуют концы геодезических  $q_t = (x_t, y_t, z_t, v_t)$  в концы геодезических  $q_t^i = (x_t^i, y_t^i, z_t^i, v_t^i)$  следующим образом:*

$$\begin{array}{llll}
 x_t^1 = x_t, & y_t^1 = y_t, & z_t^1 = -z_t, & v_t^1 = v_t - x_t z_t, \\
 x_t^2 = -x_t, & y_t^2 = y_t, & z_t^2 = z_t, & v_t^2 = v_t - x_t z_t, \\
 x_t^3 = -x_t, & y_t^3 = y_t, & z_t^3 = -z_t, & v_t^3 = v_t, \\
 x_t^4 = -x_t, & y_t^4 = -y_t, & z_t^4 = z_t, & v_t^4 = -v_t, \\
 x_t^5 = -x_t, & y_t^5 = -y_t, & z_t^5 = -z_t, & v_t^5 = -v_t + x_t z_t, \\
 x_t^6 = x_t, & y_t^6 = -y_t, & z_t^6 = z_t, & v_t^6 = -v_t + x_t z_t, \\
 x_t^7 = x_t, & y_t^7 = -y_t, & z_t^7 = -z_t, & v_t^7 = -v_t.
 \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 получаем выражения для  $x_t^i$  и  $y_t^i$ . Выражения для остальных координат получаются интегрированием. Например, для  $\varepsilon^1$  имеем

$$\begin{aligned}
 z_t^1 &= \frac{1}{2} \int_0^t (x_s^1 \dot{y}_s^1 + y_s^1 \dot{x}_s^1) ds = \frac{1}{2} \int_0^t ((x_t - x_{t-s}) \dot{y}_s^1 - (y_t - y_{t-s}) \dot{x}_s^1) ds = -z_t, \\
 v_t^1 &= \frac{1}{2} \int_0^t \dot{y}_s^1 ((x_s^1)^2 + (y_s^1)^2) ds \\
 &= \frac{y_t x_t^2}{2} + \frac{y_t^3}{2} - x_t \int_0^t x_s \dot{y}_s ds - y_t \int_0^t y_s \dot{y}_s ds + v_t \\
 &= \frac{y_t x_t^3}{2} - \frac{x_t}{2} \int_0^t ((x_s y_s) \cdot + (x_s \dot{y}_s - y_s \dot{x}_s)) ds + v_t = v_t - x_t z_t.
 \end{aligned}$$

Для остальных отражений  $\varepsilon^i$  доказательство аналогичное.



### 6.5. Отражения как симметрии экспоненциального отображения.

Определим действие отражений  $\varepsilon^i$  в прообразе экспоненциального отображения  $C \times \mathbb{R}_+$  как сужение определенного в п. 6.2 действия на начальную точку траектории маятника:

$$\begin{aligned} \varepsilon^i: C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow C \times \mathbb{R}_+, & \varepsilon^i(\theta, c, \alpha, t) &= (\theta^i, c^i, \alpha^i, t), \\ (\theta^1, c^1, \alpha^1) &= (\theta_t, -c_t, \alpha), \\ (\theta^2, c^2, \alpha^2) &= (-\theta_t, c_t, \alpha), \\ (\theta^3, c^3, \alpha^3) &= (-\theta, -c, \alpha), \\ (\theta^4, c^4, \alpha^4) &= (\theta + \pi, c, -\alpha), \\ (\theta^5, c^5, \alpha^5) &= (\theta_t + \pi, -c_t, -\alpha), \\ (\theta^6, c^6, \alpha^6) &= (-\theta_t + \pi, c_t, -\alpha), \\ (\theta^7, c^7, \alpha^7) &= (-\theta + \pi, -c, -\alpha). \end{aligned}$$

