

УДК 517.977

Ю. Л. Сачков

## Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны

Обобщенная задача Дидоны формулируется как задача оптимального управления в 5-мерном пространстве с 2-мерным управлением и квадратичным функционалом – нильпотентная субриманова задача с вектором роста  $(2, 3, 5)$ . Экстремали этой задачи параметризуются эллиптическими функциями Якоби.

Библиография: 20 названий.

### § 1. Введение. Постановка задачи

**1.1. Геометрическая постановка задачи.** Как хорошо известно, классическая задача Дидоны может быть сформулирована следующим образом. Даны две точки на плоскости, соединенные кривой  $\gamma_0$ , и число  $S$ . Требуется соединить эти точки кратчайшей кривой  $\gamma$  так, чтобы область на плоскости, ограниченная кривыми  $\gamma_0$  и  $\gamma$ , имела площадь  $S$ . Известно и решение этой задачи: это дуга окружности или отрезок прямой, соединяющий заданные точки.

Рассмотрим следующее естественное обобщение задачи Дидоны. Зададим кроме двух точек  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , соединяющей их кривой  $\gamma_0$  и числа  $S \in \mathbb{R}$  также точку на плоскости  $c = (c_x, c_y) \in \mathbb{R}^2$ . Необходимо найти кратчайшую кривую  $\gamma$ , соединяющую точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ , такую, чтобы область  $D \subset \mathbb{R}^2$ , ограниченная парой кривых  $\gamma_0$  и  $\gamma$ , имела заданные площадь  $S$  и центр масс  $c$ .

Несмотря на простоту и естественность формулировки обобщенная задача Дидоны является открытой. Цель данной работы – описание экстремалей этой задачи.

Будем считать, что кривая  $\gamma$  ориентирована от точки  $(x_0, y_0)$  к точке  $(x_1, y_1)$ , а кривая  $\gamma_0$  – в противоположном направлении (кривые  $\gamma$  и  $\gamma_0$  будем считать липшицевыми).

По теореме Стокса площадь  $S$  и центр масс  $(c_x, c_y)$  области  $D$ , ограниченной замкнутой кривой  $\gamma + \gamma_0 = \partial D$ , вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{\gamma + \gamma_0} \frac{1}{2}(x dy - y dx), \\ c_x &= \frac{1}{S} \iint_D x dx dy = \frac{1}{S} \int_{\gamma + \gamma_0} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dy, \\ c_y &= \frac{1}{S} \iint_D y dx dy = \frac{1}{S} \int_{\gamma + \gamma_0} -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx. \end{aligned}$$

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00506).

Обозначим дифференциальные 1-формы:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(x dy - y dx), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dy, \quad \omega_3 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx.$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Задание  $S, c_x, c_y$  равносильно заданию интегралов

$$\int_{\gamma+\gamma_0} \omega_1, \quad \int_{\gamma+\gamma_0} \omega_2, \quad \int_{\gamma+\gamma_0} \omega_3.$$

2) Зависимость от кривой  $\gamma_0$  несущественна, важно лишь то, что эта кривая соединяет точки  $(x_1, y_1)$  с  $(x_0, y_0)$ . А именно, выберем наряду с  $\gamma_0$  другую кривую  $\gamma_1$ , соединяющую  $(x_1, y_1)$  с  $(x_0, y_0)$ . Так как

$$\int_{\gamma+\gamma_0} \omega_i - \int_{\gamma+\gamma_1} \omega_i = \int_{\gamma_0-\gamma_1} \omega_i,$$

то задание интегралов  $\int_{\gamma+\gamma_0} \omega_i, i = 1, 2, 3$ , равносильно заданию интегралов

$\int_{\gamma+\gamma_1} \omega_i, i = 1, 2, 3$ . Поэтому в дальнейшем будем считать  $\gamma_0$  отрезком, соединяющим  $(x_1, y_1)$  с  $(x_0, y_0)$ .

3) Задание  $\int_{\gamma+\gamma_0} \omega_i, i = 1, 2, 3$ , равносильно заданию интегралов  $\int_{\gamma} \omega_i, i = 1, 2, 3$ .

4) Параллельные переносы в плоскости  $\mathbb{R}_{x,y}^2$  переводят решения задачи в решения, поэтому в дальнейшем будем считать, что кривые  $\gamma$  выходят из начала координат:

$$(x_0, y_0) = (0, 0). \quad (1)$$

**1.2. Подъем в  $\mathbb{R}^5$ .** Пусть  $\gamma = \{(x(t), y(t))\}$  – кривая, выходящая из начала координат:  $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ . Определим следующие функции времени:

$$z(t) = \int_{\gamma} \omega_1 = \int_0^t \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) dt, \quad (2)$$

$$v(t) = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_0^t \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\dot{y} dt, \quad (3)$$

$$w(t) = \int_{\gamma} \omega_3 = \int_0^t -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\dot{x} dt. \quad (4)$$

Для плоской кривой  $(x(t), y(t))$  определен ее подъем в пятимерное пространство:

$$q(t) = (x(t), y(t), z(t), v(t), w(t)) \in \mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5,$$

в терминах которого обобщенная задача Лидоны формулируется следующим образом. Для данной точки  $q_1 = (x_1, y_1, z_1, v_1, w_1) \in \mathbb{R}^5$  требуется найти кривую  $q(t) = (x(t), y(t), z(t), v(t), w(t)) \in \mathbb{R}^5$ , удовлетворяющую условиям (1)–(4) и крайнему условию  $q(t_1) = q_1$ , так, чтобы ее проекция  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  имела наименьшую возможную длину.

**1.3. Задача оптимального управления в координатах.** Введя обозначения  $u_1 = \dot{x}$ ,  $u_2 = \dot{y}$ , можно сформулировать обобщенную задачу Дидоны как задачу оптимального управления в 5-мерном пространстве с 2-мерным управлением и интегральным критерием:

$$q = (x, y, z, v, w) \in \mathbb{R}^5, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

$$\dot{x} = u_1, \quad (6)$$

$$\dot{y} = u_2, \quad (7)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1), \quad (8)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_2, \quad (9)$$

$$\dot{w} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_1, \quad (10)$$

$$q(0) = 0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (11)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (12)$$

Введем обозначения для векторных полей при управлениях:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Тогда задача записывается следующим образом:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in M = \mathbb{R}^5, \quad u = (u_1, u_2) \in U = \mathbb{R}^2, \quad (13)$$

$$q(0) = q_0 = 0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (14)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (15)$$

Допустимые траектории  $q(t)$  липшицевы, поэтому допустимые управления  $u(t)$  измеримы и локально ограничены.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Терминальное время  $t_1$  можно считать как фиксированным, так и свободным, так как при перепараметризациях времени на кривой  $q(t)$  функционал типа длины  $l$  не изменяется ввиду однородности подынтегральной функции.

**1.4. Субриманова задача.** Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^5$  распределение ранга 2, т.е. поле двумерных плоскостей в касательных пространствах, порожденное полями  $X_1, X_2$ :

$$\Delta_q = \text{span}(X_1(q), X_2(q)), \quad q \in M,$$

а также скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в распределении  $\Delta$ , которое задается полями  $X_1, X_2$  как ортонормированным базисом:

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Распределение  $\Delta$  и скалярное произведение в нем  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  задают субриманову структуру на  $M$ , а обобщенная задача Лидоны является соответствующей субримановой задачей:

$$\begin{aligned} \dot{q} &\in \Delta_q, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

**1.5. Нильпотентная субриманова (2, 3, 5) задача.** Вычислим повторные коммутаторы (скобки Ли) полей  $X_1, X_2$ , чтобы получить базис в касательном пространстве  $T_q M$  многообразия  $M$ :

$$\begin{aligned} X_3 &= [X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial v} + y \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_4 &= [X_1, X_3] = \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_5 &= [X_2, X_3] = \frac{\partial}{\partial w}, \\ T_q M &= \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)(q). \end{aligned}$$

Рассмотрим алгебру Ли, порожденную полями  $X_1, X_2$ :

$$L = \text{Lie}(X_1, X_2) = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5).$$

Все ненулевые коммутаторы в этой алгебре Ли исчерпываются коммутаторами порядка 1 и 2:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5. \quad (16)$$

Другими словами,  $L = \text{span}(X_1, \dots, X_5)$  является пятимерной нильпотентной алгеброй Ли с ненулевыми скобками (16).

Поэтому на многообразии  $M$  можно ввести структуру группы Ли с алгеброй Ли  $L$  так, что поля  $X_i, i = 1, \dots, 5$ , образуют левоинвариантный репер на  $M$ . А именно, произведение в группе Ли  $M$  задается действием потоков полей  $X_i$ :

$$e^{t_5 X_5} \circ e^{t_4 X_4} \circ e^{t_3 X_3} \circ e^{t_2 X_2} \circ e^{t_1 X_1}(q) = q \cdot e^{t_1 X_1} \cdot e^{t_2 X_2} \cdot e^{t_3 X_3} \cdot e^{t_4 X_4} \cdot e^{t_5 X_5},$$

где слева стоит композиция потоков векторных полей, а справа – произведение элементов группы Ли. Несложное вычисление показывает, что в координатах умножение в группе Ли  $M = \mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5$  задается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2) \\ v_1 + v_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2) y_2 + x_1 z_2 \\ w_1 + w_2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2) x_2 + y_1 z_2 \end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли  $L$  является градуированной:

$$\begin{aligned} L &= L_1 \oplus L_2 \oplus L_3, \\ [L_i, L_j] &= L_{i+j}, \quad L_i = \{0\} \text{ при } i > 3, \\ L_1 &= \text{span}(X_1, X_2) = \Delta, \\ L_2 &= \text{span}(X_3), \\ L_3 &= \text{span}(X_4, X_5), \end{aligned}$$

и порождается компонентой порядка 1:

$$L = \text{Lie}(L_1) = \text{Lie}(\Delta).$$

По терминологии [1] субриманова структура  $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  называется *плоской*.

