

Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны*

Ю.Л. Сачков
Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский 152020, Россия
E-mail: sachkov@sys.botik.ru

16 марта 2005 г.

Аннотация

Рассматривается обобщенная задача Дидоны — модель нильпотентной субримановой задачи с вектором роста $(2,3,5)$. Изучается множество Максвелла, т.е. геометрическое место точек пересечения геодезических равной длины. Получено общее описание стратов Максвелла, соответствующих группе симметрий экспоненциального отображения, порожденной вращениями и отражениями. Выяснен инвариантный и наглядный смысл этих стратов.

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект No. 02-01-00506. Автор также благодарит за поддержку Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (Trieste, Italy), где эта работа была начата.

Содержание

1	Введение	3
2	Множество Максвелла	4
2.1	Оптимальность нормальных геодезических	4
2.2	Страты Максвелла, порожденные вращениями и отражениями	5
2.3	Факторизация стратов Максвелла	7
3	Кратные точки экспоненциального отображения	8
3.1	Вывод уравнений для кратных точек	8
3.2	Наглядный смысл кратных точек	10
3.3	Инвариантный смысл кратных точек	11
3.3.1	Инвариантное описание гиперповерхности $z = 0$	12
3.3.2	Инвариантное описание гиперповерхности $V = 0$	12
3.3.3	Инвариантное описание кривой $r^2 + \rho^2 = 0$	18
4	Неподвижные точки симметрий в прообразе экспоненциального отображения	18
4.1	Неподвижные точки вращений в N	18
4.2	Неподвижные точки отражений в N_1	18
4.3	Неподвижные точки отражений в N_2	19
4.4	Неподвижные точки отражений в N_3	21
4.5	Неподвижные точки отражений в N_6	23
5	Общее описание стратов Максвелла MAX_i	24
	Список иллюстраций	29
	Литература	30

1 Введение

Данная работа посвящена исследованию оптимальности геодезических в обобщенной задаче Дидоны — модели нильпотентной субримановой задачи с вектором роста $(2,3,5)$. Эта задача оптимального управления ставится следующим образом [9]:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, & q &= (x, y, z, v, w) \in M = \mathbb{R}^5, & u &= (u_1, u_2) \in U = \mathbb{R}^2, \\ q(0) &= q_0 = 0, & q(t_1) &= q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где векторные поля при управлениях имеют вид:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Мы продолжаем исследование этой задачи, начатое в работах [9], [10], [11]. В работах [10] и [11] найдены соответственно группы непрерывных и дискретных симметрий в обобщенной задаче Дидоны: имеется двухпараметрическая непрерывная группа симметрий (вращения и дилатации), а также дискретная группа симметрий порядка 4 (отражения). В работе [9] получена параметризация субримановых геодезических (экстремальных траекторий) эллиптическими функциями Якоби. Анормальные геодезические оптимальны до бесконечности, а нормальные — вообще говоря, на конечных отрезках времени.

Точка, в которой геодезическая теряет оптимальность, называется точкой разреза. Известно, что нормальная геодезическая может терять оптимальность либо из-за того, что в некоторую ее точку приходит другая геодезическая с таким же значением функционала (точка Максвелла), либо из-за того, что семейство геодезических имеет огибающую (сопряженная точка). В данной работе мы находим точки Максвелла, соответствующие группе симметрий, сохраняющих время на геодезических (вращения и отражения). А именно, мы отыскиваем две гиперповерхности в пространстве состояний M , содержащие все такие точки Максвелла. Компьютерные вычисления показывают, что геодезические теряют оптимальность именно на этих гиперповерхностях. Мы выясняем инвариантный смысл этих гиперповерхностей в терминах субримановой структуры, а также их наглядный смысл для эйлеровых эластиков (проекций геодезических на плоскость (x, y)).

Локализация точек пересечения геодезических с найденными гиперповерхностями будет содержанием последующей работы [12]. Для этого потребуется технически более сложная работа с эллиптическими функциями, которой мы избегаем в данной работе.

2 Множество Максвелла

Начнем с напомнимания некоторых понятий и обозначений, введенных в предыдущих работах [9], [11]. Из принципа максимума Понтрягина [2] следует, что экстремали в обобщенной задаче Дидоны суть траектории гамильтоновой системы $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$, $\lambda \in T^*M$, с гамильтонианом $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$, $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(q) \rangle$. Геодезические являются проекциями экстремалей из кокасательного расслоения T^*M на пространство состояний M : $q_t = \pi(\lambda_t)$, $\lambda_t = e^{t\vec{H}}(\lambda)$. В силу однородности гамильтониана H , достаточно рассматривать сужение гамильтонова потока на поверхность уровня $H = 1/2$ и потому брать начальные ковектора λ в начальном цилиндре $C = \{H = 1/2\} \cap T_{q_0}^*M$. Вся информация о геодезических заключена в экспоненциальном отображении $\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M$, $\text{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = q_t$.

2.1 Оптимальность нормальных геодезических

Множество Максвелла в прообразе экспоненциального отображения определяется следующим образом:

$$\text{MAX} = \left\{ (\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid \exists \tilde{\lambda} \in C, \tilde{\lambda} \neq \lambda : \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t) = \text{Exp}(\lambda, t) \right\}.$$

Включение $(\lambda, t_1) \in \text{MAX}$ означает, что две разные геодезические $q_s = \text{Exp}(\lambda, s) \neq \tilde{q}_s = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, s)$, $s \in [0, t_1]$, одинаковой субримановой длины $l = t_1$ пересекаются в точке $q_{t_1} = \tilde{q}_{t_1}$, см. рис. 1.

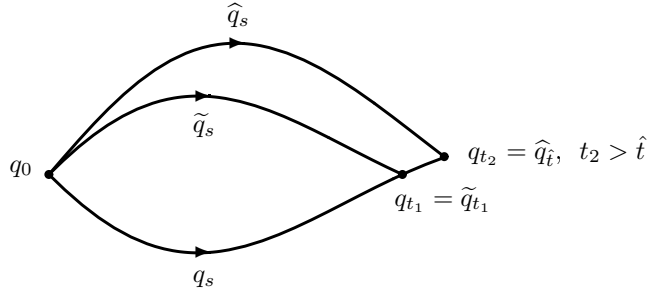


Рис. 1: Неоптимальность геодезической q_s после точки Максвелла q_{t_1}

Множество Максвелла тесно связано с оптимальностью геодезических: геодезическая не может быть оптимальной после пересечения с другой геодезической такой же длины. Следующее предложение доказано С. Жаке [7]. Для полноты изложения приведем его с доказательством.

Предложение 2.1. Пусть q_s и \tilde{q}_s суть две разные геодезические: $q_s \neq \tilde{q}_s$, $s \in [0, t_1]$. Если $q_{t_1} = \tilde{q}_{t_1}$, то для любого $t_2 > t_1$ геодезическая q_s , $s \in [0, t_2]$, не является оптимальной.

Иными словами, для любого $t_2 > t_1$ существует геодезическая \widehat{q}_s , $s \in [0, \hat{t}]$, меньшей субримановой длины, чем q_s , $s \in [0, t_2]$, соединяющая q_0 и q_{t_2} , см. рис. 1. Поэтому любая геодезическая $q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$ неоптимальна после времени Максвелла t_1 , $(\lambda, t_1) \in \text{MAX}$.

Приведем доказательство предложения 2.1.

Доказательство. От противного, пусть для некоторого $t_2 > t_1$ геодезическая q_s , $s \in [0, t_2]$, оптимальна. Тогда оптимальна и ломаная геодезическая

$$q'_s = \begin{cases} \widetilde{q}_s, & s \in [0, t_1], \\ q_s, & s \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Но все геодезические в обобщенной задаче Дидоны — аналитические кривые. Поэтому из тождества $q'_s \equiv q_s$, $s \in [t_1, t_2]$, следует, что $q'_s \equiv q_s$, $s \in [0, t_2]$, откуда $\widetilde{q}_s \equiv q_s$, $s \in [0, t_1]$. Противоречие. \square

Замечание. Экспоненциальное отображение является лагранжевым отображением [3]. Из теории лагранжевых особенностей следует, что в нашей задаче нормальные геодезические теряют оптимальность в *первой* точке Максвелла (т.е. оптимальны до этой точки включительно и не оптимальны после нее). Однако найти первую точку Максвелла затруднительно. Мы будем исследовать оптимальность нормальных геодезических следующим образом: 1) найдем определенные подмножества множества Максвелла — страты Максвелла MAX_i , $i = 0, \dots, 3$, порожденные симметриями экспоненциального отображения, не изменяющими время (вращением \vec{h}_0 и отражениями ε^i); 2) докажем, что вдоль каждой нормальной экстремали первая сопряженная точка встречается не раньше первого пересечения со стратами Максвелла MAX_i ; 3) докажем, что первая точка на нормальной экстремали из стратов Максвелла MAX_i есть точка разреза (точка потери оптимальности). Этот метод исследования оптимальности был успешно применен при решении нескольких задач субримановой геометрии [1, 8]. В этой работе мы решаем задачу 1).

Как указано в книге [3], термин *множество Максвелла* возникает «в связи с правилом Максвелла теории Ван дер Ваальса, согласно которому фазовый переход совершается при таком значении параметра, при котором два максимума некоторой гладкой функции равны между собой».

