

Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дионы*

Ю.Л. Сачков
Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский 152020, Россия
E-mail: sachkov@sys.botik.ru

20 марта 2005 г.

Аннотация

Рассматривается обобщенная задача Дионы — модель нильпотентной субримановой задачи с вектором роста $(2,3,5)$. Изучается множество Максвелла, т.е. геометрическое место точек пересечения геодезических равной длины. Получено полное описание стратов Максвелла, соответствующих группам симметрий экспоненциального отображения, порожденной вращениями и отражениями. Отысканы и локализованы все соответствующие времена Максвелла. Найдены сопряженные точки, являющиеся предельными точками множества Максвелла. Получена оценка сверху для времени разреза (времени потери оптимальности) на геодезических.

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект No. 02-01-00506. Автор также благодарит за поддержку Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (Trieste, Italy), где эта работа была начата.

Содержание

1 Введение	3
2 Страты Максвелла в области N_1	5
2.1 Корни уравнения $z = 0$ при $\nu \in N_1$	5
2.2 Корни уравнения $V = 0$ при $\nu \in N_1$	10
2.3 Взаимное расположение корней уравнений $z = 0$, $V = 0$ при $\nu \in N_1$	13
2.4 Корни уравнения $r^2 + \rho^2 = 0$ при $\nu \in N_1$	20
2.5 Полное описание стратов Максвелла в области N_1	23
3 Страты Максвелла в области N_2	24
3.1 Корни уравнения $z = 0$ при $\nu \in N_2$	24
3.2 Корни уравнения $V = 0$ при $\nu \in N_2$	25
3.3 Корни уравнения $r^2 + \rho^2 = 0$ при $\nu \in N_2$	29
3.4 Полное описание стратов Максвелла в области N_2	34
4 Страты Максвелла в N_3	35
4.1 Корни уравнения $z = 0$ при $\nu \in N_3$	35
4.2 Корни уравнения $V = 0$ при $\nu \in N_3$	36
4.3 Корни уравнения $r^2 + \rho^2 = 0$ при $\nu \in N_3$	36
4.4 Полное описание стратов Максвелла в N_3	37
5 Сопряженные точки	37
5.1 Пределные точки множества Максвелла	37
5.2 Сопряженные точки в N_1	38
5.3 Сопряженные точки в N_2	39
5.4 Сопряженные точки в N_3	40
5.5 Сопряженные точки в N_6	40
6 Время разреза	41
6.1 Оценка времени разреза	42
6.2 Свойства функции t	43
6.3 Страты Максвелла в образе экспоненциального отображения	45
Приложение: Производные и асимптотика эллиптических функций Якоби	51
Список иллюстраций	54
Литература	55

1 Введение

Данная работа посвящена исследованию оптимальности геодезических в обобщенной задаче Диони — модели нильпотентной субримановой задачи с вектором роста (2,3,5). Эта задача оптимального управления ставится следующим образом [3]:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y, z, v, w) \in M = \mathbb{R}^5, \quad u = (u_1, u_2) \in U = \mathbb{R}^2, \\ q(0) &= q_0 = 0, \quad q(t_1) = q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min,\end{aligned}$$

где векторные поля при управлении имеют вид:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Мы продолжаем исследование этой задачи, начатое в работах [3]–[7]. В работах [4] и [6] найдены соответственно группы непрерывных и дискретных симметрий в обобщенной задаче Диони: имеется двухпараметрическая непрерывная группа симметрий (вращения и дилатации), а также дискретная группа симметрий порядка 4 (отражения). В работе [3] получена параметризация субримановых геодезических (экстремальных траекторий) эллиптическими функциями Якоби. Аномальные геодезические оптимальны до бесконечности, а нормальные — вообще говоря, на конечных отрезках времени. Точка, в которой геодезическая теряет оптимальность, называется точкой разреза. Известно, что нормальная геодезическая может терять оптимальность либо из-за того, что в некоторую ее точку приходит другая геодезическая с таким же значением функционала (точка Максвелла), либо из-за того, что семейство геодезических имеет огибающую (сопряженная точка). В работе [7] найдены страты Максвелла MAX_i , соответствующие группе симметрий, сохраняющих время на геодезических (вращения и отражения): отысканы две гиперповерхности $z = 0$ и $V = 0$ в пространстве состояний M , содержащие эти страты Максвелла. Выяснен инвариантный смысл этих гиперповерхностей в терминах субримановой структуры, а также их наглядный смысл для эйлеровых эластик (проекций геодезических на плоскость (x, y)).

Цель данной работы — полное исследование корней уравнений $z = 0$ и $V = 0$ вдоль геодезических. Мы исследуем разрешимость этих уравнений; в некоторых случаях они не имеют корней. В тех случаях, когда эти уравнения разрешимы, мы локализуем их корни, указывая для каждого корня содержащий его отрезок. Более того, на каждом из таких отрезков соответствующий корень оказывается нулем некоторой монотонной функции, что дает эффективный алгоритм приближенного вычисления этих корней. На каждой геодезической мы находим первую точку, принадлежащую стратам Максвелла MAX_i . На геодезических, не содержащих точек этих стратов,

мы находим сопряженные точки, являющиеся пределами точек Максвелла. Таким образом, на каждой нормальной геодезической (кроме некоторых исключительных) мы указываем либо первую точку стратов MAX_i , либо первую из отысканных сопряженных точек. Но после точек Максвелла и сопряженных точек нормальная геодезическая не может быть оптимальной. Таким образом мы получаем оценку сверху для времени разреза вдоль геодезических. На исключительных геодезических эта оценка тривиальна ($+\infty$). Полученная оценка — теорема 6.1 — есть главный результат данной работы. Компьютерные вычисления показывают, что наша оценка сверху в действительности равна времени разреза. Эта гипотеза пока доказана лишь для части геодезических.

Напомним некоторые определения и факты из работ [3]–[7]. Из принципа максимума Понтрягина [1] следует, что экстремали в обобщенной задаче Диодона суть траектории гамильтоновой системы $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$, $\lambda \in T^*M$, с гамильтонианом $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$, $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(q) \rangle$. Геодезические являются проекциями экстремалей из кокасательного расслоения T^*M на пространство состояний M : $q_t = \pi(\lambda_t)$, $\lambda_t = e^{t\vec{H}}(\lambda)$. В силу однородности гамильтониана H , достаточно рассматривать сужение гамильтонова потока на поверхность уровня $H = 1/2$ и потому брать начальные ковектора λ в начальном цилиндре $C = \{H = 1/2\} \cap T_{q_0}^*M$. Вся информация о геодезических заключена в экспоненциальном отображении $\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M$, $\text{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = q_t$.

В работе [6] были определены и исследованы отражения ε^i , $i = 1, 2, 3$, — дискретные симметрии экспоненциального отображения $\varepsilon^i : N \rightarrow N$, $\varepsilon^i : M \rightarrow M$, $\text{Exp} \circ \varepsilon^i = \varepsilon^i \circ \text{Exp}$. Мы обозначаем $\nu = (\lambda, t) \in N = C \times \mathbb{R}_+$, $\nu^i = \varepsilon^i(\nu)$. Наряду с дискретной группой симметрий $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$, экспоненциальное отображение имеет непрерывную двухпараметрическую группу симметрий $G_{\vec{h}_0, Z} = e^{\mathbb{R}\vec{h}_0} \circ e^{\mathbb{R}Z}$ (см. [3]), где

$$\begin{aligned} h_0(\lambda) &= \langle \lambda, X_0(q) \rangle, & X_0 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w}, \\ Z &= \vec{h}_Y + e, & h_Y(\lambda) &= \langle \lambda, Y(q) \rangle, \\ Y &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3v \frac{\partial}{\partial v} + 3w \frac{\partial}{\partial w}, & e &= \sum_{i=1}^5 h_i \frac{\partial}{\partial h_i}. \end{aligned}$$

Страты Максвелла, порожденные вращениями \vec{h}_0 и отражениями ε^i , определяются следующим образом:

$$\text{MAX}_0 = \{\nu \in N \mid \exists \sigma \in \mathbb{R} : \tilde{\nu} = e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu) \neq \nu, \text{Exp}(\tilde{\nu}) = \text{Exp}(\nu)\},$$

$$\text{MAX}_i = \{\nu \in N \mid \exists \sigma \in \mathbb{R} : \tilde{\nu} = e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^i) \neq \nu, \text{Exp}(\tilde{\nu}) = \text{Exp}(\nu)\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Геодезическая не может быть оптимальной после точки Максвелла. Точки на геодезических, соответствующих стратам Максвелла, принадлежат

следующим множествам (теорема 5.13 [7]):

$$\begin{aligned} (\lambda, t) \in \text{MAX}_0 &\Rightarrow r_t^2 + \rho_t^2 = 0, \\ (\lambda, t) \in \text{MAX}_1 &\Rightarrow z_t = 0, \\ (\lambda, t) \in \text{MAX}_2 &\Rightarrow V_t = 0, \\ (\lambda, t) \in \text{MAX}_3 &\Rightarrow z_t = V_t = 0, \end{aligned}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $\rho^2 = v^2 + w^2$, $V = xv + yw - z\frac{r^2}{2}$. В этой работе мы решаем уравнения $z = 0$, $V = 0$ и $r^2 + \rho^2 = 0$, определяющие страты Максвелла.

2 Страты Максвелла в области N_1

В силу равенств $X_0V = 0$, $YV = 4V$ и $X_0z = 0$, $Yz = 2z$, см. (1), (2) [7], функции z , V преобразуются непрерывными симметриями следующим образом:

$$(e^{sX_0})^* z = z, \quad (e^{rY})^* z = e^{2r} z, \quad (e^{sX_0})^* V = V, \quad (e^{rY})^* V = e^{4r} V,$$

поэтому гиперповерхности $z = 0$, $V = 0$ инвариантны относительно группы симметрий $G_{X_0, Y} = e^{\mathbb{R}X_0} \circ e^{\mathbb{R}Y}$. Наличие двухпараметрической группы симметрий экспоненциального отображения позволяет редуцировать процедуру решения уравнений $z = 0$, $V = 0$. А именно, пусть $\nu = (\lambda, t) \in N$, тогда для любых s, r

$$\widehat{\nu} = e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\nu) = (e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\lambda), t') \in N, \quad t' = te^r.$$

Обозначая $\text{Exp}(\widehat{\nu}) = \widehat{q}_{t'} = (\widehat{x}_{t'}, \widehat{y}_{t'}, \widehat{z}_{t'}, \widehat{v}_{t'}, \widehat{w}_{t'})$, получаем:

$$z_t = 0 \Leftrightarrow \widehat{z}_{t'} = 0; \quad V_t = 0 \Leftrightarrow \widehat{V}_{t'} = 0. \quad (1)$$

Поэтому мы можем сначала решить уравнения $z = 0$, $V = 0$ для любого представителя $\nu'' \in N''$, а затем получить решения для любого $\nu \in N$ с использованием соотношений (1).

Мы используем введенные в работе [6] эллиптические координаты в прообразе экспоненциального отображения: время вдоль маятника φ и перепараметризованную энергию маятника k (а также $\psi = \frac{\varphi}{k}$); кроме этого, в плоскости (h_4, h_5) введены полярные координаты α , β . В соответствии с разбиением начального цилиндра $C = \bigcup_{i=1}^7 C_i$, имеем разбиение прообраза экспоненциального отображения $N = \bigcup_{i=1}^7 N_i$, см. [3], [6].

2.1 Корни уравнения $z = 0$ при $\nu \in N_1$

Если $\nu = (k, \varphi, \alpha, \beta, t) \in N_1$, то $\widehat{\nu} = e^{-\beta\vec{h}_0} \circ e^{(-1/2\ln\alpha)Z}(\nu) = (k, \varphi, 1, 0, \delta) \in N_1$ может быть взят в качестве представителя $\nu'' \in N''_1$.

В работе [3] показано, что при $\nu \in N_1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \varphi + t, \\ x &= 2(E(\varphi_t) - E(\varphi)) - (\varphi_t - \varphi), \\ z &= 2k(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) - k(\operatorname{cn} \varphi + \operatorname{cn} \varphi_t)x,\end{aligned}$$

здесь и далее используются эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$, $E(u, k)$, см. [8], [2].

Перейдем к новым координатам

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\varphi_t + \varphi}{2} = \varphi + \frac{t}{2}, & p &= \frac{\varphi_t - \varphi}{2} = \frac{t}{2}, \\ \varphi &= \tau - p, & \varphi_t &= \tau + p.\end{aligned}$$

По формулам сложения для эллиптических функций получаем

$$\begin{aligned}x &= 2(E(\tau + p) - E(\tau - p)) - 2p = \\ &= 4E(p) - 2p - \frac{4k^2}{\Delta} \operatorname{sn}^2 \tau \operatorname{sn} p \operatorname{cn} p \operatorname{dn} p, \\ \Delta &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tau \operatorname{sn}^2 p, \\ z &= \frac{4k}{\Delta} \operatorname{cn} \tau f_z(p), \\ f_z(p) &= \operatorname{sn} p \operatorname{dn} p - (2E(p) - p) \operatorname{cn} p.\end{aligned}\tag{2}$$

Следующая лемма и особенно введенная в ней константа k_0 будут важны для описания корней уравнений $z = 0$, $V = 0$. Напомним, что

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

суть полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [8], [2].

Лемма 2.1. *Уравнение*

$$2E(k) - K(k) = 0, \quad k \in [0, 1],$$

имеет единственный корень $k_0 \in (0, 1)$. Более того,

$$\begin{aligned}k \in [0, k_0) &\Rightarrow 2E - K > 0, \\ k \in (k_0, 1) &\Rightarrow 2E - K < 0.\end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, что $E(k)$ убывает, а $K(k)$ возрастает, поэтому $2E(k) - K(k)$ убывает при $k \in [0, 1]$; это доказывает единственность корня k_0 . Его существование следует из значений функции на концах интервала:

$$\begin{aligned}k = 0 &\Rightarrow K(k) = E(k) = \frac{\pi}{2} &&\Rightarrow 2E(k) - K(k) = \frac{\pi}{2}, \\ k \rightarrow 1 - 0 &\Rightarrow K(k) \rightarrow +\infty, E(k) \rightarrow 1 &&\Rightarrow 2E(k) - K(k) \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

□

Замечание. График функции $k \mapsto 2E(k) - K(k)$ приведен на рис. 1. Компьютерные вычисления показывают, что $k_0 \approx 0,909$.

Значению параметра $k = k_0$ соответствует единственная периодическая эйлерова эластика, см. рис. 2.

Рис. 1: Определение числа k_0

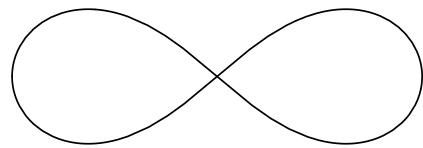
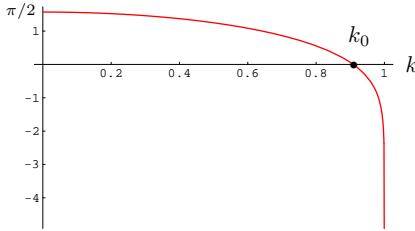


Рис. 2: Периодическая эластика, $k = k_0$

Из разложения (2) видно, что для исследования корней уравнения $z = 0$ важно изучить корни уравнения $f_z(p) = 0$.

Предложение 2.1. Для любого $k \in [0, 1)$ функция

$$f_z(p, k) = \operatorname{sn} p \operatorname{dn} p - (2E(p) - p) \operatorname{cn} p$$

имеет счетное число корней p_n^z , $n \in \mathbb{Z}$. Эти корни нечетны по n :

$$p_{-n}^z = -p_n^z, \quad n \in \mathbb{Z},$$

в частности, $p_0^z = 0$. Корни p_n^z локализуются следующим образом:

$$p_n^z \in (-K + 2Kn, K + 2Kn), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В частности, корни p_n^z монотонны по n :

$$p_n^z < p_{n+1}^z, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Более того, при $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} k \in [0, k_0) &\Rightarrow p_n^z \in (2Kn, K + 2Kn), \\ k = k_0 &\Rightarrow p_n^z = 2Kn, \\ k \in (k_0, 1) &\Rightarrow p_n^z \in (-K + 2Kn, 2Kn), \end{aligned}$$

где k_0 есть единственный корень уравнения $2E(k) - K(k) = 0$, см. лемму 2.1.

Доказательство. Вычислим значения $f_z(p)$ в точках, кратных K . Пусть $p = 4Kn$, тогда $\operatorname{sn} p = 0$, $\operatorname{cn} p = 1$, $\operatorname{dn} p = 1$, $E(p) = 4nE$, поэтому $f_z(p) =$

$-4n(2E - K)$. Вычисляя таким же образом, получаем таблицу значений функции $f_z(p)$ в четвертях периода стандартного маятника:

p	$4Kn$	$K + 4Kn$	$2K + 4Kn$	$3K + 4Kn$
$f_z(p)$	$-4n(2E - K)$	k'	$(2 + 4n)(2E - K)$	$-k'$

Здесь $k' = \sqrt{1 - k^2} \in (0, 1]$ есть дополнительный модуль эллиптических функций.

Далее, определим функцию

$$g_z(p) = \frac{f_z(p)}{\operatorname{cn} p} = \frac{\operatorname{sn} p \operatorname{dn} p}{\operatorname{cn} p} - 2E(p) + p, \quad p \neq K + 2Kn.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$g'_z(p) = \frac{\operatorname{sn}^2 p \operatorname{dn}^2 p}{\operatorname{cn}^2 p}.$$

Вычислим пределы на концах интервалов:

$$\begin{aligned} p \rightarrow -K + 4Kn \pm 0 &\Rightarrow f_z(p) \rightarrow -k', \operatorname{cn} p \rightarrow \pm 0 \Rightarrow g_z(p) \rightarrow \mp\infty, \\ p \rightarrow K + 4Kn \pm 0 &\Rightarrow f_z(p) \rightarrow k', \operatorname{cn} p \rightarrow \mp 0 \Rightarrow g_z(p) \rightarrow \mp\infty. \end{aligned}$$

То есть функция $g_z(p)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на каждом интервале $(-K + 2Kn, K + 2Kn)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, поэтому она имеет единственный корень

$$p_n^z \in (-K + 2Kn, K + 2Kn), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В точках вида $p = K + 2Kn$, $n \in \mathbb{Z}$, где функция $g_z(p)$ не определена, $f_z(p) = \pm k' \neq 0$. Следовательно, функция $f_z(p)$ обращается в нуль только в точках p_n^z , $n \in \mathbb{Z}$.

Нечетность корней p_n^z по n следует из нечетности функции $f_z(p)$ по p . Монотонность корней p_n^z по n следует из того, что каждый из взаимно непересекающихся интервалов $(-K + 2Kn, K + 2Kn)$ содержит ровно один корень p_n^z .

Остается локализовать положительные корни p_n^z относительно средних точек $2Kn$. Как было вычислено выше, $f_z(2Kn) = (-1)^{n-1} 2n(2E - K)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $k < k_0$, тогда $2E(k) - K(k) > 0$. Сначала рассмотрим случай $n = 2m \in \mathbb{N}$. Тогда $f_z(4Km) < 0$, $g_z(4Km) < 0$, поэтому $p_n^z > 2Kn$. Если же $n = 2m - 1 \in \mathbb{N}$, то $f_z(4Km - 2K) > 0$, $g_z(4Km - 2K) < 0$, и опять $p_n^z > 2Kn$.