Действие отражений  $\varepsilon$  в образе экспоненциального отображения  $M$  определим как действие на концы геодезических (см. лемму 3):

$$\varepsilon^i: M \rightarrow M, \quad \varepsilon^i(q) = \varepsilon^i(x, y, z, v) = q^i = (x^i, y^i, z^i, v^i), \quad (6.2)$$

$$(x^1, y^1, z^1, v^1) = (x, y, -z, v - xz), \quad (6.3)$$

$$(x^2, y^2, z^2, v^2) = (-x, y, z, v - xz), \quad (6.4)$$

$$(x^3, y^3, z^3, v^3) = (-x, y, -z, v), \quad (6.5)$$

$$(x^4, y^4, z^4, v^4) = (-x, -y, z, -v), \quad (6.6)$$

$$(x^5, y^5, z^5, v^5) = (-x, -y, -z, -v + xz), \quad (6.7)$$

$$(x^6, y^6, z^6, v^6) = (x, -y, z, -v + xz), \quad (6.8)$$

$$(x^7, y^7, z^7, v^7) = (x, -y, -z, -v). \quad (6.9)$$

В силу того, что действие отражений  $\varepsilon^i$  в прообразе  $C \times \mathbb{R}_+$  и образе  $M$  экспоненциального отображения порождается действием отражений (6.1) на траектории гамильтоновой системы, справедливо следующее утверждение.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Для любого  $i = 1, \dots, 7$  отражение  $\varepsilon^i$  есть симметрия экспоненциального отображения, т.е.*

$$\varepsilon^i \circ \text{Exp}(\theta, c, \alpha, t) = \text{Exp} \circ \varepsilon^i(\theta, c, \alpha, t), \quad (\theta, c, \alpha) \in C, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

## § 7. Точки Максвелла

Точка  $q_t$  субримановой геодезической называется *точкой Максвелла*, если существует другая экстремальная траектория  $\tilde{q}_s \not\equiv q_s$ , для которой  $\tilde{q}_t = q_t$ ,  $t > 0$ . Известно, что после точки Максвелла геодезическая не может быть оптимальна (см. [9]). В этом параграфе будут вычислены точки Максвелла,

соответствующие некоторым из отражений  $\varepsilon^i$ . На этой основе будут получены верхние оценки времени разреза вдоль экстремальных траекторий

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = \sup\{t > 0 \mid \text{Exp}(\lambda, s) \text{ оптимальна при } s \in [0, t]\}.$$

Определим множества Максвелла в прообразе  $\text{Exp}$ , соответствующие симметриям  $\varepsilon^i$ :

$$\begin{aligned} \text{MAX}^i &= \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid \lambda^i \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t)\}, \\ \lambda &= (\theta, c, \alpha), \quad \lambda^i = (\theta^i, c^i, \alpha^i) = \varepsilon^i(\lambda). \end{aligned} \quad (7.1)$$

**7.1. Неподвижные точки симметрий в образе экспоненциального отображения.** В силу предложения 1 равенство  $\text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t)$  из определения (7.1) множества  $\text{MAX}^i$  равносильно равенству  $\varepsilon^i(q_t) = q_t$ . Из определения (6.2)–(6.9) действия отражений в  $M$  непосредственно получаем следующее описание неподвижных точек отражений  $\varepsilon^i$  в образе экспоненциального отображения.

**ЛЕММА 4.** *Справедливы следующие соотношения:*

- 1)  $\varepsilon^1(q) = q \iff z = 0;$
- 2)  $\varepsilon^2(q) = q \iff x = 0;$
- 3)  $\varepsilon^3(q) = q \iff x^2 + z^2 = 0;$
- 4)  $\varepsilon^4(q) = q \iff x^2 + y^2 + v^2 = 0;$
- 5)  $\varepsilon^5(q) = q \iff x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 0;$
- 6)  $\varepsilon^6(q) = q \iff y^2 + (2v - xz)^2 = 0;$
- 7)  $\varepsilon^7(q) = q \iff y^2 + z^2 + v^2 = 0.$

Равенства  $\varepsilon^i(q) = q$  задают в пространстве состояний  $\mathbb{R}^4$  подмногообразия размерностей от 3 до 0. В настоящей работе мы ограничимся исследованием подмногообразий максимальной размерности 3 (соответствующих множествам Максвелла  $\text{MAX}^1, \text{MAX}^2$ ). Подмногообразия меньших размерностей будут изучены позже.