2.2 Страты Максвелла, порожденные вращениями и отражениями

В работе [11] были определены и исследованы отражения ε^i , $i = 1, 2, 3$, — дискретные симметрии экспоненциального отображения $\varepsilon^i : N \rightarrow N$, $\varepsilon^i : M \rightarrow M$, $\text{Exp} \circ \varepsilon^i = \varepsilon^i \circ \text{Exp}$. Мы обозначаем $\nu = (\lambda, t) \in N = C \times \mathbb{R}_+$, $\nu^i = \varepsilon^i(\nu)$. Наряду с дискретной группой симметрий $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$,

экспоненциальное отображение имеет непрерывную двухпараметрическую группу симметрий $G_{\vec{h}_0, Z} = e^{\mathbb{R}\vec{h}_0} \circ e^{\mathbb{R}Z}$ (см. [9]), где

$$\begin{aligned} h_0(\lambda) &= \langle \lambda, X_0(q) \rangle, & X_0 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w}, \\ Z &= \vec{h}_Y + e, & h_Y(\lambda) &= \langle \lambda, Y(q) \rangle, \\ Y &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3v \frac{\partial}{\partial v} + 3w \frac{\partial}{\partial w}, & e &= \sum_{i=1}^5 h_i \frac{\partial}{\partial h_i}. \end{aligned}$$

Определим *страты Максвелла, порожденные вращениями \vec{h}_0 и отражениями ε^i* :

$$\begin{aligned} \text{MAX}_0 &= \{\nu \in N \mid \exists \sigma \in \mathbb{R} : \tilde{\nu} = e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu) \neq \nu, \text{Exp}(\tilde{\nu}) = \text{Exp}(\nu)\}, \\ \text{MAX}_i &= \{\nu \in N \mid \exists \sigma \in \mathbb{R} : \tilde{\nu} = e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^i) \neq \nu, \text{Exp}(\tilde{\nu}) = \text{Exp}(\nu)\}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

По определению множества Максвелла,

$$\text{MAX}_i \subset \text{MAX}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

В этой работе мы дадим общее описание множеств MAX_i , а подробное описание этих множеств будет получено в последующей работе [12].

С более общей точки зрения, мы будем исследовать множество Максвелла, соответствующее группе симметрий, порожденной вращениями и отражениями. Пусть G — некоторая группа, действующая в прообразе и образе экспоненциального отображения:

$$g : N \rightarrow N, \quad g : M \rightarrow M, \quad g \in G.$$

Группа G называется *группой симметрий экспоненциального отображения*, если для любого $g \in G$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g} & N \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ M & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

то есть $\text{Exp} \circ g = g \circ \text{Exp}$. Предположим, что группа G сохраняет время:

$$g(\lambda, t) = (\lambda', t), \quad (\lambda, t) \in N, \quad g \in G.$$

Множеством Максвелла, соответствующим группе G , назовем множество

$$\text{MAX}_G = \{\nu \in N \mid \exists g \in G : \tilde{\nu} = g(\nu) \neq \nu, \text{Exp}(\tilde{\nu}) = \text{Exp}(\nu)\}.$$

Очевидно, что $\text{MAX}_G \subset \text{MAX}$ для любой группы симметрий экспоненциального отображения, сохраняющей время. (Можно определить множество

Максвелла для группы, действующей только в прообразе экспоненциального отображения; однако если действие группы не определено в образе экспоненциального отображения, то нахождение этого множества кажется затруднительным.)

В нашей задаче группа, порожденная вращениями и отражениями

$$G = G_{\vec{h}_0, \varepsilon} = \langle e^{s\vec{h}_0}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \rangle$$

есть группа симметрий экспоненциального отображения, сохраняющая время. В силу правил коммутирования в группе $G_{\vec{h}_0, \varepsilon}$ (предложение 3.2 [11]), любой элемент этой группы имеет вид $g = e^{s\vec{h}_0}$ или $g = e^{s\vec{h}_0} \circ \varepsilon^i$, поэтому

$$\text{MAX}_{G_{\vec{h}_0, \varepsilon}} = \bigcup_{i=0}^3 \text{MAX}_i.$$

2.3 Факторизация стратов Максвелла

Страты MAX_i факторизуются по действию группы $G_{\vec{h}_0, Z} = e^{\mathbb{R}\vec{h}_0} \circ e^{\mathbb{R}Z}$, также как и все множество Максвелла:

$$\begin{array}{ccccc} \text{MAX}_i & \xrightarrow{\text{Id}} & N & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\ \downarrow \pi''_0 & & \downarrow \pi''_0 & & \downarrow \pi''_1 \\ \text{MAX}_i'' & \xrightarrow{\text{Id}} & N'' & \xrightarrow{\text{Exp}'} & M'' \end{array}$$

Это вытекает из следующего утверждения.

Предложение 2.2. *Страты Максвелла MAX_i инвариантны относительно вращений и дилатаций:*

$$e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\text{MAX}_i) = \text{MAX}_i, \quad i = 0, \dots, 3, \quad s, r, \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. В случае $i = 0$ утверждение очевидно следует из правил коммутирования непрерывных симметрий и экспоненциального отображения (предложение 3.1 [11]).

Рассмотрим случай $i = 2$ (как видно из предложения 3.1 [11], случаи $i = 1, 3$ проще этого). Пусть $\nu \in \text{MAX}_2$, тогда для некоторого $\sigma \in \mathbb{R}$ выполняются условия

$$\tilde{\nu} = e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^2) \neq \nu, \quad \text{Exp}(\tilde{\nu}) = \text{Exp}(\nu).$$

Легко видеть, что тогда для $\nu_1 = e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\nu)$ и $\sigma_1 = \sigma + 2s$ выполняются условия

$$\tilde{\nu}_1 = e^{\sigma_1\vec{h}_0}(\nu_1^2) \neq \nu_1, \quad \text{Exp}(\tilde{\nu}_1) = \text{Exp}(\nu_1),$$

то есть $\nu_1 = e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\nu) \in \text{MAX}_2$. □

3 Кратные точки экспоненциального отображения

Каждый страт Максвелла MAX_i состоит из кратных точек экспоненциального отображения, не являющихся неподвижными для соответствующей непрерывной или дискретной симметрии. В этом и следующем разделах мы находим соответственно кратные точки экспоненциального отображения и неподвижные точки симметрий.

Определим важную для дальнейшего исследования функцию на пространстве состояний:

$$V = xv + yw - z \frac{r^2}{2},$$

происхождение этой функции объяснено в работе [11], см. замечание в конце раздела 5.2. Эта функция инвариантна относительно вращений и однородна порядка 4 относительно дилатаций:

$$X_0V = 0, \quad YV = 4V. \quad (1)$$

Из предложения 2.5 [11] следует, что, с точностью до знака, функция V сохраняется отражениями:

$$V \circ \varepsilon^1 = V, \quad V \circ \varepsilon^2 = -V, \quad V \circ \varepsilon^3 = -V.$$

Отметим, что аналогичными свойствами обладает и функция z :

$$\begin{aligned} X_0z = 0, \quad Yz = 2z, \\ z \circ \varepsilon^1 = -z, \quad z \circ \varepsilon^2 = z, \quad z \circ \varepsilon^3 = -z. \end{aligned} \quad (2)$$

3.1 Вывод уравнений для кратных точек

Напомним [11], что мы обозначаем $q^i = \varepsilon^i(q)$, $q, q^i \in M$. В плоскостях (x, y) и (v, w) будем использовать полярные координаты: $x = r \cos \chi$, $y = r \sin \chi$, $v = \rho \cos \omega$, $w = \rho \sin \omega$.

В следующем утверждении мы получаем уравнения гиперповерхностей, содержащих страты Максвелла MAX_i .

Предложение 3.1.

$$\begin{aligned} 1) \quad e^{\sigma X_0}(q^1) = q &\Leftrightarrow z = 0, \begin{cases} \sigma = 0 & \text{при } r^2 + \rho^2 > 0, \\ \forall \sigma & \text{при } r^2 + \rho^2 = 0. \end{cases} \\ 2) \quad e^{\sigma X_0}(q^2) = q &\Leftrightarrow V = 0, \begin{cases} \sigma = 2\chi & \text{при } r > 0, \\ \sigma = 2\omega - \pi & \text{при } r = 0, \rho > 0, \\ \forall \sigma & \text{при } r = \rho = 0. \end{cases} \\ 3) \quad e^{\sigma X_0}(q^3) = q &\Leftrightarrow z = V = 0, \begin{cases} \sigma = 2\chi & \text{при } r > 0, \\ \sigma = 2\omega - \pi & \text{при } r = 0, \rho > 0, \\ \forall \sigma & \text{при } r = \rho = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство. Будем использовать формулы для действия отражений в координатах на M , см. предложение 2.5 [11].