При $k > k_0$ имеем $2E(k) - K(k) > 0$, поэтому $p_n^z < 2Kn$.

Наконец, при $k = k_0$ получаем $2E(k) - K(k) = 0$ и $p_n^z = 2Kn$. \square

Графики функции $f_z(p)$ при различных k приведены на рис. 3–5.

Предложение 2.1 утверждает, что алгебраическая площадь сегмента инфлексионной эластики меняет знак бесконечное число раз, см. раздел 3.2 [7].

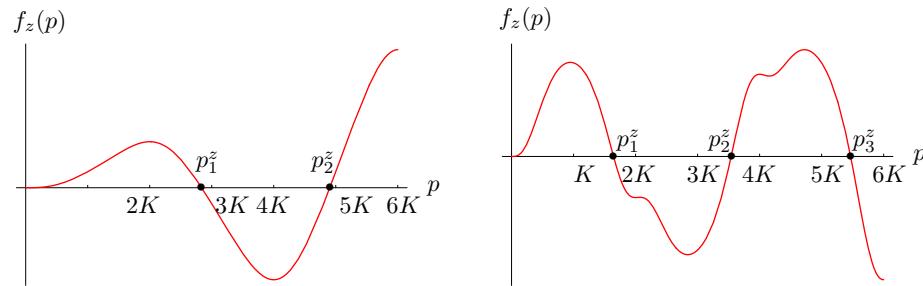


Рис. 3: $p \mapsto f_z(p)$, $k \in [0, k_0]$, $\lambda \in C_1$

Рис. 4: $p \mapsto f_z(p)$, $k \in (k_0, 1)$, $\lambda \in C_1$

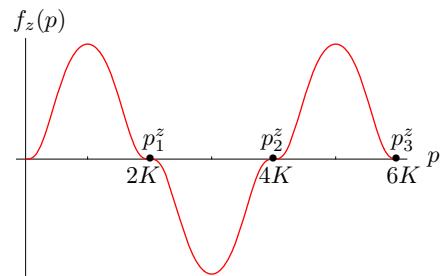


Рис. 5: $p \mapsto f_z(p)$, $k = k_0$, $\lambda \in C_1$

Следствие 2.1. Первый положительный корень $p = p_1^z$ уравнения $f_z(p) = 0$ локализуется следующим образом:

$$\begin{aligned} k \in [0, k_0) &\Rightarrow p_1^z \in (2K, 3K), \\ k = k_0 &\Rightarrow p_1^z = 2K, \\ k \in (k_0, 1) &\Rightarrow p_1^z \in (K, 2K). \end{aligned}$$

На рис. 6 приведен график функции $k \mapsto p_1^z(k)$, а на рис. 7 — график функции $k \mapsto p_1^z(k)/K(k)$. Напомним, что полному обороту маятника соответствует $p = 2K$, это значение отмечено на оси ординат рис. 7.

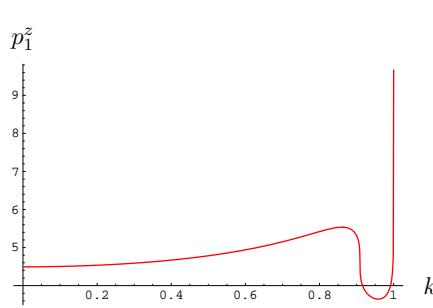


Рис. 6: $k \mapsto p_1^z$, $\lambda \in C_1$

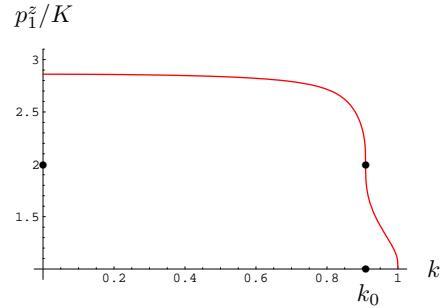


Рис. 7: $k \mapsto p_1^z/K$, $\lambda \in C_1$

Из равенства (2) и предложения 2.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2. Пусть $\nu \in N_1 \cap \{\alpha = 1, \beta = 0\}$. Тогда

$$\begin{aligned} z_t = 0 \Leftrightarrow \quad & \operatorname{cn} \tau = 0, \quad \tau = \varphi + \frac{t}{2}, \text{ или} \\ & t = 2p_n^z, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

где p_n^z суть корни функции $f_z(p)$, описанные в предложении 2.1.

2.2 Корни уравнения $V = 0$ при $\nu \in N_1$

Начиная с этого пункта, вычисления усложняются, и для сокращения записи будем применять следующие обозначения:

$$\begin{aligned} s &= \operatorname{sn} p, \quad c = \operatorname{cn} p, \quad d = \operatorname{dn} p, \\ s_\tau &= \operatorname{sn} \tau, \quad c_\tau = \operatorname{cn} \tau, \quad d_\tau = \operatorname{dn} \tau. \end{aligned}$$

Пусть $\nu \in N_1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. В координатах

$$\tau = \varphi + \frac{t}{2}, \quad p = \frac{t}{2}$$

имеем

$$x = \frac{1}{\Delta}(2\Delta(2E-p) - 4k^2 s_\tau^2 c s d), \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{\Delta}4k d_\tau s_\tau s d, \quad (4)$$

$$z = \frac{4k c_\tau}{\Delta}(s d - (2E-p)c),$$

$$V = \frac{2k s_\tau d_\tau}{\Delta} f_V(p), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f_V(p) = & \frac{4}{3} s d (-p - 2(1 - 2k^2 + 6k^2 c^2)(2E-p) + (2E-p)^3 + 8k^2 c s d) + \\ & + 4c(1 - 2k^2 s^2)(2E-p)^2, \\ \Delta = & 1 - k^2 s_\tau^2 s^2. \end{aligned}$$

Предложение 2.2. Для любого $k \in [0, 1)$ уравнение $f_V(p, k) = 0$ имеет счетное число корней p_n^V , $n \in \mathbb{Z}$. Эти корни нечетны и монотонны по n . При $n \in \mathbb{N}$ корни p_n^V локализуются следующим образом:

$$p_n^V \in [2Kn, 2K(n+1)).$$

Более того,

$$\begin{aligned} k \neq k_0 & \Rightarrow p_n^V \in (2Kn, 2K(n+1)), \\ k = k_0 & \Rightarrow p_n^V = 2Kn. \end{aligned}$$

Доказательство. Определим функцию

$$g_V(p) = \frac{f_V(p)}{s d}, \quad p \neq 2Kn. \quad (6)$$

Непосредственно вычисляется, что

$$(g_V(p))' = -4 \frac{(f_z(p))^2}{s^2 d^2}, \quad (7)$$

поэтому функция $g_V(p)$ убывает на каждом интервале $p \in (2K(n-1), 2Kn)$.

Рассмотрим сначала случай $k \neq k_0$. Вычислим пределы на концах интервалов:

$$\begin{aligned} p \rightarrow 4Kn \pm 0, n \neq 0 & \Rightarrow f_V \rightarrow 64n^2(2E-K)^2 > 0, s \rightarrow \pm 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow g_V \rightarrow \pm\infty, \\ p \rightarrow \pm 0 & \Rightarrow f_V \rightarrow 0, g_V \rightarrow 0, \\ p \rightarrow 2K + 4Kn \pm 0 & \Rightarrow f_V \rightarrow -4(4n+2)^2(2E-K)^2 < 0, s \rightarrow \mp 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow g_V \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$p \rightarrow 2Kn \pm 0 \Rightarrow g_V(p) \rightarrow \pm\infty,$$

на каждом интервале $(2Kn, 2K(n+1))$ функция $g_V(p)$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$, поэтому имеет один корень p_n^V . Если же $n = 0$, то

$$p \rightarrow +0 \Rightarrow g_V(p) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow 2K - 0 \Rightarrow g_V(p) \rightarrow -\infty,$$

на интервале $(0, 2K)$ функция $g_V(p)$ убывает от 0 до $-\infty$, поэтому не имеет корней.

Возвращаемся к функции $f_V(p)$. При $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$f_V(2Kn) = (-1)^n 16n^2(2E - K) \neq 0;$$

кроме того, $f_V(0) = 0$. Поэтому все неотрицательные корни функции $f_V(p)$ суть $p = p_n^V$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Теперь рассмотрим случай $k = k_0$, тогда $2E(k) - K(k) = 0$. В точках $p = 2Kn$, $n = 0, 1, 2, \dots$, функция $f_V(p)$ обращается в нуль; докажем, что других неотрицательных корней нет. Если $p \rightarrow 2Kn$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то $g_V(p) \rightarrow -8/3Kn$. Если доопределить функцию $g_V(p)$ в точках $p = 2Kn$ по непрерывности, то $g_V(p)$ убывает при $p \in [0, +\infty)$ от 0 до $-\infty$. Поэтому $g_V(p) < 0$ при $p > 0$. Следовательно, функция $f_V(p)$ обращается в нуль только в точках $p = p_n^V = 2Kn$ в случае $k = k_0$.

Нечетность корней p_n^V по n следует из четности функции $f_V(p)$ по p . Монотонность p_n^V по n следует из того, что промежутки $[2Kn, 2K(n+1))$, $n \in \mathbb{N}$, не пересекаются при разных n . \square

Предложение 2.2 утверждает, что центр масс сегмента инфлексионной эластики бесконечное число раз проходит через серединный перпендикуляр к хорде, см. раздел 3.2 [7].

Графики функции $p \mapsto f_V(p)$ при различных k приведены на рис. 8, 9.

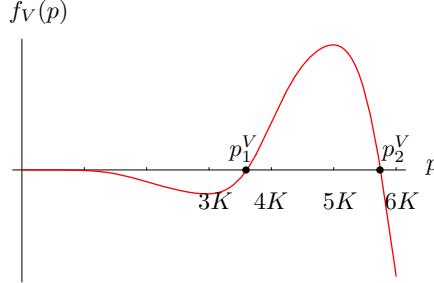


Рис. 8: $p \mapsto f_V(p)$, $k \neq k_0$, $\lambda \in C_1$

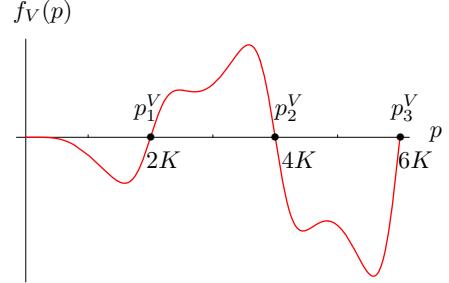


Рис. 9: $p \mapsto f_V(p)$, $k = k_0$, $\lambda \in C_1$

Следствие 2.3. Для любого $k \in [0, 1)$ первый положительный корень $p = p_1^V$ уравнения $f_V(p) = 0$ локализуется следующим образом:

$$\begin{aligned} k \neq k_0 &\Rightarrow p_1^V \in (2K, 4K), \\ k = k_0 &\Rightarrow p_1^V = 2K. \end{aligned}$$

На рис. 10 и 11 приведены графики функций $k \mapsto p_1^V(k)$ и $k \mapsto p_1^V(k)/K(k)$. На оси ординат рис. 11 отмечены точки $\frac{p_1^V}{K} = 2$ и 4 , соответствующие одному и двум полным оборотам маятника.

Рис. 10: $k \mapsto p_1^V$

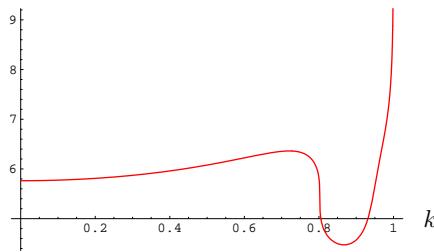


Рис. 10: $k \mapsto p_1^V$, $\lambda \in C_1$

Рис. 11: $k \mapsto p_1^V/K$

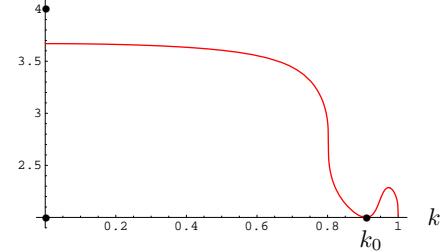


Рис. 11: $k \mapsto p_1^V/K$, $\lambda \in C_1$

Из предложения 2.2 и равенства (5) получаем следующее утверждение.

Следствие 2.4. Пусть $\nu \in N_1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} V_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & \operatorname{sn} \tau = 0, \quad \tau = \varphi + \frac{t}{2}, \text{ или} \\ & t = 2p_n^V, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

где p_n^V — корни функции $f_V(p)$, описанные в предложении 2.2.

2.3 Взаимное расположение корней уравнений $z = 0$, $V = 0$ при $\nu \in N_1$

Для определения первого времени Максвелла вдоль геодезической важно знать, корень которого из уравнений $z_t = 0$, $V_t = 0$ встречается на ней первым. В данном разделе мы отвечаем на этот вопрос.

Вначале мы опишем кривую $\{f_z = 0\}$.

Лемма 2.2. Кривая $\{(p, k) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \mid f_z(p) = 0, p \neq 0\}$ гладкая. Она имеет касательную, параллельную оси p , только в точках $(p, k) = (2Kn, k_0)$, $n \neq 0$. В точках $(p, k) = (p_n^z(0), 0)$ эта кривая имеет касательную, параллельную оси k .

Доказательство. Имеем $\frac{\partial f_z}{\partial p} = (2E - p) ds$. Поэтому

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_z = 0 \\ \frac{\partial f_z}{\partial p} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2E - p = \frac{sd}{c} \\ \frac{s^2 d^2}{c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2E - p = 0 \\ p = 2Kn \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2n(2E - K) = 0 \\ p = 2Kn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ или} \\ k = k_0, p = 2Kn \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому при $(p, k) \neq (2Kn, k_0)$ кривая $\{f_z = 0\}$ гладкая и имеет касательную, не параллельную оси p .

Вычислим другую частную производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_z}{\partial k} &= -\frac{1}{kk'^2} \{ ds [k^2 + (2E - p)(E - (1 - k^2)p)] + \\ &\quad + c [E(1 - 2k^2(1 + s^2)) + p(-1 + k^2(1 + s^2))] \}. \end{aligned}$$

При $k = k_0, p = 2Kn$ имеем $s = 0, c = \pm 1, d = 1, E = \frac{p}{2}$, поэтому

$$\left. \frac{\partial f_z}{\partial k} \right|_{k=k_0, p=2Kn} = \pm \frac{Kn}{k_0 k_0'^2} \neq 0 \text{ при } n \neq 0.$$

Поэтому в точках $(p, k) = (2Kn, k_0)$ кривая $\{f_z = 0\}$ гладкая и имеет касательную, параллельную оси p .

Наконец, при $k = 0$ имеем $\frac{\partial f_z}{\partial k} = 0$, поэтому в точках $(p, k) = (p_n^z, 0)$, $n \neq 0$, кривая $\{f_z = 0\}$ имеет касательную, параллельную оси k . \square

Замечание. Компонента $\{f_z = 0, p = 0\} = \{p = 0\}$, естественно, есть гладкое одномерное многообразие, хотя вдоль этой компоненты $f_z(0, k) = \frac{\partial f_z}{\partial p}(0, k) = \frac{\partial f_z}{\partial k}(0, k) = 0$.

Предложение 2.3. Для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $p = p_n^z(k)$ непрерывна при $k \in [0, 1]$ и гладка при $k \in [0, k_0) \cup (k_0, 1]$. Если $k = k_0$, то $\frac{dp_n^z}{dk} = \infty$. Если $k = 0$, то $\frac{dp_n^z}{dk} = 0$. Если $k \rightarrow 1 - 0$, то $p_n^z \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Первые три предложения следуют из леммы 2.2, а третью — из включения $p_n^z \in (-K + 2Kn, K + 2Kn)$, см. предложение 2.1, и предела $\lim_{k \rightarrow 1-0} K = +\infty$. \square

Предложение 2.4. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое число $k_n \in (0, k_0)$, что:

$$\begin{aligned} k \in [0, k_n) &\Rightarrow p_n^z(k) < p_n^V(k), \\ k = k_n &\Rightarrow p_n^z(k) = p_n^V(k), \\ k \in (k_n, k_0) &\Rightarrow p_n^z(k) > p_n^V(k). \end{aligned}$$

Доказательство. Будем предполагать, что $k \in [0, k_0)$, поэтому $2E(k) - K(k) > 0$.

Пусть $n = 2m + 1$, случай четного n вполне аналогичен этому. Имеем

$$\begin{aligned} f_z(2Kn) &= 2n(2E - K) > 0, \\ f_z(2K(n+1)) &= -2(n+1)(2E - K) < 0, \\ f_V(2Kn) &= -4n^2(2E - K)^2 < 0, \\ f_V(2K(n+1)) &= 4(n+1)^2(2E - K)^2 > 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что каждая функция $f_z(p)$, $f_V(p)$ имеет единственный нуль в интервале $(2Kn, 2K(n+1))$, следует, что

$$p_n^z(k) < p_n^V(k) \Leftrightarrow f_V(p_n^z(k), k) < 0. \quad (8)$$

Далее,

$$f_V|_{f_z=0} = f_V|_{E=(pc+s^2)/(2c)} = s^2(d^2 - k^2s^2c^2) - c^3p =: h_V(p).$$

Поэтому соотношение (8) можно переписать в виде

$$p_n^z(k) < p_n^V(k) \Leftrightarrow \alpha_n(k) < 0, \quad (9)$$

где

$$\alpha_n(k) := h_V(p_n^z(k), k).$$

Функция $\alpha_n(k)$ непрерывна при $k \in [0, k_0]$ и дифференцируема при $k \in (0, k_0)$. Вычислим ее значения на концах этого отрезка.

Имеем $\alpha_n(0) = h_V(p_n^z(0), 0)$, $h_V(p, 0) = s - c^3 p$, $f_z(p, 0) = s - p c$. Поэтому

$$p = p_n^z(0) \Rightarrow s = p c \Rightarrow h_V(p, 0) = p c s^2. \quad (10)$$

Но $p_n^z = p_{2m+1}^z \in ((4m+2)K, (4m+4)K)$, поэтому $c < 0$, следовательно, последнее равенство в (10) дает

$$\alpha_n(0) = h_V(p_n^z(0), 0) = p c s^2 < 0.$$

На другом конце отрезка имеем

$$\alpha_n(k_0) = h_V(p_n^z(k_0), k_0) = h_V(2nK(k_0), k_0).$$

Если $p = 2nK = (4m+2)K$, то $s = 0$, $c = -1$, $d = 1$, поэтому $h_V(2nK, k) = p = 2nK > 0$.

Итак, $\alpha_n(0) < 0$, $\alpha_n(k_0) > 0$. Докажем, что $\alpha'_n(k) > 0$, $k \in (0, k_0)$, тогда $\alpha_n(k)$ имеет единственный нуль $k_n \in (0, k_0)$, и данное предложение будет доказано, см. соотношение (9).