**7.2. Неподвижные точки симметрий в прообразе экспоненциального отображения.** В этом пункте вычислим решения уравнений  $\lambda^i = \lambda$ , существенных для описания множеств Максвелла  $\text{MAX}^i$  (для случаев  $i = 1, 2$ ); см. (7.1). Здесь и далее используются следующие переменные на множествах  $C_i \times \mathbb{R}_+$ :

$$\begin{aligned} (\lambda, t) \in (C_1 \cup C_3) \times \mathbb{R}_+ &\implies \tau = \sigma \frac{\varphi + \varphi_t}{2}, \quad p = \frac{\sigma t}{2}, \\ (\lambda, t) \in C_2 \times \mathbb{R}_+ &\implies \tau = \sigma \frac{\varphi + \varphi_t}{2k}, \quad p = \frac{\sigma t}{2k}. \end{aligned}$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** *Пусть  $(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+$ ,  $\varepsilon^i(\lambda, t) = (\lambda^i, t)$ . Тогда:*

- 1)  $\lambda^1 = \lambda \iff \begin{cases} \text{сн } \tau = 0 & \text{при } \lambda \in C_1, \\ \text{невозможно} & \text{при } \lambda \in C_2 \cup C_3 \cup C_6; \end{cases}$

$$2) \quad \lambda^2 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{sn} \tau = 0 & \text{при } \lambda \in C_1, \\ \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0 & \text{при } \lambda \in C_2, \\ \tau = 0 & \text{при } \lambda \in C_3, \\ 2\theta + ct = 2\pi n & \text{при } \lambda \in C_6. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем только п. 1), так как п. 2) доказывается аналогично.

Согласно определению действия отражений в прообразе экспоненциального отображения (п. 6.5) равенство  $\lambda^1 = \lambda$  эквивалентно равенствам  $\theta = \theta_t, c = -c_t$ .

Если  $\lambda \in C_2 \cup C_3 \cup C_6$ , то переменная  $c$  сохраняет знак вдоль траекторий маятника (5.8), поэтому равенство  $c = -c_t$  невозможно.

Если  $\lambda \in C_1$ , то в силу определения эллиптических координат (п. 5.3) получаем

$$\begin{cases} \theta = \theta_t, \\ c = -c_t \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{sn}(\sigma\varphi) = \operatorname{sn}(\sigma\varphi_t), \\ \operatorname{cn}(\sigma\varphi) = -\operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) \end{cases} \iff \operatorname{cn} \tau = 0.$$

Для получения последнего перехода мы воспользовались формулами сложения для функций Якоби (см. [24]).

**7.3. Общее описание множеств Максвелла, соответствующих отражениям  $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ .** Результаты двух предыдущих пунктов можно суммировать в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $(\lambda, t) \in \bigcup_{i=1}^3 (C_i \times \mathbb{R}_+)$  и  $q_t = \operatorname{Exp}(\lambda, t)$ . Тогда:

$$1) \quad (\lambda, t) \in \operatorname{MAX}^1 \iff \begin{cases} z_t = 0, \operatorname{cn} \tau \neq 0 & \text{при } \lambda \in C_1, \\ z_t = 0 & \text{при } \lambda \in C_2 \cup C_3; \end{cases}$$

$$2) \quad (\lambda, t) \in \operatorname{MAX}^2 \iff \begin{cases} x_t = 0, \operatorname{sn} \tau \neq 0 & \text{при } \lambda \in C_1, \\ x_t = 0, \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \neq 0 & \text{при } \lambda \in C_2, \\ x_t = 0, \tau \neq 0 & \text{при } \lambda \in C_3. \end{cases}$$

**7.4. Полное описание множеств Максвелла, соответствующих отражениям  $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ .** В этом пункте опишем корни уравнений  $x_t = 0, z_t = 0$  вдоль экстремальных траекторий. Для этого мы воспользуемся следующими разложениями, полученными на основе ранее полученных выражений для экстремальных траекторий (п. 5.5, 5.6) и формул сложения для функций Якоби.

Если  $\lambda \in C_1$ , то

$$x_t = -\frac{4k\sigma}{\alpha} \frac{\operatorname{dn} p \operatorname{sn} p \operatorname{dn} \tau \operatorname{sn} \tau}{\Delta}, \quad \Delta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 \tau > 0, \quad (7.2)$$

$$z_t = \frac{4k}{|\alpha|} \frac{f_z(p) \operatorname{cn} \tau}{\Delta}, \quad f_z(p) = \operatorname{dn} p \operatorname{sn} p + (p - 2E(p)) \operatorname{cn} p. \quad (7.3)$$