1) Утверждение следует из равенств

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, y, -z, v - xz, w - yz), \\ e^{sX_0} &: (x, y, z, v, w) \mapsto \\ &\mapsto (x \cos s - y \sin s, x \sin s + y \cos s, z, v \cos s - w \sin s, v \sin s + w \cos s).\end{aligned}\tag{3}$$

2) Напомним, что

$$\varepsilon^2 : (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, -z, -v + xz, w - yz).$$

Пусть $r > 0$. Тогда равенство $(x, y) = (x \cos s + y \sin s, x \sin s - y \cos s)$ означает, что $s = 2\chi$, т.е. $\cos s = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $\sin s = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$. Но тогда система уравнений

$$(-v + xz) \cos s - (w - yz) \sin s = v, \quad (-v + xz) \sin s + (w - yz) \cos s = w$$

переписывается в виде

$$xV = 0, \quad yV = 0,$$

что равносильно равенству $V = 0$.

Пусть $r = 0$, $\rho > 0$. В этом случае равенство

$$(v, w) = (-v \cos s + w \sin s, -v \sin s + w \cos s)$$

означает, что $s = 2\omega - \pi$. Более того, из равенства $r = 0$ следует $V = 0$.

Наконец, в случае $r = \rho = 0$ выполняются оба равенства $e^{sX_0}(q^2) = q$ при любом σ , а также $V = 0$.

3) Напомним, что

$$\varepsilon^3 : (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, -z, -v, w).$$

Утверждение следует из пункта 2) в силу того, что отражения ε^3 и ε^2 совпадают при условии $z = 0$, необходимом для выполнения равенства $e^{sX_0}(q^3) = q$. \square

Для описания страта Максвелла MAX_0 нам понадобится следующее утверждение, очевидно следующее из формулы (3).

Предложение 3.2. Пусть $s \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$e^{\sigma X_0}(q) = q \Leftrightarrow r^2 + \rho^2 = 0.$$

3.2 Наглядный смысл кратных точек

Функции z , V и уравнения $z = 0$, $V = 0$, а также уравнение $r^2 + \rho^2 = 0$, имеют наглядный смысл для эйлеровых эластик.

Дополним дугу элаستيку с началом O и концом R до замкнутой кривой, проведя отрезок RO , см. рис. 2. Тогда функция z в точке R равна алгебраической площади ориентированной области, ограниченной дугой элаستيку OR и ее хордой RO , т.е. алгебраической сумме площадей связанных компонент этой области (площади компонент, обходящихся в положительном направлении, берутся со знаком $+$, а обходящихся в отрицательном направлении со знаком $-$). Действительно, вдоль эластик

$$z = \frac{1}{2} \int x dy - y dx = \frac{1}{2} \int r^2 d\chi = \sum \pm S_i.$$

Равенство $z = 0$ означает, что дуга элаستيку и ее хорда ограничивают область нулевой алгебраической площади. Это равенство тривиально выполняется для дуг эластик, центрированных в ее точках перегиба, см. рис. 5, — это неподвижные точки отражения $\varepsilon^1 : N_1 \rightarrow N_1$. Для отыскания точек Максвелла важно найти нетривиальные решения уравнения $z = 0$, именно такая дуга элаستيку изображена на рис. 2: для этой дуги $z = S_1 - S_2 + S_3 = 0$.

Выясним наглядный смысл переменной V . Воспользовавшись формулами для координат центра масс сегмента элаستيку при $z \neq 0$ (см. [9])

$$c_x = \frac{1}{z} \left(v - \frac{r^2}{6} y \right), \quad c_y = \frac{1}{z} \left(w + \frac{r^2}{6} x \right), \quad (4)$$

получаем разложение на множители

$$V = xv + yw - z \frac{r^2}{2} = z \left(xc_x + yc_y - \frac{r^2}{2} \right) = z \left\langle \vec{r}, \vec{c} - \frac{\vec{r}}{2} \right\rangle = z r \left\langle \vec{e}_r, \vec{c} - \frac{\vec{r}}{2} \right\rangle.$$

Здесь $\vec{r} = (x, y)$ — радиус-вектор конца элаستيку, $\vec{e}_r = \vec{r}/r$, а $\vec{c} = (c_x, c_y)$ — радиус-вектор центра масс сегмента элаستيку. На рис. 3 имеем $\vec{OR} = \vec{r}$, $\vec{OM} = \frac{\vec{r}}{2}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{MC} = \vec{c} - \frac{\vec{r}}{2}$, $MP = l^\perp$ есть серединный перпендикуляр к хорде OR , а P — проекция центра масс C на серединный перпендикуляр l^\perp . Поэтому $PC = \left\langle \vec{e}_r, \vec{c} - \frac{\vec{r}}{2} \right\rangle$ есть расстояние от центра масс C до серединного перпендикуляра MP . Следовательно, при $z \neq 0$ равенство $V = 0$ означает, что центр масс сегмента элаستيку лежит на серединном перпендикуляре к хорде. Это равенство тривиально выполняется для эластик, центрированных в вершине, см. рис. 7, 9, 11, 13, это неподвижные точки отражений $\varepsilon^2 : N_i \rightarrow N_i$, $i = 1, 2, 3$.

Выясним наглядный смысл уравнения $r^2 + \rho^2 = 0$. Уравнение $r^2 = 0$ означает, что элаستيку есть замкнутая кривая (начало совпадает с концом, причем касательные в начале и конце, вообще говоря, разные). Далее, воспользуемся выражениями (4) для центра масс сегмента элаستيку. Из этих выражений легко видеть, что при $z \neq 0$ уравнение $r^2 + \rho^2 = 0$, означает,

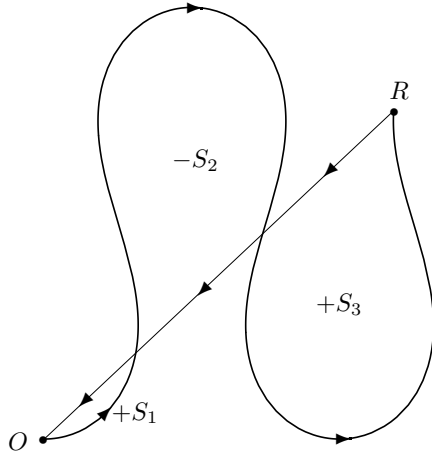


Рис. 2: $z = +S_1 - S_2 + S_3 - \dots$

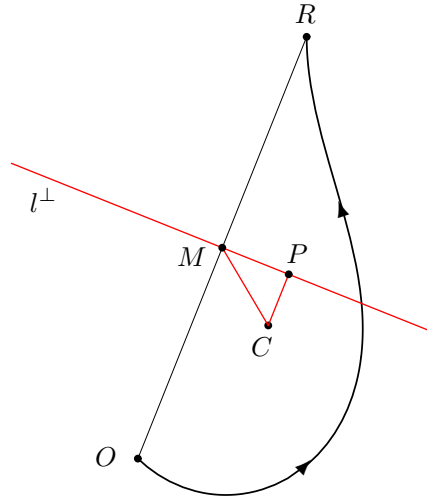


Рис. 3: $V = z r \langle \vec{e}_r, \vec{c} - \vec{r}/2 \rangle$

что $c_x = c_y = 0$, — иными словами, центр масс сегмента элаستيки совпадает с ее началом. Таким образом, уравнение $r^2 + \rho^2 = 0$ означает (при $z \neq 0$), что эластика замкнута, а центр масс ее сегмента совпадает с ее началом и концом. Назовем такую эластику *замечательной*. Мы покажем [12], что существуют только неинфлексионные замечательные эластики (при $\lambda \in C_2$).

3.3 Инвариантный смысл кратных точек

Выясним инвариантный смысл гиперповерхностей $z = 0$ и $V = 0$ и кривой $r^2 + \rho^2 = 0$ для субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Замечание. Отметим, что нильпотентная $(2,3,5)$ субриманова структура $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, заданная ортонормированным базисом (X_1, X_2) , определяет сами левоинвариантные базисные поля (X_1, X_2) на группе Ли M однозначно с точностью до ортогональных преобразований в плоскости Δ . Поэтому векторные поля (X_1, \dots, X_5) определяются субримановой структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ однозначно с точностью до поворотов

$$\begin{aligned} (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) &\mapsto \\ &\mapsto (\cos \varphi X_1 + \sin \varphi X_2, -\sin \varphi X_1 + \cos \varphi X_2, X_3, \\ &\quad \cos \varphi X_4 + \sin \varphi X_5, -\sin \varphi X_4 + \cos \varphi X_5) \end{aligned}$$

и отражений

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \mapsto (X_1, -X_2, -X_3, -X_4, X_5).$$

3.3.1 Инвариантное описание гиперповерхности $z = 0$

Многообразие

$$S_z = \{q \in M \mid z = 0\}$$

допускает инвариантное описание в терминах центра группы Ли M

$$\begin{aligned} Z = Z(M) &= \{q \in M \mid q \cdot q' = q' \cdot q \quad \forall q' \in M\} = \\ &= e^{\mathbb{R}X_4} \cdot e^{\mathbb{R}X_5} = \\ &= \{(x = 0, y = 0, z = 0, v, w) \mid v, w \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

и подмножества в M , заполненного однопараметрическими подгруппами, касающимися распределения Δ

$$e^{\mathbb{R}\Delta} = \{e^{tX} \mid X \in \Delta, t \in \mathbb{R}\}.$$

Предложение 3.3. $S_z = Z \cdot e^{\mathbb{R}\Delta}$.