Флаг распределения  $\Delta$ ,

$$\Delta \subset \Delta^2 = [\Delta, \Delta] \subset \Delta^3 = [\Delta, \Delta^2] \subset \dots \subset TM,$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= L_1 = \text{span}(X_1, X_2), \\ \Delta^2 &= L_1 \oplus L_2 = \text{span}(X_1, X_2, X_3), \\ \Delta^3 &= L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5). \end{aligned}$$

Поэтому вектор роста распределения  $\Delta$

$$(n_1, n_2, \dots, n_N), \quad n_i = \dim \Delta^i(q), \quad n_N = \dim \text{Lie}(\Delta)(q),$$

равен  $(2, 3, 5)$ .

Итак,  $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  является левоинвариантной нильпотентной субримановой структурой на группе Ли  $M$  с вектором роста  $(2, 3, 5)$ . Она является локальной квазиоднородной нильпотентной аппроксимацией произвольной субримановой структуры на 5-мерном многообразии с вектором роста  $(2, 3, 5)$  (см. [1], [2]).

Как показано в работе [3], плоская  $(2, 3, 5)$  субриманова структура единственна с точностью до изоморфизма групп Ли. Обобщенная задача Дидоны является одной из моделей плоской  $(2, 3, 5)$  субримановой структуры. Другие модели можно найти в работах [3], [4].

Вектор роста  $(2, 3, 5)$  является максимальным для распределений ранга 2 на 5-мерных многообразиях, поэтому распределение общего вида ранга 2 на 5-мерном многообразии имеет в точке общего положения именно этот вектор роста. Это объясняет важность плоской  $(2, 3, 5)$  субримановой структуры для субримановой геометрии и теории оптимального управления.

Субримановы структуры с вектором роста  $(2, 3, 5)$  возникают в некоторых важных прикладных задачах, среди которых:

- 1) задача о качении двух твердых тел друг по другу без прокручивания и проскальзывания [5]–[7];
- 2) машина с двумя прицепами [8];
- 3) задача о движении заряда в плоскости под действием линейного магнитного поля (это плоская  $(2, 3, 5)$  субриманова структура) [4].

**1.6. История задачи.** Обобщенная задача Дидоны (т.е. плоская  $(2, 3, 5)$  субриманова задача) рассматривалась несколькими авторами.

В работе [9] Р. Брокетт и Л. Даи доказали интегрируемость экстремалей в этой задаче в терминах эллиптических функций Якоби. В работе [10] А. Кренери С. Никитин исследуют эти экстремали численно. В работе [3] автором вычислены инфинитезимальные симметрии задачи. В работе [4] А. Анзалдо-Менезес и Ф. Монрой-Перез частично повторяют этот результат о симметриях с помощью другой техники.

Предшествующий максимальный вектор роста  $(2, 3)$ , т.е. контактный случай, был подробно изучен:

- 1) плоский  $(2, 3)$  случай, возникающий на группе Гейзенберга, был рассмотрен Р. Брокеттом [11], А. М. Вершиком и В. Я. Гершковичем [12];
- 2) общий  $(2, 3)$  случай был исследован как возмущение плоского случая А. А. Аграчевым, Ж. П. Готье и соавторами [13], [14].

**1.7. Структура работы.** В § 2 обсуждается существование оптимальных управлений в обобщенной задаче Дидоны.

В § 3 применяется принцип максимума Понтрягина в инвариантной форме, выписывается гамильтонова система для нормальных экстремалей и находятся аномальные экстремали.

В § 4 рассматриваются непрерывные симметрии задачи. Экспоненциальное отображение факторизуется по действию однопараметрической группы симметрий.

В § 5 интегрируется нормальная гамильтонова система. Показано, что система имеет достаточное количество первых интегралов. Для интегрирования системы вводятся специальные координаты, порожденные потоком уравнения маятника. В этих координатах гамильтонова система для нормальных экстремалей интегрируется в терминах эллиптических функций Якоби.

В § 6 рассматриваются проекции экстремалей на плоскость  $(x, y)$  – эластики.

Наконец, в приложении для удобства читателя приводятся определения и некоторые свойства эллиптических функций Якоби.

## § 2. Существование оптимальных решений

Управляемая система (13) имеет полный ранг, а пространство состояний  $M$  связно, поэтому эта система полностью управляема на  $M$ : любые две точки  $M$  могут быть соединены траекторией системы [15].

Существование оптимальных управлений в задаче оптимального управления (13)–(15) следует из теоремы Филиппова [16].

## § 3. Экстремали

Так же, как в римановой геометрии, перейдем от функционала длины к функционалу действия. Неравенство Коши–Буняковского

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \leq \sqrt{t_1} \sqrt{\int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt}$$

превращается в равенство только при  $u_1^2 + u_2^2 \equiv \text{const}$ , поэтому задача минимизации субримановой длины (15) эквивалентна задаче минимизации действия

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min \quad (17)$$

в следующем смысле: любая минималь длины постоянной скорости

$$u_1^2 + u_2^2 \equiv \text{const} \quad (18)$$

является минималью действия и обратно. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем задачу (13), (17).

**3.1. Принцип максимума Понтрягина.** Для нахождения экстремалей мы используем принцип максимума Понтрягина в инвариантной формулировке. Напомним сначала некоторые факты гамильтонова формализма на кокасательном расслоении [17].

Рассмотрим кокасательное расслоение  $T^*M$  гладкого многообразия  $M$  с канонической проекцией  $\pi: T^*M \rightarrow M$ ,  $\pi(\lambda) = q$  для ковектора  $\lambda \in T_q^*M$ . Тавтологическая 1-форма  $s \in \Lambda^1(T^*M)$  на кокасательном расслоении определена следующим образом. Пусть  $\lambda \in T^*M$  и  $v \in T_\lambda(T^*M)$ , тогда  $\langle s_\lambda, v \rangle = \langle \lambda, \pi_* v \rangle$  (в координатах  $s = p dq$ ). Каноническая симплектическая структура на кокасательном расслоении  $\sigma \in \Lambda^2(T^*M)$  определяется как  $\sigma = ds$  (в координатах  $\sigma = dp \wedge dq$ ). Любому гамильтониану  $h \in C^\infty(T^*M)$  можно сопоставить гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении  $\vec{h} \in \text{Vec}(T^*M)$  по правилу  $\sigma_\lambda(\cdot, \vec{h}) = d_\lambda h$ .

Принцип максимума Понтрягина [18] для задачи (13), (14), (17) имеет следующую инвариантную формулировку [15], [16].

Введем линейные на слоях кокасательного расслоения  $T^*M$  гамильтонианы, соответствующие базисным полям:

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \quad \lambda \in T^*M, \quad i = 1, \dots, 5,$$

а также семейство гамильтонианов

$$h_{u,\nu}(\lambda) = \langle \lambda, u_1 X_1 + u_2 X_2 \rangle + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2) = u_1 h_1(\lambda) + u_2 h_2(\lambda) + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2),$$

$$\lambda \in T^*M, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

**ТЕОРЕМА (Принцип максимума Понтрягина).** Пусть  $q_t$  и  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , являются оптимальной траекторией и соответствующим оптимальным управлением в задаче (13), (14), (17). Тогда существует нетривиальная пара

$$(\nu, \lambda_t) \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \lambda_t \in T_{q_t}^*M,$$

для которой выполнены условия

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t),\nu}(\lambda_t) = u_1(t) \vec{h}_1(\lambda_t) + u_2(t) \vec{h}_2(\lambda_t), \quad (19)$$

$$h_{u(t),\nu}(\lambda_t) = \max_{u \in \mathbb{R}^2} h_{u,\nu}(\lambda_t), \quad t \in [0, t_1], \quad (20)$$

$$\nu \leq 0.$$

Удовлетворяющая гамильтоновой системе (19) и условию максимума (20) кривая  $\lambda_t \in T^*M$  называется *экстремалью*, а ее проекция  $q_t = \pi(\lambda_t) \in M$  — *экстремальной кривой* (или *субримановой геодезической*).

**3.2. Нормальные экстремали.** Рассмотрим сначала нормальный случай:  $\nu = -1$ .

Из условия максимума (20) следует, что вдоль нормальных экстремалей  $u_1(t) = h_1(\lambda_t)$ ,  $u_2(t) = h_2(\lambda_t)$ . То есть максимизированный нормальный гамильтониан имеет вид:

$$H(\lambda) = \max_{u \in \mathbb{R}^2} h_{u, -1}(\lambda) = \frac{1}{2}(h_1^2(\lambda) + h_2^2(\lambda)).$$

В силу гладкости  $H$  нормальные экстремали являются траекториями соответствующей гамильтоновой системы

$$\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda), \quad \lambda \in T^*M. \quad (21)$$

Выпишем эту систему в координатах  $h_i$  на слоях в  $T^*M$ . Имеем

$$\dot{h}_1 = \{H, h_1\} = h_1\{h_1, h_1\} + h_2\{h_2, h_1\} = -h_2h_3. \quad (22)$$

Здесь фигурные скобки  $\{h, g\}$  обозначают скобку Пуассона гамильтонианов  $h$  и  $g$ . Так как все ненулевые скобки Ли полей  $X_i$  исчерпываются коммутаторами (16), все ненулевые скобки Пуассона линейных на слоях гамильтонианов  $h_i$  исчерпываются следующими:

$$\{h_1, h_2\} = h_3, \quad \{h_1, h_3\} = h_4, \quad \{h_2, h_3\} = h_5.$$

Вычисляя  $\dot{h}_i$ ,  $i = 2, \dots, 5$ , так же, как  $\dot{h}_1$  в (22), получаем, что гамильтонова система (21) записывается следующим образом:

$$\dot{h}_1 = -h_2h_3, \quad (23)$$

$$\dot{h}_2 = h_1h_3, \quad (24)$$

$$\dot{h}_3 = h_1h_4 + h_2h_5, \quad (25)$$

$$\dot{h}_4 = 0, \quad (26)$$

$$\dot{h}_5 = 0, \quad (27)$$

$$\dot{q} = h_1X_1 + h_2X_2. \quad (28)$$

Мы будем рассматривать геодезические, параметризованные длиной дуги, т.е. ограничимся поверхностью уровня  $\{H = \frac{1}{2}\}$ . В полярных координатах

$$h_1 = \cos \theta, \quad h_2 = \sin \theta, \quad h_4 = \alpha \sin \beta, \quad h_5 = -\alpha \cos \beta,$$

уравнения (23)–(27) сводятся к уравнению маятника:

$$\ddot{\theta} = -\alpha \sin(\theta - \beta), \quad \alpha, \beta = \text{const}. \quad (29)$$

Известно, что это уравнение интегрируемо в эллиптических функциях Якоби [19]. Ниже мы найдем явные выражения  $\theta(t)$  и  $q_t$  в модели обобщенной задачи Лидоны через эллиптические функции  $\text{sn}$ ,  $\text{sn}$ ,  $\text{dn}$ ,  $E$ .