Если  $\lambda \in C_2$ , то

$$x_t = -\frac{4\sigma \operatorname{sgn} c}{\alpha k} \frac{\operatorname{cn} p \operatorname{sn} p \operatorname{cn} \tau \operatorname{sn} \tau}{\Delta}, \quad (7.4)$$

$$z_t = -\frac{4 \operatorname{sgn} c}{|\alpha| k^2} \frac{g_z(p) \operatorname{dn} \tau}{\Delta}, \quad (7.5)$$

$$g_z(p) = ((k^2 - 2)p + 2E(p)) \operatorname{dn} p - k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} p. \quad (7.6)$$

Если  $\lambda \in C_3$ , то

$$x_t = \frac{8\sigma \operatorname{sgn} c}{\alpha} \frac{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} \tau}{\operatorname{ch}(2p) + \operatorname{ch}(2\tau)}, \quad (7.7)$$

$$z_t = \frac{8 \operatorname{sgn} c}{|\alpha|} \frac{\operatorname{ch} \tau (p \operatorname{ch} p - \operatorname{sh} p)}{\operatorname{ch}(2p) + \operatorname{ch}(2\tau)}. \quad (7.8)$$

Если  $\lambda \in C_6$ , то

$$x_t = \frac{\cos(ct + \theta) - \cos \theta}{c}, \quad (7.9)$$

$$z_t = \frac{ct - \sin(ct)}{2c^2}. \quad (7.10)$$

Корни функций  $f_z(p)$  и  $g_z(p)$  описаны в работе [9]. В [9; предложение 2.1] доказано, что все положительные корни функции  $f_z(p, k)$  имеют вид

$$p_z^1 < p_z^2 < \dots < p_z^n < \dots, \quad p_z^n(k) \in (-K + 2Kn, K + 2Kn), \quad n \in \mathbb{N},$$

а  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл I рода. В [9; предложение 3.1] доказано, что функция  $g_z(p)$  не имеет положительных корней. С учетом этих результатов из теоремы 1 и разложений (7.2)–(7.10) получаем следующее описание множеств Максвелла, соответствующих отражению  $\varepsilon^1$  и  $\varepsilon^2$  (обозначим  $N_i = C_i \times \mathbb{R}_+$ ).

**ТЕОРЕМА 2.** *Справедливы следующие равенства:*

- 1)  $\operatorname{MAX}^1 \cap N_1 = \{(\lambda, t) \in N_1 \mid p = p_z^n(k), n \in \mathbb{N}, \operatorname{cn}(\tau) \neq 0\}$ ;
- 2)  $\operatorname{MAX}^1 \cap N_2 = \operatorname{MAX}^1 \cap N_3 = \operatorname{MAX}^1 \cap N_6 = \emptyset$ ;
- 3)  $\operatorname{MAX}^2 \cap N_1 = \{(\lambda, t) \in N_1 \mid p = 2Kn, n \in \mathbb{N}, \operatorname{sn}(\tau) \neq 0\}$ ;
- 4)  $\operatorname{MAX}^2 \cap N_2 = \{(\lambda, t) \in N_2 \mid p = Kn, n \in \mathbb{N}, \operatorname{sn}(\tau) \operatorname{cn}(\tau) \neq 0\}$ ;
- 5)  $\operatorname{MAX}^2 \cap N_3 = \emptyset$ ;
- 6)  $\operatorname{MAX}^2 \cap N_6 = \{(\lambda, t) \in N_6 \mid tc = 2\pi n, \theta \neq \pi k, n, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**7.5. Предельные точки множества Максвелла.** Определим множество, содержащееся в замыкании множества Максвелла:

$$\operatorname{CMAX} = \left\{ (\lambda, t) \in N \mid \exists \{\lambda_n, t_n\}, \{\lambda'_n, t_n\} \subset N : \right. \\ \left. \lambda_n \neq \lambda'_n, \operatorname{Exp}(\lambda_n, t_n) = \operatorname{Exp}(\lambda'_n, t_n), \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda'_n = \lambda \right\}.$$

В [9; предложение 5.1] доказано, что если  $(\lambda, t) \in \text{CMAH}$ , то точка

$$q_t = \text{Exp}(\lambda, t)$$

является сопряженной вдоль экстремальной траектории  $q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$  и эта траектория неоптимальна при  $s > t$ .