Доказательство. Однопараметрические подгруппы, касающиеся распределения Δ , можно описать либо как аномальные геодезические, либо нормальные геодезические для $\lambda \in C_4, C_5, C_7$ (см. [9]), поэтому

$$e^{\mathbb{R}\Delta} = \{(t \cos \varphi, t \sin \varphi, 0, (t^3/6) \sin \varphi, (-t^3/6) \cos \varphi) \mid t \in \mathbb{R}, \varphi \in S^1\},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} Z \cdot e^{\mathbb{R}\Delta} &= \{(t \cos \varphi, t \sin \varphi, 0, t^3/6 \sin \varphi + v, -t^3/6 \cos \varphi + w)\} = \\ &= \{z = 0\} = S_z. \end{aligned}$$

□

Таким образом, поверхность S_z является некоторым расширением множества $e^{\mathbb{R}\Delta}$, заполненного аномальными геодезическими — прямыми в плоскости (x, y) . Наглядным указанием на это служит то, что прямые закрывают область нулевой площади: вдоль аномальных геодезических $z \equiv 0$.

3.3.2 Инвариантное описание гиперповерхности $V = 0$

Гиперповерхность

$$S_V = \{q \in M \mid V = 0\}$$

можно описать как некоторое расширение подмножества в M , заполненного нормальными геодезическими, соответствующими случаю Гейзенберга [5] ($\lambda \in C_4 \cup C_5 \cup C_6$), прямыми и окружностями в плоскости (x, y) . Наглядным указанием на это является то, что центр масс кругового сегмента лежит на серединном перпендикуляре к хорде: вдоль геодезических, соответствующих $\lambda \in C_6$, справедливо тождество $V \equiv 0$.

Определим следующие подмножества M :

$$\begin{aligned} S_V^1 &= \{q \in M \mid V = 0, r \neq 0\}, \\ S_V^0 &= \{q \in M \mid V = 0, r = 0\} = \{q \in M \mid r = 0\}, \\ K &= \{q_t \mid \dot{q}_t = \cos \theta_t X_1(q_t) + \sin \theta_t X_2(q_t), \ddot{\theta}_t = 0, q_0 = \text{Id}\}, \\ K^1 &= K \setminus S_V^0, \end{aligned}$$

векторные поля в M :

$$\begin{aligned} X_6 &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial w} = X_3 - \frac{x}{2} X_4 - \frac{y}{2} X_5, \\ X_7 &= y \frac{\partial}{\partial v} - x \frac{\partial}{\partial w} = y X_4 - x X_5, \end{aligned}$$

и распределение на M :

$$L_V(q) = \text{span}(X_0(q), Y(q), X_6(q), X_7(q)) \subset T_q M, \quad q \in M.$$

Мы докажем, что распределение L_V инвариантно определяется субримановой структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, а множество S_V есть замыкание орбиты (максимального интегрального многообразия) этого распределения, проходящего через любую точку множества K^1 , очевидно, инвариантно определенного структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Лемма 3.1. *Распределение L_V инволютивно.*

Доказательство. Непосредственное вычисление показывает, что распределение L_V замкнуто относительно скобки Ли:

$$\begin{aligned} [X_0, Y] &= 0, & [X_0, X_6] &= 0, & [X_0, X_7] &= 0, \\ [Y, X_6] &= -2X_6, & [Y, X_7] &= -2X_7, & [X_6, X_7] &= 0. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.2. *Если $q \in S_V^1$, то $\dim L_V(q) = 4$.*

Доказательство. Выпишем базисные векторы распределения L_V по столбцам в базисе $\frac{\partial}{\partial x}, \dots, \frac{\partial}{\partial w}$:

$$M_V(q) := (X_0(q), Y(q), X_6(q), X_7(q)) = \begin{pmatrix} -y & x & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 1 & 0 \\ -v & 3v & x/2 & y \\ w & 3w & y/2 & -x \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\text{rank } M_V(q) = 4$ при $x^2 + y^2 \neq 0$.

□

Лемма 3.3. *Векторное поле $W = X_6$ однозначно определяется по векторным полям X_1, \dots, X_5 следующими условиями:*

- 1) $W \in \text{span}(X_3, X_4, X_5)$,
- 2) $[W, X_1] = -\frac{1}{2}X_4$, $[W, X_2] = -\frac{1}{2}X_5$,
- 3) $W(\text{Id}) = X_3(\text{Id})$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что условия 1)–3) выполняются для поля $W = X_6$. Покажем, что других полей, удовлетворяющих этим условиям, не существует.

Распишем условие 1):

$$W = aX_3 + bX_4 + cX_5, \quad a, b, c, \in C^\infty(M).$$

С помощью тождества Якоби получаем из условий 2) равенства $[W, X_3] = [W, X_4] = [W, X_5] = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} [W, X_4] &= -a_x X_3 - b_x X_4 - c_x X_5 = 0, \\ [W, X_5] &= -a_y X_3 - b_y X_4 - c_y X_5 = 0, \end{aligned}$$

откуда $a = a(x, y, z)$, $b = b(x, y, z)$, $c = c(x, y, z)$. Далее,

$$[W, X_3] = -a_z X_3 - b_z X_4 - c_z X_5 = 0,$$

следовательно, $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$. Наконец,

$$\begin{aligned} [W, X_1] &= -aX_4 - a_x X_3 - b_x X_4 - c_x X_5 = -\frac{1}{2}X_4, \\ [W, X_2] &= -aX_5 - a_y X_3 - b_y X_4 - c_y X_5 = -\frac{1}{2}X_5, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} a_x &= 0, & a + b_x &= \frac{1}{2}, & c_x &= 0, \\ a_y &= 0, & b_y &= 0, & c_y + a &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

А из условия 3) получаем

$$a(0) = 1, \quad b(0) = c(0) = 0.$$

Следовательно,

$$a \equiv 1, \quad b = -\frac{1}{2}x, \quad c = -\frac{1}{2}y,$$

то есть $W = X_6$. □

Лемма 3.4. *Векторное поле $W = X_7$ однозначно определяется по векторным полям X_1, \dots, X_5 следующими условиями:*

- 1) $W \in \text{span}(X_4, X_5)$,

$$2) [W, X_1] = X_5, [W, X_2] = -X_4,$$

$$3) W(\text{Id}) = 0.$$

Доказательство. Легко видеть, что поле $W = X_7$ удовлетворяет условиям 1)–3).

Аналогично доказательству леммы 3.3, распишем условие 1):

$$W = aX_4 + bX_5, \quad a, b, \in C^\infty(M),$$

а из условия 2) получим $[W, X_3] = [W, X_4] = [W, X_5] = 0$, откуда $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$. Далее, из условия 2) следует, что

$$a_x = 0, \quad a_y = 1, \quad b_x = -1, \quad b_y = 0,$$

а из условия 3) — что $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$. Поэтому $a = y$, $b = -x$, т.е. $W = X_7$. \square

Лемма 3.5. *Векторное поле $W = Y$ однозначно определяется по векторным полям X_1, \dots, X_5 следующими условиями:*

$$1) W \in \text{Sym}(\Delta),$$

$$2) [W, X_1] = -X_1, [W, X_2] = -X_2,$$

$$3) W(\text{Id}) = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся результатами работы [10], в которой вычислена 14-мерная алгебра Ли $\text{Sym}(\Delta) = \mathfrak{g}_2$ инфинитезимальных симметрий плоского нильпотентного распределения с вектором роста (2, 3, 5):

$$W \in \text{Sym}(\Delta) \Leftrightarrow W = \sum_{i=1}^{14} a_i Y_i, \quad a_i = \text{const},$$

где базисные поля Y_i описаны в теореме 6 [10]. В силу того, что $Y_i(\text{Id}) = 0$, $i = 6, \dots, 14$, из условия 3) получаем

$$a_1 = \dots = a_5 = 0.$$

Далее, из формул коммутирования полей Y_i с базисными полями субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ на стр. 487 [10] (конец доказательства леммы 5.2) получаем:

$$\begin{aligned} [W, X_1] = -X_1 \Leftrightarrow & \\ & a_6(-4xy^2 + 4yz) + a_7(24xy - 12z) + a_8(-432xz + 324v) - \\ & - 36xa_9 - \frac{1}{3}ya_{10} + a_{13} + a_{14} \equiv -1, \\ & a_6(-2y^3) + a_7 18y^2 + a_8(-648u) + a_9(-54y) + 54a_{11} \equiv 0, \end{aligned}$$

откуда

$$a_6 = \dots = a_{11} = 0, \quad a_{13} + a_{14} = -1.$$

Далее,

$$[W, X_2] = -X_2 \Leftrightarrow a_{12}(-1/54) = 0, \quad a_{14} = 1,$$

следовательно,

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = -2, \quad a_{14} = 1,$$

поэтому поле $W = -2Y_{13} + Y_{14}$ определяется условиями 1)–3) однозначно. \square

Легко видеть, что поля $\pm X_6, X_7, Y$ однозначно определяются субримановой структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. В утверждении 4.1 [9] показано, что и генератор вращений X_0 однозначно определяется этой структурой.

Следствие 3.1. *Распределение L_V однозначно определяется субримановой структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

Лемма 3.6. 1) S_V^1 есть гладкое 4-мерное подмногообразие в M ,

2) для любого $q \in S_V^1$ справедливо равенство $T_q S_V^1 = L_V(q)$,

3) многообразие S_V^1 связно.