**3.3. Анормальные экстремали.** Теперь рассмотрим анормальный случай:  $\nu = 0$ .

Из условия максимума (20) следует, что вдоль анормальных экстремалей  $h_1 = h_2 \equiv 0$ . Продифференцировав эти тождества вдоль гамильтоновой системы (19), получаем

$$\dot{h}_1 = \{u_1 h_1 + u_2 h_2, h_1\} = -u_2 h_3 \equiv 0, \quad \dot{h}_2 = \{u_1 h_1 + u_2 h_2, h_2\} = u_1 h_3 \equiv 0,$$

поэтому  $(u_1^2 + u_2^2)h_3^2 \equiv 0$ . Но мы ищем кривые постоянной скорости (18) (причем ненулевой), поэтому  $h_3 \equiv 0$  вдоль анормальных экстремалей. Дифференцируя это тождество вдоль гамильтоновой системы (19), получаем  $\dot{h}_3 = u_1 h_4 + u_2 h_5 \equiv 0$ . Кроме того, очевидно, в силу системы (19) имеем  $\dot{h}_4 = \dot{h}_5 \equiv 0$ . Поэтому анормальные траектории имеют вид:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad u_1, u_2 = \text{const}.$$

Это – однопараметрические подгруппы в группе Ли  $M$ , касающиеся распределения  $\Delta$ . Соответствующие управления  $u_1 = \cos \theta$ ,  $u_2 = \sin \theta$ ,  $\theta = \text{const}$ , (на кривых, параметризованных длиной дуги) удовлетворяют уравнению маятника (29), поэтому анормальные геодезические не являются строго анормальными.

В модели обобщенной задачи Дидоны проекции анормальных геодезических на плоскость  $(x, y)$  являются прямыми, поэтому анормальные геодезические  $q_t$  оптимальны для  $t \in [0, +\infty)$ .

**3.4. Оптимальность нормальных геодезических.** Так как нормальный максимизированный гамильтониан  $H$  гладкий, малые дуги нормальных геодезических оптимальны [16]. Поэтому на любой геодезической  $q_t$  есть точка разреза, т.е. точка, в которой геодезическая теряет оптимальность (точка разреза может быть и на бесконечности, как на анормальных геодезических). В точках разреза теряется глобальная оптимальность геодезических. Локальным аналогом точек разреза являются сопряженные точки, в которых геодезические теряют локальную оптимальность.

Сопряженные точки являются критическими значениями экспоненциального отображения

$$\text{Exp}: (\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mapsto q_t = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) \in M,$$

где

$$C = \left\{ H = \frac{1}{2} \right\} \cap T_{q_0}^* M$$

– это цилиндр начальных значений для экстремалей  $\lambda_t = e^{t\vec{H}}(\lambda_0)$ .

Нахождение точек разреза на нормальных геодезических – задача гораздо более сложная, чем вычисление геодезических; эта задача будет предметом нашей следующей работы.

#### § 4. Непрерывные симметрии

Для понижения размерности используем симметрии задачи.

Векторное поле  $X \in \text{Vec } M$  называется *непрерывной симметрией субримановой структуры*  $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  на  $M$ , если поток  $X$  сохраняет эту субриманову структуру, т.е. сохраняет как распределение  $\Delta$ , так и скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (см. [3], [20]). Множество всех непрерывных симметрий субримановой структуры  $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  образует алгебру Ли, которую мы будем обозначать  $\text{Sym}(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

##### 4.1. Вращения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Существует единственное векторное поле  $X_0 \in \text{Vec } M$  такое, что:*

- 1)  $X_0 \in \text{Sym}(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ;
- 2)  $X_0(\text{Id}) = 0$ ;
- 3)  $[X_0, X_1] = -X_2$ ,  $[X_0, X_2] = X_1$  в единичном элементе  $\text{Id}$  группы Ли  $M$ .

*Ненулевые коммутаторы поля  $X_0$  с базисными полями имеют вид:*

$$[X_0, X_1] = -X_2, \quad [X_0, X_2] = X_1, \quad [X_0, X_4] = -X_5, \quad [X_0, X_5] = X_4. \quad (30)$$

Другими словами, по сути, существует единственная непрерывная симметрия нашей задачи оптимального управления, т.е. симметрия субримановой структуры  $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , сохраняющая начальную точку  $q_0 = \text{Id}$ . Условие (3) – это просто условие нормировки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [3] показано, что алгебра Ли  $\text{Sym}(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  шестимерна и порождается правоинвариантными полями  $\xi_1, \dots, \xi_5$  и полем  $X_0$  таким, что

$$[X_0, X_1] = -X_2, \quad [X_0, X_2] = X_1. \quad (31)$$

Единственность векторного поля  $X_0$  со свойствами (1)–(3) следует из того, что только векторные поля вида  $kX_0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , удовлетворяют условиям (1) и (2).

Первые два из коммутаторов (30) поля  $X_0$  с базисными полями уже получены в (31), а остальные следуют из них с помощью тождества Якоби.

В модели обобщенной задачи Лидоны симметрия

$$X_0 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w}$$

является одновременным вращением в плоскостях  $(x, y)$  и  $(v, w)$ :

$$e^{sX_0} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos s - y \sin s \\ x \sin s + y \cos s \\ z \\ v \cos s - w \sin s \\ v \sin s + w \cos s \end{pmatrix}.$$

**4.2. Дилатации.** Существует также векторное поле  $Y \in \text{Vec } M$  такое, что

$$\begin{aligned} [Y, X_1] &= -X_1, & [Y, X_2] &= -X_2, & [Y, X_3] &= -2X_3, \\ [Y, X_4] &= -3X_4, & [Y, X_5] &= -3X_5. \end{aligned} \quad (32)$$

Это поле коммутирует с  $X_0$ :  $[Y, X_0] = 0$ . В модели обобщенной задачи Дидоны

$$Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3v \frac{\partial}{\partial v} + 3w \frac{\partial}{\partial w},$$

это дилатации в  $\mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5$ :

$$e^{rY} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^r x \\ e^r y \\ e^{2r} z \\ e^{3r} v \\ e^{3r} w \end{pmatrix}.$$

**4.3. Подъем вращений и дилатаций на  $T^*M$ .** Введем линейные на слоях гамильтонианы

$$h_0(\lambda) = \langle \lambda, X_0(q) \rangle, \quad h_Y(\lambda) = \langle \lambda, Y(q) \rangle, \quad \lambda \in T^*M,$$

и соответствующие гамильтоновы векторные поля

$$\vec{h}_0, \vec{h}_Y \in \text{Vec}(T^*M).$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\vec{h}_0, \vec{H}] &= 0, & \vec{h}_0 H &= 0, \\ [\vec{h}_Y, \vec{H}] &= -2\vec{H}, & \vec{h}_Y H &= -2H. \end{aligned}$$

Обозначим также вертикальное эйлерово поле на  $T^*M$ :  $e = \sum_{i=1}^5 h_i \partial / \partial h_i$ . Так как гамильтониан  $H$  квадратичен на слоях, гамильтоново поле  $\vec{H}$  линейно на слоях, поэтому

$$[e, \vec{H}] = \vec{H}, \quad eH = 2H.$$

Следовательно, векторное поле  $Z = \vec{h}_Y + e$  удовлетворяет равенствам

$$[Z, \vec{H}] = -\vec{H}, \quad ZH = 0. \quad (33)$$

Более того,

$$[\vec{h}_0, Z] = 0. \quad (34)$$

Из коммутаторов (33), (34) получаем, что потоки полей  $\vec{H}$ ,  $\vec{h}_0$  и  $Z$  взаимодействуют следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Для любых  $t, s, r \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in T^*M$

$$e^{rZ} \circ e^{s\vec{h}_0} \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = e^{t'\vec{H}} \circ e^{rZ} \circ e^{s\vec{h}_0}(\lambda),$$

где  $t' = te^r$ .

