

Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны*

Ю.Л. Сачков
Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский 152020, Россия
E-mail: sachkov@sys.botik.ru

16 марта 2004 г.

Аннотация

Рассматривается обобщенная задача Дидоны — модель нильпотентной субримановой задачи с вектором роста $(2,3,5)$. Группа дискретных симметрий в этой задаче строится как продолжение группы отражений стандартного математического маятника. Исследовано действие этих симметрий в прообразе и образе экспоненциального отображения.

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект No. 02-01-00506. Автор также благодарит за поддержку Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (Trieste, Italy), где эта работа была начата.

Содержание

1	Введение	3
1.1	Постановка задачи	3
1.2	Известные результаты	4
1.3	Содержание работы	5
2	Отражения	5
2.1	Отражения поля направлений стандартного маятника	5
2.2	Отражения траекторий стандартного маятника	6
2.3	Отражения траекторий обобщенного маятника	7
2.4	Отражения нормальных экстремалей	8
2.5	Отражения в прообразе экспоненциального отображения	9
2.6	Отражения эйлеровых эластик	9
2.7	Отражения концов геодезических	11
2.8	Отражения как симметрии экспоненциального отображения	13
3	Группа симметрий экспоненциального отображения	13
4	Действие отражений в прообразе экспоненциального отображения	15
4.1	Эллиптические координаты в начальном цилиндре	16
4.2	Эллиптические координаты в прообразе экспоненциального отображения	18
4.3	Действие отражений в N	19
5	Действие отражений в образе экспоненциального отображения	21
5.1	Декомпозиция и координаты в M и M''	21
5.2	Действие отражений в M	23
	Список иллюстраций	25
	Литература	26

1 Введение

1.1 Постановка задачи

Обобщенную задачу Дидоны можно сформулировать следующим образом. Пусть заданы две точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, соединенные некоторой кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$, число $S \in \mathbb{R}$, а также точка $c = (c_x, c_y) \in \mathbb{R}^2$. Необходимо найти кратчайшую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , такую, чтобы область, ограниченная парой кривых γ_0 и γ , имела заданные площадь S и центр масс c .

В работе [8] показано, что эта задача может быть переформулирована как задача оптимального управления в 5-мерном пространстве с 2-мерным управлением и интегральным критерием:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, & q &= (x, y, z, v, w) \in M = \mathbb{R}^5, & u &= (u_1, u_2) \in U = \mathbb{R}^2, \\ q(0) &= q_0 = 0, & q(t_1) &= q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где векторные поля при управлениях имеют вид:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

С инвариантной точки зрения, это — субриманова задача

$$\begin{aligned} \dot{q} &\in \Delta_q, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

где

$$\Delta_q = \text{span}(X_1(q), X_2(q)), \quad q \in M,$$

есть распределение, в котором скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задается полями X_1, X_2 как ортонормированным базисом:

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Эта задача нильпотентна: поля X_1, X_2 порождают 5-мерную нильпотентную алгебру Ли $\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, где

$$\begin{aligned} X_3 &= [X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial v} + y \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_4 &= [X_1, X_3] = \frac{\partial}{\partial v}, & X_5 &= [X_2, X_3] = \frac{\partial}{\partial w}, \\ T_q M &= \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)(q). \end{aligned}$$

Все нетривиальные коммутаторы в этой алгебре Ли исчерпываются следующими тремя:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5,$$

то есть $\text{Lie}(X_1, X_2)$ есть свободная нильпотентная алгебра Ли длины 3 с двумя образующими. Флаг распределения Δ :

$$\Delta \subset \Delta^2 = [\Delta, \Delta] \subset \Delta^3 = [\Delta, \Delta^2] \subset \dots \subset TM,$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= L_1 = \text{span}(X_1, X_2), \\ \Delta^2 &= L_1 \oplus L_2 = \text{span}(X_1, X_2, X_3), \\ \Delta^3 &= L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5). \end{aligned}$$

Поэтому вектор роста распределения Δ :

$$(n_1, n_2, \dots, n_N), \quad n_i = \dim \Delta^i(q), \quad n_N = \dim \text{Lie}(\Delta)(q)$$

равен $(2, 3, 5)$.

Итак, $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ есть нильпотентная субриманова структура с вектором роста $(2, 3, 5)$. Она является локальной квазиоднородной нильпотентной аппроксимацией произвольной субримановой структуры на 5-мерном многообразии с вектором роста $(2, 3, 5)$, см. [2], [5], а также [3]. Как показано в работе [9], такая нильпотентная структура единственна. Обобщенная задача Дидоны есть модель нильпотентной субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5)$.

1.2 Известные результаты

Данная работа является продолжением работ [8], [9], их результаты мы будем постоянно использовать.

В работе [8] доказано существование оптимальных управлений в обобщенной задаче Дидоны. С помощью принципа максимума Понтрягина в инвариантной форме [1] построена гамильтонова система для нормальных экстремалей, а также найдены аномальные экстремали. Непрерывные симметрии задачи были вычислены в работе [9]. С их помощью в работе [8] показано, что экспоненциальное отображение факторизуется по действию двухпараметрической группы симметрий (вращений и дилатаций). Нормальная гамильтонова система проинтегрирована в терминах эллиптических функций Якоби. Аномальные геодезические оптимальны до бесконечности. Малые дуги нормальных геодезических оптимальны, но большие дуги, вообще говоря, нет; точки потери оптимальности называются точками разреза.

1.3 Содержание работы

В этой работе мы начинаем поиск точек разреза в обобщенной задаче Дидоны. Известно, что нормальные геодезические могут терять оптимальность по двум причинам: либо в данной точке пересекаются разные геодезические равной длины (точки Максвелла), либо семейство геодезических имеет огибающую (сопряженные точки). Для задач с богатой группой симметрий точки Максвелла можно искать как неподвижные точки композиции экспоненциального отображения и симметрий: если симметрия переставляет геодезические, но сохраняет их общую конечную точку, то эта конечная точка является точкой Максвелла.

В данной работе мы строим группу дискретных симметрий экспоненциального отображения в обобщенной задаче Дидоны. Это — группа диэдра, она возникает благодаря наличию отражений в фазовой плоскости стандартного маятника. Вертикальная часть гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина сводится, после редукции по двумерной группе непрерывных симметрий, к системе стандартного маятника. Мы продолжаем отражения стандартного маятника до отражений в прообразе и образе экспоненциального отображения. Эти дискретные симметрии имеют простой наглядный смысл для эйлеровых эластик — проекций геодезических на плоскость (x, y) : отражения эластик в центре хорды, в самой хорде, а также в серединном перпендикуляре к хорде. Дискретные симметрии факторизуются по действию вращений и дилатаций. Действие отражений особенно просто представляется в специальных эллиптических координатах, порожденных фазовым потоком стандартного маятника.

Процедура продолжения симметрий стандартного маятника до симметрий экспоненциального отображения имеет общий характер и применима к целому ряду задач оптимального управления, в которых независимая подсистема гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина имеет нетривиальную группу симметрий; такова, например, известная задача о качении сферы по плоскости [7].