Имеем

$$\frac{d\alpha_n}{dk} = \frac{d}{dk}h_V(p_n^z(k), k) = \left(\frac{\partial h_V}{\partial k} \frac{\partial f_z}{\partial p} - \frac{\partial h_V}{\partial p} \frac{\partial f_z}{\partial k} \right) \left(\frac{\partial f_z}{\partial p} \right)^{-1}$$

так как $f_z(p_n^z(k), k) \equiv 0$. Далее,

$$\frac{\partial f_z}{\partial p} \Big|_{f_z=0} = (2E - p)s d|_{2E - p = s d/c} = \frac{s^2 d^2}{c} \Big|_{p=p_n^z} < 0,$$

поэтому

$$\frac{d\alpha_n}{dk} > 0 \Leftrightarrow \beta := \left(\frac{\partial h_V}{\partial k} \frac{\partial f_z}{\partial p} - \frac{\partial h_V}{\partial p} \frac{\partial f_z}{\partial k} \right) \Big|_{f_z=0} < 0.$$

Непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{3sd}{2kk'^2c}\beta_1, \\ \beta_1 &:= c^3sd(1+2k^2c^2)p - p^2c^4 - 2k^2s^2d^2(d^4 + k^2k'^2s^4), \end{aligned}$$

очевидно, что

$$\beta|_{f_z=0} \Leftrightarrow \beta_1|_{f_z=0}.$$

Далее,

$$\beta_1 = \beta_2 - 2k^2s^2d^2(d^4 + k^2k'^2s^4) < \beta_2 := p c^3 [sd(1+2k^2c^2) - pc].$$

Осталось доказать, что $\beta_2|_{f_z=0} < 0$: если это так, то $\beta_1|_{f_z=0} < 0$, поэтому $\alpha'_n(k) > 0$ при $k \in (0, k_0)$.

Имеем

$$\beta_2 = p c^3 \beta_3, \quad \beta_3 := sd(1+2k^2c^2) - pc.$$

Так как $c = cn(p_n^z) < 0$, осталось доказать, что $\beta_3|_{f_z=0} > 0$. Далее,

$$\beta_3 = f_z - 2c\beta_4, \quad \beta_4 := p - E - k^2csd,$$

поэтому для завершения доказательства данного предложения достаточно показать, что $\beta_4(p) > 0$ при $p \in (2nK, (2n+1)K) \ni p_n^z$.

Имеем

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial p} = k^2(-1 + s^2(2k^2 + 3d^2)) > -k^2,$$

поэтому при $p \in (2nK, (2n+1)K)$ получаем

$$\begin{aligned} \beta_4(p) &= \beta_4(2nK) + \int_{2nK}^p \frac{\partial \beta_4}{\partial p} dp > 2(K - E) - k^2(p - 2K) > \\ &> 2(K - E) - k^2K = (2 - k^2)K - 2E(k) = -\varphi_V(k). \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что $\varphi_V(k) = 2E(k) - (2 - k^2)K(k) < 0$, $k \in (0, 1)$. Это показано в следующей лемме 2.3, которая и завершает доказательство данного предложения. \square

Лемма 2.3. *Функция $\varphi_V(k) = 2E(k) - (2 - k^2)K(k)$ отрицательна при $k \in (0, 1)$.*

Доказательство. Имеем $\varphi_V(0) = 0$ и

$$\frac{d\varphi_V}{dk} = -\frac{k}{1-k^2} \varphi_V^1(k), \quad \varphi_V^1(k) := E - (1-k^2)K,$$

поэтому достаточно показать, что $\varphi_V^1(k) > 0$, $k \in (0, 1)$. Но это следует из того, что $\varphi_V^1(0) = 0$ и $\frac{d}{dk}\varphi_V^1 = kK > 0$. \square

На рис. 12 изображен график последовательности k_n , $n = 0, 1, \dots$. Компьютерные вычисления показывают, что $k_n \rightarrow k_0$ монотонно при $n \rightarrow \infty$, поэтому более естественным было бы обозначение $k_0 = k_\infty$. Отметим, что $k_1 \approx 0,802$.

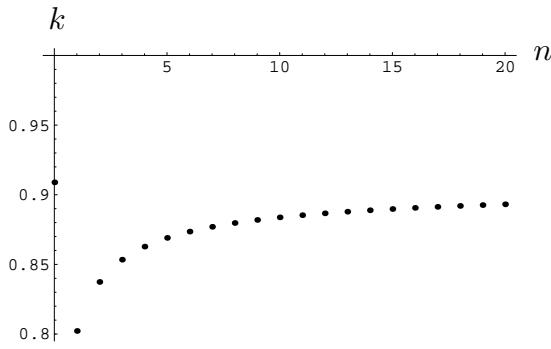


Рис. 12: График $n \mapsto k_n$, $\lambda \in C_1$

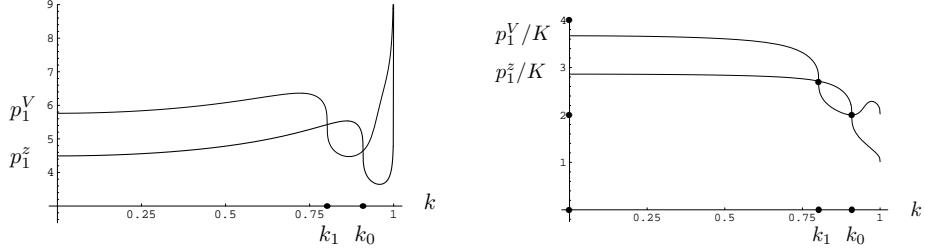
Получаем следующее описание взаимного расположения корней $p = p_n^z$, p_n^V уравнений $f_z = 0$, $f_V = 0$ при различных k .

Предложение 2.5. Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} k \in [0, k_n) &\Rightarrow p_n^z(k) < p_n^V(k), \\ k = k_n &\Rightarrow p_n^z(k) = p_n^V(k), \\ k \in (k_n, k_0) &\Rightarrow p_n^z(k) > p_n^V(k), \\ k = k_0 &\Rightarrow p_n^z(k) = p_n^V(k) = 2Kn, \\ k \in (k_0, 1) &\Rightarrow p_n^z(k) < p_n^V(k). \end{aligned}$$

Доказательство. Расположение корней на промежутке $k \in [0, k_0)$ доказано в предложении 2.4. А из предложений 2.1, 2.2 следует, что при $k \in (k_0, 1)$ выполняются неравенства $p_n^z(k) < 2Kn < p_n^V(k)$. Равенство корней при $k = k_0$ следует из тех же предложений. \square

На рис. 13 приведены графики функций $k \mapsto p_1^z(k)$, $k \mapsto p_1^V(k)$, а на рис. 14 — функций $k \mapsto p_1^z(k)/K(k)$, $k \mapsto p_1^V(k)/K(k)$. На оси ординат рис. 14 отмечены точки, соответствующие целому числу оборотов маятника.

Рис. 13: $k \mapsto p_1^z, p_1^V; \lambda \in C_1$ Рис. 14: $k \mapsto p_1^z/K, p_1^V/K; \lambda \in C_1$

Теперь мы можем дать описание кривой $\{f_V = 0\}$.

Лемма 2.4. Кривая $\gamma_V = \{(p, k) \in (0, +\infty) \times [0, 1] \mid f_V(p) = 0\}$ гладкая. Она имеет касательную, параллельную оси p , только в точках $(p, k) = (p_n^V(k_n), k_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из предложения 2.2 следует, что кривая γ_V распадается на бесконечное число связных компонент

$$\gamma_V \cap \{p \in [2Kn, 2K(n+1))\} = \{p = p_n^V(k) \mid k \in [0, 1)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем любое $n \in \mathbb{N}$, и пусть $p \in [2Kn, 2K(n+1))$.

Сначала рассмотрим случай $k \in [0, 1) \setminus \{k_n, k_0\}$. Согласно предложениям 2.2 и 2.4, тогда $p \in (2Kn, 2K(n+1))$ на кривой γ_V . При $p \neq 2Kn$, учитывая равенство (6), имеем $f_V(p) = g_V(p) \cdot s d$, поэтому $f'_V = g'_V \cdot s d + g_V \cdot (s d)'$. На кривой γ_V выполняется тождество $g_V \equiv 0$, и, учитывая равенство (7), получаем

$$f'_V|_{\gamma_V} = g'_V \cdot s d = -\frac{4f_z^2}{s d},$$

что отлично от нуля при $k \neq k_n, k_0$. Поэтому кривая γ_V гладкая при $k \neq k_n, k_0$.

Если $(p, k) = (2Kn, k_0)$, то непосредственным вычислением получаем $f'_V(p) = \pm \frac{8}{3}Kn \neq 0$, поэтому кривая γ_V гладкая и при $k = k_0$.

При $k \neq k_n$ имеем $f'_V(p) \neq 0$, следовательно, в этих точках кривая γ_V имеет касательную, не параллельную оси p .

Наконец, рассмотрим точку $(p, k) = (p_n^V(k_n), k_n)$. В силу уравнений $f_z = 0, f_V = 0$, получаем в этой точке равенства $E = \frac{pc + sd}{2c}, p = \frac{sd}{c^3}(d^2 - k^2 s^2 c^2)$. Используя эти равенства, вычисляем производные в данной точке:

$$\frac{\partial f_V}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial f_V}{\partial k} = -\frac{2s^4 d^4 (1 - (1 - c^4)k^2)}{k(1 - k^2)c^5} \neq 0.$$

Поэтому при $k = k_n$ кривая γ_V гладкая и имеет касательную, параллельную оси p . \square

Предложение 2.6. Для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $p = p_n^V(k)$ непрерывна при $k \in [0, 1)$ и гладка при $k \in [0, k_n) \cup (k_n, 1)$. Если $k = k_n$, то $\frac{dp_n^V}{dk} = \infty$. Если $k \rightarrow 1 - 0$, то $p_n^V \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Первые два предложения следуют из леммы 2.4, а третье — из включения $p_n^V \in [2Kn, 2K(n+1)]$, см. предложение 2.2, и предела $\lim_{k \rightarrow 1-0} K = +\infty$. \square

Замечание. Лемма 2.2 характеризует точку $k = k_0$ как единственное значение $k \in [0, 1)$, при котором гладкая кривая $\{f_z = 0\}$ имеет касательную, параллельную оси p , т.е. $\frac{dp_n^z}{dk}(k_0) = \infty$. Аналогично, лемма 2.4 характеризует значения $k = k_n$ для кривой $\{f_V = 0\}$: только в этих точках данная кривая имеет касательную, параллельную оси p , т.е. $\frac{dp_n^V}{dk}(k_n) = \infty$.

Как было отмечено выше, наглядный смысл величины $k = k_0$ для эластик очевиден: этому значению соответствует единственная периодическая эластика-восьмерка, см. рис. 2. Однако наглядный смысл значений $k = k_n$, $n \in \mathbb{N}$, совершенно неочевиден. Этим значениям соответствуют непериодические эластики с $z = V = 0$. То есть, согласно разделу 3.2 [7], сегмент эластики имеет нулевую алгебраическую площадь $z = 0$, а его центр масс $(c_x, c_y) = \frac{1}{z}(v - r^2y/6, w + r^2x/6)$ ушел на бесконечность по направлению $(c_x^\infty, c_y^\infty) = (v - r^2y/6, w + r^2x/6)$, ортогональному хорде:

$$V = xv + yw = xc_x^\infty + yc_y^\infty = 0 \Leftrightarrow (x, y) \perp (c_x^\infty, c_y^\infty).$$

Кратчайшая из таких эластик (для $k = k_1$) изображена на рис. 2 [7].

Определим в области C_1 функцию, задающую первое время Максвелла:

$$p_1(k) = \min(p_1^z(k), p_1^V(k)), \quad k \in (0, 1), \quad \lambda \in C_1. \quad (11)$$

Согласно предложению 2.5, в области C_1

$$p_1(k) = \begin{cases} p_1^z(k), & k \in (0, k_1] \cup [k_0, 1), \\ p_1^V(k), & k \in [k_1, k_0]. \end{cases}$$

Из предложений 2.3, 2.6 получаем следующее описание свойств регулярности функции $p_1(k)$.

Следствие 2.5. Пусть $\lambda \in C_1$. Функция $p_1(k)$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, а на его концах $\lim_{k \rightarrow 0+} p_1(k) = p_1^z(0)$, $\lim_{k \rightarrow 1-0} p_1(k) = +\infty$. Эта функция гладкая во всех точках интервала $(0, 1)$ кроме точек k_1 и k_0 , в которых ее односторонние производные вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} (p_1)_-'(k_1) &= (p_1^z)'(k_1) < \infty, & (p_1)_+'(k_1) &= (p_1^V)'(k_1) = \infty, \\ (p_1)_-'(k_0) &= (p_1^V)'(k_0) < \infty, & (p_1)_+'(k_0) &= (p_1^z)'(k_0) = \infty. \end{aligned}$$

Если доопределить по непрерывности $p_1(k)$ при $k = 0$ значением $p_1^z(0)$, то получим $(p_1)_+'(0) = 0$.

2.4 Корни уравнения $r^2 + \rho^2 = 0$ при $\nu \in N_1$

Лемма 2.5. Если $\nu = (\lambda, t) \in N_1$, то $r_t^2 + \rho_t^2 \neq 0$.

Доказательство. Пусть $r_t^2 + \rho_t^2 = 0$. Тогда

$$y_t = \frac{4k}{\Delta} s d s_\tau d_\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 0 \text{ или } s_\tau = 0.$$

Рассмотрим сначала случай $s = 0 \Leftrightarrow p = 2Kn$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x_t|_{p=2Kn} = 2(2E-p)|_{p=2Kn} = 0$. Но $w_t|_{s=0, 2E-p=0} = -\frac{2}{3}p \neq 0$. Итак, в случае $s = 0$ равенство $r_t^2 + \rho_t^2 = 0$ невозможно.

Теперь рассмотрим случай $s_\tau = 0 \Leftrightarrow \tau = 2Kn$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} x_t|_{\tau=2Kn} &= 2(2E-p) = 0, \\ w_t|_{\tau=2Kn} &= \frac{2}{3}(-p + 8k^2 c s d) = 0. \end{aligned}$$

Теперь утверждение следует из того, что эта система уравнений не имеет корней (это доказано в следующей лемме 2.6). \square

Лемма 2.6. Система уравнений

$$\begin{aligned} f_1(p, k) &:= 2E - p = 0, \\ f_2(p, k) &:= -p + 8k^2 c s d = 0 \end{aligned}$$

не имеет решений при $p > 0$, $k \in (0, 1)$.

Определим функции

$$\begin{aligned} g_1(u, k) &:= 2E(u, k) - F(u, k), \\ g_2(u, k) &:= 8k^2 \cos u \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} - F(u, k), \end{aligned}$$

где

$$F(u, k) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \quad E(u, k) = \int_0^u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

суть эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. В силу равенств $g_1(\operatorname{am} p, k) = f_1(p, k)$ и $g_2(\operatorname{am} p, k) = f_2(p, k)$, для доказательства леммы 2.6 требуется показать несовместность системы $g_1 = g_2 = 0$ при $u > 0$, $k \in (0, 1)$.

Лемма 2.7. Кривая $\{g_1(u, k) = 0\}$ гладкая и целиком содержитя в области $\left\{k > \frac{1}{\sqrt{2}}, u \geq u_*\right\}$, где $u_* \in \left(\frac{2}{5}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ есть единственный корень уравнения $g_1(u, 1) = 0$ на интервале $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Более того,

$$g_1(u, k) = 0, \quad u > 0, \quad k \in (0, 1] \quad \Leftrightarrow \quad k = k_{g_1}(u), \quad u \in [u_*, +\infty),$$

где $k = k_{g_1}(u)$ — гладкая функция, $k_{g_1}(u_*) = 1$.

Доказательство. Отметим предельные значения эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$F(u, 1) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u}, \quad E(u, 1) = \sin u, \quad u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

поэтому

$$g_1(u, 1) = 2 \sin u - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u}, \quad u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Легко видеть, что функция $g_1(u, 1)$ имеет единственный нуль u_* на интервале $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Действительно, ее производная равна

$$\frac{\partial}{\partial u} g_1(u, 1) = \frac{\cos 2u}{\cos u} > 0 \text{ при } u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right), \quad < 0 \text{ при } u \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Имеем $g_1(0, 1) = 0$, поэтому $g_1(u, 1) > 0$ при $u \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Но

$$\lim_{u \rightarrow \pi/2+0} g_1(u, 1) = -\infty,$$

поэтому функция $g_1(u, 1)$ строго убывает от $g_1(\pi/4, 1) > 0$ до $-\infty$ при $u \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Существование единственного нуля $u_* \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ доказано. Вычисля значение $g_1(2/5\pi, 1) \approx 0,005 > 0$, заключаем, что $u_* \in \left(\frac{2}{5}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

Далее,

$$\frac{\partial g_1}{\partial k} = -2k \int_0^u \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt - k \int_0^u \frac{\sin^2 t}{(1 - k^2 \sin^2 t)^{3/2}} dt < 0. \quad (12)$$

Поэтому функция $g_1(u, k)$ убывает по k , а кривая $\{g_1 = 0, k \in (0, 1), u > 0\}$ гладкая.

Для локализации этой кривой вычислим значения функции g_1 на границе полосы:

$$g_1(u, 0) = 0, \quad u \in [0, +\infty),$$

$$\lim_{k \rightarrow 1-0} g_1(u, k) = \begin{cases} g_1(u, 1) > 0, & u \in (0, u_*), \\ g_1(u_*, 1) = 0, & u = u_*, \\ g_1(u, 1) < 0, & u \in (u_*, \pi/2), \\ -\infty, & u \in [\pi/2, +\infty). \end{cases}$$

Учитывая знак производной (12), заключаем, что $g_1(u, k) > 0$ при $u \in (0, u_*)$, а при $u \in [u_*, +\infty)$, $k \in (0, 1]$

$$g_1(u, k) = 0 \Leftrightarrow k = k_{g_1}(u),$$

где функция $k = k_{g_1}(u)$ непрерывна при $u \geq u_*$ и гладка при $u > u_*$, см. эскиз кривой $g_1 = 0$ на рис. 15.

Осталось доказать, что $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$ на кривой $g_1(u, k) = 0$. Имеем

$$\frac{\partial g_1}{\partial u} = \frac{1 - 2k^2 \sin^2 u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} > 0 \text{ при } k < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и при } k = \frac{1}{\sqrt{2}}, u \neq \pi n,$$

поэтому g_1 возрастает по u при $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Но $g_1(0, k) = 0$, следовательно,
 $g_1(u, k) > 0$ при $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. \square

Лемма 2.8. Если $u \geq \frac{2}{5}\pi$, $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $g_2(u, k) < 0$.

Доказательство. а) Пусть $u \in [\pi/2 + \pi n, \pi + \pi n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и $u > 0$. Тогда $\cos u \sin u \leq 0$, $F(u, k) > 0$, поэтому $g_2(u, k) < 0$.

б) Пусть $u \in [\pi + \pi n, 3\pi/2 + \pi n]$, $n \in \mathbb{N}$, $k \geq 1/\sqrt{2}$. Тогда

$$F(u, k) \geq F(\pi, 1/\sqrt{2}) = 2K(1/\sqrt{2}) = 2(\Gamma(1/4))^2 / (4\sqrt{\pi}) = 3,7\dots > 3,7,$$

$$8k^2 \cos u \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \leq 4 \sin 2u \sqrt{1 - 1/2 \sin^2 u} =: 4\alpha(u).$$

Стандартными методами анализа доказывается, что $\alpha(u) < 0,9$ при $u \in [\pi + \pi n, 3\pi/2 + \pi n]$, тогда $g_2(u, k) < 4 \cdot 0,9 - 3,7 < 0$ при $u \in [\pi + \pi n, 3\pi/2 + \pi n]$, $k \geq 1/\sqrt{2}$.