Обозначим группы симметрий на  $T^*M$  и  $M$ :

$$\begin{aligned} G_{\vec{h}_0, Z} &= \{e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ} : s \in S^1, r \in \mathbb{R}\} \subset \text{Diff}(T^*M), \\ G_{\vec{h}_0} &= \{e^{s\vec{h}_0} : s \in S^1\} \subset \text{Diff}(T^*M), \\ G_{X_0, Y} &= \{e^{sX_0} \circ e^{rY} : s \in S^1, r \in \mathbb{R}\} \subset \text{Diff}(M), \\ G_{X_0} &= \{e^{sX_0} : s \in S^1\} \subset \text{Diff}(M). \end{aligned}$$

**4.4. Факторизация экспоненциального отображения.** Так как поля  $\vec{h}_0$  и  $\vec{H}$  коммутируют, их потоки также коммутируют:

$$e^{s\vec{h}_0} \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = e^{t\vec{H}} \circ e^{s\vec{h}_0}(\lambda). \quad (35)$$

Далее, так как  $\vec{h}_0 H = 0$  и  $(\pi_* \vec{h}_0)(q_0) = X_0(q_0) = 0$ , получаем, что поле  $\vec{h}_0$  сохраняет начальный цилиндр  $C: G_{\vec{h}_0}(C) = C$ . Так как  $\pi_* \vec{h}_0 = X_0$ , равенство (35) можно записать в терминах экспоненциального отображения:

$$e^{sX_0} \circ \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(e^{s\vec{h}_0}(\lambda), t). \quad (36)$$

Определим естественное действие группы  $G_{\vec{h}_0}$  в области определения экспоненциального отображения:

$$e^{s\vec{h}_0} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow C \times \mathbb{R}_+, \quad e^{s\vec{h}_0} : (\lambda, t) \mapsto (e^{s\vec{h}_0}(\lambda), t).$$

Тогда равенство (36) записывается следующим образом:

$$e^{sX_0} \circ \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp} \circ e^{s\vec{h}_0}(\lambda, t).$$

Поэтому можно факторизовать экспоненциальное отображение по действию групп  $G_{\vec{h}_0}$  (в прообразе) и  $G_{X_0}$  (в образе): определено факторизованное экспоненциальное отображение  $\text{Exp}' : C' \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M'$ , где

$$C' = C/G_{\vec{h}_0}, \quad C' \times \mathbb{R}_+ = (C \times \mathbb{R}_+)/G_{\vec{h}_0}, \quad M' = M/G_{X_0},$$

так, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\ \downarrow \pi'_0 & & \downarrow \pi'_1 \\ C' \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}'} & M' \end{array} .$$

Здесь

$$\begin{aligned} \pi'_0 : C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow C' \times \mathbb{R}_+, & \pi'_0 : (\lambda, t) &\mapsto (\lambda', t) = G_{\vec{h}_0}(\lambda, t), \\ \pi'_1 : M &\rightarrow M', & \pi'_1 : q &\mapsto q' = G_{X_0}(q), \end{aligned}$$

являются естественными проекциями.

**4.5. Факторизация начального цилиндра  $C$ .** Отметим, что  $\alpha = \sqrt{h_4^2 + h_5^2}$  является первым интегралом нормальной гамильтоновой системы:  $\vec{H}\alpha = 0$ . Введем также интеграл энергии

$$E = \frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4.$$

Легко видеть, что  $\vec{H}E = 0$ . В координатах  $(\theta, c = h_3, \alpha, \beta)$  на слоях в  $T^*M$  энергия имеет вид:

$$E = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos(\theta - \beta) \in [-\alpha, +\infty).$$

4.5.1. *Декомпозиция  $C$ .* Разобьем цилиндр  $C$  на 7 клеток следующим образом:

$$C = \bigcup_{i=1}^7 C_i, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$C_1 = \{\lambda \in C : \alpha \neq 0, E \in (-\alpha, \alpha)\},$$

$$C_2 = \{\lambda \in C : \alpha \neq 0, E \in (\alpha, +\infty)\},$$

$$C_3 = \{\lambda \in C : \alpha \neq 0, E = \alpha, \theta - \beta \neq \pi\},$$

$$C_4 = \{\lambda \in C : \alpha \neq 0, E = -\alpha\},$$

$$C_5 = \{\lambda \in C : \alpha \neq 0, E = \alpha, \theta - \beta = \pi\},$$

$$C_6 = \{\lambda \in C : \alpha = 0, c \neq 0\},$$

$$C_7 = \{\lambda \in C : \alpha = c = 0\}.$$

4.5.2. *Координаты в  $C'$ .* В координатах  $(\theta, c, \alpha, \beta)$  на цилиндре  $C$  группа  $G_{\vec{h}_0}$  действует следующим образом:

$$e^{s\vec{h}_0} : \begin{pmatrix} \theta \\ c \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta' \\ c \\ \alpha \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta + s \\ c \\ \alpha \\ \beta + s \end{pmatrix}. \quad (37)$$

*Координаты в  $C'_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .* Пусть  $\lambda \in \bigcup_{i=1}^5 C_i = C \cap \{\alpha \neq 0\}$ . Полагая  $s = -\beta$  в (37), получаем  $\beta' = 0$ ,  $\theta' = \theta - \beta$ . Поэтому координаты в области  $\bigcup_{i=1}^5 C'_i$  фактора  $C'$  можно выбрать следующим образом:

$$(\theta', c, \alpha), \quad \theta' \in S^1, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \quad \theta' = \theta - \beta.$$

*Координаты в  $C'_6$ .* Множество  $C_6 = C \cap \{c \neq 0, \alpha = 0\}$  является 2-мерным многообразием:  $C_6 \simeq (S_\theta^1 \times \mathbb{R}_{c>0}) \cup (S_\theta^1 \times \mathbb{R}_{c<0})$ . Фактор  $C'_6$  одномерен и параметризован параметром  $c \neq 0$ :

$$C'_6 \simeq \mathbb{R}_{c>0} \cup \mathbb{R}_{c<0}, \quad C'_6 = \{\theta' = 0, c \neq 0, \alpha = 0\}.$$

*Факторизация  $C'_7$ .* Множество  $C_7 = C \cap \{c = \alpha = 0\}$  является окружностью:  $C_7 \simeq S_\theta^1$ . Оно факторизуется в точку

$$C'_7 = \{\theta' = c = \alpha = 0\}.$$

## § 5. Интегрирование гамильтоновой системы

### 5.1. Интегрируемость гамильтоновой системы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Гамильтонианы  $h_4$ ,  $h_5$  и  $E$  коммутируют в смысле скобки Пуассона со всеми функциями на пространстве  $T_{\text{Id}}^*M$ , сопряженном к алгебре Ли  $T_{\text{Id}}M$ , т.е. являются функциями Казимира.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как  $\text{ad } X_4 = \text{ad } X_5 = 0$ , гамильтонианы  $h_4$  и  $h_5$  коммутируют (в смысле скобки Пуассона) со всеми  $h_i$ :

$$\{h_4, h_i\} = \{h_5, h_i\} = 0, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Непосредственное вычисление показывает, что это верно и для энергии  $E$ :

$$\begin{aligned} \{h_1, E\} &= h_3 \underbrace{\{h_1, h_3\}}_{h_4} - h_4 \underbrace{\{h_1, h_2\}}_{h_3} = 0, \\ \{h_2, E\} &= h_3 \underbrace{\{h_2, h_3\}}_{h_5} + h_5 \underbrace{\{h_2, h_1\}}_{-h_3} = 0, \\ \{h_3, E\} &= -h_4 \underbrace{\{h_3, h_2\}}_{-h_5} + h_5 \underbrace{\{h_3, h_1\}}_{-h_4} = 0, \\ \{h_4, E\} &= \{h_5, E\} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому  $h_4$ ,  $h_5$  и  $E$  коммутируют со всеми  $h_i$ , т.е. они являются функциями Казимира на двойственном пространстве к алгебре Ли  $T_{\text{Id}}^*M$ .

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Гамильтонианы  $h_4$ ,  $h_5$  и  $E$  являются законами сохранения (т.е. первыми интегралами нормального гамильтонова потока) для любой левоинвариантной задачи оптимального управления на группе Ли  $M$ .

Гамильтоново поле  $\vec{H}$  имеет 5 интегралов:  $H$ ,  $h_4$ ,  $h_5$ ,  $E$ ,  $h_0$ . Однако эти интегралы не находятся в инволюции:

$$\{h_0, h_4\} = -h_5, \quad \{h_0, h_5\} = h_4,$$

поэтому установить интегрируемость в квадратурах гамильтоновой системы  $\dot{\lambda} = \vec{H}$  мы сейчас не можем. Но далее мы явно проинтегрируем эту систему в эллиптических функциях Якоби, т.е. в квадратурах.

**5.2. Маятник и эллиптические координаты.** Уравнение маятника  $\ddot{\theta} = -\sin \theta$ ,  $\theta \in S^1$ , записывается в виде системы первого порядка

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c; \\ \dot{c} = -\sin \theta, \end{cases} \quad (\theta, c) \in S_\theta^1 \times \mathbb{R}_c.$$

Эта гамильтонова система с одной степенью свободы с гамильтонианом (интегралом энергии)

$$E = \frac{c^2}{2} - \cos \theta \in [-1, +\infty)$$

интегрируема в эллиптических функциях Якоби (см. [19], а также § 7).

5.2.1. *Эллиптические координаты в  $S_\theta^1 \times \mathbb{R}_c$ .* Введем координаты действие-угол  $(\varphi, k)$  в областях на цилиндре  $S_\theta^1 \times \mathbb{R}_c$ :

$$C_1 = \{(\theta, c) \in S_\theta^1 \times \mathbb{R}_c : E \in (-1, 1)\}, \quad C_2 = \{(\theta, c) \in S_\theta^1 \times \mathbb{R}_c : E \in (1, +\infty)\}.$$

Будем называть координаты  $(\varphi, k)$  *эллиптическими координатами в фазовом пространстве маятника*. Эти координаты определяются следующим образом:

1)  $(\theta, c) \in C_1$

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn} \varphi; \\ \frac{c}{2} = k \operatorname{cn} \varphi, \end{cases} \\ k = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{c^2}{4}} \in (0, 1), \\ \varphi \in [0, 4K];$$

2)  $(\theta, c) \in C_2$

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k}; \\ \frac{c}{2} = \pm \frac{1}{k} \operatorname{dn} \frac{\varphi}{k}, \end{cases} \quad \pm = \operatorname{sgn} c, \\ k = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta/2 + c^2/4}} \in (0, 1), \\ \varphi \in [0, 2kK].$$

В области  $C_2$  наряду с координатами  $(\varphi, k)$  будем также использовать координаты  $(\psi, k)$  такие, что

$$\psi = \frac{\varphi}{k} \in [0, 2K].$$

5.2.2. *Уравнение маятника в эллиптических координатах.* Легко проверить, что в областях  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ , уравнение маятника в эллиптических координатах принимает простую форму:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c; \\ \dot{c} = -\sin \theta, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = 1; \\ \dot{k} = 0. \end{cases}$$

Эллиптическая координата  $\varphi$  является временем движения вдоль траекторий уравнения маятника, а  $k$  – это параметр, различающий траектории с разными энергиями.