Описание дискретных симметрий экспоненциального отображения в обобщенной задаче Дидоны, полученное в данной работе, будет использовано для полного описания точек Максвелла, соответствующих этим симметриям, а также для нахождения некоторых сопряженных точек вдоль геодезических. Таким образом будет получена оценка сверху для времени разреза на всех геодезических. Эти результаты будут изложены в последующих работах [10], [11].

2 Отражения

2.1 Отражения поля направлений стандартного маятника

Как известно [8], для обобщенной задачи Дидоны вертикальная часть нормальной гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина сводит-

ся (после факторизации по двум симметриям) к стандартному уравнению маятника

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c, & \theta \in S^1, \\ \dot{c} = -\sin \theta, & c \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Легко видеть, что следующие отражения цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$ сохраняют поле направлений маятника:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 &: (\theta, c) \mapsto (\theta, -c), \\ \varepsilon^2 &: (\theta, c) \mapsto (-\theta, c), \\ \varepsilon^3 &: (\theta, c) \mapsto (-\theta, -c), \end{aligned}$$

см. рис 1.

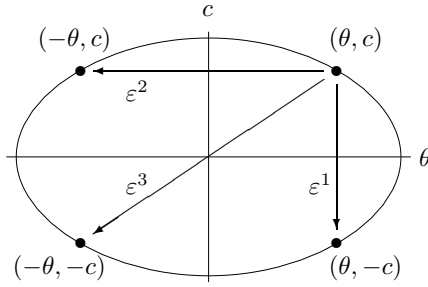


Рис. 1: Отражения в фазовой плоскости маятника

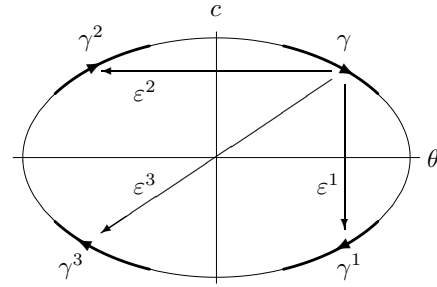


Рис. 2: Отражения траекторий маятника

Отражения ε^1 и ε^2 изменяют направление времени, а ε^3 сохраняет направление времени на траекториях маятника. Эти отражения порождают группу диэдра (группу симметрий прямоугольника):

$$D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$$

с таблицей умножения

	ε^1	ε^2	ε^3
ε^1	Id	ε^3	ε^2
ε^2	ε^3	Id	ε^1
ε^3	ε^2	ε^1	Id

Далее мы шаг за шагом продолжим действие отражений ε^i так, чтобы они стали симметриями экспоненциального отображения: $\text{Exp} \circ \varepsilon^i = \varepsilon^i \circ \text{Exp}$, см. предложение 2.6.

2.2 Отражения траекторий стандартного маятника

Действие симметрий ε^i продолжается на множество траекторий уравнения маятника (с сохранением направления времени). Пусть

$$\gamma = \{(\theta_s, c_s) \mid s \in [0, t]\}$$

есть гладкая кривая на фазовом цилиндре стандартного маятника $S^1 \times \mathbb{R}$. Определим отображения кривых следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 : \gamma &\mapsto \gamma^1 = \{(\theta_s^1, c_s^1) \mid s \in [0, t]\} = \{(\theta_{t-s}, -c_{t-s}) \mid s \in [0, t]\}, \\ \varepsilon^2 : \gamma &\mapsto \gamma^2 = \{(\theta_s^2, c_s^2) \mid s \in [0, t]\} = \{(-\theta_{t-s}, c_{t-s}) \mid s \in [0, t]\}, \\ \varepsilon^3 : \gamma &\mapsto \gamma^3 = \{(\theta_s^3, c_s^3) \mid s \in [0, t]\} = \{(-\theta_s, -c_s) \mid s \in [0, t]\}.\end{aligned}$$

Предложение 2.1. *Группа отражений $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ сохраняет семейство траекторий стандартного маятника (1).*

Доказательство. Предложение доказывается непосредственным дифференцированием. Например, для ε^1 получаем:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\theta_s^1 &= \frac{d}{ds}\theta_{t-s} = -\dot{\theta}_{t-s} = -c_{t-s} = c_s^1, \\ \frac{d}{ds}c_s^1 &= \frac{d}{ds}(-c_{t-s}) = \dot{c}_{t-s} = -\sin\theta_{t-s} = -\sin\theta_s^1.\end{aligned}$$

□

Итак, если кривая γ — траектория маятника, то и кривые $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ также суть траектории маятника, см. рис. 2.

2.3 Отражения траекторий обобщенного маятника

В работе [8] показано, что вертикальная часть нормальной гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для обобщенной задачи Дидоны есть система уравнений обобщенного маятника

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c, & \theta \in S^1, \\ \dot{c} = -\alpha \sin(\theta - \beta), & c \in \mathbb{R}, \\ \dot{\alpha} = 0, & \alpha \geq 0, \\ \dot{\beta} = 0, & \beta \in S^1. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим гладкие кривые вида

$$\gamma = \{(\theta_s, c_s, \alpha, \beta) \mid s \in [0, t], \alpha, \beta = \text{const}\}$$

в фазовом пространстве обобщенного маятника. Продолжим действие отражений ε^i на семейство таких кривых следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 : \gamma &\mapsto \gamma^1 = \{(\theta_s^1, c_s^1, \alpha, \beta^1)\} = \{(\theta_{t-s}, -c_{t-s}, \alpha, \beta)\}, \\ \varepsilon^2 : \gamma &\mapsto \gamma^2 = \{(\theta_s^2, c_s^2, \alpha, \beta^2)\} = \{(-\theta_{t-s}, c_{t-s}, \alpha, -\beta)\}, \\ \varepsilon^3 : \gamma &\mapsto \gamma^3 = \{(\theta_s^3, c_s^3, \alpha, \beta^3)\} = \{(-\theta_s, -c_s, \alpha, -\beta)\}.\end{aligned}$$

Предложение 2.2. *Группа отражений $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ сохраняет семейство траекторий обобщенного маятника (2).*

Доказательство. Доказательство сводится к дифференцированию, так же, как для предложения 2.1. □

2.4 Отражения нормальных экстремалей

Как показано в работе [8], нормальная гамильтонова система принципа максимума Понтрягина имеет треугольный вид при параметризации $\lambda = (h_1, \dots, h_5; q) \in T^*M$: подсистема для координат в слое кокасательного расслоения $(h_1, \dots, h_5) \in T_q^*M$ не зависит от точки $q \in M$ (напомним, что $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(q) \rangle$). Эта независимая вертикальная подсистема на поверхности уровня гамильтониана $H = (h_1^2 + h_2^2)/2 = 1/2$ записывается в координатах $(\theta, c, \alpha, \beta) \in T_q^*M$ как обобщенный маятник (2), где $h_1 = \cos \theta$, $h_2 = \sin \theta$, $h_3 = c$, $h_4 = \alpha \sin \beta$, $h_5 = -\alpha \cos \beta$. Продолжим действие отражений ε^i с вертикальной подсистемы на полную гамильтонову систему.

Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N = C \times \mathbb{R}_+$ есть точка в прообразе экспоненциального отображения $\text{Exp} : N \rightarrow M$, $\text{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = q_t$, где $C = \{H = 1/2\} \cap T_{q_0}^*M$ — начальный цилиндр для экстремалей. Тогда $\lambda_s = e^{s\vec{H}}(\lambda)$, $s \in [0, t]$, есть соответствующая нормальная экстремаль, $\text{Exp}(\nu) = \pi(\lambda_t) = q_t$. Запишем экстремаль в координатах как $\lambda_s = (\theta_s, c_s, \alpha, \beta; q_s)$. Тогда нормальная гамильтонова система ПМП запишется в виде

$$\dot{\lambda}_s = \vec{H}(\lambda_s) \quad : \quad \begin{cases} \dot{\theta}_s = c_s, \\ \dot{c}_s = -\alpha \sin(\theta_s - \beta), \\ \dot{\alpha} = 0, \\ \dot{\beta} = 0, \\ \dot{q}_s = \cos \theta_s X_1(q_s) + \sin \theta_s X_2(q_s). \end{cases} \quad (3)$$

В предыдущем пункте было определено действие отражений на траектории вертикальной подсистемы:

$$\varepsilon^i : \{(\theta_s, c_s, \alpha, \beta)\} \mapsto \{(\theta_s^i, c_s^i, \alpha, \beta^i)\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad s \in [0, t].$$

Продолжим это действие на траектории нормальной гамильтоновой системы (3):

$$\varepsilon^i : \{\lambda_s\} = \{(\theta_s, c_s, \alpha, \beta; q_s)\} \mapsto \{\lambda_s^i\} = \{(\theta_s^i, c_s^i, \alpha, \beta^i; q_s^i)\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad s \in [0, t],$$

где кривая q_s^i есть решение задачи Коши для отраженных управлений:

$$\begin{aligned} \dot{q}_s^i &= \cos \theta_s^i X_1(q_s^i) + \sin \theta_s^i X_2(q_s^i), \quad s \in [0, t], \\ q_0^i &= q_0. \end{aligned}$$

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Группа отражений $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ сохраняет семейство траекторий нормальной гамильтоновой системы (3).*

Действие отражений на геодезические q_s будет описано в пунктах 2.6, 2.7.

2.5 Отражения в прообразе экспоненциального отображения

В предыдущем пункте было определено действие отражений ε^i на нормальные экстремали $\lambda_s = e^{s\tilde{H}}(\lambda)$, $s \in [0, t]$,

$$\varepsilon^i : \lambda_s \mapsto \lambda_s^i, \quad s \in [0, t]. \quad (4)$$

Наша цель — представить отражения как симметрии экспоненциального отображения $\text{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\tilde{H}}(\lambda)$.

Сейчас мы определим действие отражений в прообразе экспоненциального отображения. Положим

$$\varepsilon^i : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow C \times \mathbb{R}_+, \quad (\lambda, t) \mapsto (\lambda^i, t),$$

где $\lambda^i = \lambda_0^i$ есть начало соответствующей отраженной экстремали (4). В координатах:

$$\varepsilon^1 : (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta^1, c^1, \alpha, \beta^1, t) = (\theta_t, -c_t, \alpha, \beta, t), \quad (5)$$

$$\varepsilon^2 : (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta^2, c^2, \alpha, \beta^2, t) = (-\theta_t, c_t, \alpha, -\beta, t), \quad (6)$$

$$\varepsilon^3 : (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta^3, c^3, \alpha, \beta^3, t) = (-\theta, -c, \alpha, -\beta, t). \quad (7)$$

Теперь мы хотели бы определить действие отражений в образе экспоненциального отображения как

$$\varepsilon^i : M \rightarrow M, \quad q_t \mapsto q_t^i.$$

Однако априори не очевидно, что точка q_t^i однозначно определяется точкой q_t . Чтобы убедиться в этом, исследуем действие отражений на геодезические.

2.6 Отражения эйлеровых эластиков

Пусть $q_s = (x_s, y_s, z_s, v_s, w_s)$, $s \in [0, t]$, есть геодезическая, а

$$q_s^i = (x_s^i, y_s^i, z_s^i, v_s^i, w_s^i), \quad s \in [0, t], \quad i = 1, 2, 3,$$

суть ее образы под действие отражений, см. пункт 2.4. Кривые (x_s, y_s) и (x_s^i, y_s^i) являются эйлеровыми эластическими, см. [7], [8]. Действие отражений ε^i на эластики описано в следующем предложении.

Предложение 2.4. 1) $(x_s^1, y_s^1) = (x_t - x_{t-s}, y_t - y_{t-s})$, $s \in [0, t]$,

2) $(x_s^2, y_s^2) = (x_t - x_{t-s}, y_{t-s} - y_t)$, $s \in [0, t]$,

3) $(x_s^3, y_s^3) = (x_s, -y_s)$, $s \in [0, t]$.

Доказательство. Мы рассмотрим только действие ε^1 , остальные отражения $\varepsilon^2, \varepsilon^3$ изучаются аналогично. Имеем

$$x_s^1 = \int_0^s \cos \theta_r^1 dr = \int_0^s \cos \theta_{t-r} dr = \int_{t-s}^t \cos \theta_r dr.$$

Принимая во внимание, что

$$x_{t-s} = \int_0^{t-s} \cos \theta_r dr,$$

получаем

$$x_s^1 + x_{t-s} = \int_0^t \cos \theta_r dr = x_t,$$

то есть

$$x_s^1 = x_t - x_{t-s}, \quad s \in [0, t].$$

Аналогично получаем

$$y_s^1 = y_t - y_{t-s}, \quad s \in [0, t].$$

□

Замечание. Отметим наглядный смысл действия отражений на эластике $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$ в случае $(x_t, y_t) \neq (x_0, y_0)$.

В силу равенства

$$\varepsilon^1 : \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} x_t - x_{t-s} \\ y_t - y_{t-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s^1 \\ y_s^1 \end{pmatrix},$$

отражение ε^1 есть композиция двух преобразований: (1) обращения времени на эластике, и (2) отражения плоскости (x, y) в центре $p_c = (x_t/2, y_t/2)$ хорды эластике, т.е. отрезка, соединяющего ее начало $(x_0, y_0) = (0, 0)$ и конец (x_t, y_t) ; см. рис. 3.

Для отражения ε^2 имеем разложение

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} &\xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\chi & -\sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \\ &\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\chi & -\sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} x_t - x_{t-s} \\ y_{t-s} - y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s^2 \\ y_s^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где χ — полярный угол точки (x_t, y_t) :

$$\cos \chi = \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}, \quad \sin \chi = \frac{y_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}.$$

То есть отражение ε^2 действует на эластике как композиция трех преобразований: (1) обращения времени на эластике, (2) отражения плоскости (x, y)

в серединном перпендикуляре l^\perp к хорде и (3) поворота на угол (-2χ) ; см. рис. 4.

Отражение ε^3 представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 : \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} &\xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ \sin 2\chi & -\cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \\ &\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ \sin 2\chi & -\cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} x_s \\ -y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s^3 \\ y_s^3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

это композиция (1) отражения плоскости (x, y) в хорде элаستيки и (2) поворота на угол (-2χ) , то есть отражения в хорде l ; см. рис. 5.