в) Пусть $u \in [2/5\pi, \pi/2]$, $k \geq 1/\sqrt{2}$. Рассмотрим функцию $\alpha_1(k) = k^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}$, $k \in [1/\sqrt{2}, 1]$. Легко видеть, что $\alpha_1(k) \leq \alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \sin u}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3} \sin^2 u}$, поэтому $\alpha_1(k) \leq \frac{2}{3\sqrt{3} \sin^2(2/5\pi)} = \frac{16}{3\sqrt{3}(5 + \sqrt{5})} = 0,42\dots \leq 0,43$. Далее, $\sin 2u \leq \sin(4/5\pi) = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = 0,58\dots < 0,59$. Итак,

$$4k^2 \sin 2u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \leq 4 \cdot 0,43 \cdot 0,59 = 1,01\dots < 1,02.$$

Кроме того, $F(u, k) \geq F(2/5\pi, 1/\sqrt{2}) = 1,52\dots > 1,52$. Поэтому $g_2(u, k) \leq 1,02 - 1,52 < 0$ при $u \in [2/5\pi, \pi/2]$, $k \geq 1/\sqrt{2}$. \square

Теперь мы можем доказать лемму 2.6.

Доказательство. Лемма 2.7 утверждает, что кривая $g_1(u, k) = 0$ целиком содержится в области $\left\{k > \frac{1}{\sqrt{2}}, u \geq \frac{2}{5}\pi\right\}$. Но из леммы 2.8 следует, что кривая $g_2(u, k) = 0$ с этой областью не пересекается. Поэтому система уравнений $g_1(u, k) = g_2(u, k) = 0$, так же как и заданная в условии леммы 2.6 система $f_1(p, k) = f_2(p, k) = 0$, несовместна. Эскизы кривых $g_1(u, k) = 0$ и $g_2(u, k) = 0$ приведены на рис. 15. \square

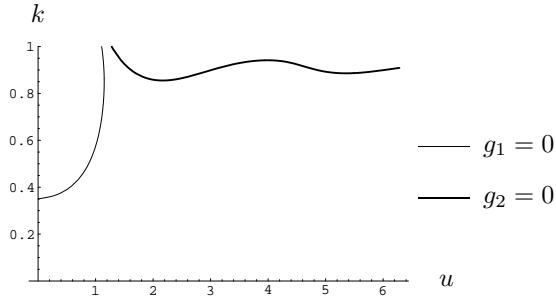


Рис. 15: Кривые $g_1 = 0$ и $g_2 = 0$; $\nu \in N_1$

2.5 Полное описание стратов Максвелла в области N_1

Из теоремы 5.13 [7] и леммы 2.5 получаем следующее общее описание стратов Максвелла в области N_1 .

Теорема 2.1. 0) $\text{MAX}_0 \cap N_1 = \emptyset$,

- 1) $\text{MAX}_1 \cap N_1 = \{(\lambda, t) \in N_1 \mid z_t = 0, \operatorname{cn} \tau \neq 0\}$,
- 2) $\text{MAX}_2 \cap N_1 = \{(\lambda, t) \in N_1 \mid V_t = 0, \operatorname{sn} \tau \neq 0\}$,
- 3) $\text{MAX}_3 \cap N_1 = \{(\lambda, t) \in N_1 \mid z_t = V_t = 0\}$,
где $\tau = \sqrt{\alpha} \left(\varphi + \frac{t}{2} \right)$.

Отсюда и из следствий 2.2, 2.4 получаем полное описание стратов Максвелла в N_1 .

Теорема 2.2. 1) $\text{MAX}_1 \cap N_1 = \left\{ (\lambda, t) \in N_1 \mid t = \frac{2p_n^z}{\sqrt{\alpha}}, n \in \mathbb{N}, \operatorname{cn} \tau \neq 0 \right\}$,

2) $\text{MAX}_2 \cap N_1 = \left\{ (\lambda, t) \in N_1 \mid t = \frac{2p_n^V}{\sqrt{\alpha}}, n \in \mathbb{N}, \operatorname{sn} \tau \neq 0 \right\}$,

3) $\text{MAX}_3 \cap N_1 = \left\{ (\lambda, t) \in N_1 \mid (k, t) = \left(k_0, \frac{4Kn}{\sqrt{\alpha}} \right)$
или $(k, t) = \left(k_n, \frac{2p_n^z}{\sqrt{\alpha}} \right) = \left(k_n, \frac{2p_n^V}{\sqrt{\alpha}} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$,
где $\tau = \sqrt{\alpha} \left(\varphi + \frac{t}{2} \right)$, а корни p_n^z , p_n^V определены в предложениях 2.1, 2.2.

Определим первое время Максвелла, соответствующее страту MAX_i :

$$t_1^{\text{MAX}_i}(\lambda) = \inf\{t > 0 \mid (\lambda, t) \in \text{MAX}_i\}, \quad i = 0, \dots, 3,$$

и первое время Максвелла, соответствующее всем стратам MAX_i :

$$t_1^{\text{MAX}}(\lambda) = \min\{t_1^{\text{MAX}_i}, i = 0, 1, 2, 3\}.$$

Теорема 2.3. Пусть $\lambda \in C_1$. Тогда:

$$\begin{aligned} k \in (0, k_1) \cup (k_0, 1), \quad \text{cn } \tau \neq 0 &\Rightarrow t_1^{\text{MAX}} = t_1^{\text{MAX}_1} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^z, \\ k \in (0, k_1) \cup (k_0, 1), \quad \text{cn } \tau = 0 &\Rightarrow t_1^{\text{MAX}} = t_1^{\text{MAX}_2} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^V, \\ k \in (k_1, k_0), \quad \text{sn } \tau \neq 0 &\Rightarrow t_1^{\text{MAX}} = t_1^{\text{MAX}_2} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^V, \\ k \in (k_1, k_0), \quad \text{sn } \tau = 0 &\Rightarrow t_1^{\text{MAX}} = t_1^{\text{MAX}_1} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^z, \\ k = k_1, k_0, \quad \text{sn } \tau \neq 0 &\Rightarrow t_1^{\text{MAX}} = t_1^{\text{MAX}_1} = t_1^{\text{MAX}_3} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^z = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^V, \\ k = k_1, k_0, \quad \text{cn } \tau \neq 0 &\Rightarrow t_1^{\text{MAX}} = t_1^{\text{MAX}_2} = t_1^{\text{MAX}_3} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^z = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^V, \end{aligned}$$

где $\tau = \sqrt{\alpha} \left(\varphi + \frac{t}{2} \right)$, а корни p_1^z, p_1^V определены в предложениях 2.1, 2.2.

Доказательство. Следует из теоремы 2.2 и оценок корней p_1^z, p_1^V в предложении 2.5. \square

3 Страты Максвелла в области N_2

3.1 Корни уравнения $z = 0$ при $\nu \in N_2$

Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_2, \alpha = 1, \beta = 0$. Тогда [3]

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{k} \left(E(\psi_t) - E(\psi) - \frac{2-k^2}{2} (\psi_t - \psi) \right), \\ z &= 2(\text{sn } \psi_t \text{ cn } \psi_t - \text{sn } \psi \text{ cn } \psi) - \frac{1}{k} (\text{dn } \psi + \text{dn } \psi_t) x, \\ \psi_t &= \psi + \frac{t}{k}. \end{aligned}$$

Перейдем к переменным

$$\tau = \frac{\psi + \psi_t}{2} = \psi + \frac{t}{2k}, \quad p = \frac{\psi_t - \psi}{2} = \frac{t}{2k}$$

и обозначениям

$$\begin{aligned} s &= \text{sn } p, \quad c = \text{cn } p, \quad d = \text{dn } p, \\ s_\tau &= \text{sn } \tau, \quad c_\tau = \text{cn } \tau, \quad d_\tau = \text{dn } \tau. \end{aligned}$$

Из формул сложения для эллиптических функций получаем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{k} E - \frac{4k}{\Delta} s_\tau^2 c d - \frac{2(2-k^2)}{k} p, \\ z &= \frac{2}{k\Delta^2} d_\tau (2k s c (c_\tau^2 - s_\tau^2 d^2) - \Delta d x) = \frac{2d_\tau}{k\Delta} f_z(p), \\ f_z(p) &= \frac{2}{k} [d((2-k^2)p - 2E) + k^2 s c], \\ \Delta &= 1 - k^2 s_\tau^2 s^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Предложение 3.1. *Функция $f_z(p)$ не имеет корней $p \neq 0$.*

Доказательство. Функция $g_z(p) := \frac{f_z(p)}{d}$ имеет те же нули, что и $f_z(p)$. Но

$$g'_z(p) = \frac{k^4 c^2 s^2}{d^2} \geq 0, \quad = 0 \text{ только при } p = Kn, \quad n \in \mathbb{Z},$$

поэтому $g_z(p)$ возрастает на всей числовой прямой. Учитывая, что $g_z(0) = 0$, получаем $g_z(p) \neq 0$, а потому и $f_z(p) \neq 0$ при $p \neq 0$. \square

Из равенства (13) и предложения 3.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_2 \cap \{\alpha = 1, \beta = 0\}$. Тогда уравнение $z_t = 0$ не имеет корней.*

Иными словами, сегменты неинфлексионных эластик имеют ненулевую алгебраическую площадь, см. раздел 3.2 [7].

3.2 Корни уравнения $V = 0$ при $\nu \in N_2$

Пусть $\nu \in N_2$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Тогда

$$V = xv + yw - \frac{1}{2} zr^2 = \frac{2c_\tau s_\tau}{k^2 \Delta} f_V(p), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} f_V(p) &= \frac{4}{3} \{ 3d(2E - (2-k^2)p)^2 + c[8E^3 - 4E(4+k^2) - 12E^2(2-k^2)p + \\ &\quad + 6E(2-k^2)^2p^2 + p(16-4k^2-3k^4-(2-k^2)^3p^2)]s - \\ &\quad - 2d(-4k^2+3(2E-(2-k^2)p)^2)s^2 + \\ &\quad + 12k^2c(2E-(2-k^2)p)s^3 - 8k^2s^4d \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Предложение 3.2. *Для любого $k \in (0, 1)$ функция $f_V(p)$, заданная равенством (15), имеет счетное число нулей $p = p_n^V(k)$, $n \in \mathbb{Z}$. Корни p_n^V нечетны и монотонны по n . Положительные корни локализуются следующим образом:*

$$p_n^V \in (Kn, K+Kn), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g_V(p) := \frac{f_V(p)}{\text{sc}}, \quad p \neq Kn, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

Имеем

$$g'_V(p) = -\frac{k^2}{s^2 c^2} (f_z(p))^2 < 0. \quad (17)$$

Следовательно, функция $g_V(p)$ убывает на каждом интервале $p \in (Kn, K + Kn)$, $n \in \mathbb{Z}$. Вычислим пределы $g_V(p)$ на концах этих интервалов.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f_V(2nK) = 8n\varphi_V^2(k) > 0, \quad f_V((2n+1)K) = -4(2n+1)k'\varphi_V^2(k) < 0, \quad (18)$$

где $\varphi_V(k) = 2E(k) - (2 - k^2)K(k) < 0$ в силу леммы 2.3. Далее,

$$\lim_{p \rightarrow 2Kn \pm 0} \text{sc} = \pm 0, \quad \lim_{p \rightarrow K+2Kn \pm 0} \text{sc} = \mp 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{p \rightarrow Kn \pm 0} g_V(p) = \pm \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для вычисления предела при $p \rightarrow 0$ заметим, что

$$f_V(p) = -\frac{4}{45}k^8 p^6 + o(p^6), \quad \text{sc} = p + o(p), \quad p \rightarrow 0,$$

поэтому

$$g_V(p) = -\frac{4}{45}k^8 p^5 + o(p^5) \rightarrow -0 \text{ при } p \rightarrow +0.$$

Итак, функция $g_V(p)$ убывает от 0 до $-\infty$ на интервале $(0, K)$, и от $+\infty$ до $-\infty$ на интервалах $(Kn, K + Kn)$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому на каждом интервале $(Kn, K + Kn)$, $n \in \mathbb{N}$, функция $g_V(p)$ имеет единственный корень $p = p_n^V$. Функция $f_V(p)$ имеет те же нули так как $f_V(Kn) \neq 0$, см. (18).

Нечетность корней функции $f_V(p)$ следует из четности этой функции по p и равенства $f_V(0) = 0$. \square

Предложение 3.2 описывает точки, в которых центр масс сегмента неинфлексионной эластики проходит через серединный перпендикуляр к хорде, см. раздел 3.2 [7].

На рис. 16 приведен график функции $p \mapsto f_V(p)$, а на рис. 17, 18 — графики функций $k \mapsto p_1^V$, $k \mapsto p_1^V/K$. На оси ординат рис. 18 отмечены точки $\frac{p}{K} \in \mathbb{Z}$, соответствующие целому числу оборотов маятника.

Опишем свойства регулярности кривой $\{f_V = 0\}$ и задающих ее функций $p = p_n^V(k)$.

Лемма 3.1. Кривая $\gamma_V = \{(p, k) \in (0, +\infty) \times (0, 1) \mid f_V(p, k) = 0\}$ гладкая и имеет всюду касательную, не параллельную оси p . Функции $p = p_n^V(k)$, $k \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, гладкие.

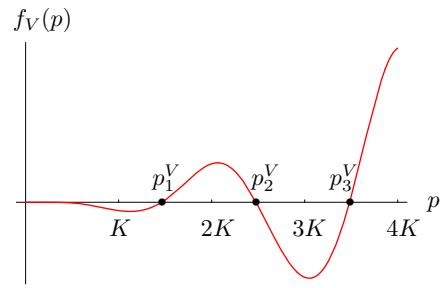


Рис. 16: График $p \mapsto f_V(p)$, $\lambda \in C_2$

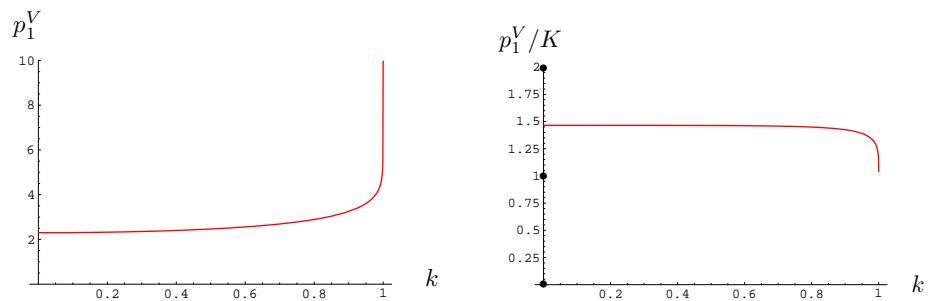


Рис. 17: График $k \mapsto p_1^V$, $\lambda \in C_2$

Рис. 18: График $k \mapsto p_1^V/K$, $\lambda \in C_2$

Доказательство. По предложению 3.2, на кривой γ_V имеем $s c \neq 0$, поэтому $f_V(p) = s c g_V(p)$, см. (16), и, учитывая (17), получаем $f'_V(p)|_{\gamma_V} = s c g'_V(p) \neq 0$. \square

Исследуем асимптотику функций $p = p_n^V(k)$ на концах интервала $(0, 1)$.

Предложение 3.3. *Если $k \rightarrow 1 - 0$, то $p_n^V(k) \rightarrow +\infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Следует из включения $p_n^V \in (Kn, K + Kn)$, см. предложение 3.2, и предела $\lim_{k \rightarrow 1-0} K = +\infty$. \square

Предложение 3.4. *Функция*

$$f_V^0(p) := \frac{1}{512} [(32p^2 - 1) \cos 2p - 8p \sin 2p + \cos 6p]$$

имеет счетное число нулей $p = p_n^V(0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Корни $p_n^V(0)$ нечетны и монотонны по n . Положительные корни локализуются следующим образом:

$$p_n^V(0) \in \left(\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{2}(n+1)\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Доопределим корни $p = p_n^V(k)$, $k \in (0, 1)$, см. предложение 3.2, значением $p = p_n^V(0)$ при $k = 0$. Тогда функция $p = p_n^V(k)$ становится гладкой на промежутке $k \in [0, 1)$, причем $(p_n^V)'_+(0) = 0$.

Доказательство. Заметим, что $f_V^0\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{(-1)^n}{64}\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Далее, функция $g_V^0(p) := \frac{f_V^0(p)}{\sin p \cos p}$ убывает на каждом интервале $\left(\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{2}(n+1)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, так как

$$(g_V^0(p))' = -\frac{(\sin 4p - 4p)^2}{256 \sin^2 p \cos^2 p} < 0, \quad p \neq \frac{\pi}{2}n.$$

Вычислим пределы этой функции на концах интервалов:

$$\begin{aligned} n \neq 0 &\Rightarrow g_V^0(p) \rightarrow \pm\infty && \text{при } p \rightarrow \frac{\pi}{2}n \pm 0, \\ n = 0 &\Rightarrow g_V^0(p) \rightarrow \mp 0 && \text{при } p \rightarrow \pm 0. \end{aligned}$$

Поэтому функция $g_V^0(p)$ имеет на каждом интервале $\left(\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{2}(n+1)\right)$, $n \in \mathbb{N}$, единственный корень. На интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $g_V^0(p)$ отрицательна. Все нули функции $f_V^0(p)$ исчерпываются корнями $p_n^V(0)$. Утверждения о локализации и монотонности корней следуют из предыдущих рассуждений; нечетность корней по n следует из четности функции $f_V^0(p)$.

Гладкость доопределенной функции $p = p_n^V(k)$ при $k = 0$ следует из тейлоровского разложения

$$f_V(p, k) = k^8 f_V^0(p) + O(k^{10}), \quad k \rightarrow 0, \quad (20)$$

которое получается из приведенной в приложении асимптотики эллиптических функций, а также из регулярности корней $p = p_n^V(0)$ функции $f_V^0(p)$. Равенство $(p_n^V)'_+(0) = 0$ следует из разложения (20) и регулярности положительных корней функции $f_V^0(p)$. \square

Из равенства (14) и предложения 3.2 получаем следующее утверждение.

Предложение 3.5. *Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_2 \cap \{\alpha = 1, \beta = 0\}$. Тогда*

$$V = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau &= 0, \quad \tau = \psi + \frac{t}{2k}, \quad \text{или} \\ t &= 2k p_n^V, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где корни p_n^V определены в предложении 3.2.

3.3 Корни уравнения $r^2 + \rho^2 = 0$ при $\nu \in N_2$

Лемма 3.2. *Пусть $\nu \in N_2$. Если $r_t^2 + \rho_t^2 = 0$, то $f_V(p) = 0$.*

Доказательство. Пусть $r_t^2 + \rho_t^2 = 0$. Из того, что $r_t^2 = x_t^2 + y_t^2 = 0$, следует, что $V_t = x_t v_t + y_t w_t - z_t \frac{r_t^2}{2} = 0$. Воспользуемся разложением на множители (14).