Следовательно, решения уравнения маятника имеют в эллиптических координатах простую форму:

$$k = \operatorname{const}, \quad \varphi_t = \varphi + t.$$

Если начальные значения  $(\theta, c)$  выразить в терминах эллиптических координат  $(\varphi, k)$ , то решения уравнения маятника примут следующую форму:

1)  $(\theta, c) \in C_1$

$$\begin{aligned}\sin \frac{\theta_t}{2} &= k \operatorname{sn} \varphi_t, \\ \frac{c_t}{2} &= k \operatorname{cn} \varphi_t, \\ \varphi_t &= \varphi + t;\end{aligned}$$

2)  $(\theta, c) \in C_2$

$$\begin{aligned}\sin \frac{\theta_t}{2} &= \pm \operatorname{sn} \psi_t, \\ \frac{c_t}{2} &= \pm \frac{1}{k} \operatorname{dn} \psi_t, \\ \psi_t &= \psi + \frac{t}{k}.\end{aligned}\quad \pm = \operatorname{sgn} c,$$

5.2.3. *Эллиптические координаты в  $C$* . Напомним, что интеграл энергии имеет вид:

$$E = \frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4 = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos(\theta - \beta) \in [-\alpha, +\infty).$$

Введем эллиптические координаты  $(k, \varphi, \alpha, \beta)$  в подмножествах  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  цилиндра  $C$  следующим образом:

$\lambda \in C_1$

$$\begin{aligned}\alpha &\neq 0, \quad E \in (-\alpha, \alpha), \\ k &= \sqrt{\frac{E + \alpha}{2\alpha}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta - \beta}{2} + \frac{c^2}{4\alpha}} \in (0, 1), \\ \varphi &\in [0, 4K], \\ \begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = k \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha} \varphi); \\ \frac{c}{2} = k \sqrt{\alpha} \operatorname{cn}(\sqrt{\alpha} \varphi); \end{cases}\end{aligned}$$

$\lambda \in C_2$

$$\begin{aligned}\alpha &\neq 0, \quad E \in (\alpha, +\infty), \\ k &= \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2((\theta - \beta)/2) + c^2/(4\alpha)}} \in (0, 1), \\ \varphi &\in [0, 2kK], \\ \begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = \pm \operatorname{sn} \frac{\sqrt{\alpha} \varphi}{k}; \\ \frac{c}{2} = \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \operatorname{dn} \frac{\sqrt{\alpha} \varphi}{k}, \\ \psi = \frac{\varphi}{k}; \end{cases} \quad \pm = \operatorname{sgn} c,\end{aligned}$$



$\lambda \in C_3$

$$\begin{aligned} \alpha &\neq 0, & E &= \alpha, & \theta - \beta &\neq \pi, \\ & & k &= 1, \\ & & \varphi &\in (-\infty, +\infty), \\ \begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = \pm \operatorname{th}(\sqrt{\alpha} \varphi); \\ \frac{c}{2} = \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha} \varphi)}, \end{cases} & & \pm &= \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

В эллиптических координатах  $(\varphi, k, \alpha, \beta)$  на  $\bigcup_{i=1}^3 C_i$  вертикальная часть нормальной гамильтоновой системы

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -\alpha \sin(\theta - \beta), \quad \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$$

упрощается:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{k} = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0.$$

### 5.3. Параметризация геодезических. Пусть

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0. \tag{38}$$

Тогда гамильтонова система (23)–(28) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= c, \\ \dot{c} &= -\sin \theta, \\ \dot{x} &= \cos \theta, \\ \dot{y} &= \sin \theta, \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(x \sin \theta - y \cos \theta) = \frac{1}{2}(xy - y\dot{x}), \\ \dot{v} &= \frac{1}{2} \sin \theta (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \dot{y}(x^2 + y^2), \\ \dot{w} &= -\frac{1}{2} \cos \theta (x^2 + y^2) = -\frac{1}{2} \dot{x}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Интеграл энергии имеет вид:

$$E = \frac{c^2}{2} - \cos \theta \in [-1, +\infty).$$

5.3.1. *Случай*  $\alpha = 1, \beta = 0$ . Ниже мы получаем выражение для нормальных геодезических  $q_t = (x_t, y_t, z_t, v_t, w_t)$  в случае (38) с помощью эллиптических координат в фазовой плоскости маятника, введенных в пп. 5.2.1.

Обозначим  $\theta = \theta_0, c = c_0$ .

*Случай*  $\lambda \in C_1: E \in (-1, 1)$ . Пусть

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{E+1}{2}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{c^2}{4}} \in (0, 1), \\ \varphi_t &= \varphi + t. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
x_t &= 2(\mathbf{E}(\varphi_t) - \mathbf{E}(\varphi)) - (\varphi_t - \varphi), \\
y_t &= 2k(\operatorname{cn} \varphi - \operatorname{cn} \varphi_t), \\
z_t &= 2k(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) - k(\operatorname{cn} \varphi + \operatorname{cn} \varphi_t)x_t, \\
v_t &= 2k \operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t x_t - k \operatorname{cn} \varphi_t x_t^2 - (1 - 2k^2 + 2k^2 \operatorname{cn} \varphi \operatorname{cn} \varphi_t)y_t, \\
w_t &= -\frac{1}{6}(x_t^3 + 2(2k^2 - 1 + 6k^2 \operatorname{cn}^2 \varphi)x_t + 2(\varphi_t - \varphi) \\
&\quad + 8k^2(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{cn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) \\
&\quad - 24k^2 \operatorname{cn} \varphi(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi)).
\end{aligned}$$

Случай  $\lambda \in C_2$ :  $E \in (1, +\infty)$ . Пусть

$$\begin{aligned}
k &= \sqrt{\frac{2}{E+1}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\theta/2) + c^2/4}} \in (0, 1), \\
\psi_t &= \psi + \frac{t}{k}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{2}{k} \left( \mathbf{E}(\psi_t) - \mathbf{E}(\psi) - \frac{2-k^2}{2}(\psi_t - \psi) \right), \\
y_t &= \pm \frac{2}{k} (\operatorname{dn} \psi - \operatorname{dn} \psi_t), \\
z_t &= \pm \left( 2(\operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi) - \frac{1}{k} (\operatorname{dn} \psi + \operatorname{dn} \psi_t)x_t \right), \\
v_t &= \pm \left( 2 \operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t x_t - \frac{1}{k} \operatorname{dn} \psi_t x_t^2 \right) + \frac{1}{k^2} (2 - k^2 - 2 \operatorname{dn} \psi \operatorname{dn} \psi_t)y_t, \\
w_t &= -\frac{1}{6} \left( x_t^3 + \frac{2}{k^2} (2 - k^2 + 6 \operatorname{dn}^2 \psi)x_t + 2k(\psi_t - \psi) \right. \\
&\quad + \frac{8}{k} (\operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi \operatorname{dn} \psi) \\
&\quad \left. - \frac{24}{k} \operatorname{dn} \psi (\operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi) \right), \\
&\quad \pm = \operatorname{sgn} c.
\end{aligned}$$

Случай  $\lambda \in C_3$ :  $E = 1$ ,  $\theta \neq \pi$ . Обозначим

$$\varphi_t = \varphi + t.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 x_t &= 2(\operatorname{th} \varphi_t - \operatorname{th} \varphi) - (\varphi_t - \varphi), \\
 y_t &= \pm 2 \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} - \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} \right), \\
 z_t &= \pm \left( 2 \left( \frac{\operatorname{sh} \varphi_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi_t} - \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right) - \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} + \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} \right) x_t \right), \\
 v_t &= \pm \left( \frac{2}{\operatorname{sh} \varphi_t} x_t - \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} x_t^2 \right) + \left( 1 - \frac{2}{\operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \varphi_t} \right) y_t, \\
 w_t &= -\frac{1}{6} \left( x_t^3 + 6 \frac{2 + \operatorname{ch}^2 \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} x_t + 6(\varphi_t - \varphi) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{24}{\operatorname{ch} \varphi} \left( \frac{\operatorname{sh} \varphi_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi_t} - \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right) - 8(\operatorname{th}^3 \varphi_t - \operatorname{th}^3 \varphi) \right), \\
 &\quad \pm = \operatorname{sgn} c.
 \end{aligned}$$

Случаи  $\lambda \in C_4$ :  $E = -1$  и  $\lambda \in C_5$ :  $E = 1$ ,  $\theta = \pi$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 x_t &= t, \\
 y_t &= 0, \\
 z_t &= 0, \\
 v_t &= 0, \\
 w_t &= -\frac{t^3}{6}.
 \end{aligned}$$

5.3.2. Случай  $\alpha = 0$ ,  $\theta = 0$ .

Случай  $\lambda \in C_6$ :  $c \neq 0$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 x_t &= \frac{\sin \tau}{c}, \\
 y_t &= \frac{1 - \cos \tau}{c}, \\
 z_t &= \frac{\tau - \sin \tau}{2c^2}, \\
 v_t &= \frac{\cos 2\tau - 4 \cos \tau + 3}{4c^3}, \\
 w_t &= \frac{\sin 2\tau - 4 \sin \tau + 2\tau}{4c^3}, \\
 \tau &= ct.
 \end{aligned}$$

Случай  $\lambda \in C_7$ :  $c = 0$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 x_t &= t, \\
 y_t &= 0, \\
 z_t &= 0, \\
 v_t &= 0, \\
 w_t &= -\frac{t^3}{6}.
 \end{aligned}$$

5.3.3. *Общий случай.* Параметризация геодезических в общем случае получается из формул для частных случаев, приведенных в п.п. 5.3.1, 5.3.2 с учетом двухпараметрической группы симметрий  $G_{\vec{h}_0, Z}$ , описанной в п. 4.3.