Итак, по модулю обращения времени на эластике и вращений плоскости (x, y) , имеем:

- ε^1 есть отражение элаستيки в центре хорды;
- ε^2 есть отражение элаستيки в серединном перпендикуляре к хорде;
- ε^3 есть отражение элаستيки в хорде.

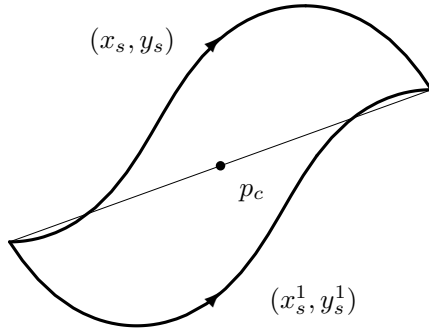


Рис. 3: Отражение ε^1 элаستيки в центре хорды p_c

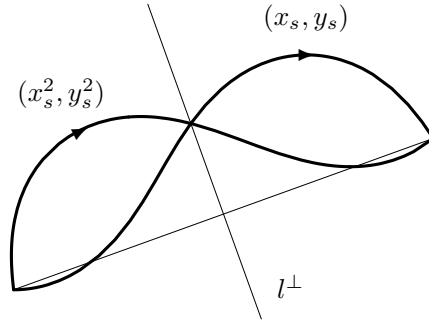


Рис. 4: Отражение ε^2 элаستيки в серединном перпендикуляре l^\perp

2.7 Отражения концов геодезических

Опишем действие отражений ε^i на концы геодезических $q_t = (x_t, y_t, z_t, v_t, w_t)$.

Предложение 2.5. 1) $(x_t^1, y_t^1, z_t^1, v_t^1, w_t^1) = (x_t, y_t, -z_t, v_t - x_t z_t, w_t - y_t z_t)$,

2) $(x_t^2, y_t^2, z_t^2, v_t^2, w_t^2) = (x_t, -y_t, z_t, -v_t + x_t z_t, w_t - y_t z_t)$,

3) $(x_t^3, y_t^3, z_t^3, v_t^3, w_t^3) = (x_t, -y_t, -z_t, -v_t, w_t)$.

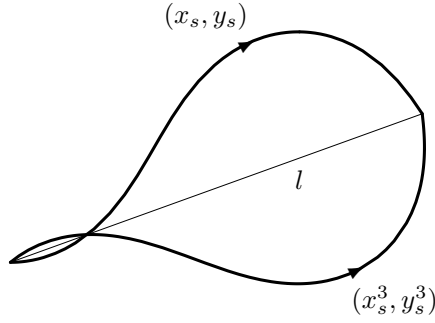


Рис. 5: Отражение ε^3 элаستيки в хорде l

Доказательство. Докажем равенство 1), остальные два рассматриваются аналогично. Равенство $(x_t^1, y_t^1) = (x_t, y_t)$ следует из предложения 2.4. Далее, учитывая это же предложение и вид нормальной гамильтоновой системы (3) в координатах (x, y, z, v, w) , получаем

$$\begin{aligned}
z_t^1 &= \frac{1}{2} \int_0^t (-\cos \theta_{t-s}(y_t - y_{t-s}) + \sin \theta_{t-s}(x_t - x_{t-s})) ds = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t (-\cos \theta_{t-s}y_t + \sin \theta_{t-s}x_t) ds - \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t (-\cos \theta_{t-s}y_{t-s} + \sin \theta_{t-s}x_{t-s}) ds = \\
&= -\frac{1}{2}x_t y_t + \frac{1}{2}y_t x_t + \frac{1}{2} \int_t^0 (-\cos \theta_s y_s + \sin \theta_s x_s) ds = \\
&= -z_t.
\end{aligned}$$

Аналогично доказываются равенства $v_t^1 = v_t - x_t z_t$ и $w_t^1 = w_t - y_t z_t$. \square

Предложение 2.5 показывает, что конец отраженной геодезической q_t^i однозначно определяется концом исходной геодезической q_t . Поэтому можно определить действие отражений на концы геодезических как отображения

$$\varepsilon^i : M \rightarrow M, \quad \varepsilon^i : q_t \mapsto q_t^i.$$

Предложение 2.5 описывает действие этого отображения в координатах (x, y, z, v, w) на M .

Замечание. Отражение

$$\varepsilon^3 : (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, -z, -v, w)$$

есть симметрия нильпотентной субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, задаваемой полями X_1, X_2 как ортонормированным базисом. Это отражение действует на базис как

$$\varepsilon_*^3 : (X_1, X_2) \mapsto (X_1, -X_2),$$

т.е. это — отражение плоскости Δ в прямой $\mathbb{R}X_1$.

2.8 Отражения как симметрии экспоненциального отображения

Из определения действия отражений ε^i в прообразе и образе экспоненциального отображения следует, что отражения являются симметриями экспоненциального отображения. Получаем следующее утверждение.

Предложение 2.6. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M & & (\lambda_0, t) & \xrightarrow{\text{Exp}} & q_t \\ & & \downarrow \varepsilon^i & & \downarrow \varepsilon^i & & \downarrow \varepsilon^i \\ C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M & & (\lambda_0^i, t) & \xrightarrow{\text{Exp}} & q_t^i \end{array}$$

то есть

$$\varepsilon^i \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ \varepsilon^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

3 Группа симметрий экспоненциального отображения

Наряду с дискретной группой симметрий $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$, экспоненциальное отображение имеет непрерывную двухпараметрическую группу симметрий $e^{\mathbb{R}\vec{h}_0} \circ e^{\mathbb{R}Z}$, где

$$\begin{aligned} h_0(\lambda) &= \langle \lambda, X_0(q) \rangle, & X_0 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w}, \\ Z &= \vec{h}_Y + e, & h_Y(\lambda) &= \langle \lambda, Y(q) \rangle, \\ Y &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3v \frac{\partial}{\partial v} + 3w \frac{\partial}{\partial w}, & e &= \sum_{i=1}^5 h_i \frac{\partial}{\partial h_i}. \end{aligned}$$

Действительно, согласно утверждению 4.2 [8],

$$e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ} \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = e^{t'\vec{H}} \circ e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\lambda), \quad t' = te^r,$$

откуда с помощью канонической проекции $\pi : T^*M \rightarrow M$, $\pi(\lambda) = q$, получаем

$$e^{sX_0} \circ e^{rY} \circ \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\lambda), t'). \quad (8)$$

Определим естественное действие непрерывных симметрий в прообразе экспоненциального отображения:

$$\begin{aligned} e^{s\vec{h}_0} &: C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow C \times \mathbb{R}_+, & (\lambda, t) &\mapsto (e^{s\vec{h}_0}(\lambda), t), \\ e^{rZ} &: C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow C \times \mathbb{R}_+, & (\lambda, t) &\mapsto (e^{rZ}(\lambda), te^r). \end{aligned}$$

Из этого определения и равенства (8) получаем следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Следующие диаграммы коммутативны:*

$$\begin{array}{ccc} C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\ \downarrow e^{s\vec{h}_0} & & \downarrow e^{sX_0} \\ C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\ \downarrow e^{rZ} & & \downarrow e^{rY} \\ C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \end{array}$$

то есть

$$e^{s\vec{h}_0} \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ e^{s\vec{h}_0}, \quad e^{rY} \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ e^{rZ}.$$

Итак, группа, порожденная отражениями, вращениями и дилатациями

$$G = \langle \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, e^{s\vec{h}_0}, e^{rZ} \rangle$$

сохраняет экспоненциальное отображение. Найдем коммутационные соотношения в группе G . Потоки полей \vec{h}_0 и Z коммутируют между собой [8]. Отражения ε^i также коммутируют между собой, см. таблицу умножения в пункте 2.1. Установим правила коммутирования дискретных и непрерывных симметрий.