- a) Если $c_\tau s_\tau \neq 0$, то из разложения (14) получаем $f_V(p) = 0$.
- б) Пусть $s_\tau = 0$. Имеем

$$x_t|_{s_\tau=0} = \frac{2}{k}(2E - (2 - k^2)p) = 0 \Rightarrow E = \frac{2 - k^2}{2}p \quad (21)$$

и

$$w_t|_{s_\tau=0, E=\frac{2-k^2}{2}p} = \frac{2}{3k}(8 \operatorname{csd} - k^2 p) = 0 \Rightarrow p = \frac{8}{k^2} \operatorname{csd}. \quad (22)$$

Непосредственно проверяется, что

$$E = \frac{2 - k^2}{2}p, \quad p = \frac{8}{k^2} \operatorname{csd} \Rightarrow f_V(p) = 0.$$

- в) Случай $c_\tau = 0$ рассматривается аналогично. Сначала отметим, что

$$x_t|_{c_\tau=0} = \frac{2}{k}(2E - (2 - k^2)p) - \frac{4k}{d} \operatorname{cs} = 0 \Rightarrow E = \frac{2 - k^2}{2}p + \frac{k^2}{d} \operatorname{cs}, \quad (23)$$

$$w_t|_{c_\tau=0, E=\frac{2-k^2}{2}p+\frac{k^2}{d}\operatorname{cs}} = -\frac{2}{3k} \left(p + 8(1 - k^2) \frac{\operatorname{cs}}{k^2 d^3} \right) = 0 \Rightarrow p = -8(1 - k^2) \frac{\operatorname{cs}}{k^2 d^3}. \quad (24)$$

А затем непосредственно проверим, что

$$E = \frac{2 - k^2}{2}p + \frac{k^2}{d} \operatorname{cs}, \quad p = -8(1 - k^2) \frac{\operatorname{cs}}{k^2 d^3} \Rightarrow f_V(p) = 0.$$

\square

Введем обозначения для функций, появившихся в равенствах (21)–(24):

$$\begin{aligned} f_1(p) &= 2E - (2 - k^2)p, & f_2(p) &= 8\cos d - k^2p, \\ f_3(p) &= 2E - (2 - k^2)p - 2k^2 \frac{\cos d}{d}, & f_4(p) &= p + 8(1 - k^2) \frac{\cos d}{k^2 d^3}. \end{aligned}$$

Из доказательства леммы 3.2 получаем следующее предложение.

Следствие 3.2. Пусть $\nu \in N_2$. Тогда

$$r_t^2 + \rho_t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_\tau = 0, & f_1(p) = f_2(p) = 0, \\ c_\tau = 0, & f_3(p) = f_4(p) = 0. \end{cases}$$

Исследуем структуру множества

$$S_{12} := \{(p, k) \in \mathbb{R} \times (0, 1) \mid f_1(p, k) = f_2(p, k) = 0\}.$$

Положим

$$g_1(u) = 2E(u) - (2 - k^2)F(u), \quad g_2(u) = 8\cos u \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} - k^2 F(u),$$

так что $f_i(p) = g_i(\operatorname{am} p)$, $i = 1, 2$. Имеем тейлоровское разложение

$$\begin{aligned} g_2(u, k) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_2^n k^{2n}, \quad k \in [0, 1], \\ g_2^0 &= 4 \sin 2u, \quad g_2^1 = -(u + 2 \sin^2 u \sin 2u), \\ g_2^n &= \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1} n!} \left(n \int_0^u \sin^{2n-2} t dt + 2 \sin^{2n} u \sin 2u \right). \end{aligned}$$

- Лемма 3.3.**
- 1) $g_2^1(u) < 0$ при $u > 0$,
 - 2) $g_2^{n+1}(u) < g_2^n(u)$ при $u > 0$,
 - 3) $g_2^n(u) < 0$ при $u > 0$, $n \in \mathbb{N}$,
 - 4) $\frac{\partial g_2}{\partial k} < 0$ при $u > 0$, $k \in (0, 1)$.

Доказательство. 1) доказывается стандартными методами анализа.

2) доказывается элементарным преобразованием разности $g_2^{n+1} - g_2^n$ с использованием тождества

$$\int \sin^n t dt = \frac{\sin^{n+1} t \cos t}{n+1} + \frac{n+2}{n+1} \int \sin^{n+2} t dt, \quad n \neq -1.$$

3) следует непосредственно из пунктов 1), 2).

4) следует из пункта 3) с учетом разложения

$$\frac{\partial g_2}{\partial k} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_2^n k^{2n-1}, \quad k \in [0, 1].$$

□

Учитывая явное выражение для $g_2^0(u)$, получаем из пункта 4) предыдущей леммы и из теоремы о неявной функции следующее утверждение.

Следствие 3.3. Кривая $\{g_2(u) = 0\}$ гладкая и содержитсѧ в области $\{u \in (\pi n, \pi/2 + \pi n), n = 0, 1, 2, \dots; k \in (0, 1)\}$. Существует такая функция $k = k_{g_2}(u)$, гладкая на интервалах $u \in (\pi n, \pi/2 + \pi n)$ и непрерывная в их концах, что

$$g_2(u, k) = 0 \Leftrightarrow k = k_{g_2}(u),$$

причем $k_{g_2}(\pi n + 0) = k_{g_2}(\pi/2 + \pi n - 0) = 0$.

Лемма 3.4. Множество точек $\{g_1 = g_2 = 0\}$ содержитсѧ в области $\{u \in (\pi n, \pi/2 + \pi n), n \in \mathbb{N}\}$.

Доказательство. Из следствия 3.3 получаем включение $\{g_2 = 0\} \subset \{u \in (\pi n, \pi/2 + \pi n), n = 0, 1, 2, \dots\}$. Остается доказать, что $u \notin (0, \pi/2)$ на множестве $\{g_1(u) = g_2(u) = 0\}$. Это следует из леммы 3.2 и предложения 3.2: последовательно получаем

$$\{f_1(p) = f_2(p) = 0\} \subset \{f_V(p) = 0\} \subset \{p \in (Kn, K + Kn), n \in \mathbb{N}\},$$

поэтому $p \notin (0, K)$ при $f_1(p) = f_2(p) = 0$. \square

Лемма 3.5. Множество точек $\{g_1 = g_2 = 0\}$ счетно, причем каждая полоса $\{u \in (\pi n, \pi/2 + \pi n)\}, n \in \mathbb{N}$, содержит по крайней мере одну точку этого множества.

Замечание. Компьютерные вычисления показывают, что каждая полоса $\{u \in (\pi n, \pi/2 + \pi n)\}, n \in \mathbb{N}$, содержит в точности одну точку множества $\{g_1 = g_2 = 0\}$, см. эскизы кривых $\{g_1 = 0\}$ и $\{g_2 = 0\}$ на рис. 19.

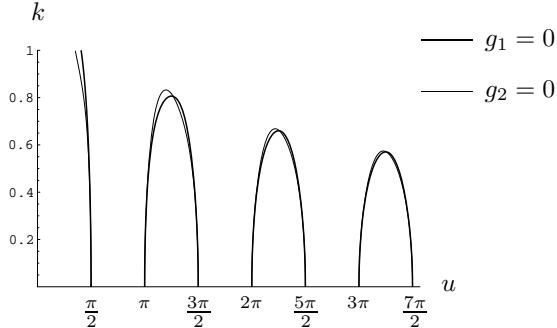


Рис. 19: Кривые $g_1 = 0$ и $g_2 = 0$; $\nu \in N_2$

Дуги эластик, соответствующие значениям параметров (p, τ, k) , для которых $\operatorname{sn} \tau = 0$, $f_1(p, k) = f_2(p, k) = 0$, удовлетворяют равенствам $r_t^2 + \rho_t^2 = 0$,

т.е. $x_t = y_t = v_t = w_t = 0$. Учитывая выражения для центра масс сегмента эластики $c_x = (v - r^2 y/6)/z$, $c_y = (w + r^2 x/6)/z$ (см. [3]), получаем $x_t = y_t = c_x = c_y = 0$: это замкнутая эластика, ограничивающая область с центром масс в начале эластики (мы назвали такие эластики *замечательными*). Лемма 3.5 утверждает, что существует счетное число неинфлексионных замечательных эластик. Отметим, что страт MAX_0 не пересекается со множествами N_i , $i = 1, 3, \dots, 7$, поэтому среди инфлексионных и критических эластик нет замечательных. На рис. 20 изображена кратчайшая замечательная эластика, она соответствует точке пересечения кривых $f_3 = 0$ и $f_4 = 0$ в области $p \in (K, 2K)$. Это — кратчайшая из всех замкнутых гладких кривых, ограничивающих область с центром масс в своем начале.

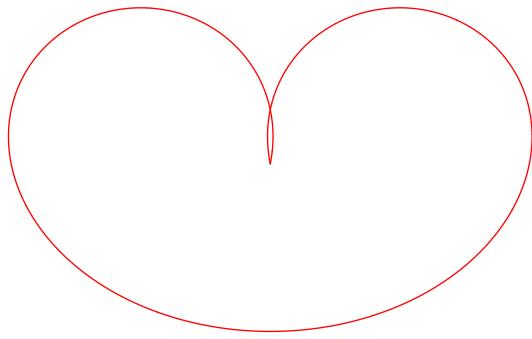


Рис. 20: Кратчайшая замечательная эластика

Докажем лемму 3.5.

Доказательство. Достаточно доказать, что функция $\varphi(u) := g_1(u, k_{g_2}(u))$ меняет знак на каждом интервале $u \in (\pi n, \pi/2 + \pi n)$. Рассмотрим сначала первый интервал $u \in (\pi, 3\pi/2)$.

Из тейлоровских разложений

$$\begin{aligned} g_1(u) &= 2(2E - (2 - k^2)K) + k^2(u - \pi) + o(u - \pi), \\ g_2(u) &= -2k^2K + (8 - k^2)(u - \pi) + o(u - \pi) \end{aligned}$$

получаем асимптотику кривых вблизи точки $(u, k) = (\pi, 0)$:

$$\begin{aligned} g_1 = 0 \quad : \quad u - \pi &= -\underbrace{\frac{2}{k^2}(2E - (2 - k^2)K)}_{>0} + o(1), \\ g_2 = 0 \quad : \quad u - \pi &= \underbrace{\frac{2k^2K}{8 - k^2}}_{>0} + o(1). \end{aligned}$$

Из неравенства $(8 - k^2)((2 - k^2)K - 2E) > k^4K$, $k \in (0, 1)$, доказанного в следующей ниже лемме 3.6, и из разложения

$$g_1(u, k) = \underbrace{\sin u \cos u}_{>0} k^2 + o(k^2) \quad (25)$$

следует, что $\varphi(u) < 0$ при $u \rightarrow \pi + 0$.

Аналогично можно выяснить знак $\varphi(u)$ при $u \rightarrow 3\pi/2 - 0$: имеем

$$\begin{aligned} g_1(u) &= 3(2E - (2 - k^2)K) - \frac{k^2}{k'}(u - 3\pi/2) + o(u - 3\pi/2), \\ g_2(u) &= -3k^2K - \frac{8 - 7k^2}{k'}(u - 3\pi/2) + o(u - 3\pi/2), \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} g_1 = 0 &\quad : \quad u - 3\pi/2 = \frac{3k'}{k^2}(2E - (2 - k^2)K) + o(1), \\ g_2 = 0 &\quad : \quad u - 3\pi/2 = -\frac{3k'k^2K}{8 - 7k^2} + o(1). \end{aligned}$$

Поэтому из асимптотики (25) и доказанного ниже в лемме 3.6 неравенства $(8 - 7k^2)(2E - (2 - k^2)K) > -k^4K$, $k \in (0, 1)$ следует, что $\varphi(u) > 0$ при $u \rightarrow 3\pi/2 - 0$.

Функция $\varphi(u)$ меняет знак на любом интервале $(\pi n, \pi/2 + \pi n)$, это доказывается совершенно аналогично с использованием асимптотик

$$\begin{aligned} g_1(u) &= 2n(2E - (2 - k^2)K) + k^2(u - \pi n) + o(u - \pi n), \\ g_2(u) &= -2nk^2K + (8 - k^2)(u - \pi n) + o(u - \pi n), \\ g_1(u) &= (2n + 1)(2E - (2 - k^2)K) - \frac{k^2}{k'}(u - (2n + 1)\pi/2) + o(u - (2n + 1)\pi/2), \\ g_2(u) &= -(2n + 1)k^2K - \frac{8 - 7k^2}{k'}(u - (2n + 1)\pi/2) + o(u - (2n + 1)\pi/2). \end{aligned}$$

□

Докажем неравенства, использованные выше при доказательстве леммы 3.5.

Лемма 3.6. 1) $(8 - k^2)((2 - k^2)K - 2E) > k^4K$, $k \in (0, 1)$,

2) $(8 - 7k^2)(2E - (2 - k^2)K) > -k^4K$, $k \in (0, 1)$.

Доказательство. 1) Для функции $\alpha_1(k) := (8 - k^2)((2 - k^2)K - 2E) - k^4K$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1(0) &= 0, & \alpha'_1(k) &= \frac{6k}{1 - k^2}\alpha_2(k), \\ \alpha_2(k) &:= (2 - k^2)E - 2(1 - k^2)K, \\ \alpha_2(0) &= 0, & \alpha'_2(k) &= -3k(E - K) > 0, \end{aligned}$$

поэтому $\alpha_1(k) > 0$, $k \in (0, 1)$.

2) Аналогично, определим функцию $\alpha_3(k) := (8 - 7k^2)(2E - (2 - k^2)K) + k^4K$, тогда

$$\alpha_3(0) = 0, \quad \alpha'_3(k) = -18k(2E - (2 - k^2)K)) > 0$$

так как $\varphi_V(k) = 2E(k) - (2 - k^2)K(k) < 0$, см. лемму 2.3. Поэтому $\alpha_3(k) > 0$, $k \in (0, 1)$. \square

Утверждение леммы 3.5 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 3.4. *Множество точек $S_{12} = \{f_1 = f_2 = 0\}$ счетно, причем каждая область $\{p \in (2Kn, K + 2Kn)\}$ содержит по крайней мере одну точку этого множества.*

Замечание. Компьютерные вычисления показывают, что множество $S_{34} := \{(p, k) \mid f_3(p, k) = f_4(p, k) = 0\}$ имеет такую же структуру, как и исследованное выше множество S_{12} . Из аналитичности функций $f_3, f_4 \not\equiv \beta \cdot f_3$ следует, что множество S_{34} не более чем счетно.

Существенный результат анализа множества S_{12} — то, что S_{12} непусто. Отсюда следует непустота страты $\text{MAX}_0 \cap N_2$, см. теорему 3.1. Все остальные страты $\text{MAX}_0 \cap N_j$, $j \neq 2$, пусты. Это означает, что только геодезические, проецирующиеся в неинфлексионные эластики ($\nu \in N_2$), соединяют начальную точку q_0 с неподвижными точками вращений $\{X_0 = 0\} = \{r^2 + \rho^2 = 0\}$. Это важно для понимания структуры оптимального синтеза в обобщенной задаче Диодона.

3.4 Полное описание стратов Максвелла в области N_2

Теорема 3.1. *Пусть $(\lambda, t) \in N_2$. Тогда*

$$(\lambda, t) \in \text{MAX}_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(p) = f_2(p) = 0, & \text{sn } \tau = 0, \text{ или} \\ f_3(p) = f_4(p) = 0, & \text{cn } \tau = 0, \end{cases}$$

где $p = \sqrt{\alpha}t/(2k)$, $\tau = \sqrt{\alpha}(\psi + t/(2k))$. Множество $\text{MAX}_0 \cap N_2$ счетно и содержится во множестве $\text{MAX}_2 \cap N_2$.

Доказательство. Счетность множества $\text{MAX}_0 \cap N_2$ очевидно вытекает из теоремы 5.13 [7], следствий 3.2 и 3.4, а также не более чем счетности множества S_{34} , см. замечание после следствия 3.4.

Пусть $\nu \in \text{MAX}_0 \cap N_2$, докажем, что $\nu \in \text{MAX}_2$. Можно предполагать, что $\alpha = 1$, $\beta = 0$. В силу теоремы 5.1 [7], $r_t^2 + \rho_t^2 = 0$, откуда по лемме 3.2 получаем $f_V(p) = 0$. По теореме 5.13 [7], $\nu \in \text{MAX}_2$ при условии, что $e^{\sigma \tilde{h}_0}(\nu^2) \neq \nu$. Но из теоремы 4.2 [7] видно, что последнее неравенство выполняется при любом $\sigma \neq 0$. \square

Теорема 3.2. $\text{MAX}_1 \cap N_2 = \text{MAX}_3 \cap N_2 = \emptyset$.

Доказательство. Следует из теоремы 5.13 [7] и следствия 3.1. \square

Теорема 3.3. *Пусть $(\lambda, t) \in N_2$. Тогда*

$$(\lambda, t) \in \text{MAX}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f_V(p) = 0, & \text{sn } \tau \text{ cn } \tau \neq 0, \text{ или} \\ & (\lambda, t) \in \text{MAX}_0, \end{cases}$$

где $p = \sqrt{\alpha} \frac{t}{2k}$, $\tau = \sqrt{\alpha} \left(\psi + \frac{t}{2k} \right)$. Положительные корни $p = p_n^V$, $n \in \mathbb{N}$, функции $f_V(p)$ описаны в предложении 3.2.

Доказательство. Следует из теоремы 5.13 [7] и разложения (14). \square

Опишем первые точки Максвелла вдоль геодезических при $\lambda \in C_2$. По аналогии с областью C_1 , введем в области C_2 обозначение для первого времени Максвелла:

$$p_1(k) = p_1^V(k), \quad k \in (0, 1), \quad \lambda \in C_2.$$

Теорема 3.4. *Пусть $\lambda \in C_2$. Тогда:*

$$\begin{aligned} \text{sn } \tau \text{ cn } \tau \neq 0 &\Rightarrow t_1^{\text{MAX}}(\lambda) = t_1^{\text{MAX}_2}(\lambda) = \frac{2k}{\sqrt{\alpha}} p_1 = \frac{2k}{\sqrt{\alpha}} p_1^V, \\ \text{sn } \tau = 0 &\Rightarrow t_1^{\text{MAX}}(\lambda) = t_1^{\text{MAX}_0}(\lambda) = \min \left\{ \frac{2k}{\sqrt{\alpha}} p_n^V \mid f_1(p_n^V) = f_2(p_n^V) = 0 \right\}, \\ \text{cn } \tau = 0 &\Rightarrow t_1^{\text{MAX}}(\lambda) = t_1^{\text{MAX}_0}(\lambda) = \min \left\{ \frac{2k}{\sqrt{\alpha}} p_n^V \mid f_3(p_n^V) = f_4(p_n^V) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Следует из теорем 3.1–3.3. \square

4 Страты Максвелла в N_3

Мы будем использовать тот факт, что параметризация геодезических при $\lambda \in C_3$ получается предельным переходом $k \rightarrow 1 - 0$ из формул для геодезических при $\lambda \in C_1$.