**ЛЕММА 5.** *Справедливо следующее:*

- 1) если  $(\lambda, t) \in N_1$ ,  $p = p_z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{cn } \tau = 0$ , то  $(\lambda, t) \in \text{CMAH}$ ;
- 2) если  $(\lambda, t) \in N_1$ ,  $p = 2Kn$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{sn } \tau = 0$ , то  $(\lambda, t) \in \text{CMAH}$ ;
- 3) если  $(\lambda, t) \in N_2$ ,  $p = Kn$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{sn } \tau \text{ cn } \tau = 0$ , то  $(\lambda, t) \in \text{CMAH}$ ;
- 4) если  $(\lambda, t) \in N_6$ ,  $tc = 2\pi n$ ,  $\theta = \pi k$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$ , то  $(\lambda, t) \in \text{CMAH}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем только п. 1), так как остальные пункты доказываются аналогично. Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$  и рассмотрим последовательности точек  $\{(\lambda_m^\pm, t_m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ , для которых

$$p_m^\pm = p_z^n, \quad \tau_m^\pm = \tau \pm \frac{1}{m}.$$

Тогда

$$\lambda_m^+ \neq \lambda_m^-, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m^+ = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m^- = \lambda.$$

Более того,

$$(\lambda_m^-, t) = \varepsilon^1(\lambda_m^+, t), \quad z_m^+(t) = z_m^-(t) = 0.$$

Поэтому из леммы 4 следует, что

$$\text{Exp}(\lambda_m^-, t) = \text{Exp}(\lambda_m^+, t), \quad m \in \mathbb{N},$$

откуда получаем  $(\lambda, t) \in \text{CMAH}$ .

**7.6. Оценка времени разреза.** Определим функцию  $t_{\text{MAX}}^1: C \rightarrow (0, +\infty]$ :

$$\begin{aligned} \lambda \in C_1 &\implies t_{\text{MAX}}^1 = \frac{\min(2p_z^1, 4K)}{\sigma}, \\ \lambda \in C_2 &\implies t_{\text{MAX}}^1 = \frac{2Kk}{\sigma}, \\ \lambda \in C_6 &\implies t_{\text{MAX}}^1 = \frac{2\pi}{|c|}, \\ \lambda \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_7 &\implies t_{\text{MAX}}^1 = +\infty. \end{aligned}$$

Из теоремы 2 и леммы 5 получаем следующую глобальную верхнюю оценку времени разреза вдоль экстремальных траекторий.

**ТЕОРЕМА 3.** *Для любого  $\lambda \in C$*

$$t_{\text{cut}}(\lambda) \leq t_{\text{MAX}}^1(\lambda). \quad (7.11)$$

Анализ глобальной структуры экспоненциального отображения показывает, что оценка (7.11) неточна. Однако на ее основе возможно сведение субримановой задачи на группе Энгеля к решению систем уравнений вида

$$q_t(\lambda) = q_1, \quad t \in (0, t_{\text{MAX}}^1(\lambda)],$$

аналогично решению задачи Эйлера об эластиках (см. [25]). Благодаря этому можно разработать компьютерную программу для приближенного вычисления глобального решения субримановой задачи на группе Энгеля, а на ее основе – программу для приближенного решения задачи управления общих нелинейных систем в четырехмерном пространстве с двумерным управлением. Решение этих задач будет содержанием последующей работы.

## § 8. Заключение

В настоящей работе рассмотрена нильпотентная субриманова задача на группе Энгеля. Для этой задачи:

- вычислены экстремальные траектории;
- описаны симметрии экспоненциального отображения и соответствующие точки Максвелла;
- получена глобальная верхняя оценка времени разреза вдоль экстремальных траекторий.

В дальнейшем планируется исследование оптимальности экстремальных траекторий и написание программы для вычисления оптимальных траекторий в субримановой задаче на группе Энгеля, а также применение результатов к решению задачи управления для общих нелинейных систем в четырехмерном пространстве с двумерным управлением на основе метода нильпотентной аппроксимации.