Предложение 3.2. *В прообразе экспоненциального отображения $C \times \mathbb{R}_+$ справедливы коммутационные соотношения:*

$$\begin{aligned} e^{s\vec{h}_0} \circ \varepsilon^1 &= \varepsilon^1 \circ e^{s\vec{h}_0}, & e^{s\vec{h}_0} \circ \varepsilon^2 &= \varepsilon^2 \circ e^{-s\vec{h}_0}, & e^{s\vec{h}_0} \circ \varepsilon^3 &= \varepsilon^3 \circ e^{s\vec{h}_0}, \\ e^{rZ} \circ \varepsilon^i &= \varepsilon^i \circ e^{rZ}, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Доказательство. Предложение доказывается непосредственным вычислением с использованием выражений для действия отражений (5)–(7) и непрерывных симметрий

$$\begin{aligned} e^{s\vec{h}_0} &: (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta + s, c, \alpha, \beta + s, t), \\ e^{rZ} &: (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta, ce^{-r}, \alpha e^{-2r}, \beta, te^r) \end{aligned}$$

в прообразе экспоненциального отображения. □

Следствие 3.1. *В образе экспоненциального отображения M справедливы коммутационные соотношения:*

$$\begin{aligned} e^{sX_0} \circ \varepsilon^1 &= \varepsilon^1 \circ e^{sX_0}, & e^{sX_0} \circ \varepsilon^2 &= \varepsilon^2 \circ e^{-sX_0}, & e^{sX_0} \circ \varepsilon^3 &= \varepsilon^3 \circ e^{sX_0}, \\ e^{rY} \circ \varepsilon^i &= \varepsilon^i \circ e^{rY}, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Замечание. Обозначим прообраз экспоненциального отображения $N = C \times \mathbb{R}_+$. Рассмотрим фактор-пространства прообраза и образа экспоненциального отображения, а также соответствующие канонические проекции:

$$\begin{aligned} N'' &= N/G_{\bar{h}_0, Z}, & \pi_0'' &: N \rightarrow N'', \\ M'' &= M/G_{X_0, Y}, & \pi_1'' &: M \rightarrow M'', \end{aligned}$$

где $G_{\bar{h}_0, Z} = \langle e^{s\bar{h}_0}, e^{rZ} \rangle$ и $G_{X_0, Y} = \langle e^{sX_0}, e^{rY} \rangle$ суть двухпараметрические группы непрерывных симметрий в N и M соответственно [8]. Предложение 3.2 и следствие 3.1 позволяют определить действие отражений в фактор-пространствах:

$$\varepsilon^i : N'' \rightarrow N'', \quad \varepsilon^i : M'' \rightarrow M''$$

так, чтобы следующая диаграмма была коммутативной:

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{\text{Exp}} & M & & \\ \varepsilon^i \searrow & & \varepsilon^i \searrow & & \\ N & \xrightarrow{\text{Exp}} & M & & \\ \pi_0'' \downarrow & & \downarrow \pi_1'' & & \\ N'' & \xrightarrow{\text{Exp}''} & M'' & & \\ \varepsilon^i \searrow & & \varepsilon^i \searrow & & \\ N'' & \xrightarrow{\text{Exp}''} & M'' & & \end{array}$$

4 Действие отражений в прообразе экспоненциального отображения

В работе [8] были введены так называемые эллиптические координаты в подобластях фазового пространства маятника. Эти координаты порождены координатами «действие – угол» для стандартного маятника. Одна из этих координат – время на траекториях маятника, а вторая – перепараметризованная энергия маятника. В этом пункте мы напомним конструкцию эллиптических координат (с некоторыми исправлениями и дополнениями), а затем с помощью этих координат опишем действие отражений в прообразе экспоненциального отображения.

Двадцать шестая из «Лекций по динамике» К. Якоби [13] называется «Эллиптические координаты» и начинается известными словами: «Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит во введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого общего правила. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя

какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть применена». Отметим, что координаты, введенные ниже, не имеют отношения к эллиптическим координатам Якоби. Более того, наш ход был противоположным изложенному Якоби: наши эллиптические координаты пришлось вводить специально для того, чтобы параметризовать субримановы геодезические [8] и найти точки Максвелла [10], [11]. Эллиптические координаты приподнимают завесу сложности над задачами, управляемыми уравнением маятника, и открывают нашему глазу их решение — см. рис. 6. Здесь имеется важная точка пересечения с Якоби: наши координаты вводятся с помощью эллиптических функций Якоби [4], [12]. Другим существенным моментом будет исследование сопряженных точек, то есть решений уравнения Якоби, вдоль геодезических [11].

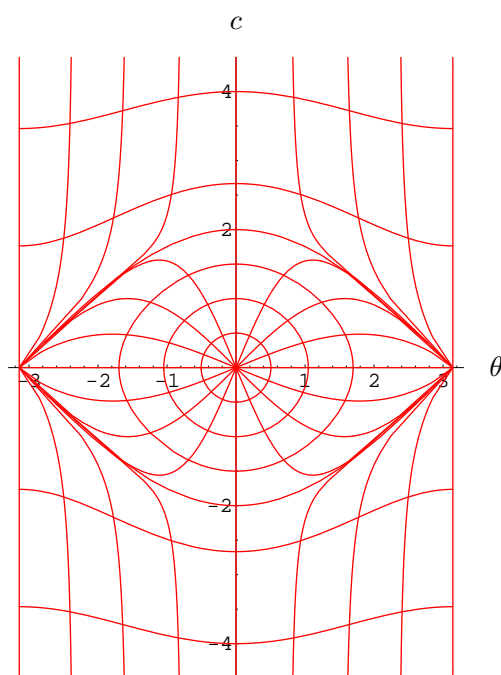


Рис. 6: Сетка эллиптических координат

4.1 Эллиптические координаты в начальном цилиндре

Напомним [8], что множество начальных точек экстремалей есть цилиндр — фазовое пространство обобщенного маятника (2)

$$C = T_{q_0}^* M \cap H^{-1}(1/2) = \{(\theta \in S^1, c \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \beta \in S^1)\},$$

а энергия обобщенного маятника равна

$$E = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos(\theta - \beta) \in [-\alpha, +\infty).$$

В подмножествах цилиндра

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E \in (-\alpha, \alpha)\}, \\ C_2 &= \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E \in (\alpha, +\infty)\}, \\ C_3 &= \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E = \alpha, c \neq 0\} \end{aligned}$$

эллиптические координаты $(k, \varphi, \alpha, \beta)$ вводятся следующим образом.