4.1 Корни уравнения $z = 0$ при $\nu \in N_3$

Предложение 4.1. *Пусть $(\lambda, t) \in N_3$. Тогда уравнение $z_t = 0$ не имеет корней.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Переидем

к пределу $k \rightarrow 1 - 0$ в равенстве (2):

$$\begin{aligned} z_t &= \frac{4}{\Delta \operatorname{ch} \tau} f_z(p), \\ \Delta &= 1 - \operatorname{th}^2 \tau \operatorname{th}^2 p > 0, \\ p &= \frac{t}{2}, \quad \tau = \varphi + \frac{t}{2}, \\ f_z(p) &= \frac{p - \operatorname{th} p}{\operatorname{ch} p} > 0, \end{aligned}$$

поэтому $z_t > 0$ при $t > 0$. \square

4.2 Корни уравнения $V = 0$ при $\nu \in N_3$

Предложение 4.2. *Пусть $(\lambda, t) \in N_3$. Тогда*

$$V_t = 0 \Leftrightarrow \tau = 0, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \left(\varphi + \frac{t}{2} \right).$$

Доказательство. Переайдем к пределу $k \rightarrow 1 - 0$ в разложении (5):

$$\begin{aligned} V &= \frac{2 \operatorname{th} \tau}{\Delta \operatorname{ch} \tau} f_V(p, 1), \\ g_V(p, 1) &= \frac{\operatorname{ch} p}{\operatorname{th} p} f_V(p, 1), \quad p > 0, \\ (g_V(p, 1))' &= -\frac{4 \operatorname{ch}^2 p}{\operatorname{th}^2 p} (f_z(p, 1))^2 < 0, \quad p > 0, \end{aligned} \tag{26}$$

поэтому функция $g_V(p, 1)$ убывает при $p \in (0, +\infty)$. Но $\lim_{p \rightarrow 0} g_V(p, 1) = 0$, поэтому $g_V(p, 1) < 0$ и $f_V(p, 1) < 0$ при $p > 0$. Теперь утверждение следует из разложения (26). \square

4.3 Корни уравнения $r^2 + \rho^2 = 0$ при $\nu \in N_3$

Предложение 4.3. *Если $(\lambda, t) \in N_3$, то уравнение $r_t^2 + \rho_t^2 = 0$ не имеет корней.*

Доказательство. Пусть $(\lambda, t) \in N_3$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $r_t^2 + \rho_t^2 = 0$. Из разложения (4) получаем $y_t = \frac{4 \operatorname{th} p \operatorname{th} \tau}{\Delta \operatorname{ch} p \operatorname{ch} \tau} = 0$, поэтому $\tau = 0$. Тогда $x_t|_{\tau=0} = 2(2 \operatorname{th} p - p) = 0$, следовательно, $\operatorname{th} p = p/2$. Наконец,

$$w_t|_{\tau=0, \operatorname{th} p=p/2} = \frac{2}{3} \left(8 \frac{\operatorname{th} p}{\operatorname{ch}^2 p} - p \right) = 0.$$

Но несложно доказать, что система уравнений $2 \operatorname{th} p - p = 0$, $8 \frac{\operatorname{th} p}{\operatorname{ch}^2 p} - p = 0$ не имеет положительных корней. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

4.4 Полное описание стратов Максвелла в N_3

Предложение 4.4. $\text{MAX}_i \cap N_3 = \emptyset$, $i = 0, \dots, 3$.

Доказательство. Следует из теоремы 5.13 [7] и предложений 4.3, 4.1, 4.2. \square

5 Сопряженные точки

5.1 Предельные точки множества Максвелла

Геодезическая q_t называется *строго нормальной*, если она является проекцией хотя бы одной нормальной экстремали λ_t , но не является проекцией ни одной аномальной экстремали. В обобщенной задаче Диодоны строго нормальны геодезические, соответствующие $\lambda \in C_i$, $i = 1, 2, 3, 6$. Геодезические, соответствующие $\lambda \in C_i$, $i = 4, 5, 7$, нестрого нормальны т.к. в них проецируются аномальные экстремали, см. [3].

Точка q_t строго нормальной геодезической $q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$, $s \in [0, t]$, называется *сопряженной* точке q_0 вдоль геодезической q_s , если $\nu = (\lambda, t)$ есть критическая точка экспоненциального отображения.

Известно, что после сопряженной точки строго нормальная геодезическая не может быть оптимальной [1]. В первой сопряженной точке геодезическая теряет локальную оптимальность, а в первой точке Максвелла — глобальную оптимальность. В этом разделе мы найдем сопряженные точки на геодезических, соответствующих $\lambda \in C_i$, $i = 1, 2, 6$, и не содержащих точек Максвелла. Эти сопряженные точки суть пределы пар соответствующих точек Максвелла.

Предложение 5.1. Пусть $\nu_n, \nu'_n \in N$, $\nu_n \neq \nu'_n$, $\text{Exp}(\nu_n) = \text{Exp}(\nu'_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Если обе последовательности $\{\nu_n\}, \{\nu'_n\}$ сходятся к некоторой точке $\bar{\nu} = (\lambda, t)$, причем геодезическая $q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$ строго нормальна, то ее конец $q_t = \text{Exp}(\bar{\nu})$ есть сопряженная точка.

Доказательство. Если ν — регулярная точка экспоненциального отображения, то его сужение на малую окрестность точки ν есть диффеоморфизм. По условию данного предложения экспоненциальное отображение не биективно ни в какой окрестности точки $\bar{\nu}$. Следовательно, $\bar{\nu}$ есть критическая точка отображения Exp , а ее образ $q_t = \text{Exp}(\lambda, t)$ — сопряженная точка. \square

Удобно ввести следующее множество, которое мы назовем *двойным замыканием* множества Максвелла:

$$\text{CMAX} = \left\{ \bar{\nu} \in N \mid \exists \{ \nu_n = (\lambda_n, t_n) \}, \{ \nu'_n = (\lambda'_n, t_n) \} \subset N : \right. \\ \left. \nu_n \neq \nu'_n, \text{Exp}(\nu_n) = \text{Exp}(\nu'_n), n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu'_n = \bar{\nu} \right\}.$$

Очевидно, что $\nu_n \in \text{MAX}$, поэтому $\text{CMAX} \subset \text{cl}(\text{MAX})$.

Предложение 5.1 утверждает, что если $\nu = (\lambda, t) \in \text{CMAX}$ и геодезическая $q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$ строго нормальна, то ее конец q_t — сопряженная точка.

Аналогично множеству CMAX, определим следующие его подмножества — двойные замыкания стратов Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{CMAX}_i = \left\{ \bar{\nu} \in N \mid \exists \{\nu_n\} \subset N, \sigma_n \in \mathbb{R} : \right. \\ \nu_n \neq \nu'_n = e^{\sigma_n \vec{h}_0} \circ \varepsilon^i(\nu_n), \text{Exp}(\nu_n) = \text{Exp}(\nu'_n), n \in \mathbb{N}, \\ \left. \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu'_n = \bar{\nu} \right\}. \end{aligned}$$

В силу того, что $\nu_n \in \text{MAX}_i$, справедливо включение $\text{CMAX}_i \subset \text{cl}(\text{MAX}_i)$.

5.2 Сопряженные точки в N_1

Предложение 5.2. *Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_1$ — такая точка, что*

$$f_z(p) = 0, \quad \text{cn } \tau = 0, \quad p = \sqrt{\alpha} \frac{t}{2}, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \left(\varphi + \frac{t}{2} \right).$$

Тогда $\nu \in \text{CMAX}_1$.

Доказательство. Точка $\nu = (k, p, \tau, \alpha, \beta)$ является пределом последовательностей $\nu_n^\pm = \left(k, p, \tau \pm \frac{1}{n}, \alpha, \beta \right)$, $n \in \mathbb{N}$, причем $\nu_n^- = \varepsilon^1(\nu_n^+) \neq \nu_n^+$, $\text{Exp}(\nu_n^+) = \text{Exp}(\nu_n^-)$ в силу предложений 4.1 [6] и 3.1 [7]. \square

Предложение 5.3. *Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_1$ — такая точка, что*

$$f_V(p) = 0, \quad \text{sn } \tau = 0, \quad p = \sqrt{\alpha} \frac{t}{2}, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \left(\varphi + \frac{t}{2} \right).$$

Тогда $\nu \in \text{CMAX}_2$.

Доказательство. Легко видеть, что двойные замыкания CMAX_i, как и страты MAX_i, инвариантны относительно вращений \vec{h}_0 и дилатаций Z , поэтому можно положить $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Точка $\nu = (k, p, \tau, \alpha = 1, \beta = 0)$ является пределом последовательностей $\nu_n^\pm = \left(k, p, \tau \pm \frac{1}{n}, 1, 0 \right)$. Согласно теореме 5.13 [7] $\nu_n \in \text{MAX}_2$, причем

$$\nu'_n = e^{\sigma_n \vec{h}_0}(\nu_n^-) \neq \nu_n^+, \quad \text{Exp}(\nu'_n) = \text{Exp}(\nu_n),$$

где углы поворота σ_n определяются пунктом 2 предложения 3.1 [7]: $\sigma_n = 2\chi_n$ при $r_n > 0$ и $\sigma_n = 2\omega_n - \pi$ при $r_n = 0$, $\rho_n > 0$ (случай $r_n = \rho_n = 0$ невозможен по лемме 2.5).

Пусть для геодезической, соответствующей ν , имеем $r > 0$. Тогда $\sigma_n \rightarrow \sigma = 2\chi$. Из разложения (4) получаем $y = 0$, поэтому $\chi \equiv 0 \pmod{\pi}$ и $\sigma = 0$.

Теперь пусть $r = 0$ и $\rho > 0$. Тогда $\sigma_n \rightarrow \sigma = 2\omega - \pi$. Из явных формул для геодезических [3] для $\lambda \in C_1$ получаем $v = 0$, поэтому $\omega \equiv \frac{\pi}{2}(\text{mod } \pi)$ и $\sigma = 0$.

Итак, в любом случае $\sigma = 0$. Следовательно,

$$\nu'_n = \nu_n^- \neq \nu_n^+, \quad \text{Exp}(\nu_n^-) = \text{Exp}(\nu_n^+), \quad \nu_n^\pm \rightarrow \nu,$$

поэтому $\nu \in \text{CMAX}_2$. \square

Определим следующие множества:

$$\text{MAX}_{ij} = (\text{MAX}_i \cup \text{CMAX}_i) \cap N_j. \quad (27)$$

Из теоремы 2.2 и предложений 5.2, 5.2 получаем разбиения множеств MAX_{i1} на связные компоненты:

$$\begin{aligned} \text{MAX}_{11} &= \left\{ (\lambda, t) \in N_1 \mid f_z(p) = 0, p = \frac{t\sqrt{\alpha}}{2} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{MAX}_{11}^n, \\ \text{MAX}_{11}^n &= \left\{ (\lambda, t) \in N_1 \mid t = \frac{2p_n^z}{\sqrt{\alpha}} \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{MAX}_{21} = \left\{ (\lambda, t) \in N_1 \mid f_V(p) = 0, p = \frac{t\sqrt{\alpha}}{2} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{MAX}_{21}^n,$$

$$\text{MAX}_{21}^n = \left\{ (\lambda, t) \in N_1 \mid t = \frac{2p_n^V}{\sqrt{\alpha}} \right\}. \quad (29)$$

5.3 Сопряженные точки в N_2

Предложение 5.4. $\text{CMAX}_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Доказательство. Следует из равенства $\text{MAX}_1 \cap N_2 = \emptyset$. \square

Предложение 5.5. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_2$ – такая точка, что

$$f_V(p) = 0, \quad \text{sn } \tau \text{ cn } \tau = 0, \quad p = \sqrt{\alpha} \frac{t}{2k}, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \left(\psi + \frac{t}{2k} \right).$$

Тогда $\nu \in \text{CMAX}_2$.

Доказательство. Аналогично предложению 5.3. \square

Из теорем 3.2, 3.3 и предложений 5.4, 5.4 получаем следующие разбиения множеств MAX_{i2} (см. (27)) на связные компоненты:

$$\begin{aligned} \text{MAX}_{12} &= \emptyset, \\ \text{MAX}_{22} &= \left\{ (\lambda, t) \in N_2 \mid f_V(p) = 0, p = \frac{t\sqrt{\alpha}}{2k} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{MAX}_{22}^n, \\ \text{MAX}_{22}^n &= \left\{ (\lambda, t) \in N_2 \mid t = \frac{2kp_n^V}{\sqrt{\alpha}} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

5.4 Сопряженные точки в N_3

Предложение 5.6. $\text{CMAX}_1 \cap N_3 = \text{CMAX}_2 \cap N_3 = \emptyset$.

Доказательство. Докажем равенство $\text{CMAX}_1 \cap N_3 = \emptyset$, другое равенство доказывается аналогично и проще. Пусть, от противного, существует точка $\nu \in \text{MAX}_2 \cap N_3$. Тогда можно найти последовательность точек $\nu_n \in \text{MAX}_2 \cap N_1$ или $\nu_n \in \text{MAX}_2 \cap N_2$. Пусть $\nu_n \in \text{MAX}_2 \cap N_1$, в случае $\nu_n \in \text{MAX}_2 \cap N_2$ доказательство аналогично. Воспользовавшись симметриями \vec{h}_0 , Z , можно считать, что $\nu_n = (k_n, p_n, \tau_n, \alpha = 1, \beta = 0)$, где $f_V(p_n) = 0$. По предложению 2.2, $p_n \geq 2K(k_n)$. В силу того, что $\nu_n \rightarrow \nu \in N_3$, получаем $k_n \rightarrow 1$, поэтому $K(k_n) \rightarrow +\infty$, $p_n \rightarrow +\infty$ и $t_n \rightarrow +\infty$. Это противоречие с условием $\nu_n \rightarrow \nu$ завершает доказательство предложения. \square

5.5 Сопряженные точки в N_6

Предложение 5.7. $\text{CMAX}_1 \cap N_6 = \emptyset$.

Доказательство. Следует из равенств $\text{MAX}_1 \cap N_2 = \text{MAX}_1 \cap N_6 = \emptyset$. \square

Предложение 5.8. Пусть $\bar{\nu} = (\bar{\theta}, \bar{c} \neq 0, \bar{\alpha} = 0, \bar{t}) \in N_6$ — такая точка, что $\bar{t} = \frac{4}{|\bar{c}|}\bar{p}$, $f_V^0(\bar{p}) = 0$, где функция $f_V^0(p)$ определена в предложении 3.4. Тогда $\bar{\nu} \in \text{CMAX}_2$.

Доказательство. Учитывая симметрии \vec{h}_0 , Z , можно положить $\bar{\theta} = 0$, $\bar{c} = \pm 1$. Рассмотрим только случай $\bar{c} = 1$ т.к. случай $\bar{c} = -1$ вполне аналогичен. Итак, $\bar{\nu} = (\bar{\theta} = 0, \bar{c} = 1, \bar{\alpha} = 0, \bar{t})$.

Пусть $\nu = (\theta, c, \alpha, \beta) \in \text{MAX}_2 \cap N_2^+$, $\nu^2 = \varepsilon^2(\nu) = (\theta^2, c^2, \alpha, \beta^2, t)$, где, согласно теореме 3.3,

$$\begin{aligned} t &= \frac{2k}{\sqrt{\alpha}}, \quad p = p_n^V(k), \quad k \in (0, 1), \quad \tau = \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \left(\varphi + \frac{t}{2} \right) \neq Km, \quad m \in \mathbb{N}, \\ \tau^2 &= \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \left(\varphi^2 + \frac{t}{2} \right), \quad \beta^2 = -\beta. \end{aligned}$$

Тогда, по определению страта Максвелла,

$$\tilde{\nu} = e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) \neq \nu, \quad \text{Exp}(\nu) = \text{Exp}(\tilde{\nu}),$$

где, согласно предложению 3.1 [7],

$$\sigma = 2\chi \text{ при } r > 0, \quad \sigma = 2\omega - \pi \text{ при } r = 0, \rho > 0 \quad (31)$$

(будем выбирать $\nu \in N_2$ так, чтобы $r^2 + \rho^2 \neq 0$).

Пусть $k \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \bar{\alpha} = 0$, причем $\frac{\sqrt{\alpha}}{k} = \frac{1}{2}$. Согласно предложению 3.4, $p = p_n^V(k) \rightarrow p_n^V(0) = \bar{p}$. Отсюда $t = \frac{2k}{\sqrt{\alpha}}p \rightarrow 4\bar{p} = \bar{t}$.

Пусть $\beta = \text{const}$. Положим $\bar{\varphi} = -\beta$. Очевидно, что можно выбрать $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ так, чтобы $\tau = \frac{\sqrt{\alpha}}{k}(\varphi + \frac{t}{2}) \neq Km$. Покажем, что при таком выборе получим $\lim \nu = \lim \tilde{\nu} = \bar{\nu}$, это завершит доказательство данного предложения.

Воспользуемся выражениями для эллиптических координат в области C_2^+ из пункта 4.1 [6]:

$$\sin \frac{\theta - \beta}{2} = \operatorname{sn} \frac{\sqrt{\alpha}}{k}, \quad \cos \frac{\theta - \beta}{2} = \operatorname{cn} \frac{\sqrt{\alpha}}{k}, \quad (32)$$

$$\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \operatorname{dn} \frac{\sqrt{\alpha}}{k}. \quad (33)$$

Тогда $\frac{\sqrt{\alpha}}{k}\varphi \rightarrow \frac{1}{2}\bar{\varphi}$ и из равенства (33) получаем $c \rightarrow 1 = \bar{c}$, а из равенств (32) получаем $\frac{\theta - \beta}{2} \rightarrow \frac{\bar{\varphi}}{2}$, поэтому $\theta \rightarrow \bar{\varphi} + \beta = 0 = \bar{\theta}$. Итак,

$$\nu = (\theta, c, \alpha, \beta, t) \rightarrow \bar{\nu} = (\bar{\theta} = 0, \bar{c} = 1, \bar{\alpha} = 0, \bar{t}).$$

Для точки $\nu^2 = (\theta^2, c^2, \alpha, \beta^2, t)$ из равенства (33) получаем $c^2 \rightarrow \bar{c}$. Согласно равенству (6) [6], $\theta^2 = -\theta_t$, поэтому $\theta^2 \rightarrow -\bar{\theta}_{\bar{t}}$, где $\bar{\theta}_t$ — первая компонента решения уравнения маятника, соответствующая $\bar{\nu}$:

$$\dot{\bar{\theta}}_t = \bar{c}_t, \quad \dot{\bar{c}}_t = 0, \quad \bar{\theta}_0 = 0, \quad \bar{c}_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{\theta}_t = t, \quad \bar{c}_t = 1.$$

Следовательно, $\theta^2 \rightarrow -\bar{\theta}_{\bar{t}} = -\bar{t}$. Итак,

$$\nu^2 = (\theta^2, c^2, \alpha, \beta^2, t) \rightarrow \bar{\nu}^2 = (-\bar{t}, \bar{c} = 1, \bar{\alpha} = 0, \bar{t}).$$

Найдем предел угла поворота σ (31). Рассмотрим геодезическую-окружность, соответствующую ковектору $(\bar{\theta} = 0, \bar{c} = 1, \bar{\alpha} = 0) \in C_6$:

$$\bar{x}_t = \sin t, \quad \bar{y}_t = 1 - \cos t. \quad (34)$$

В силу равенства (19) получаем $\bar{t} = 4\bar{p} = 4p_n^V(0) \in (2\pi n, 2\pi(n+1))$, поэтому $\bar{t} \neq 2\pi m$, следовательно, $\bar{r}_{\bar{t}} = \sqrt{\bar{x}_{\bar{t}}^2 + \bar{y}_{\bar{t}}^2} > 0$. То есть реализуется первое из равенств (31), из которого $\sigma = 2\chi \rightarrow \bar{\sigma} = 2\bar{\chi}_{\bar{t}}$. Из равенств (34) получаем $\bar{\chi}_{\bar{t}} = \bar{t}/2$, следовательно, $\bar{\sigma} = \bar{t}$. Теперь мы можем завершить доказательство:

$$\tilde{\nu} = e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) \rightarrow e^{\bar{\sigma} \vec{h}_0}(\bar{\nu}^2) = e^{\bar{t} \vec{h}_0}(-\bar{t}, \bar{c} = 1, \bar{\alpha} = 0, \bar{t}) = (0, 1, 0, \bar{t}) = \bar{\nu},$$

поэтому $\bar{\nu} \in \text{CMAX}_2$. □

6 Время разреза

Пусть $\lambda \in C$, а $q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$ — соответствующая нормальная геодезическая. *Временем разреза* на геодезической q_s называется число

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = \sup\{t > 0 \mid q_s, s \in [0, t], \text{ оптимальна}\}.$$

Точка q_t , $t = t_{\text{cut}}(\lambda)$, называется *точкой разреза*. Время разреза — это момент, когда геодезическая теряет оптимальность. Все геодезические в обобщенной задаче Диони регулярны, поэтому их малые дуги оптимальны. Иными словами, $t_{\text{cut}}(\lambda) > 0$ для всех $\lambda \in C$.

