УДК 517.977

А. П. Маштаков, Ю. Л. Сачков

Экстремальные траектории и асимптотика времени Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости

Рассматривается задача о качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания. Требуется перекатить сферу из одной контактной конфигурации в другую так, чтобы длина кривой, пробегаемой точкой контакта, была наименьшей. Получена параметризация экстремальных траекторий. Исследуется асимптотика экстремальных траекторий и поведение времени Максвелла при качении сферы по синусоидам малой амплитуды; для таких траекторий получены оценки так называемого времени разреза.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: оптимальное управление, геометрические методы, симметрии экспоненциального отображения, качение поверхностей, эластики Эйлера.

§ 1. Введение

Работа посвящена исследованию задачи об оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания. Состояние системы описывается точкой контакта сферы с плоскостью и ориентацией сферы в трехмерном пространстве. Требуется перекатить сферу из заданного начального состояния в заданное терминальное состояние так, чтобы кривая, пробегаемая точкой контакта на плоскости, имела минимальную длину. Управлением является скорость центра сферы.

Описанная задача имеет большое значение для робототехники при моделировании движения сферы в руке робота-манипулятора. Задачи о качении поверхностей вызывают большой интерес в механике, робототехнике и теории управления (см., например, работы [1]–[4]).

Задача об оптимальном качении сферы по плоскости была поставлена в работе Дж. Хаммерсли [5]. А. Артурс и Дж. Уолш в [6] доказали, что уравнения для экстремальных траекторий в этой задаче интегрируемы в эллиптических функциях. В. Джарджевич в [7], [8] показал, что при оптимальном качении точка контакта сферы и плоскости движется по эластикам Эйлера (стационарным конфигурациям упругого стержня на плоскости; см. [9], [10]), и описал возможные типы качения сферы. Однако явная параметризация экстремальных траекторий не была получена.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00246-а).

Остается открытым важный вопрос об оптимальности экстремальных траекторий. Малые дуги экстремальных траекторий оптимальны, но большие дуги, вообще говоря, не оптимальны. Точка, в которой экстремальная траектория теряет оптимальность, называется точкой разреза. В работе [11] начато исследование этих точек на экстремальных траекториях. Описаны непрерывные и дискретные симметрии задачи, охарактеризованы соответствующие точки Максвелла (точки пересечения экстремальных траекторий с одинаковыми значениями функционала и времени). Известно (см. [12]), что после точки Максвелла экстремальная траектория не может быть оптимальной. В работе [11] точки Максвелла, соответствующие непрерывным и дискретным симметриям задачи, были описаны алгебраическими уравнениями в пространстве состояний.

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [11]. Получены результаты в двух направлениях. Во-первых, дается явная параметризация экстремальных траекторий эллиптическими функциями и интегралами; для получения этой параметризации вводятся естественные эллиптические координаты в пространстве сопряженных переменных принципа максимума Понтрягина. Во-вторых, исследована асимптотика экстремальных траекторий при качении сферы вдоль эластик, близких к прямой (т.е. вдоль синусоид малой амплитуды); для этих траекторий изучено поведение точек Максвелла, получены явные оценки времени разреза.

Напомним постановку задачи оптимального управления и некоторые известные результаты. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ – точка касания сферы и плоскости, $R \in \mathrm{SO}(3)$ – вращение трехмерного пространства, переводящее текущую ориентацию сферы в исходную. Задача об оптимальном качении сферы единичного радиуса по плоскости ставится следующим образом (см. [7], [8]):

$$\dot{x} = u_1, \qquad \dot{y} = u_2, \tag{1.1}$$

$$\dot{R} = R(u_2 A_1 - u_1 A_2), \tag{1.2}$$

$$Q = (x, y, R) \in M = \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3), \qquad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

$$Q(0) = Q_0 = (0, 0, \mathrm{Id}), \qquad Q(t_1) = Q_1, \tag{1.4}$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min. \tag{1.5}$$

Здесь и далее используются базисные матрицы в алгебре Ли $\mathrm{so}(3)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Допустимые управления предполагаются измеримыми и существенно ограниченными, а допустимые траектории – липшицевыми.

Задача (1.1)–(1.5) есть левоинвариантная субриманова задача на группе Ли $M = \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$. Введем следующий репер на этой группе Ли: $e_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $V_i(R) = RA_i$, $i = 1, 2, 3$. В терминах левоинвариантных полей $X_1 = e_1 - V_2$, $X_2 = e_2 + V_1$ управляемая система (1.1)–(1.3) принимает вид

$$\dot{Q} = u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q), \qquad Q \in M = \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.7}$$

Функционал (1.5) есть функционал субримановой длины для левоинвариантной субримановой структуры, заданной полями X_1, X_2 как ортонормированным базисом:

$$l = \int_0^{t_1} \langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle^{1/2} \, dt \to \min, \qquad \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \tag{1.8}$$