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ k \in (0, 1), \varphi \left(\text{mod} \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right), \alpha > 0, \beta(\text{mod} 2\pi) \right\}, \\ k &= \sqrt{\frac{E + \alpha}{2\alpha}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta - \beta}{2} + \frac{c^2}{4\alpha}} \in (0, 1), \\ \begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = s_1 k \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha}\varphi), \\ \frac{c}{2} = k \sqrt{\alpha} \operatorname{cn}(\sqrt{\alpha}\varphi), \end{cases} & s_1 = \operatorname{sgn} \cos \frac{\theta - \beta}{2}. \end{aligned}$$

В этом случае

$$\cos \frac{\theta - \beta}{2} = s_1 \operatorname{dn}(\sqrt{\alpha}\varphi).$$

Область C_2 разобьем на две связные компоненты

$$C_2^\pm = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E \in (\alpha, +\infty), \operatorname{sgn} c = \pm 1\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_2^\pm &= \left\{ k \in (0, 1), \varphi \left(\text{mod} \frac{2Kk}{\sqrt{\alpha}} \right), \alpha > 0, \beta(\text{mod} 2\pi) \right\}, \\ k &= \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta - \beta}{2} + \frac{c^2}{4\alpha}}} \in (0, 1), \\ \begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = s_2 \operatorname{sn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}, \\ \frac{c}{2} = s_2 \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \operatorname{dn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}, \end{cases} & s_2 = \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

В этом случае

$$\cos \frac{\theta - \beta}{2} = \operatorname{cn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}.$$

В области C_2 будут также использоваться координаты (k, ψ, α, β) , где $\psi = \frac{\varphi}{k}$, тогда

$$C_2^\pm = \left\{ k \in (0, 1), \psi \left(\text{mod} \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \right), \alpha > 0, \beta(\text{mod} 2\pi) \right\}.$$

Множество C_3 также разбиваем на две связные компоненты

$$C_3^\pm = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E = \alpha, \operatorname{sgn} c = \pm 1\}.$$

Тогда

$$C_3^\pm = \{\varphi \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta(\bmod 2\pi)\},$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = s_1 s_2 \operatorname{th}(\sqrt{\alpha}\varphi), \\ \frac{c}{2} = s_2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}\varphi)}, \end{cases} \quad s_1 = \operatorname{sgn} \cos \frac{\theta - \beta}{2}, \quad s_2 = \operatorname{sgn} c.$$

В этом случае

$$\cos \frac{\theta - \beta}{2} = s_1 \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}\varphi)}.$$

На рис. 6 изображена сетка эллиптических координат в фазовой плоскости стандартного маятника ($\alpha = 1, \beta = 0$). В области C_1 (колебания маятника с малой энергией $E < 1$) нарисованы кривые $k = \operatorname{const}, \varphi = \operatorname{const}$; в области C_2 (вращения маятника с большой энергией $E > 1$) нарисованы кривые $k = \operatorname{const}, \psi = \operatorname{const}$; эти области разделены множеством C_3 (движения маятника с критической энергией $E = 1$), состоящим из двух сепаратрис $k = 1$.

4.2 Эллиптические координаты в прообразе экспоненциального отображения

В соответствии с введенным в работе [8] разбиением начального цилиндра

$$C = \bigcup_{i=1}^7 C_i,$$

рассмотрим разбиение прообраза экспоненциального отображения

$$N = \bigcup_{i=1}^7 N_i, \quad N_i = C_i \times \mathbb{R}_+.$$

Аналогично, наряду с разбиением на связные компоненты

$$C_i = C_i^+ \cup C_i^-, \quad C_i^\pm = C_i \cap \{\operatorname{sgn} c = \pm 1\}, \quad i = 2, 3, 6,$$

будем рассматривать разбиения

$$N_i = N_i^+ \cup N_i^-, \quad N_i^\pm = C_i^\pm \times \mathbb{R}_+, \quad i = 2, 3, 6.$$

Определим эллиптические координаты в подмножествах N_1, N_2, N_3 :

$$\begin{aligned} N_1 &= \{(k, \varphi, \alpha, \beta, \delta)\}, \\ N_2 &= \{(k, \psi, \alpha, \beta, \delta)\}, \\ N_3 &= \{(\varphi, \alpha, \beta, \delta)\}, \\ \delta &= t\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Замечание. Эллиптические координаты приспособлены к действию непрерывных симметрий; в этих координатах вращения и дилатации выглядят особенно просто. Действительно, в координатах $N = \{(\theta, c, \alpha, \beta, t)\}$ имеем

$$\vec{h}_0 = \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad Z = -c \frac{\partial}{\partial c} - 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + t \frac{\partial}{\partial t},$$

поэтому в координатах $N_j = \{(k, \varphi, \alpha, \beta, \delta)\}$

$$\vec{h}_0 = \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad Z = -2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Функции (k, φ, δ) являются координатами в фактор-пространствах N_j'' , $j = 1, 2, 3$.

4.3 Действие отражений в N

Опишем действие отражений $\varepsilon^i : N_j \rightarrow N_j$ в эллиптических координатах. Пусть $\nu \in N$, обозначим $\nu^i = \varepsilon^i(\nu) \in N$.

Предложение 4.1. 1) Если $\nu = (k, \varphi, \alpha, \beta, t) \in N_1$, то $\nu^i = (k, \varphi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_1$, $i = 1, 2, 3$, причем

$$\begin{aligned} \varphi^1 + \varphi_t &= \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \left(\text{mod } \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^1 &= \beta, \\ \varphi^2 + \varphi_t &= 0 \left(\text{mod } \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^2 &= -\beta, \\ \varphi^3 - \varphi &= \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \left(\text{mod } \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^3 &= -\beta. \end{aligned}$$

2) Если $\nu = (k, \psi, \alpha, \beta, t) \in N_2$, то $\nu^i = (k, \psi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_2$, $i = 1, 2, 3$, более того,

$$\nu \in N_2^\pm \Rightarrow \nu^1 \in N_2^\mp, \nu^2 \in N_2^\pm, \nu^3 \in N_2^\mp,$$

причем

$$\begin{aligned} \psi^1 + \psi_t &= 0 \left(\text{mod } \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^1 &= \beta, \\ \psi^2 + \psi_t &= 0 \left(\text{mod } \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^2 &= -\beta, \\ \psi^3 + \psi &= 0 \left(\text{mod } \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^3 &= -\beta. \end{aligned}$$

3) Если $\nu = (\varphi, \alpha, \beta, t) \in N_3$, то $\nu^i = (\varphi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_3$, $i = 1, 2, 3$, более того,

$$\nu \in N_3^\pm \Rightarrow \nu^1 \in N_3^\mp, \nu^2 \in N_3^\pm, \nu^3 \in N_3^\mp,$$

причем

$$\begin{aligned} \varphi^1 + \varphi_t &= 0, & \beta^1 &= \beta, \\ \varphi^2 + \varphi_t &= 0, & \beta^2 &= -\beta, \\ \varphi^3 + \varphi &= 0, & \beta^3 &= -\beta. \end{aligned}$$

Предложение 4.1 проиллюстрировано на рис. 7–9 (в случае $\alpha = 1, \beta = 0$).