Так как  $\pi_* \vec{h}_0 = X_0$  и  $\pi_* Z = Y$ , из утверждения 4.2 следует, что

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\lambda, t) &= e^{-sX_0} \circ e^{-rY} \circ \text{Exp}(e^{rZ} \circ e^{s\vec{h}_0}(\lambda), te^r), \\ \lambda &= (\theta, c, \alpha, \beta) \in C, \quad \theta \in S^1, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \in S^1. \end{aligned}$$

Пусть  $\alpha \neq 0$ . Тогда для  $s = -\beta$ ,  $r = \frac{1}{2} \ln \alpha$  получаем

$$e^{rZ} \circ e^{s\vec{h}_0} : \begin{pmatrix} \theta \\ c \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta' \\ c' \\ \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - \beta \\ c \\ \sqrt{\alpha} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad te^r = t\sqrt{\alpha}.$$

Поэтому нормальные геодезические, соответствующие произвольному начальному ковектору  $\lambda = (\theta, c, \alpha, \beta) \in C$ ,  $\alpha \neq 0$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\theta, c, \alpha, \beta, t) &= e^{-sX_0} \circ e^{-rY} \circ \text{Exp}(\theta', c', \alpha' = 1, \beta' = 0, t'), \\ \theta' &= \theta - \beta, \quad c' = \frac{c}{\sqrt{\alpha}}, \quad t' = t\sqrt{\alpha}, \\ s &= -\beta, \quad r = \frac{1}{2} \ln \alpha, \end{aligned}$$

а экспоненциальное отображение для  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  было вычислено в п. 5.3.1. Обозначая

$$\text{Exp}(\theta, c, \alpha, \beta, t) = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}, \quad \text{Exp}(\theta', c', \alpha' = 1, \beta' = 0, t') = \begin{pmatrix} x'_{t'} \\ y'_{t'} \\ z'_{t'} \\ v'_{t'} \\ w'_{t'} \end{pmatrix},$$

получаем

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-r}(x'_{t'} \cos s + y'_{t'} \sin s) \\ e^{-r}(-x'_{t'} \sin s + y'_{t'} \cos s) \\ e^{-2r}z'_{t'} \\ e^{-3r}(v'_{t'} \cos s + w'_{t'} \sin s) \\ e^{-3r}(-v'_{t'} \sin s + w'_{t'} \cos s) \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\alpha = 0$ . Возьмем  $s = -\theta$ , тогда

$$e^{s\vec{h}_0} : \begin{pmatrix} \theta \\ c \\ \alpha = 0 \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta' = 0 \\ c \\ \alpha = 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Поэтому для  $\lambda = (\theta, c, \alpha = 0, \beta) \in C$  геодезические имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\theta, c, \alpha = 0, \beta, t) &= e^{-sX_0} \circ \text{Exp}(\theta' = 0, c, \alpha = 0, \beta, t), \\ s &= -\theta, \end{aligned}$$

а экспоненциальное отображение для  $\alpha = 0, \theta = 0$  уже было вычислено в пп. 5.3.2. Обозначая

$$\text{Exp}(\theta, c, \alpha = 0, \beta, t) = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}, \quad \text{Exp}(\theta' = 0, c', \alpha = 0, \beta, t) = \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \\ v'_t \\ w'_t \end{pmatrix},$$

получаем

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_t \cos s + y'_t \sin s \\ -x'_t \sin s + y'_t \cos s \\ z'_t \\ v'_t \cos s + w'_t \sin s \\ -v'_t \sin s + w'_t \cos s \end{pmatrix}.$$

#### 5.4. Подробности интегрирования гамильтоновой системы.

Случай  $\lambda \in C_1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta_t}{2} &= \text{dn } \varphi_t, \\ \cos \theta_t &= 2 \text{dn}^2 \varphi_t - 1, \\ \sin \theta_t &= 2k \text{sn } \varphi_t \text{dn } \varphi_t. \end{aligned}$$

Интеграл

$$z_t = \int \dot{y}_t x_t dt - \frac{x_t y_t}{2}$$

вычисляется с помощью формул

$$\begin{aligned} \int \text{sn } t \text{dn } t \text{E}(t) dt &= -\text{cn } t \text{E}(t) + \frac{1}{2} \text{sn } t \text{dn } t + \frac{1}{2} \int \text{cn } t dt, \\ \int t \text{sn } t \text{dn } t dt &= -t \text{cn } t + \int \text{cn } t dt. \end{aligned}$$

Интегрирование

$$v_t = \frac{y_t^3}{6} + \frac{1}{2} \int x_t^2 \dot{y}_t dt$$

выполняется с помощью формул

$$\begin{aligned} \int \text{sn } t \text{dn } t \text{E}^2(t) dt &= -\text{E}^2(t) \text{cn } t + \text{E}(t) \text{sn } t \text{dn } t - \left( \frac{2}{3} k^2 - 1 \right) \text{cn } t \\ &\quad - \frac{k^2}{3} \text{sn}^2 t \text{cn } t + \int \text{E}(t) \text{cn } t dt, \\ \int t \text{sn } t \text{dn } t \text{E}(t) dt &= -t \text{cn } t \text{E}(t) + \frac{1}{2} t \text{sn } t \text{dn } t + \frac{1}{2} \text{cn } t + \frac{1}{2} \int t \text{cn } t dt \\ &\quad + \int \text{cn } t \text{E}(t) dt, \\ \int t^2 \text{sn } t \text{dn } t dt &= -t^2 \text{cn } t + 2 \int \text{cn } t dt. \end{aligned}$$

Интеграл от функции

$$w_t = -\frac{x_t^3}{6} - \frac{1}{2} \int \dot{x}_t y_t^2 dt$$

берется с помощью формул

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cn}^2 t \operatorname{dn}^2 t dt &= \frac{1}{3} \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \mathbb{E}(t) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) t, \\ \int \operatorname{cn} t \operatorname{dn}^2 t dt &= \frac{1}{2} \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t + \frac{1}{2} \int \operatorname{cn} t dt, \\ \int \operatorname{cn}^2 t dt &= \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) t + \frac{1}{k^2} \mathbb{E}(t). \end{aligned}$$

Случай  $\lambda \in C_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta_t}{2} &= \operatorname{cn} \psi_t, \\ \cos \theta_t &= \frac{k^2 - 2}{k^2} + \frac{2}{k^2} \operatorname{dn}^2 \psi_t, \\ \sin \theta_t &= 2 \operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t. \end{aligned}$$

Функция

$$z_t = \frac{x_t y_t}{2} - \int \dot{x}_t y_t dt$$

интегрируется с помощью формул

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sn}^2 t dt &= \frac{1}{k^2} (t - \mathbb{E}(t)), \\ \int \operatorname{dn} t dt &= \operatorname{am} t, \\ \int \operatorname{sn}^2 t \operatorname{dn} t dt &= -\frac{1}{2} \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t + \frac{1}{2} \operatorname{am} t. \end{aligned}$$

Далее, компонента

$$v_t = \frac{y_t^3}{6} + \frac{x_t^2 y_t}{2} - \int x_t \dot{x}_t y_t dt$$

вычисляется с помощью формул

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sn}^2 t \operatorname{dn} t \mathbb{E}(t) dt &= -\frac{1}{2} \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \mathbb{E}(t) - \frac{1}{6k^2} \operatorname{dn}^3 t + \frac{1}{2} \int \mathbb{E}(t) \operatorname{dn} t dt, \\ \int t \operatorname{sn}^2 t \operatorname{dn} t dt &= -\frac{1}{2} t \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t - \frac{1}{2k^2} \operatorname{dn} t + \frac{1}{2} \int t \operatorname{dn} t dt, \\ \int \operatorname{sn}^2 t \mathbb{E}(t) dt &= \frac{1}{k^2} \int \mathbb{E}(t) dt - \frac{1}{2k^2} \mathbb{E}^2(t), \\ \int t \operatorname{sn}^2 t dt &= \frac{1}{2k^2} t^2 - \frac{1}{k^2} t \mathbb{E}(t) + \frac{1}{k^2} \int \mathbb{E}(t) dt. \end{aligned}$$

Наконец, компонента

$$w_t = -\frac{x_t^3}{6} - \frac{1}{2} \int y_t^2 \dot{x}_t dt$$

вычисляется с помощью формулы

$$\int \operatorname{sn}^2 t \operatorname{dn}^2 t dt = -\frac{1}{3} \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + \frac{1-k^2}{3k^2} t + \frac{2k^2-1}{3k^2} E(t).$$

Случай  $\lambda \in C_3$ . Выражения для геодезических получаются из результатов для случаев  $\lambda \in C_1, C_2$  с помощью предельного перехода  $k \rightarrow 1 - 0$ .

### § 6. Эластики

На рис. 1–23 изображены проекции нормальных геодезических на плоскость  $(x, y)$ . Эти кривые  $(x(t), y(t))$  удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \theta, \\ \dot{y} &= \sin \theta, \\ \ddot{\theta} &= -\sin \theta. \end{aligned}$$

Такие кривые называются *эластиками Эйлера*: они были открыты Эйлером как стационарные профили упругого стержня (см. [15]).

Каждая эlastика соответствует некоторой траектории маятника  $\theta_t$ . Как известно, характер движения маятника определяется его энергией

$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \cos \theta \in [-1, +\infty).$$

Соответственно различную форму имеют эластики; заметим, что кривизна эlastики равна

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y = \dot{\theta}.$$

При минимальной энергии  $E = -1$  маятник находится в устойчивом положении равновесия  $\theta = 0$ , в этом случае эlastика является прямой (рис. 1).