Доказательство. 1) следует из того, что

$$\text{grad } V = (v - zx, w - zy, -r^2/2, x, y) \neq 0 \text{ при } r^2 \neq 0.$$

2) Поля из L_V касаются многообразия S_V^1 так как

$$X_0 V = X_6 V = X_7 V = 0, \quad Y V = 4V,$$

и равенство $T_q S_V^1 = L_V(q)$ следует из леммы 3.2.

3) Действием вращений X_0 и дилатаций Y любая точка $q \in S_V^1$ переводится в точку $q' = (x', y', z', v', w')$, где $x' = 1, y' = 0, z' = 2v'$, причем таким образом заполняется вся плоскость $\{x = 1, y = 0, z = 2v\}$. Поэтому связность многообразия S_V^1 следует из связности этой плоскости. \square

Будем обозначать через $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(q)$ орбиту точки $q \in M$ под действием потоков векторных полей семейства $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(q) = \{e^{t_N f_N} \circ \dots \circ e^{t_1 f_1}(q) \mid f_i \in \mathcal{F}, t_i \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}\},$$

а через $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(N)$ — орбиту множества $N \subset M$:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(N) = \bigcup_{q \in N} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(q),$$

см. описание основных свойств орбиты в книгах [6], [2]. Через $\text{cl}(N)$ будем обозначать топологическое замыкание множества $N \subset M$.

Теперь мы можем дать инвариантное описание многообразия S_V^1 и множества S_V .

Предложение 3.4. 1) $S_V^1 = \mathcal{O}_{L_V}(q)$ для любой точки $q \in K^1$,

$$2) S_V^1 = \mathcal{O}_{L_V}(K^1),$$

$$3) S_V = \text{cl}(S_V^1),$$

$$4) S_V = \text{cl}(\mathcal{O}_{L_V}(K)).$$

Доказательство. 1) Пусть $q = (x, y, z, v, w)$ — любая точка из K^1 . Тогда q принадлежит геодезической, соответствующей ковектору $\lambda \in C_6 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_7$, и, как показано в работе [9], с точностью до вращений и дилатаций

$$\begin{aligned} x &= \sin t, & y &= 1 - \cos t, & z &= (t - \sin t)/2, \\ v &= (\cos 2t - 4 \cos t + 3)/4, & w &= (\sin 2t - 4 \sin t + 2t)/4 \end{aligned}$$

или

$$x = t, \quad y = z = v = 0, \quad w = -t^3/6.$$

Непосредственное вычисление показывает, что $V(q) = 0$, поэтому $q \in S_V^1$.

Включение $S_V^1 \subset \mathcal{O}_{L_V}(q)$ следует из связности S_V^1 и равенства $T_q S_V^1 = L_V(q)$.

Докажем обратное включение $\mathcal{O}_{L_V}(q) \subset S_V^1$. От противного, пусть существует точка $q_1 \in \mathcal{O}_{L_V}(q) \setminus S_V^1$. Тогда либо $q_1 \in S_V^0$, либо $V(q_1) \neq 0$. Включение $q_1 \in S_V^0$ невозможно т.к. множество S_V^0 инвариантно относительно потоков полей из L_V . А неравенство $V(q_1) \neq 0$ невозможно т.к. поверхность уровня $\{V(q) = 0\}$ также инвариантна относительно полей из L_V . Включение $\mathcal{O}_{L_V}(q) \subset S_V^1$, а потому и равенство $\mathcal{O}_{L_V}(q) = S_V^1$, доказано.

2) следует непосредственно из пункта 1).

3) Из включения $S_V^1 \subset S_V$ следует включение $\text{cl}(S_V^1) \subset \text{cl}(S_V) = S_V$. Докажем обратное включение $S_V \subset \text{cl}(S_V^1)$. В силу разложения $S_V = S_V^1 \cup S_V^0$, достаточно доказать включение $S_V^0 \subset \text{cl}(S_V^1)$.

Пусть $q = (0, 0, z, v, w) \in S_V^0$. Если $\rho^2 = v^2 + w^2 \neq 0$, то последовательность точек вида

$$(x', y', z', v', w'), \quad x' = r' \cos \chi', \quad y' = r' \sin \chi', \quad \cos(\chi' - \omega) = \frac{z}{2\rho} r', \quad r' \rightarrow 0,$$

сходится к точке q и принадлежит многообразию S_V^1 . Если же $\rho^2 = 0$, то в качестве таких точек можно взять точки вида

$$(x', 0, z, v', 0), \quad v' = \frac{z}{2} x', \quad x' \rightarrow 0.$$

Доказаны включения $S_V^0 \subset \text{cl}(S_V^1)$, $S_V \subset \text{cl}(S_V^1)$ и равенство $S_V^1 = \text{cl}(S_V)$.

4) Из предыдущих пунктов получаем равенства

$$\begin{aligned} S_V &= \text{cl}(\mathcal{O}_{L_V}(p)) \quad \forall q \in K^1, \\ S_V &= \text{cl}(K^1). \end{aligned}$$

Но $K = K^1 \cup S_V^0$, поэтому

$$\mathcal{O}_{L_V}(K) = \mathcal{O}_{L_V}(K^1) \cup \mathcal{O}_{L_V}(S_V^0) = \mathcal{O}_{L_V}(K^1) \cup S_V^0.$$

Из включения $S_V^0 \subset S_V$ следует, что $S_V = \text{cl}(\mathcal{O}_{L_V}(K))$. \square

3.3.3 Инвариантное описание кривой $r^2 + \rho^2 = 0$

Кривая

$$S_{r^2+\rho^2} = \{q \in M \mid r^2 + \rho^2 = 0\}$$

допускает следующее простое инвариантное описание как траектория поля $X_3 = [X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial v} + y \frac{\partial}{\partial w}$, проходящая через начальную точку q_0 — единичный элемент Id группы Ли M .

Предложение 3.5. $S_{r^2+\rho^2} = e^{\mathbb{R}X_3}(\text{Id})$.

Доказательство. В силу того, что $X_3|_{S_{r^2+\rho^2}} = \frac{\partial}{\partial z}$, поле X_3 касается кривой $S_{r^2+\rho^2}$ и

$$e^{\mathbb{R}X_3}(\text{Id}) = \{(0, 0, z, 0, 0) \mid z \in \mathbb{R}\} = S_{r^2+\rho^2}.$$

□

Из замечания в начале раздела 3.3 следует, что кривая $S_{r^2+\rho^2}$ инвариантно определяется субримановой структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

4 Неподвижные точки симметрий в прообразе экспоненциального отображения

4.1 Неподвижные точки вращений в N

Очевидно, что вращения

$$e^{s\vec{h}_0} : (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta + s, c, \alpha, \beta + s, t) \quad (5)$$

не имеют неподвижных точек в N при $s \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Неподвижные точки отражений в N_1

Будем использовать эллиптические координаты k , φ и ψ , а также полярные координаты α , β в начальном цилиндре C , см. [9], [11]. Для этого нам понадобятся эллиптические функции Якоби sn , sn , см. [4], [13].

Пусть $\nu = (k, \varphi, \alpha, \beta, t) \in N_1$, тогда, согласно предложению 4.1 [11],

$$\nu^i = \varepsilon^i(\nu) = (k, \varphi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_1.$$

Неподвижные точки отражений в области N_1 выражаются через следующий инвариант двухпараметрической группы симметрий $G_{h_0, Z}^+$:

$$\tau = \frac{\sqrt{\alpha}(\varphi + \varphi_t)}{2} = \sqrt{\alpha}\varphi + \frac{\delta}{2}.$$

Теорема 4.1. Пусть $\nu \in N_1$.

- 1) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^1) = \nu \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{cn} \tau = 0, \quad \sigma = 0,$
- 2) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) = \nu \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sn} \tau = 0, \quad \sigma = 2\beta,$
- 3) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^3) = \nu \quad \text{невозможно.}$

Доказательство. В эллиптических координатах равенство $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^i) = \nu$ принимает вид

$$e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^i) = (k, \varphi^i, \alpha, \beta^i + \sigma, t) = (k, \varphi, \alpha, \beta, t) = \nu,$$

что равносильно равенствам

$$\varphi^i = \varphi, \quad \beta^i + \sigma = \beta. \quad (6)$$

Случай 1). Согласно предложению 4.1 [11], равенства (6) можно переписать в виде

$$\varphi + \varphi_t = \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{mod} \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right), \quad \sigma = 0,$$

(где K — полный эллиптический интеграл второго рода [4], [13]), что равносильно

$$\tau = K \pmod{2K}, \quad \sigma = 0,$$

то есть

$$\operatorname{cn} \tau = 0, \quad \sigma = 0.$$

В случае 1) предложение доказано, в остальных двух случаях доказательство аналогично. \square

Замечание. Отметим наглядный смысл неподвижных точек отражений $\varepsilon^i : N_1 \rightarrow N_1$ для стандартного маятника в плоскости (θ, c) и инфлекссионных эйлеровых эластик в плоскости (x, y) .