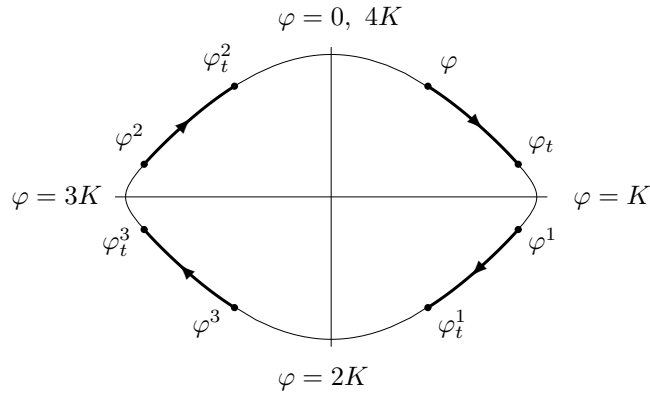


Рис. 7: Отражения в C_1

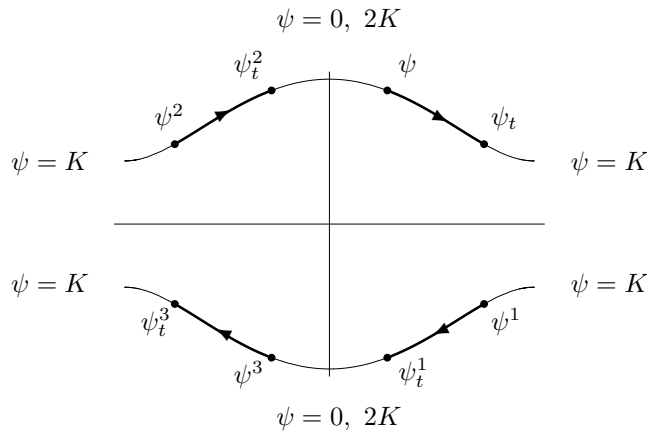


Рис. 8: Отражения в C_2

Доказательство. Докажем только пункт 1) т.к. остальные два пункта доказываются аналогично.

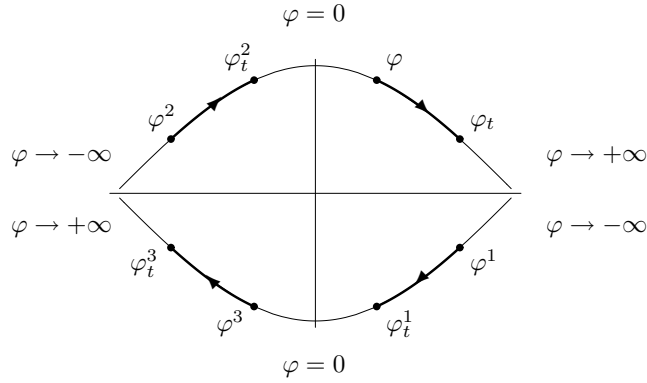


Рис. 9: Отражения в C_3

Отражения ε^i сохраняют область N_1 в силу того, что

$$\varepsilon^i : E \mapsto E, \quad \varepsilon^1, \varepsilon^3 : c \mapsto -c, \quad \varepsilon^2 : c \mapsto c,$$

это следует из равенств (5)–(7).

Далее, из равенства (5) получаем $\theta^1 = \theta_t$, $c^1 = -c_t$, откуда с учетом конструкции эллиптических координат (пункт 4.1) имеем

$$\operatorname{sn}(\sqrt{\alpha}\varphi^1) = \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha}\varphi_t), \quad \operatorname{cn}(\sqrt{\alpha}\varphi^1) = -\operatorname{cn}(\sqrt{\alpha}\varphi_t),$$

поэтому $\varphi_1 + \varphi_t = \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{mod} \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right)$. Выражения для действия остальных отражений в эллиптических координатах получаются аналогично. \square

5 Действие отражений в образе экспоненциального отображения

5.1 Декомпозиция и координаты в M и M''

Для того, чтобы получить простое описание действия отражений в образе экспоненциального отображения, удобно использовать специальные координаты в M , приспособленные к действию симметрий X_0 и Y . Опишем их конструкцию.

Напомним, что

$$M = \{q\} = \mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5, \quad q_0 = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Введем полярные координаты в плоскостях (x, y) и (v, w) :

$$x = r \cos \chi, \quad y = r \sin \chi, \quad v = \rho \cos \omega, \quad w = \rho \sin \omega.$$

В области $\{r > 0, \rho > 0\}$ определен угол

$$\gamma = \chi - \omega.$$

Рассмотрим следующие подмножества в M :

$$\begin{aligned} M &= M_0 \cup \{q_0\}, & M_0 &= M \setminus \{q_0\} = \{r^2 + z^2 + \rho^2 > 0\}, \\ M_0 &= M_1 \cup M_2 \cup M_3^+ \cup M_3^-, \\ M_1 &= \{r > 0\}, & M_2 &= \{\rho > 0\}, & M_3^\pm &= \{\pm z > 0\}. \end{aligned}$$

Опишем искомые координаты в картах M_1, M_2, M_3^\pm многообразия M_0 .

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(r > 0, \chi \in S^1, P, Q, R)\}, \\ P &= \frac{z}{2r^2}, & Q &= \frac{xv + yw}{r^4} = \frac{\rho}{r^3} \cos \gamma, & R &= \frac{-yv + xw}{r^4} = \frac{\rho}{r^3} \sin \gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \{(\rho > 0, \omega \in S^1, P', Q', R')\}, \\ P' &= \frac{z}{2\rho^{2/3}}, & Q' &= \frac{xv + yw}{\rho^{4/3}} = \frac{r}{\rho^{1/3}} \cos \gamma, & R' &= \frac{-yv + xw}{\rho^{4/3}} = \frac{r}{\rho^{1/3}} \sin \gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3^\pm &= \{(r' \geq 0, \chi \in S^1, \rho' \geq 0, \omega \in S^1)\}, \\ r' &= \frac{r}{|z|^{1/2}}, & \rho' &= \frac{\rho}{|z|^{3/2}}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} M_3^\pm &= \{(\pm z > 0, \chi \in S^1, r' \geq 0, \rho' \geq 0, \gamma \in S^1)\} = \\ &= \{(\pm z > 0, \chi \in S^1, P'', Q'', R'')\}, \\ P'' &= \frac{r'^2 - \rho'^2}{\sqrt{r'^2 + \rho'^2}}, & Q'' &= \frac{r' \rho'}{\sqrt{r'^2 + \rho'^2}} \cos \gamma, & R'' &= \frac{r' \rho'}{\sqrt{r'^2 + \rho'^2}} \sin \gamma. \end{aligned}$$

В координатах $(r, \chi, z, \rho, \omega)$ в области $M_1 \cap M_2 = \{r > 0, \rho > 0\}$ непрерывные симметрии принимают вид

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad Y = r \frac{\partial}{\partial r} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3\rho \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

В координатах (r, χ, P, Q, R) в области M_1 получаем

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad Y = r \frac{\partial}{\partial r},$$

поэтому фактор-пространство M_1'' параметризуется координатами (P, Q, R) . Аналогично, в области $M_2 = \{\rho, \omega, P', Q', R'\}$ имеем

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad Y = 3\rho \frac{\partial}{\partial \rho},$$

поэтому $M_2'' = \{(P', Q', R')\}$, а в областях $M_3^\pm = \{z, \chi, P'', Q'', R''\}$ имеем

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad Y = 2z \frac{\partial}{\partial z},$$

поэтому $M_3^{\pm''} = \{(P'', Q'', R'')\}$.