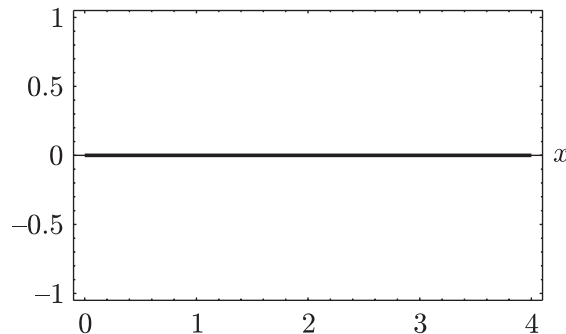


Рис. 1.  $E = -1$

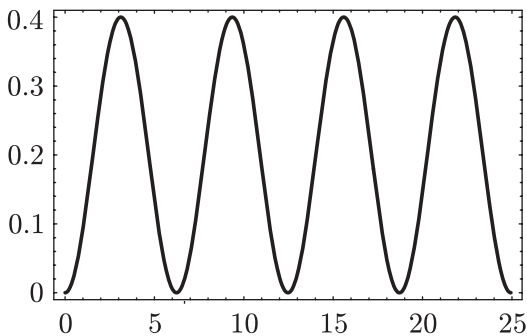


Рис. 2.  $E \in (-1, 1), k = 0.1$

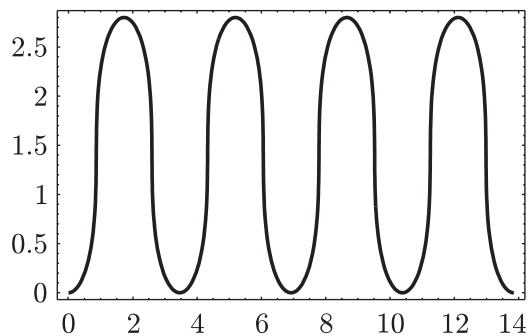


Рис. 3.  $E \in (-1, 1), k = 0.7$

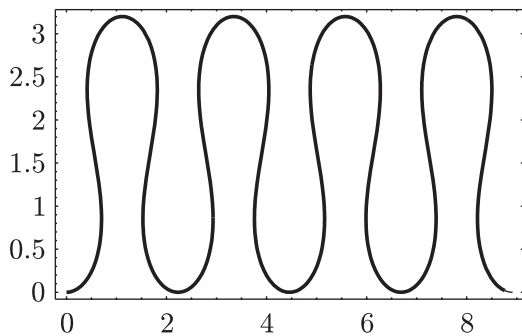


Рис. 4.  $E \in (-1, 1), k = 0.8$

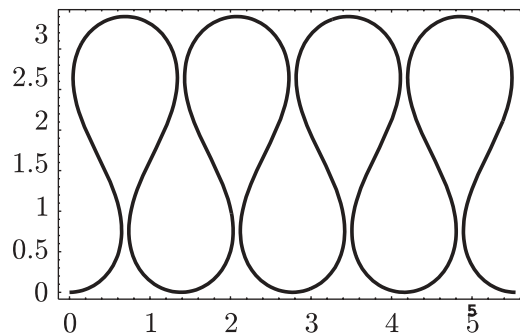


Рис. 5.  $E \in (-1, 1), k = 0.85$

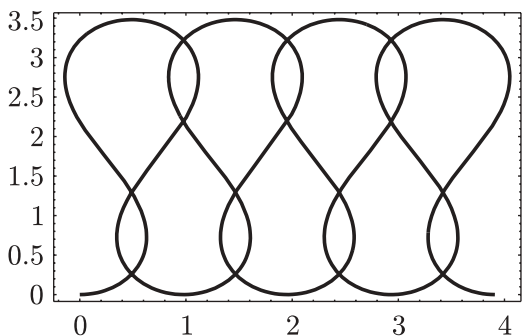


Рис. 6.  $E \in (-1, 1), k = 0.87$

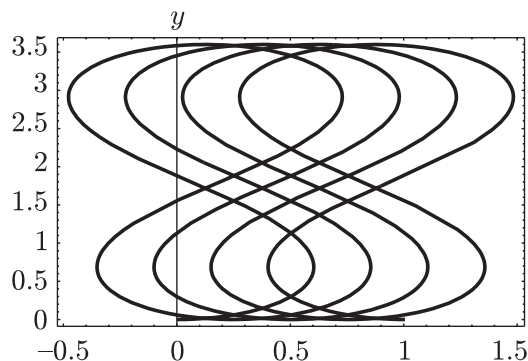


Рис. 7.  $E \in (-1, 1), k = 0.9$

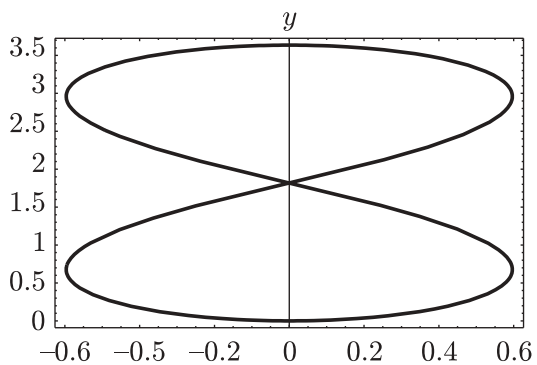


Рис. 8.  $E \in (-1, 1), k = k_0$

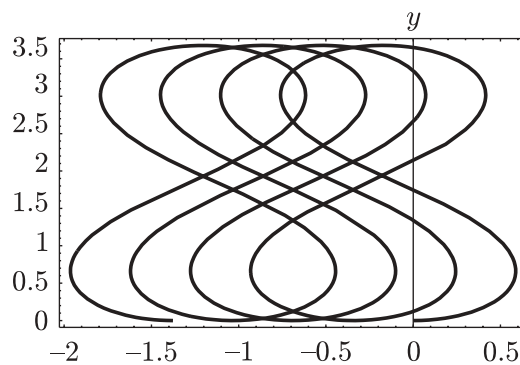


Рис. 9.  $E \in (-1, 1), k = 0.92$



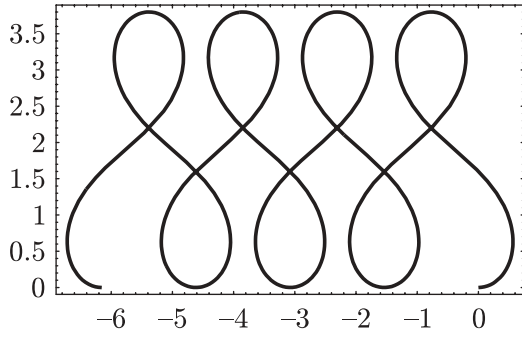


Рис. 10.  $E \in (-1, 1), k = 0.95$

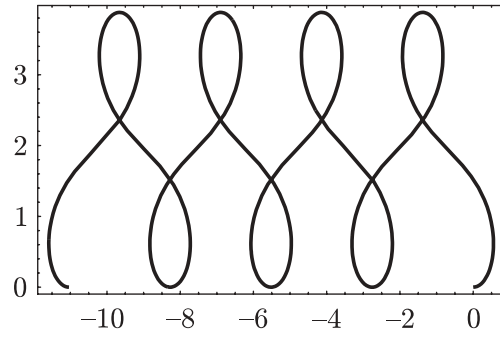


Рис. 11.  $E \in (-1, 1), k = 0.97$

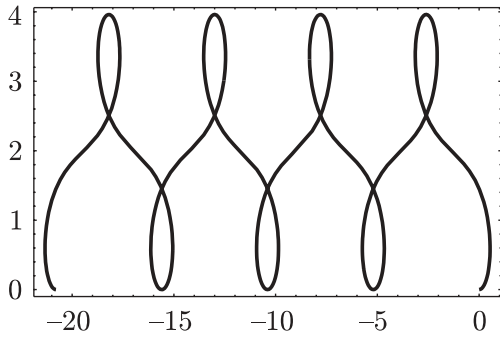


Рис. 12.  $E \in (-1, 1), k = 0.99$

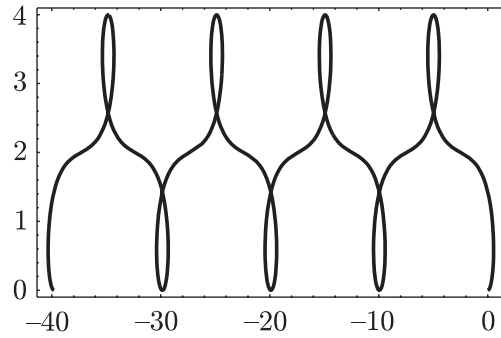


Рис. 13.  $E \in (-1, 1), k = 0.999$

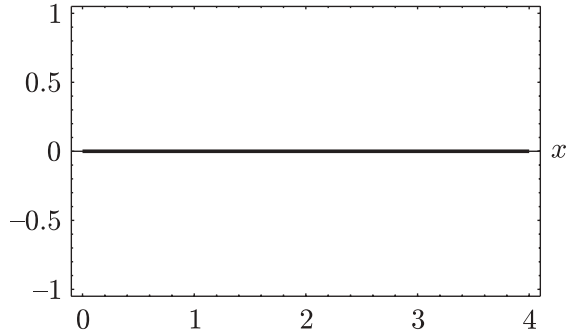


Рис. 14.  $E = 1, \theta = \pi$

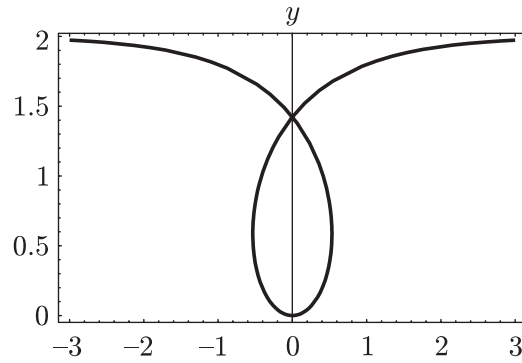


Рис. 15.  $E = 1, \theta \neq \pi$

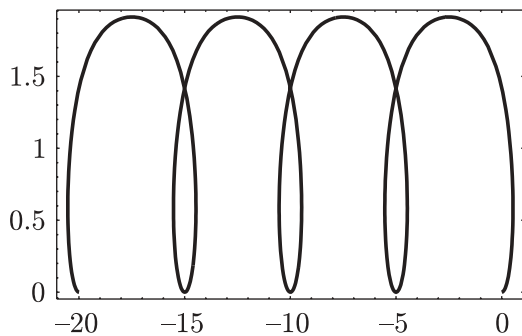


Рис. 16.  $E \in (1, +\infty), k = 0.999$

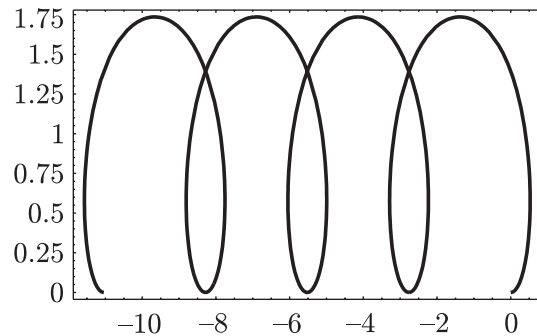
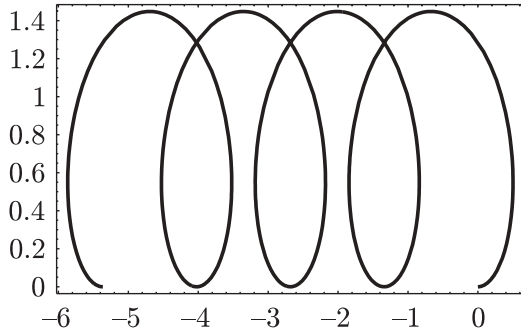
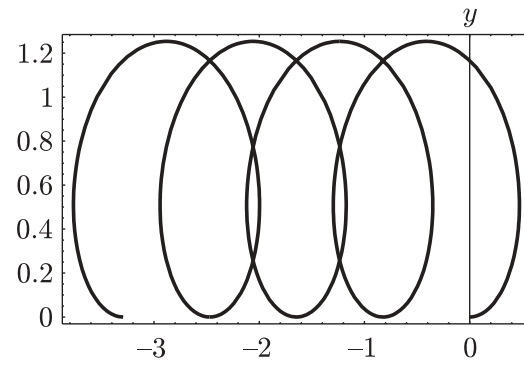
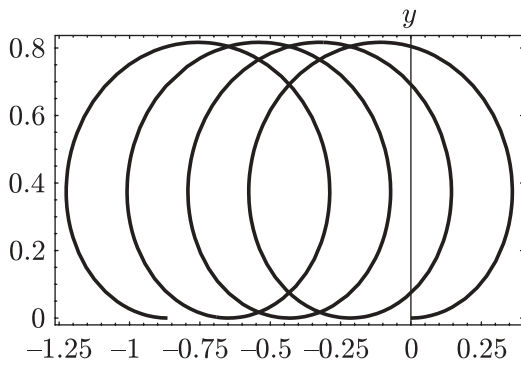
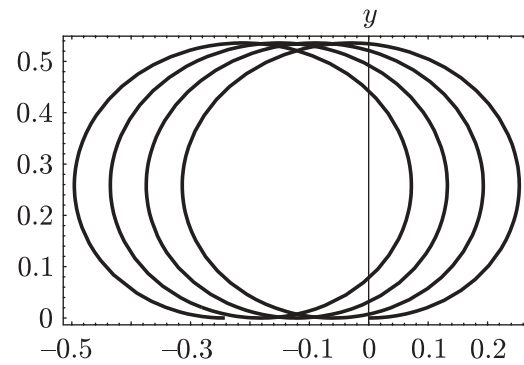
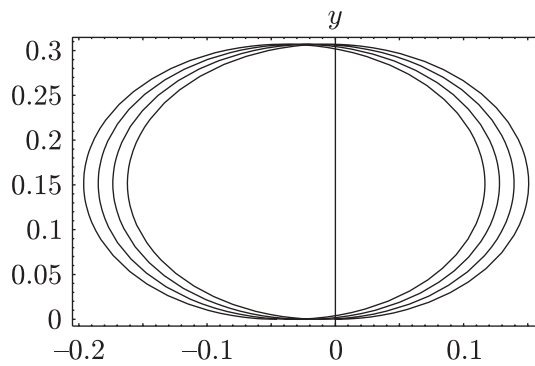
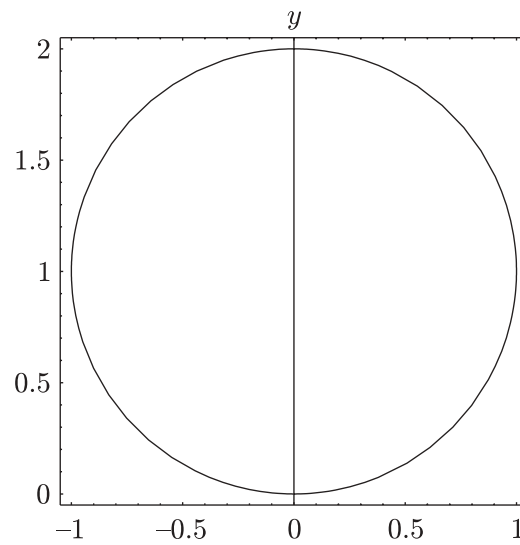


Рис. 17.  $E \in (1, +\infty), k = 0.99$

Рис. 18.  $E \in (1, +\infty)$ ,  $k = 0.95$ Рис. 19.  $E \in (1, +\infty)$ ,  $k = 0.9$ Рис. 20.  $E \in (1, +\infty)$ ,  $k = 0.7$ Рис. 21.  $E \in (1, +\infty)$ ,  $k = 0.5$ Рис. 22.  $E \in (1, +\infty)$ ,  $k = 0.3$ Рис. 23.  $E = +\infty$ 

При малой энергии  $E \in (-1, 1)$  маятник совершает колебания, не достигая неустойчивого положения равновесия  $\theta = \pi$ . Соответствующие эластики имеют точки перегиба и называются *инфлекссионными* [15] (рис. 2–13).

При критической энергии  $E = 1$  маятник либо находится в неустойчивом положении равновесия  $\theta = \pi$ , либо стремится к нему при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Соответствующие эластики см. на рис. 14, 15.

При большой энергии  $E \in (1, +\infty)$  маятник вращается в одном направлении, эластике сохраняют направление выпуклости и называются *неинфлексионными* (рис. 16–22).

Наконец, при бесконечной энергии  $E = +\infty$  маятник вращается с бесконечной скоростью и соответствующая эластика – окружность (рис. 23).

Геодезические в обобщенной задаче Дидоны – эластики – образуют замечательное семейство кривых, соединяющее прямую с окружностью, – геодезические в классической задаче Дидоны.

### § 7. Приложение: эллиптические функции Якоби

**Эллиптические интегралы в форме Якоби.** Эллиптические интегралы первого рода:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

и второго рода:

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

Полные эллиптические интегралы:

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

**Определение эллиптических функций Якоби.** Имеем

$$\varphi = \operatorname{am} u \Leftrightarrow u = F(\varphi, k),$$

$$\operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am} u,$$

$$\operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u,$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u},$$

$$E(u) = E(\operatorname{am} u, k).$$

**Стандартные формулы. Производные и интегралы:**

$$\operatorname{am}' u = \operatorname{dn} u,$$

$$\operatorname{sn}' u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\operatorname{cn}' u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\operatorname{dn}' u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