1) Равенство $\operatorname{cn} \tau = 0$ равносильно равенству $c = 0$ — это точки перегиба эластик (нули кривизны c), см. рис. 4, 5.

2) Равенство $\operatorname{sn} \tau = 0$ равносильно равенству $\theta = 0$ — это вершины эластик (экстремумы кривизны c), см. рис. 6, 7.

4.3 Неподвижные точки отражений в N_2

Если $\nu = (k, \psi, \alpha, \beta, t) \in N_2$, тогда, согласно предложению 4.1 [11],

$$\nu^i = \varepsilon^i(\nu) = (k, \psi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_2.$$

В области N_2 рассмотрим следующий инвариант группы $G_{\vec{h}_0, Z}$:

$$\tau = \frac{\sqrt{\alpha}(\psi + \psi_t)}{2} = \sqrt{\alpha}\psi + \frac{\delta}{2k}.$$

Теорема 4.2. Пусть $\nu \in N_2$.

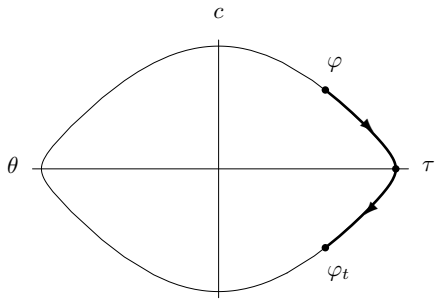


Рис. 4: $\text{sn } \tau = 0, \nu \in N_1$

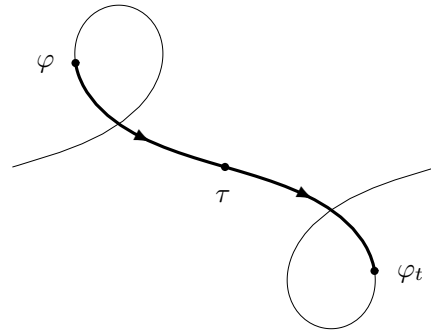


Рис. 5: Инфлекссионная эластика с центром в точке перегиба

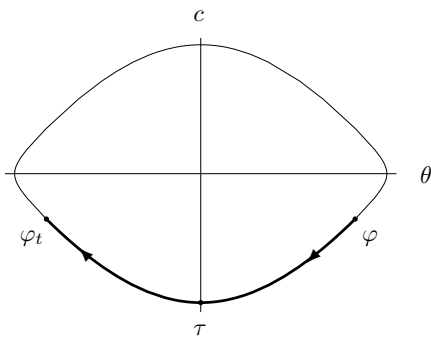


Рис. 6: $\text{sn } \tau = 0, \nu \in N_1$

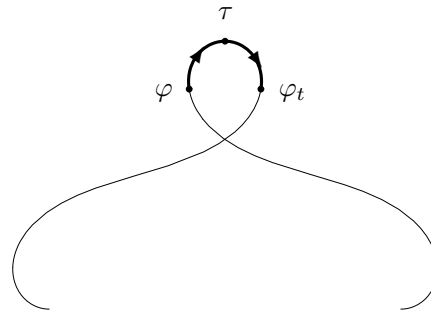


Рис. 7: Инфлекссионная эластика с центром в вершине

- 1) $e^{\sigma \bar{h}_0}(\nu^1) = \nu$ *невозможно*,
- 2) $e^{\sigma \bar{h}_0}(\nu^2) = \nu$ \Leftrightarrow $\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0$, $\sigma = 2\beta$,
- 3) $e^{\sigma \bar{h}_0}(\nu^3) = \nu$ *невозможно*.

Доказательство. Рассмотрим сначала случаи 1), 3). Если $i = 1, 3$, то из предложения 4.1 [11] получаем:

$$\nu \in N_2^\pm \quad \Rightarrow \quad \nu^i, e^{\sigma \bar{h}_0}(\nu^i) \in N_2^\mp,$$

поэтому равенство $e^{\sigma \bar{h}_0}(\nu^i) = \nu$ невозможно.

Случай 2). Имеем

$$\nu \in N_2^\pm \quad \Rightarrow \quad \nu^2, e^{\sigma \bar{h}_0}(\nu^2) \in N_2^\pm,$$

и равенство $e^{\sigma \bar{h}_0}(\nu^2) = \nu$ принимает в эллиптических координатах вид

$$\psi + \psi_t = 0 \left(\bmod \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \right), \quad \sigma = 2\beta,$$

что равносильно

$$\tau = 0 \pmod{K}, \quad \sigma = 2\beta,$$

то есть

$$\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0, \quad \sigma = 2\beta.$$

□

Замечание. Отметим наглядный смысл неподвижных точек отражений $\varepsilon^2 : N_2 \rightarrow N_2$. Равенство $\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0$ равносильно равенствам $\theta = 0 \pmod{\pi}$, $|c| = \max, \min$ — это вершины неинфлексионных эластик (экстремумы кривизны c), см. рис. 8–11.

Неподвижных точек $\varepsilon^1 : N_2 \rightarrow N_2$ не существует, т.к. эластики, соответствующие N_2 , не имеют точек перегиба, поэтому они и называются неинфлексионными.

4.4 Неподвижные точки отражений в N_3

Если $\nu = (\varphi, \alpha, \beta, t) \in N_3$, то

$$\nu^i = \varepsilon^i(\nu) = (\varphi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_3.$$

На множестве N_3 инвариант τ получается предельным переходом $k \rightarrow 1 - 0$ из обеих областей N_1, N_2 :

$$\tau = \frac{\sqrt{\alpha}(\varphi + \varphi_t)}{2} = \sqrt{\alpha}\varphi + \frac{\delta}{2}.$$

Теорема 4.3. Пусть $\nu \in N_3$.

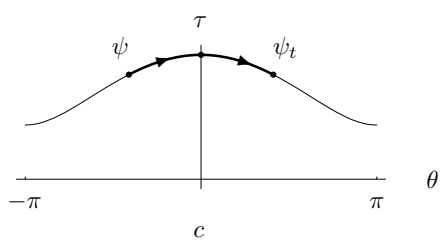


Рис. 8: $\text{sn } \tau = 0$, $|c| = \max$, $\nu \in N_2$

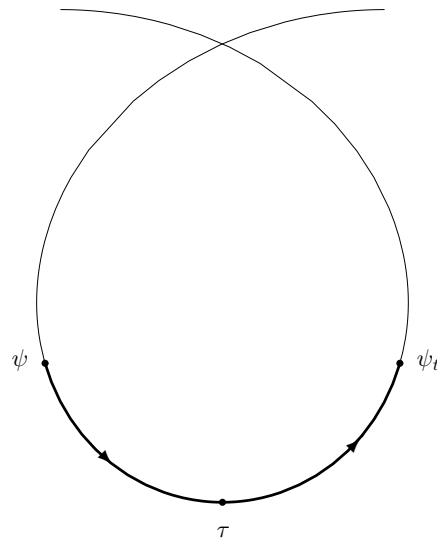


Рис. 9: Неинфлексионная эластичка с центром в вершине

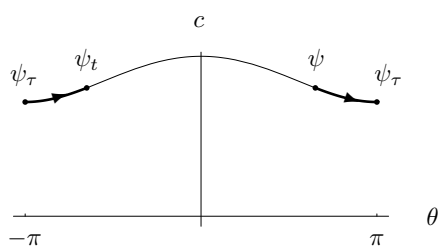


Рис. 10: $\text{sn } \tau = 0$, $|c| = \min$, $\nu \in N_2$

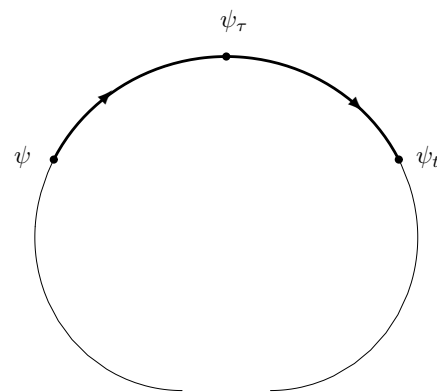


Рис. 11: Неинфлексионная эластичка с центром в вершине

- 1) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^1) = \nu$ *невозможно*,
- 2) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) = \nu$ \Leftrightarrow $\tau = 0, \quad \sigma = 2\beta$,
- 3) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^3) = \nu$ *невозможно*.

Доказательство. Аналогично теореме 4.2. □

Замечание. Наглядный смысл неподвижных точек отражений $\varepsilon^2 : N_3 \rightarrow N_3$: равенство $\tau = 0$ означает, что $\theta = 0, |c| = \max$ — это вершины критических эластиков (экстремумы кривизны c), см. рис. 12, 13.

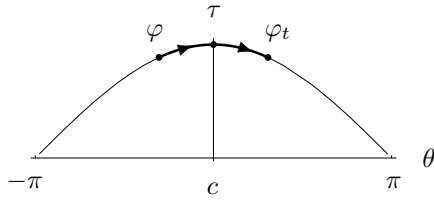


Рис. 12: $\tau = 0, \nu \in N_3$

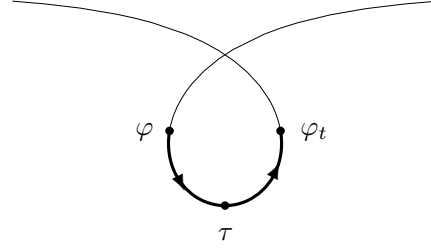


Рис. 13: Критическая эластика с центром в вершине

Неподвижных точек $\varepsilon^1 : N_3 \rightarrow N_3$ не существует, т.к. критические эластики не имеют точек перегиба.