## Список литературы

- [1] R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Math. Surveys Monogr., **91**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [2] A. Bellaïche, “The tangent space in sub-Riemannian geometry”, *Sub-Riemannian geometry* (Paris, France, 1992), Progr. Math., **144**, Birkhäuser, Basel, 1996, 1–78.
- [3] А. А. Агрacheв, А. В. Сарычев, “Фильтрации алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем”, *Докл. АН СССР*, **295**:4 (1987), 777–781; англ. пер.: А. А. Agrachev, A. V. Sarychev, “Filtrations of a Lie algebra of vector fields and nilpoint approximation of controlled systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **36**:1 (1988), 104–108.
- [4] H. Hermes, “Nilpotent and high-order approximations of vector field systems”, *SIAM Rev.*, **33**:2 (1991), 238–264.
- [5] А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, “Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи”, *Динамические системы – 7, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, **16**, ВИНТИ, М., 1987, 5–85; англ. пер.: А. М. Vershik, V. Ya. Gershkovich, “Nonholonomic dynamical systems, geometry of distributions and variational problems”, *Dynamical systems. VII, Encycl. Math. Sci.*, **16**, 1994, 1–81.

- [6] U. Boscain, F. Rossi, “Invariant Carnot–Caratheodory metrics on  $S^3$ ,  $SO(3)$ ,  $SL(2)$  and lens spaces”, *SIAM J. Control Optim.*, **47**:4 (2008), 1851–1878.
- [7] О. Мыasnichenko, “Nilpotent (3, 6) sub-Riemannian problem”, *J. Dynam. Control Systems*, **8**:4 (2002), 573–597.
- [8] О. Мыasnichenko, “Nilpotent  $(n, n(n+1)/2)$  sub-Riemannian problem”, *J. Dyn. Control Syst.*, **12**:1 (2006), 87–95.
- [9] Ю. Л. Сачков, “Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб.*, **197**:6 (2006), 111–160; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, “Complete description of the Maxwell strata in the generalized Dido problem”, *Sb. Math.*, **197**:6 (2006), 901–950.
- [10] Ю. Л. Сачков, “Симметрии и страты Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости”, *Матем. сб.*, **201**:7 (2010), 99–120; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, “Maxwell strata and symmetries in the problem of optimal rolling of a sphere over a plane”, *Sb. Math.*, **201**:7 (2010), 1029–1051.
- [11] F. Monroy-Pérez, A. Anzaldo-Meneses, “The step-2 nilpotent  $(n, n(n+1)/2)$  sub-Riemannian geometry”, *J. Dyn. Control Syst.*, **12**:2 (2006), 185–216.
- [12] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, “Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **16**:2 (2010), 380–399.
- [13] A. A. Agrachev, “Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures”, *J. Dynam. Control Systems*, **2**:3 (1996), 321–358.
- [14] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka, “Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **2** (1997), 377–448.
- [15] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005.
- [16] J. P. Laumond, *Robot motion planning and control*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., **229**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [17] Yu. L. Sachkov, “Maxwell strata in the Euler elastic problem”, *J. Dyn. Control Syst.*, **14**:2 (2008), 169–234.
- [18] Yu. L. Sachkov, “Conjugate points in Euler’s elastic problem”, *J. Dyn. Control Syst.*, **14**:3 (2008), 409–439.
- [19] Ю. Л. Сачков, *Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах*, Физматлит, М., 2007.
- [20] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1976; англ. пер.: L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *Selected works. Vol. 4. The mathematical theory of optimal processes*, Classics Soviet Math., Gordon & Breach, New York, 1986.
- [21] Л. Эйлер, *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле*, ГТТИ, М.–Л., 1934; пер. с лат.: L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1993.
- [22] А. Ляв, *Математическая теория упругости*, ОНТИ, М.–Л., 1935; пер. с англ.: A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.
- [23] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., **52**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [24] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, УРСС, М., 2002; пер. с англ.: E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, New York, 1962.

- [25] А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, “Решение задачи Эйлера об эластиках”, *Автомат. и телемех.*, 2009, №4, 78–88; англ. пер.: А. А. Ardentov, Yu. L. Sachkov, “Solution to Euler’s elastic problem”, *Autom. Remote Control*, **70**:4 (2009), 633–643.

**А. А. Ардентов (A. A. Ardentov)**

Институт программных систем

им. А. К. Айламазяна РАН,

г. Переславль-Залесский

*E-mail*: [aaa@pereslavl.ru](mailto:aaa@pereslavl.ru)

Поступила в редакцию

21.07.2010 и 10.02.2011

**Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)**

Институт программных систем

им. А. К. Айламазяна РАН,

г. Переславль-Залесский

*E-mail*: [sachkov@sys.botik.ru](mailto:sachkov@sys.botik.ru)