$$\int_0^u \operatorname{dn}^2 t dt = E(u).$$

**Вырождение:**

$$k \rightarrow +0 \Rightarrow \operatorname{sn} u \rightarrow \sin u, \quad \operatorname{cn} u \rightarrow \cos u, \quad \operatorname{dn} u \rightarrow 1, \quad E(u) \rightarrow u,$$

$$k \rightarrow 1 - 0 \Rightarrow \operatorname{sn} u \rightarrow \operatorname{th} u, \quad \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u \rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch} u}, \quad E(u) \rightarrow \operatorname{th} u.$$

Автор выражает благодарность проф. А. А. Аграчеву за постановку задачи и полезные советы во время работы.

Большая часть данной работа была выполнена во время стажировки в Международной школе высших исследований в г. Триесте, Италия.

### Список литературы

1. *Bellaïche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry / ed. A. Bellaïche, J.-J. Risler. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.
2. *Аграчев А. А., Сарычев А. А.* Фильтрации алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 4. С. 777–781.
3. *Sachkov Yu. L.* Symmetries of flat rank two distributions and sub-Riemannian structures // Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
4. *Anzaldo-Menezes A., Monroy-Pérez F.* Charges in magnetic fields and sub-Riemannian geodesics // Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications. Singapore: World Scientific, 2002. P. 183–202.
5. *Li Z., Canny J.* Motion of two rigid bodies with rolling constraint // IEEE Trans. Robot. Automat. (1). 1990. V. 6. P. 62–72.
6. *Agrachev A. A., Sachkov Yu. L.* An intrinsic approach to the control of rolling bodies // Proceedings of the 38-th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, December 7–10, 1999. V. 1. P. 431–435.
7. *Marigo A., Bicchi A.* Rolling bodies with regular surface: the holonomic case // Differential geometry and control: Summer Research Institute on Differential Geometry and Control, Univ. Colorado, Boulder, June 29–July 19, 1997 / ed. G. Ferreyra et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. P. 241–256 (Proc. Sympos. Pure Math. V. 64.).
8. *Laumond J. P.* Nonholonomic motion planning for mobile robots // Preprint № 98211. Toulouse, France: LAAS-CNRS, 1998.
9. *Brockett R., Dai L.* Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability // Nonholonomic motion planning / ed. Z. Li, J. Canny. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1993. P. 1–21.
10. *Krener A. J., Nikitin S.* Generalized isoperimetric problem // J. Math. Systems, Estim. Control. 1997. V. 7. № 3. P. 1–15.
11. *Brockett R.* Control theory and singular Riemannian geometry // New directions in applied mathematics / ed. P. Hilton, G. Young. New York: Springer-Verlag, 1981. P. 11–27.
12. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1987. С. 5–85.
13. *Agrachev A. A.* Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures // J. Dynam. Control Systems. 1996. V. 2. № 3. P. 321–358.
14. *El-Alaoui C., Gauthier J. P., Kupka I.* Small sub-Riemannian balls on  $\mathbb{R}^3$  // J. Dynam. Control Systems. 1996. V. 2. № 3. P. 359–421.
15. *Jurdjevic V.* Geometric control theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
16. *Agrachev A. A., Sachkov Yu. L.* Control theory from the geometric viewpoint // Preprint SISSA 77/2002/M. Trieste, Italy: SISSA, 2002.
17. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
18. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
19. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М.: УРСС, 2002.
20. *Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. М.: Факториал, 1977.