4.5 Неподвижные точки отражений в N_6

Теорема 4.4. Пусть $\nu = (\theta, c, \alpha, \beta, t) \in N_6$.

- 1) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^1) = \nu$ *невозможно*,
- 2) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) = \nu$ \Leftrightarrow $\sigma = 2\theta + ct \pmod{2\pi}$,
- 3) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^3) = \nu$ *невозможно*.

Доказательство. Пусть $\nu = (\theta, c, \alpha, \beta, t) \in N_6$. Если $i = 1, 3$, то

$$\nu \in C_6^\pm \quad \Rightarrow \quad \nu^i, e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^i) \in C_6^\mp,$$

поэтому равенство $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu_i) = \nu$ невозможно. Далее,

$$\nu \in C_6^\pm \quad \Rightarrow \quad \nu^2, e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) \in C_6^\pm,$$

и равенство

$$e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) = e^{\sigma \vec{h}_0}(-\theta_t, c_t, t) = (\sigma - \theta - ct, c, t) = (\theta, c, t) = \nu$$

равносильно равенству $\sigma = 2\theta + ct$. □

5 Общее описание стратов Максвелла MAX_i

Подведем итог исследования страт Максвелла, соответствующих вращениям и отражениям. Из результатов разделов 3, 4 получаем следующие утверждения.

Теорема 5.1. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_0 \Leftrightarrow r_t = \rho_t = 0.$$

Доказательство. Утверждение следует из предложения 3.2 в силу того, что вращения (5) не имеют неподвижных точек в N . \square

Теорема 5.2. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_1$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_1 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{а) } z_t = 0, \operatorname{sn} \tau \neq 0, \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2}, \text{ или} \\ \text{б) } q_t = q_0. \end{array}$$

Замечание. В последующей работе [12] мы докажем, что случай б) теоремы 5.2 не реализуется.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\alpha = 1, \beta = 0$. Напомним, что по определению страта Максвелла, включение $\nu = (\lambda, t) \in \text{MAX}_1$ означает, что для некоторого $\sigma \in \mathbb{R}$

$$e^{\sigma \bar{h}_0}(\nu^1) \neq \nu, \quad e^{\sigma X_0}(q_t^1) = q_t.$$

Условия, при которых выполняются эти неравенство и равенство, были найдены в предложении 3.1 и теореме 4.1.

Пусть сначала $r_t^2 + \rho_t^2 > 0$. Предположим, что $\nu \in \text{MAX}_1$. Тогда $z_t = 0$ и $\sigma = 0$, см. теорему 4.1. По предложению 3.1 имеем $\operatorname{sn} \tau \neq 0$. Обратно, если $z_t = 0$ и $\operatorname{sn} \tau \neq 0$, выбираем $\sigma = 0$ и получаем $\nu \in \text{MAX}_1$.

Пусть $r_t^2 + \rho_t^2 = 0$. Если $\nu \in \text{MAX}_1$, то по теореме 4.1 получаем $z_t = 0$, поэтому $q_t = 0 = q_0$. Обратно, если $z_t = 0$, то берем любое $\sigma \neq 0$ и получаем $\nu \in \text{MAX}_1$.

В общем случае утверждение следует из частного случая $\alpha = 1, \beta = 0$ благодаря инвариантности страта Максвелла MAX_1 относительно вращений и дилатаций. \square

Теорема 5.3. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_1$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{а) } V_t = 0, \operatorname{sn} \tau \neq 0, \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2}, \text{ или} \\ \text{б) } r_t = \rho_t = 0. \end{array}$$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, достаточно рассмотреть только случай $\alpha = 1, \beta = 0$, а в этом случае — воспользоваться предложением 3.1 и теоремой 4.1.

Необходимость. Пусть $\nu \in \text{MAX}_2$. Тогда $V_t = 0$. Докажем, что $\text{sn } \tau \neq 0$ или $r_t = \rho_t = 0$.

Пусть $r_t > 0$, докажем, что $\text{sn } \tau \neq 0$. От противного, пусть $\text{sn } \tau = 0$. Тогда из параметризации геодезических [9] получаем $y_t = 0$, поэтому $\chi_t = 0(\text{mod } \pi)$, следовательно, $\sigma = 2\chi_t = 0(\text{mod } 2\pi) = 2\beta$. Но тогда $\text{sn } \tau \neq 0$, противоречие.

Пусть $r_t = 0, \rho_t > 0$, тогда $\sigma = 2\omega_t - \pi$. Если $\text{sn } \tau = 0$, то из явных формул для геодезических [9] получаем $x_t|_{\text{sn } \tau = 0} = 2(2E - p) = 0$ и $v_t = 0$. Это значит, что $\omega_t = \frac{\pi}{2}(\text{mod } \pi)$, поэтому $\sigma = 0(\text{mod } 2\pi) = 2\beta$. Следовательно, опять $\text{sn } \tau \neq 0$, противоречие.

Необходимость доказана, докажем достаточность. Пусть $r_t^2 + \rho_t^2 \neq 0, V_t = 0, \text{sn } \tau \neq 0$. Тогда, выбирая $\sigma = 2\chi_t$ (при $r_t > 0$) или $\sigma = 2\omega_t - \pi$ (при $r_t = 0, \rho_t > 0$), убеждаемся, что $\nu \in \text{MAX}_2$. \square

Теорема 5.4. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_1$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_3 \cap N_1 \Leftrightarrow z_t = V_t = 0.$$

Доказательство. Утверждение следует из предложения 3.1, теоремы 4.1 и инвариантности страта Максвелла MAX_3 относительно группы $G_{h_0, Z}^*$. \square

Теорема 5.5. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_2$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_1 \Leftrightarrow z_t = 0.$$

Доказательство. Аналогично теореме 5.4. \square

Теорема 5.6. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_2$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{а) } V_t = 0, \text{ sn } \tau \text{ sn } \tau \neq 0, \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\psi + \psi_t}{2}, \text{ или} \\ \text{б) } r_t = \rho_t = 0. \end{array}$$

Доказательство. Как и ранее, рассматриваем только случай $\alpha = 1, \beta = 0$.

Пусть $r_t > 0$. Необходимость: если $\nu \in \text{MAX}_2$, то $V_t = 0$ и $\sigma = 2\chi_t$. Если $\text{sn } \tau \text{ sn } \tau = 0$, то $y_t = 0$, поэтому $\chi_t = \pi n$ и $\sigma = 2\pi n = 2\beta(\text{mod } 2\pi)$, противоречие. Достаточность: если $V_t = 0, \text{sn } \tau \text{ sn } \tau \neq 0$, то выберем $\sigma = 2\chi_t$ и получим $\nu \in \text{MAX}_2$.

Пусть $r_t = 0, \rho_t > 0$. Необходимость: если $\nu \in \text{MAX}_2$, то $V_t = 0$ и $\sigma = 2\omega_t - \pi$. Если $\text{sn } \tau \text{ sn } \tau = 0$, то $v_t = 0$, поэтому $\omega_t = \frac{\pi}{2}(\text{mod } \pi)$ и $\sigma = 0(\text{mod } 2\pi)$, противоречие. Достаточность: если $V_t = 0, \text{sn } \tau \text{ sn } \tau \neq 0$, то полагаем $\sigma = 2\omega_t - \pi$ и получаем $\nu \in \text{MAX}_2$.

Пусть $r_t = \rho_t = 0$. Тогда $V_t = 0$ и, выбирая любое $\sigma \neq 0$, получаем $\nu \in \text{MAX}_2$. \square

Теорема 5.7. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_2$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_3 \Leftrightarrow z_t = V_t = 0.$$

Доказательство. Аналогично теореме 5.4. □

Теорема 5.8. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_3$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_1 \Leftrightarrow z_t = 0.$$

Доказательство. Аналогично теореме 5.4. □

Теорема 5.9. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_3$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{а) } V_t = 0, \tau \neq 0, \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2}, \text{ или} \\ \text{б) } r_t = \rho_t = 0. \end{array}$$

Доказательство. Аналогично теореме 5.6. □

Теорема 5.10. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_3$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_3 \Leftrightarrow z_t = V_t = 0.$$

Доказательство. Аналогично теореме 5.4. □

Замечание. Отметим наглядный смысл описания стратов Максвелла в теоремах 5.1–5.10.

Равенства $r_t = \rho_t = 0$, задающие страт MAX_0 (теорема 5.1), означают, что эластика замкнута ($x_t = y_t = 0$), а центр масс ее сегмента совпадает с началом ($c_x = c_y = 0$). Поворот такой элаستيку на любой угол $s \neq 2\pi n$ дает новую эластику с теми же концами, площадью и центром масс.