Рассмотрим разбиение M на инвариантные множества группы непрерывных и дискретных симметрий G :

$$M = \{q_0\} \cup M_1 \cup M_4 \cup M_5^\pm,$$

где область $M_1 = M \setminus \{q_0\} = \{r > 0\}$ была определена выше, а

$$M_4 = M_2 \setminus M_1 = \{r = 0, \rho > 0\},$$

$$M_5^\pm = M_3^\pm \setminus (M_1 \cup M_4) = \{r = 0, \rho = 0, \pm z > 0\}.$$

Координаты в M_1 и M_1'' описаны выше, а

$$M_4 = \{(\rho > 0, \omega \in S^1, P')\},$$

$$M_4'' = \{P'\},$$

$$M_5^\pm = \{\pm z > 0\},$$

$$M_5^{\pm''} = \{z = \pm 1\}.$$

5.2 Действие отражений в M

Опишем действие отражений

$$\varepsilon^i : M \rightarrow M, \quad q = (x, y, z, v, w) \mapsto q^i = (x^i, y^i, z^i, v^i, w^i)$$

в координатах, введенных в предыдущем пункте.

Предложение 5.1. 1) $q = q_0 \Rightarrow q^i = q_0, i = 1, 2, 3.$

2) $q = (r, \chi, P, Q, R) \in M_1 \Rightarrow q^i = (r, \chi^i, P^i, Q^i, R) \in M_1, \text{ причем}$

$$\chi^1 = \chi(\text{mod } 2\pi),$$

$$P^1 = -P,$$

$$Q^1 = Q - 2P,$$

$$\chi^2 + \chi = 0(\text{mod } 2\pi),$$

$$P^2 = P,$$

$$Q^2 = -Q + 2P,$$

$$\chi^3 + \chi = 0(\text{mod } 2\pi),$$

$$P^3 = -P,$$

$$Q^3 = Q - 2P.$$

3) $q = (\rho, \omega, P') \in M_4 \Rightarrow q^i = (\rho, \omega^i, P'^i) \in M_4, \text{ причем}$

$$\omega^1 = \omega(\text{mod } 2\pi),$$

$$P'^1 = -P',$$

$$\omega^2 + \omega = \pi(\text{mod } 2\pi),$$

$$P'^2 = P',$$

$$\omega^3 + \omega = \pi(\text{mod } 2\pi),$$

$$P'^3 = -P'.$$

4) $q = z \in M_5 \Rightarrow q^i = z^i \in M_5, \text{ причем}$

$$q \in M_5^\pm \Rightarrow q^1 \in M_5^\mp, q^2 \in M_5^\pm, q^3 \in M_5^\mp,$$

$$z^1 = -z, \quad z^2 = z, \quad z^3 = -z.$$

Доказательство. В силу предложения 2.5, отражения действуют в M следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, y, -z, v - xz, w - yz), \\ \varepsilon^2 &: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, z, -v + xz, w - yz), \\ \varepsilon^3 &: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, -z, -v, w).\end{aligned}$$

Утверждение пункта 1) очевидно, докажем пункт 2). Непосредственно видно, что отражения сохраняют расстояние r , а потому и область M_1 . Далее, отражение ε^1 не изменяет вектор (x, y) , а потому и угол χ . Наконец,

$$\begin{aligned}P^1 &= \frac{-z}{2r^2} = -P, \\ Q^1 &= \frac{x(v - xz) + y(w - yz)}{r^4} = \frac{xv + yw}{r^4} - \frac{(x^2 + y^2)z}{r^4} = Q - 2P, \\ R^1 &= \frac{-y(v - xz) + x(w - yz)}{r^4} = \frac{-yv + xw}{r^4} = R.\end{aligned}$$

Остальные утверждения доказываются аналогично. \square

Замечание. Из пункта 2) предложения 5.1 видно, что в области M_1 (открытом всюду плотном подмножестве M) отражения ε^i особенно просто представляются в следующих координатах в фактор-пространстве M_1'' :

$$P = \frac{z}{2r^2}, \quad Q - P = \frac{xv + yw - zr^2/2}{r^4}, \quad R = \frac{-yv + xw}{r^4},$$

а именно:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &: P \mapsto -P, & Q - P &\mapsto Q - P, & R &\mapsto R, \\ \varepsilon^2 &: P \mapsto P, & Q - P &\mapsto -Q + P, & R &\mapsto R, \\ \varepsilon^3 &: P \mapsto -P, & Q - P &\mapsto Q - P, & R &\mapsto R.\end{aligned}$$

То есть в плоскости $(P, Q - P)$ дискретные симметрии ε^i действуют как отражения в осях координат $P = 0$, $Q - P = 0$. Это объясняет ту важную роль, которую будут играть поверхности $z = 0$ и $V = xv + yw - z\frac{r^2}{2} = 0$ при исследовании стратов Максвелла. Этому исследованию посвящены следующие работы [10], [11].

Благодарность

Автор выражает благодарность А.А. Аграчеву за постановку задачи и полезные обсуждения во время работы.

Список иллюстраций

1	Отражения в фазовой плоскости маятника	6
2	Отражения траекторий маятника	6
3	Отражение ε^1 элаستيки в центре хорды p_c	11
4	Отражение ε^2 элаستيки в серединном перпендикуляре l^\perp	11
5	Отражение ε^3 элаستيки в хорде l	12
6	Сетка эллиптических координат	16
7	Отражения в C_1	20
8	Отражения в C_2	20
9	Отражения в C_3	21

Список литературы

- [1] А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, М.: Физматлит, 2005.
- [2] А.А. Аграчев, А.В. Сарычев, Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем, *ДАН СССР*, **295** (1987).
- [3] A. A. Agrachev, Yu.L. Sachkov, An Intrinsic Approach to the Control of Rolling Bodies, *Proceedings of the 38-th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, USA, December 7–10, 1999, vol. 1, 431–435.
- [4] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, М.: Наука, 1970.
- [5] A. Bellaïche, The tangent space in sub-Riemannian geometry, In: *Sub-Riemannian geometry*, A. Bellaïche and J.-J. Risler, Eds., Birkhäuser, Basel, Switzerland, 1996, 1–78.
- [6] А.М. Вершик, В.Я. Гершкович, *Неголономные динамические системы и геометрия распределений*. – Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы – 7, 8. – М.: ВИНТИ, 1986.
- [7] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [8] Ю. Л. Сачков, Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 194 (2003), 9: 63–90.
- [9] Yu.L. Sachkov, Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures, *Transactions of the American Mathematical Society*, **356** (2004), 2: 457–494.
- [10] Ю.Л. Сачков, *Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны*, направлена для публикации.
- [11] Ю.Л. Сачков, *Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны*, направлена для публикации.
- [12] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, М.: УРСС, 2002.
- [13] К.Г.Я. Якоби, *Лекции по динамике*, М.: Едиториал УРСС, 2004.