6.1 Оценка времени разреза

В этом разделе мы объединим полученные в данной работе результаты и оценим время разреза сверху. Для этого определим следующую функцию на начальном цилиндре C :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} : C &\rightarrow (0, +\infty], \quad \lambda \mapsto \mathbf{t}(\lambda), \\ \lambda \in C_1 &\Rightarrow \mathbf{t} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1(k) = \min \left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^z(k), \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^V(k) \right), \\ \lambda \in C_2 &\Rightarrow \mathbf{t} = \frac{2k}{\sqrt{\alpha}} p_1(k) = \frac{2k}{\sqrt{\alpha}} p_1^V(k), \\ \lambda \in C_6 &\Rightarrow \mathbf{t} = \frac{4}{|c|} p_1^V(0), \\ \lambda \in C_i, i = 3, 4, 5, 7 &\Rightarrow \mathbf{t} = +\infty. \end{aligned}$$

Теорема 6.1. Для любого $\lambda \in C$ справедлива оценка $t_{\text{cut}}(\lambda) \leq \mathbf{t}(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_6$, тогда геодезическая $q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$ строго нормальна. Согласно предложениям 2.1 [7] и 5.1, если $(\lambda, t) \in \text{MAX} \cup \text{CMAX}$, то геодезическая q_s неоптимальна ни на каком отрезке $s \in [0, t + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, т.е. $t_{\text{cut}}(\lambda) \leq t$. Для доказательства данного предложения мы покажем, что для любого ковектора $\lambda \in C$ пара $(\lambda, \mathbf{t}(\lambda))$ принадлежит одному из множеств MAX_i или CMAX_i .

Пусть $\lambda \in C_1$. Если $k \in (0, k_1) \cup (k_0, 1)$, то:

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} \tau \neq 0 &\Rightarrow \mathbf{t}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^z = t_1^{\text{MAX}_1}(\lambda) && \text{(теорема 2.3)} \\ \operatorname{cn} \tau = 0 &\Rightarrow (\lambda, \mathbf{t}(\lambda)) = \left(\lambda, \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^z \right) \in \text{CMAX}_1 && \text{(предл. 5.2).} \end{aligned}$$

Если $k \in (k_1, k_0)$, то:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} \tau \neq 0 &\Rightarrow \mathbf{t}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^V = t_1^{\text{MAX}_2}(\lambda) && \text{(теорема 2.3)} \\ \operatorname{sn} \tau = 0 &\Rightarrow (\lambda, \mathbf{t}(\lambda)) = \left(\lambda, \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^V \right) \in \text{CMAX}_2 && \text{(предл. 5.3).} \end{aligned}$$

Наконец, если $k = k_1, k_0$, то

$$\mathbf{t}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^z = t_1^{\text{MAX}_3}(\lambda) \quad \text{(теорема 2.3).}$$

Пусть $\lambda \in C_2$, тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} \tau \operatorname{sn} \tau \neq 0 &\Rightarrow \mathbf{t}(\lambda) = \frac{2k}{\sqrt{\alpha}} p_1^V = t_1^{\text{MAX}_2}(\lambda) \quad (\text{теорема 3.4}) \\ \operatorname{cn} \tau \operatorname{sn} \tau = 0 &\Rightarrow (\lambda, \mathbf{t}(\lambda)) = \left(\lambda, \frac{2k}{\sqrt{\alpha}} p_1^V \right) \in \text{CMAX}_2 \quad (\text{предл. 5.5}). \end{aligned}$$

Пусть $\lambda \in C_6$, тогда

$$(\lambda, \mathbf{t}(\lambda)) = \left(\lambda, \frac{4p_1^V(0)}{|c|} \right) \in \text{CMAX}_2 \quad (\text{предл. 5.8}).$$

В случае $\lambda \in C_3$ доказывать нечего т.к. $\mathbf{t}(\lambda) = +\infty$; отметим, что в этом случае $\text{MAX}_i = \text{CMAX}_i = \emptyset$ (предложения 4.4, 5.6).

В случае $\lambda \in C_4 \cup C_5 \cup C_6$ также доказывать нечего; в этом случае геодезические q_s оптимальны на всем луче $s \in [0, +\infty)$ и $t_{\text{cut}}(\lambda) = \mathbf{t}(\lambda) = +\infty$. \square

Компьютерными вычислениями подтверждается следующая

Гипотеза. Для любого $\lambda \in C$ справедливо равенство $t_{\text{cut}}(\lambda) = \mathbf{t}(\lambda)$.

Доказательство этой гипотезы будет предметом нашей дальнейшей работы. В настоящее время она доказана лишь для части геодезических.

6.2 Свойства функции \mathbf{t}

Для получения глобального представления функции \mathbf{t} удобно определить следующую функцию на цилиндре C :

$$\kappa = \sqrt{\alpha^2 + (E + \alpha)^2 / 4}, \quad (35)$$

а также доопределить введенные ранее функции:

$$\begin{aligned} k &= \begin{cases} 0, & \lambda \in C_4 \cup C_6, \\ 1, & \lambda \in C_3 \cup C_5, \end{cases} \\ p_1(k) &= \begin{cases} p_1^V(0), & \lambda \in C_6, \\ +\infty, & \lambda \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_7. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема 6.2. Функция $\mathbf{t} : C \rightarrow (0, +\infty]$ инвариантна относительно потока обобщенного маятника и вращений, а также однородна порядка 1 относительно дилатаций. Справедливо глобальное представление

$$\mathbf{t}(\lambda) = \frac{2\sqrt[4]{1+k^4}}{\sqrt{\kappa}} p_1(k), \quad \lambda \in C. \quad (36)$$

Функция \mathbf{t} непрерывна на $C \setminus C_4$ и разрывна на C_4 ; однако после доопределения по непрерывности функция \mathbf{t} становится гладкой на C_4 . Функция \mathbf{t} гладкая в областях $C_1 \setminus \{k = k_1, k_0\}$ и $C_2 \cup C_6$. На поверхностях $C_1 \cap \{k = k_1\}$ и $C_1 \cap \{k = k_0\}$ функция \mathbf{t} теряет гладкость.

Доказательство. Инвариантность функции \mathbf{t} относительно потока обобщенного маятника $\ddot{\theta} = -\alpha \sin(\theta - \beta)$ (вертикальной части гамильтоновой системы ПМП) следует из того, что при $\lambda \in C_1 \cup C_2$ значение $\mathbf{t}(\lambda)$ зависит только от инвариантов обобщенного маятника k, α , а при $\lambda \in C_6$ значение $\mathbf{t}(\lambda)$ зависит только от координаты c , постоянной для обобщенного маятника на C_6 . Легко видеть, что функция \mathbf{t} инвариантна относительно вращений и однородна порядка 1 относительно дилатаций: $\vec{h}_0 \mathbf{t} = 0, Z\mathbf{t} = \mathbf{t}$, это следует из инвариантности страт Максвелла относительно потоков этих полей.

Докажем формулу (36). Как функция \mathbf{t} , так и правая часть этой формулы инвариантны относительно потока обобщенного маятника и вращений, поэтому достаточно доказать равенство (36) на квадранте

$$K_+ = \{\theta = \beta = 0, c \geq 0, \alpha \geq 0\} \subset C.$$

Введем в этом квадранте обобщенные полярные координаты (κ, η) , $\kappa \geq 0$, $\eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, следующим образом:

$$\begin{aligned} c^2 &= 4\kappa \cos \eta, & \alpha &= \kappa \sin \eta, \\ \kappa^2 &= \alpha^2 + \frac{c^4}{16}, & \operatorname{tg} \eta &= \frac{4\alpha}{c^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Очевидно, что в квадранте K_+ функция κ задается равенством (35):

$$\theta = \beta = 0 \Rightarrow E = \frac{c^2}{2} - \alpha \Rightarrow \alpha^2 + \frac{c^4}{16} = \alpha^2 + (E + \alpha)^2/4.$$

Если $\lambda \in C_1 \cap K_+$, то $k = \frac{|c|}{2\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\operatorname{ctg} \eta}$, поэтому $\eta = \operatorname{arcctg} k^2$ и $\sin \eta = \frac{1}{\sqrt{1+k^4}}$, $\cos \eta = \frac{k^2}{\sqrt{1+k^4}}$. Следовательно, $c^2 = \frac{4\kappa k^2}{\sqrt{1+k^4}}$, $\alpha = \frac{\kappa}{\sqrt{1+k^4}}$, и окончательно получаем

$$\mathbf{t}|_{C_1 \cap K_+} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1(k) = \frac{2\sqrt{1+k^4}}{\sqrt{\kappa}} p_1(k).$$

Если $\lambda \in C_2 \cap K_+$, то $k = \frac{2\sqrt{\alpha}}{|c|} = \sqrt{\operatorname{tg} \eta}$, поэтому $\eta = \operatorname{arctg} k^2$ и $\sin \eta = \frac{k^2}{\sqrt{1+k^4}}$, $\cos \eta = \frac{1}{\sqrt{1+k^4}}$. Таким образом, $c^2 = \frac{4\kappa}{\sqrt{1+k^4}}$, $\alpha = \frac{\kappa k^2}{\sqrt{1+k^4}}$, откуда

$$\mathbf{t}|_{C_2 \cap K_+} = \frac{2k}{\sqrt{\alpha}} p_1(k) = \frac{2\sqrt{1+k^4}}{\sqrt{\kappa}} p_1(k).$$

Если $\lambda \in C_6 \cap K_+$, то $k = 0$, $\kappa = \frac{c^2}{4}$, $p_1(0) = p_1^V(0)$, поэтому

$$\mathbf{t}|_{C_6 \cap K_+} = \frac{4}{|c|} p_1^V(0) = \frac{2\sqrt[4]{1+k^4}}{\sqrt{\kappa}} p_1(k).$$

Наконец, при $\lambda \in C_i \cap K_+$, $i = 3, 4, 5, 7$, справедливость формулы (36) следует из равенств $\mathbf{t}(\lambda) = +\infty$ и $p_1(1) = +\infty$.

В силу свойств инвариантности относительно потока обобщенного маятника и вращений, доказано глобальное представление (36) на всем цилиндре C .

Непрерывность функции \mathbf{t} в областях C_1, C_2 следует из непрерывности функции $p_1(k)$, см. следствие 2.5 и лемму 3.1. Непрерывность \mathbf{t} на C_6 следует из непрерывности корня $p_1^V(k)$, $\lambda \in C_2$, в точке $k = 0$. Непрерывность \mathbf{t} на C_7 следует из того, что при $\lambda \rightarrow \bar{\lambda} \in C_7$ имеем $\kappa \rightarrow 0$, а функция $\sqrt[4]{1+k^4} p_1(k)$ отделена снизу от нуля, поэтому $\mathbf{t}(\lambda) \rightarrow +\infty = \mathbf{t}(\bar{\lambda})$. Аналогично доказывается непрерывность \mathbf{t} на C_i , $i = 3, 5$.

На множестве C_4 функция \mathbf{t} терпит разрыв:

$$\bar{\lambda} \in C_4 \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}} \mathbf{t}(\lambda) = \frac{2p_1^z(+0)}{\sqrt{\kappa(\lambda)}} < +\infty = \mathbf{t}(\bar{\lambda}).$$

Однако если переопределить по непрерывности $\mathbf{t}|_{C_4} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^z(0)$, то функция \mathbf{t} станет гладкой на C_4 . Это следует из того, что переопределенная по непрерывности функция $p_1(k)$ имеет нулевую правую производную в точке $k = 0$, см. следствие 2.5.

Наличие гладкости \mathbf{t} в областях $C_1 \cap \{k \neq k_1, k_0\}$, C_2 и ее потеря на поверхностях $C_1 \cap \{k = k_1\}$, $C_1 \cap \{k = k_0\}$ следуют из соответствующих утверждений о гладкости функции $p_1(k)$, см. следствие 2.5 и лемму 3.1.

Гладкость \mathbf{t} в точках C_6 следует из того, $p_1^V(k) = O(k^2)$, $k \rightarrow 0$, $\lambda \in C_2$, см. предложение 3.4. \square

Все особенности поведения функции \mathbf{t} , отмеченные в теореме 6.2, хорошо видны на рис. 21.

6.3 Страты Максвелла в образе экспоненциального отображения

Определим множество и страты Максвелла в образе экспоненциального отображения следующим образом: $\text{Max} = \text{Exp}(\text{MAX})$, $\text{Max}_i = \text{Exp}(\text{MAX}_i)$. Из теорем 2.1, 3.3, 3.1 и леммы 3.2 получаем включения $\text{Max}_1 \subset \{z = 0\}$, $\text{Max}_2 \subset \{V = 0\}$, $\text{Max}_3 \subset \{z = V = 0\}$, $\text{Max}_0 \subset \{r = \rho = 0\}$.

Определим первые компоненты страт Максвелла в образе экспоненциального отображения как образы соответствующих первых компонент $\text{MAX}_{ij}^1 \subset N$, см. (28)–(30):

$$\text{Max}_{ij}^1 = \text{Exp}(\text{MAX}_{ij}^1) \subset M,$$

и их проекции на фактор-пространство по вращениям и дилатациям $M'' = \pi_1''(M)$, $\pi_1'' : q \mapsto e^{\mathbb{R}X_0} \circ e^{\mathbb{R}Y}(q)$:

$$(\text{Max}_{ij}^1)'' = \pi_1''(\text{Max}_{ij}^1) \subset M''.$$

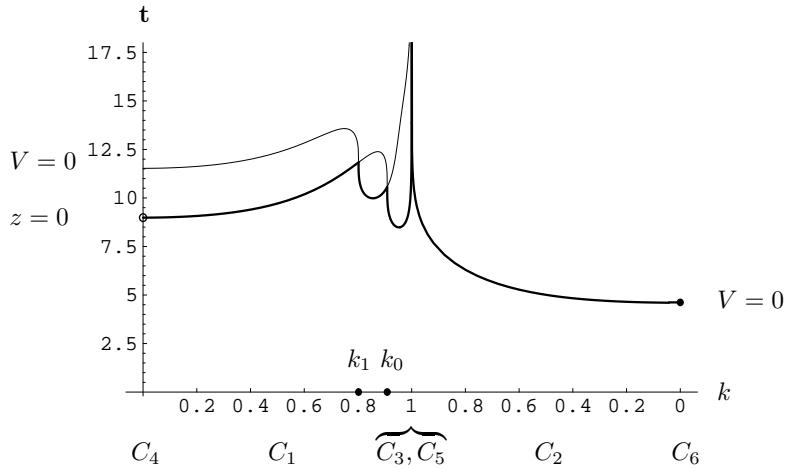


Рис. 21: График $k \mapsto t|_{k=1} = 2 \sqrt[4]{1+k^4} p_1(k)$

На рис. 22–25 изображены первые компоненты $(\text{Max}_{11}^1)''$, $(\text{Max}_{21}^1)''$ и $(\text{Max}_{22}^1)''$. Для этого в карте $\{\rho > 0\}''$ многообразия M'' выбраны следующие координаты, выпрямляющие гиперповерхности $\{z = 0\}''$, $\{V = 0\}''$:

$$\begin{aligned} P_2 &= P'(Q'^2 + R'^2) = \frac{zr^2}{2\rho^{4/3}}, \\ Q_2 &= Q' - P'(Q'^2 + R'^2) = \frac{xv + yw - zr^2/2}{\rho^{4/3}}, \\ R_2 &= R' = \frac{-yv + xw}{\rho^{4/3}}, \end{aligned}$$

а координаты $P' = \frac{z}{2\rho^{2/3}}$, $Q' = \frac{xv + yw}{\rho^{4/3}}$, $R' = \frac{-yv + xw}{\rho^{4/3}}$ в карте $\{\rho > 0\}''$ многообразия $M'' \cong S^3$ были введены в работе [5].

На эскизах каждого из множеств $(\text{Max}_{11}^1)''$ и $(\text{Max}_{21}^1)''$ (рис. 22 и 23) хорошо видны три подобласти, соответствующие различным интервалам значений параметра k . Имеется область, имеющая некомпактное пересечение с картой $\{\rho > 0\}''$: это «внешняя» область, уходящая на бесконечность ($k \in (k_0, 1)$). Также есть две компактные «внутренние» области: верхняя ($k \in (k_1, k_0)$) и нижняя ($k \in (0, k_1)$). Внутренние точки всех трех областей суть точки Максвелла, а граничные ребра — сопряженные точки. У множества $(\text{Max}_{22}^1)''$ на рис. 25 внутренние точки — также точки Максвелла; граничные ребра состоят из сопряженных точек, а также из предельных точек множества Максвелла.