По модулю вращений, отражение ε^2 элаستيку в серединном перпендикуляре к хорде l^\perp действует на ее конец (x, y) , площадь z и центр масс (c_x, c_y) следующим образом:

$$\varepsilon^2 : (x, y, z, c_x, c_y) \mapsto (x, y, z, c_x^2, c_y^2), \quad (7)$$

где $\varepsilon^2 : (c_x, c_y) \mapsto (c_x^2, c_y^2)$ — отражение центра масс в серединном перпендикуляре l^\perp . Напомним, что равенство $V = 0$ означает, что $(c_x, c_y) \in l^\perp$, т.е. $(c_x^2, c_y^2) = (c_x, c_y)$; а равенства $\text{sn } \tau = 0$ ($\nu \in N_1$), $\text{sn } \tau \text{ cn } \tau = 0$ ($\nu \in N_2$), $\tau = 0$ ($\nu \in N_3$) означают тривиальное выполнение равенства $V = 0$, когда эластика центрирована в вершине. Поэтому условие пункта а) теорем 5.3, 5.6, 5.9 означает, что центр масс сегмента элаستيку лежит на серединном перпендикуляре к хорде, а эластика центрирована не в вершине. Очевидно, что при отражении в серединном перпендикуляре такая эластика перейдет в другую, с теми же началом и концом, площадью и центром масс (отображение (7) становится тождественным), это точка страта MAX_2 . Условие пункта а) теорем 5.3, 5.6, 5.9 определяет точку страта MAX_0 .

Отражение ε^1 элаستيку в центре хорды l действует на ее конец (x, y) и площадь z следующим образом:

$$\varepsilon^1 : (x, y, z) \mapsto (x, y, -z),$$

поэтому равенство $z_t = 0$ (теоремы 5.2, 5.4, 5.5, 5.7, 5.8, 5.10) должно необходимо выполняться в точках стратов $\text{MAX}_1, \text{MAX}_3$. Дополнить это рассуждение анализом расположения центра масс (как выше для стратов $\text{MAX}_0, \text{MAX}_2$) не удастся, т.к. при $z = 0$ сегмент эластики не имеет конечного центра масс — в этом случае центр масс уходит на бесконечность или вообще не определен.

Теорема 5.11. $\text{MAX}_i \cap N_j = \emptyset, i = 0, 1, 2, 3, j = 4, 5, 7$.

Доказательство. Геодезические $q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$, соответствующие $\lambda \in C_4 \cup C_5 \cup C_7$, оптимальны на всем луче $s \in [0, +\infty)$, см. [9], поэтому они не содержат точек Максвелла. \square

Теорема 5.12. $\text{MAX}_i \cap N_6 = \emptyset, i = 0, 1, 2, 3$.

Доказательство. В силу инвариантности стратов Максвелла относительно действия группы $G_{\vec{h}_0, Z}$, достаточно рассмотреть только случай $c = 1, \theta = 0$. Тогда геодезическая параметризована следующим образом [9]:

$$\begin{aligned} x_t &= \sin t, & y_t &= 1 - \cos t, & z_t &= \frac{t - \sin t}{2}, \\ v_t &= \frac{\cos 2t - 4 \cos t + 3}{4}, & w_t &= \frac{\sin 2t - 4 \cos t + 2t}{4}. \end{aligned}$$

0) Пусть $t > 0$, докажем, что $r_t^2 + \rho_t^2 \neq 0$. Если $r_t^2 = 0$, то $t = 2\pi n, n \in \mathbb{N}$. Но тогда $w_t = \pi n \neq 0$. Итак, $r_t^2 + \rho_t^2 \neq 0$, поэтому $\text{MAX}_0 \cap N_6 = \emptyset$.

1) Имеем $z_t \neq 0$ при $t > 0$, следовательно, $\text{MAX}_1 \cap N_6 = \emptyset$.

2.а) Пусть $\nu \in \text{MAX}_2 \cap N_6$ и $r_t^2 > 0$, тогда $\sigma = 2\chi_t = t$. Однако из неравенства $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) \neq \nu$ получаем $\sigma \neq 2\theta + ct = t$, противоречие.

2.б) Пусть $\nu \in \text{MAX}_2 \cap N_6$ и $r_t = 0, \rho_t > 0$. Тогда $t = 2\pi n, n \in \mathbb{N}$. Поэтому $v_t = 0, w_t = 0, \omega_t = \frac{\pi}{2}(\text{mod } \pi), \sigma = 2\omega_t - \pi = t(\text{mod } 2\pi)$. Следовательно, $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) = \nu$, противоречие.

2.в) Как показано в пункте 0), $r_t^2 + \rho_t^2 \neq 0$ при $\nu \in N_6$. Итак, $\text{MAX}_2 \cap N_6 = \emptyset$.

3) Имеем $z_t \neq 0$ при $t > 0$, следовательно, $\text{MAX}_3 \cap N_6 = \emptyset$. \square

Подведем итог данной работы: соберем все полученные в теоремах 5.1–5.12 результаты о стратах Максвелла.

Теорема 5.13. 1) Пусть $\nu \in N_1$. Тогда:

$$1.0) \nu \in \text{MAX}_0 \Leftrightarrow r_t = \rho_t = 0.$$

$$1.1) \nu \in \text{MAX}_1 \Leftrightarrow \begin{aligned} &а) z_t = 0, \text{сн } \tau \neq 0, \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2}, \text{ или} \\ &б) q_t = q_0. \end{aligned}$$

$$1.2) \nu \in \text{MAX}_2 \Leftrightarrow \begin{aligned} &а) V_t = 0, \text{сн } \tau \neq 0, \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2}, \text{ или} \\ &б) r_t = \rho_t = 0. \end{aligned}$$

$$1.3) \nu \in \text{MAX}_3 \Leftrightarrow z_t = V_t = 0.$$

2) Пусть $\nu \in N_2$. Тогда:

$$2.0) \nu \in \text{MAX}_0 \Leftrightarrow r_t = \rho_t = 0.$$

$$2.1) \nu \in \text{MAX}_1 \Leftrightarrow z_t = 0.$$

$$2.2) \nu \in \text{MAX}_2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} a) V_t = 0, \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \neq 0, \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\psi + \psi_t}{2}, \text{ или} \\ б) r_t = \rho_t = 0. \end{array}$$

$$2.3) \nu \in \text{MAX}_3 \Leftrightarrow z_t = V_t = 0.$$

3) Пусть $\nu \in N_3$. Тогда:

$$3.0) \nu \in \text{MAX}_0 \Leftrightarrow r_t = \rho_t = 0.$$

$$3.1) \nu \in \text{MAX}_1 \Leftrightarrow z_t = 0.$$

$$3.2) \nu \in \text{MAX}_2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} a) V_t = 0, \tau \neq 0, \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2}, \text{ или} \\ б) r_t = \rho_t = 0. \end{array}$$

$$3.3) \nu \in \text{MAX}_3 \Leftrightarrow z_t = V_t = 0.$$

$$4) \text{MAX}_i \cap N_j = \emptyset, i = 0, \dots, 3, j = 4, \dots, 7.$$

Исследование разрешимости уравнений, задающих страты Максвелла, а также локализация их корней будут содержанием последующей работы [12].

Благодарность

Автор выражает благодарность А.А. Аграчеву за постановку задачи и полезные обсуждения во время работы.

Список иллюстраций

1	Неоптимальность геодезической q_s после точки Максвелла q_{t_1}	4
2	$z = +S_1 - S_2 + S_3 - \dots$	11
3	$V = z r \langle \vec{e}_r, \vec{c} - \vec{r}/2 \rangle$	11
4	$\operatorname{sn} \tau = 0, \nu \in N_1$	20
5	Инфлексионная эластика с центром в точке перегиба	20
6	$\operatorname{sn} \tau = 0, \nu \in N_1$	20
7	Инфлексионная эластика с центром в вершине	20
8	$\operatorname{sn} \tau = 0, c = \max, \nu \in N_2$	22
9	Неинфлексионная эластика с центром в вершине	22
10	$\operatorname{sn} \tau = 0, c = \min, \nu \in N_2$	22
11	Неинфлексионная эластика с центром в вершине	22
12	$\tau = 0, \nu \in N_3$	23
13	Критическая эластика с центром в вершине	23

Список литературы

- [1] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka, Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case. *J. ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 1997, v.2, 377–448.
- [2] А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, М.: Физматлит, 2005.
- [3] В.И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, М.: ФАЗИС, 1996.
- [4] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, М.: Наука, 1970.
- [5] А.М. Вершик, В.Я. Гершкович, *Неголономные динамические системы и геометрия распределений*. – Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы – 7, 8. – М.:ВИНИТИ, 1986.
- [6] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [7] S. Jacquet, Regularity of sub-Riemannian distance and cut locus, *Preprint No. 35*, May 1999, Universita degli Studi di Firenze, Dipartimento di Matematica Applicata “G. Sansone”, Italy.
- [8] O. Myasnychenko, Nilpotent (3, 6) Sub-Riemannian Problem. *J. Dynam. Control Systems* 8 (2002), No. 4, 573–597.
- [9] Ю. Л. Сачков, Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 194 (2003), 9: 63–90.
- [10] Yu. L. Sachkov, Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures, *Transactions of the American Mathematical Society*, **356** (2004), 2: 457–494.
- [11] Ю.Л. Сачков, *Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны*, направлена для публикации.
- [12] Ю.Л. Сачков, *Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны*, направлена для публикации.
- [13] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, М.: УРСС, 2002.