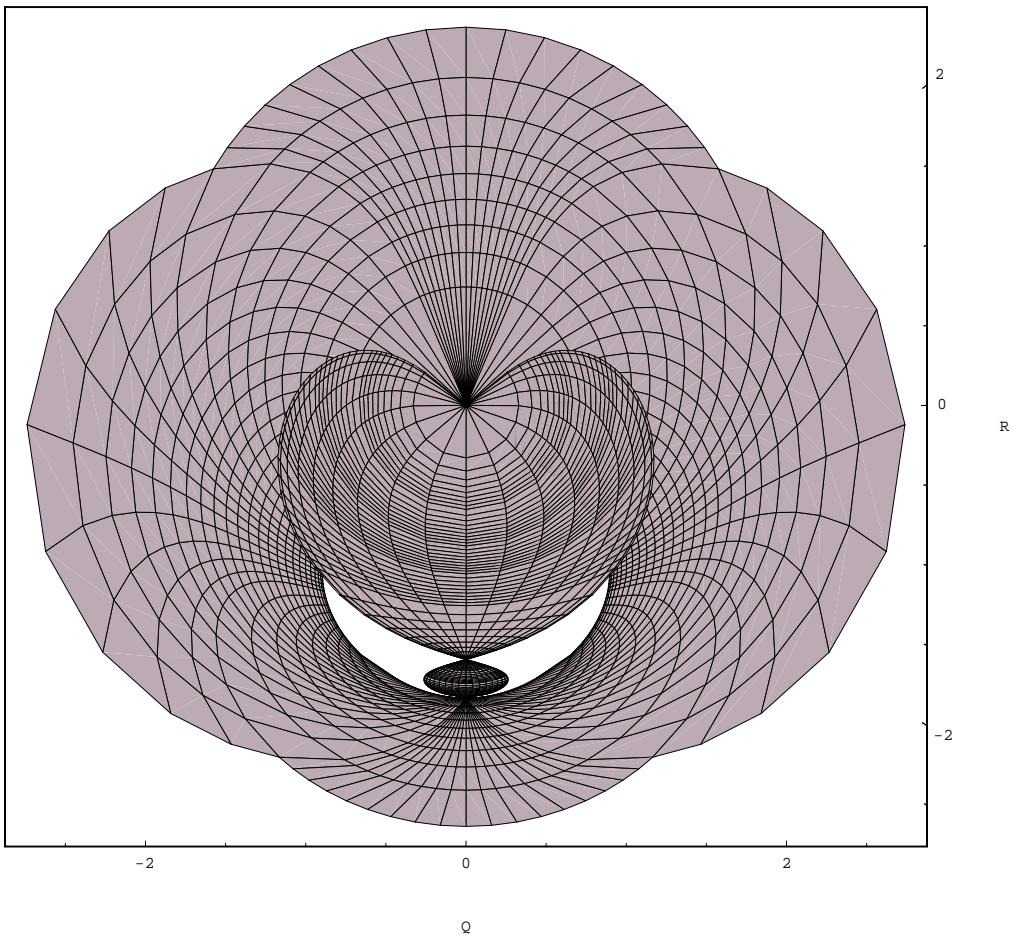


Рис. 22: $(\text{Max}_{11}^1)^{''}$

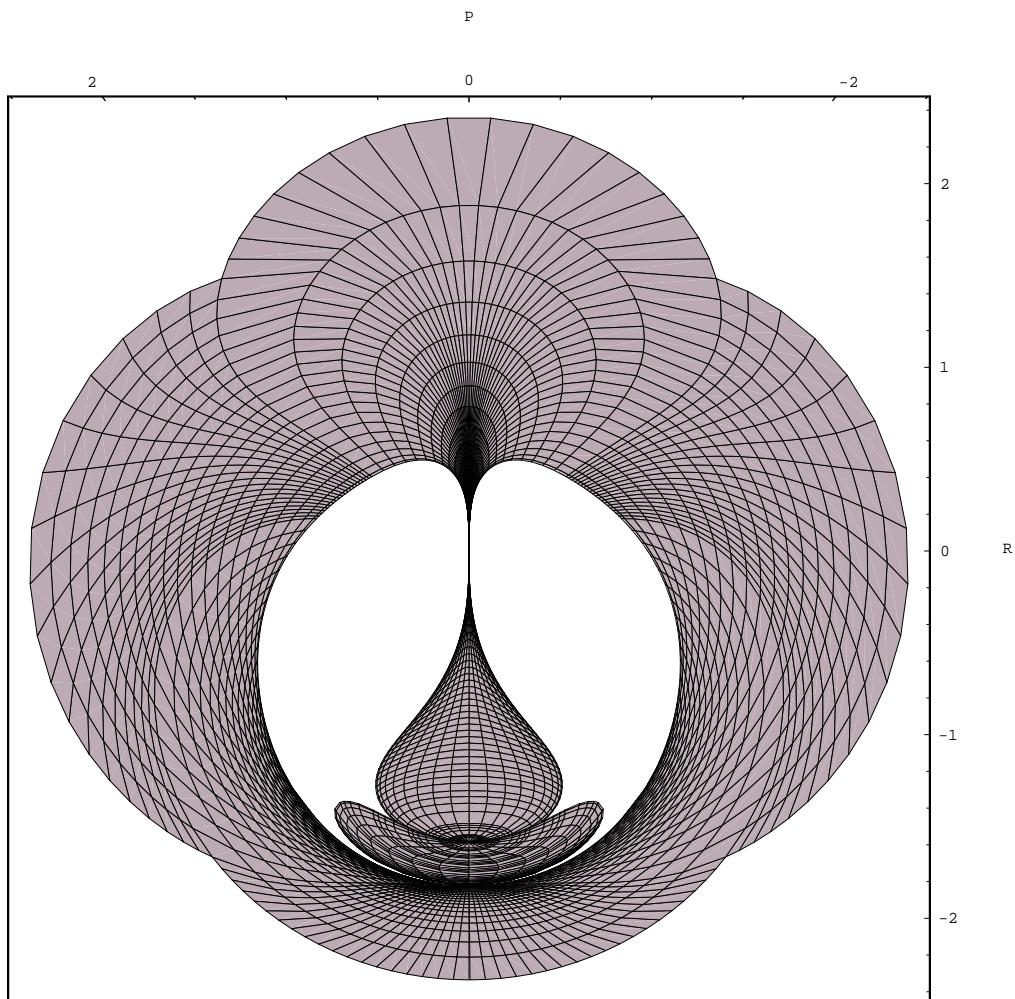


Рис. 23: $(\text{Max}_{21}^1)''$

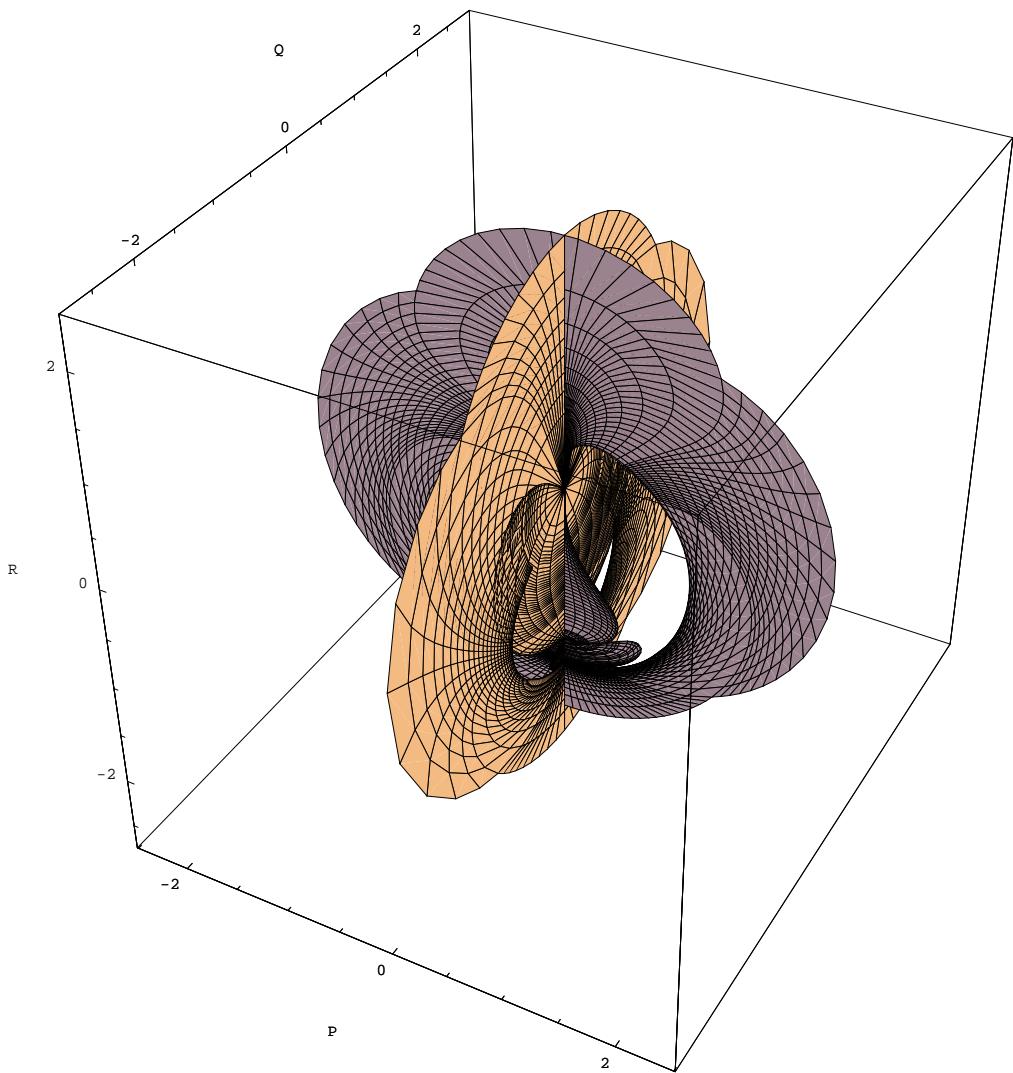


Рис. 24: $(\text{Max}_{11}^1)'' \cup (\text{Max}_{21}^1)''$

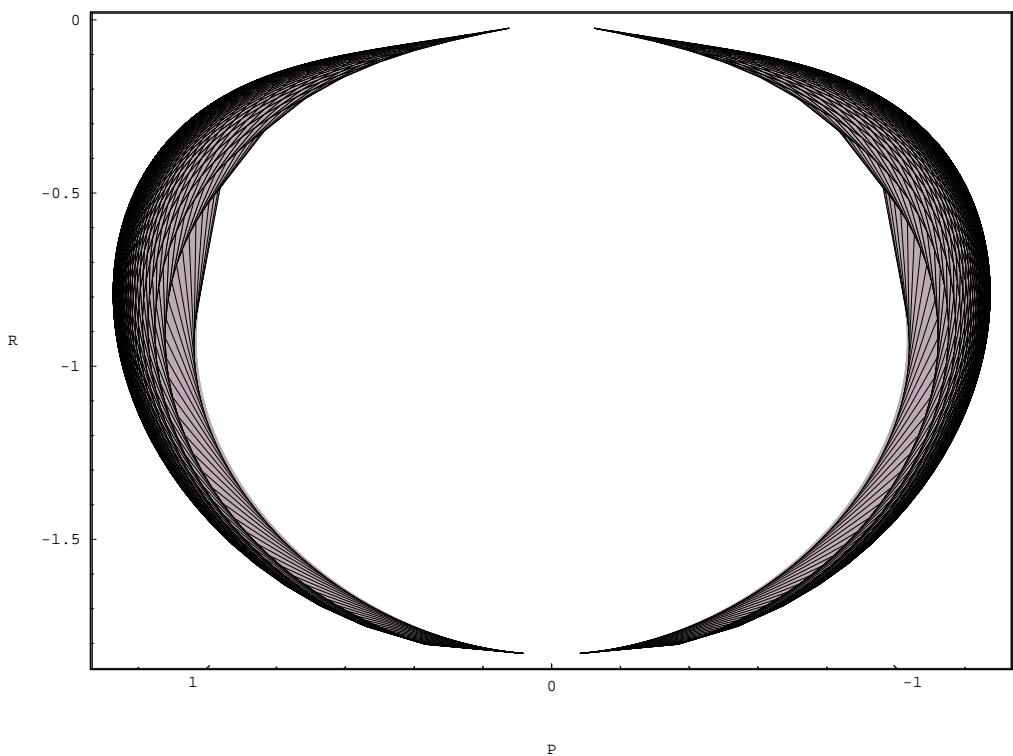


Рис. 25: $(\text{Max}_{22}^1)^{''}$

Приложение: Производные и асимптотика эллиптических функций Якоби

В этом приложении приведены частные производные по параметру k , а также тейлоровские разложения эллиптических функций Якоби $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$, $\text{dn}(u, k)$, $E(u, k)$ при $k \rightarrow 0$, использованные в данной работе. Разложения получены методом неопределенных коэффициентов из формул для частных производных. Подробное изложение теории эллиптических функций можно найти в книгах [8], [2].

Производные эллиптических функций Якоби по параметру

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{sn } u}{\partial k} &= \frac{1}{k} u \text{cn } u \text{dn } u + \frac{k}{1-k^2} \text{sn } u \text{cn}^2 u - \frac{1}{k(1-k^2)} E(u) \text{cn } u \text{dn } u, \\ \frac{\partial \text{cn } u}{\partial k} &= -\frac{1}{k} u \text{cn } u \text{dn } u - \frac{k}{1-k^2} \text{sn}^2 u \text{cn } u + \frac{1}{k(1-k^2)} E(u) \text{sn } u \text{dn } u, \\ \frac{\partial \text{dn } u}{\partial k} &= -\frac{k}{1-k^2} \text{sn}^2 u \text{dn } u - ku \text{sn } u \text{cn } u + \frac{k}{1-k^2} E(u) \text{sn } u \text{cn } u, \\ \frac{\partial E(u)}{\partial k} &= \frac{k}{1-k^2} \text{sn } u \text{cn } u \text{dn } u - ku \text{sn}^2 u - \frac{k}{1-k^2} E(u) \text{cn}^2 u.\end{aligned}$$

Асимптотика эллиптических функций Якоби

$$\begin{aligned}\text{sn } u &= s_0(u) + k^2 s_2(u) + k^4 s_4(u) + k^6 s_6(u) + k^8 s_8(u) + O(k^{10}), \quad k \rightarrow 0, \\ s_0(u) &= \sin u, \\ s_2(u) &= \frac{1}{8} \cos u (\sin 2u - 2u) \\ s_4(u) &= \frac{1}{128} ((8 - 4u^2 + 9 \cos 2u + \cos 4u) \sin u - 6u(2 \cos u + \cos 3u)) \\ s_6(u) &= \frac{1}{3072} (8u(u^2 - 21) \cos u - 3u(39 \cos 3u + 5 \cos 5u + 22u \sin u + \\ &\quad + 18u \sin 3u) + 3 \cos^2 u (53 \sin u + 14 \sin 3u + \sin 5u)), \\ s_8(u) &= \frac{1}{49152} \{u[(128u^2 - 1845) \cos u + 18(-83 + 12u^2) \cos 3u - \\ &\quad - 21(15 \cos 5u + \cos 7u) - 2u(951 - 4u^2 + 1122 \cos 2u + \\ &\quad + 150 \cos 4u) \sin u] + 3 \cos^2 u [553 \sin u + 185 \sin 3u + \\ &\quad + 22 \sin 5u + \sin 7u]\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cn} u &= c_0(u) + k^2 c_2(u) + k^4 c_4(u) + k^6 c_6(u) + k^8 c_8(u) + O(k^{10}), \quad k \rightarrow 0, \\
c_0(u) &= \cos u, \\
c_2(u) &= \frac{1}{8} \sin u (2u - \sin 2u), \\
c_4(u) &= -\frac{1}{256} ((9 + 8u^2) \cos u + 8 \cos 3u + \cos 5u + 16u \sin u + 12u \sin 3u), \\
c_6(u) &= \frac{1}{12288} [-27(11 + 8u^2) \cos u + 6(41 - 36u^2) \cos 3u + 48 \cos 5u + \\
&\quad + 3 \cos 7u + 8u(111 - 4u^2 + 132 \cos 2u + 15 \cos 4u) \sin u], \\
c_8(u) &= \frac{1}{196608} \{ [-3594 - 2256u^2 + 32u^4] \cos u + \\
&\quad 3[943 \cos 3u + 230 \cos 5u + 24 \cos 7u + \cos 9u] + \\
&\quad 4u[-2u(486 \cos 3u + 75 \cos 5u + 56u \sin u + 108u \sin 3u) + \\
&\quad + 3(281 \sin u + 498 \sin 3u + 7(15 \sin 5u + \sin 7u)) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{dn} u &= d_0(u) + k^2 d_2(u) + k^4 d_4(u) + k^6 d_6(u) + k^8 d_8(u) + O(k^{10}), \quad k \rightarrow 0, \\
d_0(u) &= 1, \\
d_2(u) &= -\frac{1}{2} \sin^2 u, \\
d_4(u) &= -\frac{1}{32} \sin u (5 \sin u + \sin 3u - 8u \cos u), \\
d_6(u) &= \frac{1}{1024} (-44 + (31 - 32u^2) \cos 2u + 12 \cos 4u + \cos 6u + \\
&\quad + 72u \sin 2u + 16u \sin 4u), \\
d_8(u) &= \frac{1}{49152} [-1407 + (900 - 1344u^2) \cos 2u + (444 - 384u^2) \cos 4u + 60 \cos 6u + \\
&\quad + 3 \cos 8u + 16u(147 - 16u^2 + 102 \cos 2u + 9 \cos 4u) \sin 2u].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(u) &= E_0(u) + k^2 E_2(u) + k^4 E_4(u) + k^6 E_6(u) + k^8 E_8(u) + O(k^{10}), \quad k \rightarrow 0, \\
E_0(u) &= u, \\
E_2(u) &= \frac{1}{4}(\sin 2u - 2u), \\
E_4(u) &= \frac{1}{64}(-4u - 8u \cos 2u + 4 \sin 2u + \sin 4u), \\
E_6(u) &= \frac{1}{1024}(-32u + 33 \sin 2u - 8u(9 \cos 2u + 2 \cos 4u + 4u \sin 2u) + \\
&\quad + 12 \sin 4u + \sin 6u), \\
E_8(u) &= \frac{1}{49152}[8u(-291 + 32u^2) \cos 2u + 3(-4(82u + 68u \cos 4u + 6u \cos 6u + \\
&\quad + (-85 + 112u^2) \sin 2u + (-37 + 32u^2) \sin 4u - 5 \sin 6u) + \sin 8u)].
\end{aligned}$$

Благодарность

Автор выражает благодарность А.А. Аграчеву за постановку задачи и полезные обсуждения во время работы.

Список иллюстраций

1	Определение числа k_0	7
2	Периодическая эластика, $k = k_0$	7
3	$p \mapsto f_z(p)$, $k \in [0, k_0]$, $\lambda \in C_1$	9
4	$p \mapsto f_z(p)$, $k \in (k_0, 1)$, $\lambda \in C_1$	9
5	$p \mapsto f_z(p)$, $k = k_0$, $\lambda \in C_1$	9
6	$k \mapsto p_1^z$, $\lambda \in C_1$	10
7	$k \mapsto p_1^z/K$, $\lambda \in C_1$	10
8	$p \mapsto f_V(p)$, $k \neq k_0$, $\lambda \in C_1$	12
9	$p \mapsto f_V(p)$, $k = k_0$, $\lambda \in C_1$	12
10	$k \mapsto p_1^V$, $\lambda \in C_1$	13
11	$k \mapsto p_1^V/K$, $\lambda \in C_1$	13
12	График $n \mapsto k_n$, $\lambda \in C_1$	17
13	$k \mapsto p_1^z$, p_1^V ; $\lambda \in C_1$	18
14	$k \mapsto p_1^z/K$, p_1^V/K ; $\lambda \in C_1$	18
15	Кривые $g_1 = 0$ и $g_2 = 0$; $\nu \in N_1$	23
16	График $p \mapsto f_V(p)$, $\lambda \in C_2$	27
17	График $k \mapsto p_1^V$, $\lambda \in C_2$	27
18	График $k \mapsto p_1^V/K$, $\lambda \in C_2$	27
19	Кривые $g_1 = 0$ и $g_2 = 0$; $\nu \in N_2$	31
20	Кратчайшая замечательная эластика	32
21	График $k \mapsto \mathbf{t} _{\kappa=1} = 2 \sqrt[4]{1+k^4} p_1(k)$	46
22	$(\text{Max}_{11}^1)''$	47
23	$(\text{Max}_{21}^1)''$	48
24	$(\text{Max}_{11}^1)'' \cup (\text{Max}_{21}^1)''$	49
25	$(\text{Max}_{22}^1)''$	50

Список литературы

- [1] А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, М.: Физматлит, 2005.
- [2] D.F. Lawden, *Elliptic functions and applications*, Springer-Verlag, 1980.
- [3] Ю.Л. Сачков, Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Диодоны, Мат. Сборник, 194 (2003), 9: 63–90.
- [4] Yu. L. Sachkov, Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures, *Transactions of the American Mathematical Society*, **356** (2004), 2: 457–494.
- [5] Ю.Л. Сачков, Е.Ф. Сачкова, *Геометрический смысл инвариантов и глобальная структура фактор-пространства в обобщенной задаче Диодоны*, Программные системы: теория и приложения, М.: Физматлит, 2004, т. 2, 387–407.
- [6] Ю.Л. Сачков, *Дискретные симметрии в обобщенной задаче Диодоны*, направлена для публикации.
- [7] Ю.Л. Сачков, *Множество Максвелла в обобщенной задаче Диодоны*, направлена для публикации.
- [8] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, М.: УРСС, 2002.