По теореме Рашевского–Чжоу (см. [4]) система (1.7) вполне управляема, т.е. любые две точки пространства состояний M можно соединить траекторией системы. Из теоремы Филиппова (см. [4]) следует существование оптимальных управлений в задаче (1.1)–(1.5). Для исследования оптимальных управлений применяется принцип максимума Понтрягина (см. [13], [4]). В анормальном случае сфера катится по прямой на плоскости (x, y). Для нормального случая в работе В. Джарджевича [7] гамильтонова система принципа максимума Понтрягина (для траекторий единичной скорости $\langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle \equiv 1$) получена в следующей форме:

$$\dot{\theta} = c, \qquad \dot{c} = -r \sin\theta, \qquad \dot{\alpha} = \dot{r} = 0, \tag{1.9}$$

$$\dot{x} = \cos(\theta + \alpha), \qquad \dot{y} = \sin(\theta + \alpha), \tag{1.10}$$

$$\dot{R} = R\Omega, \qquad \Omega = \sin(\theta + \alpha) A_1 - \cos(\theta + \alpha) A_2, \tag{1.11}$$

$$\theta \in S^1, \qquad c \in \mathbb{R}, \qquad r \geqslant 0, \qquad \alpha \in S^1, \qquad Q = (x, y, R) \in M, \tag{1.12}$$

$$Q(0) = Q_0 = (0, 0, \mathrm{Id}). \tag{1.13}$$

Уравнения (1.9)–(1.11) дают координатное представление гамильтоновой системы на поверхности уровня $\{H = 1/2\}$ в кокасательном расслоении для гамильтониана $H = ((h_1 - H_2)^2 + (h_2 + H_1)^2)/2$, где $h_i(\lambda) = \langle \lambda, e_i \rangle$, $H_i(\lambda) = \langle \lambda, V_i \rangle$, $\lambda \in T^*M$ (подробности см. в [7], [11]). Подсистема (1.9) гамильтоновой системы для сопряженных переменных (θ, c, r, α) есть уравнение маятника, а проекции экстремальных кривых на плоскость (x, y) суть эйлеровы эластики – стационарные конфигурации упругого стержня на плоскости с закрепленными концами и касательными на концах (см. [10]). В. Джарджевич в [7] описал разные качественные типы качения сферы по эластикам различных видов (инфлексионных, неинфлексионных, окружности, прямой), а также получил алгебраические и дифференциальные уравнения для углов Эйлера вдоль экстремальных кривых (мы приведем эти уравнения и воспользуемся некоторыми из них в § 3).

В работе [11] описаны непрерывные и дискретные симметрии экспоненциального отображения, параметризующего решения гамильтоновой системы:

$$\mathrm{Exp} : (\lambda, t) \mapsto Q_t, \qquad (\lambda, t) \in N = C \times \mathbb{R}_+, \quad Q_t \in M,$$

$$C = \left\{ \lambda \in T^*_{Q_0} M \;\middle|\; H(\lambda) = \frac{1}{2} \right\} = \big\{ (\theta, c, \alpha, r) \mid \theta \in S^1, \, c \in \mathbb{R}, \, r \geqslant 0, \, \alpha \in S^1 \big\}.$$

Непрерывные симметрии $\{\Phi^\beta \mid \beta \in S^1\}$ суть повороты на угол β в плоскости (x, y), а дискретные симметрии ε^1, ε^2, ε^3 – отражения траекторий маятника (1.9) соответственно в осях координат $\{\theta = 0\}$, $\{c = 0\}$ и в начале координат $(\theta, c) = (0, 0)$. Определено действие симметрий в прообразе N и образе M экспоненциального отображения. Получено описание множеств Максвелла, соответствующих симметриям ε^i, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{MAX}^i = \big\{ & (\lambda, t) \in N \mid \exists \, \beta \in S^1 : \\ & (\widetilde{\lambda}, t) = \varepsilon^i \circ \Phi^\beta(\lambda, t), \, \mathrm{Exp}(\lambda, s) \not\equiv \mathrm{Exp}(\widetilde{\lambda}, s), \, \mathrm{Exp}(\lambda, t) = \mathrm{Exp}(\widetilde{\lambda}, t) \big\}. \end{aligned}$$

В частности, для симметрии ε^1 доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [11; теорема 4.1]). *Пусть* $t > 0$ *и* $Q_s = (x_s, y_s, R_s) = \operatorname{Exp}(\lambda, s)$ *есть такая экстремальная траектория, что*:

(i) $q_3(t) = 0$;

(ii) *эластика* $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0,t]\}$ *не вырождена и не центрирована в точке перегиба*.

Тогда $(\lambda, t) \in \mathrm{MAX}^1$, *поэтому для любого* $t_1 > t$ *траектория* Q_s, $s \in [0, t_1]$, *не оптимальна*.

Здесь $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ – кватернион единичной длины, соответствующий матрице $R \in \mathrm{SO}(3)$ (подробности см. в § 4, а также в [11]). В § 6 исследовано поведение точек Максвелла $(\lambda, t) \in \mathrm{MAX}^1$ вблизи устойчивого положения равновесия маятника (1.9). Для множеств Максвелла MAX^2, MAX^3 в работе [11] получены предложения, аналогичные теореме 1.1.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В § 2 построено разбиение цилиндра C на подмножества, соответствующие однотипным движениям маятника (1.9). С использованием этого разбиения на подмножестве полной меры цилиндра C введены эллиптические координаты, выпрямляющие фазовый поток маятника. В § 3 эти координаты использованы для получения параметризации экстремальных траекторий.

В §§ 4–6 исследуется асимптотика экстремальных кривых и поведение множества Максвелла MAX^1 вблизи устойчивого положения равновесия маятника. С учетом того, что это множество описано в терминах кватернионов, в § 4 выводится управляемая система, описывающая изменение кватерниона единичной длины q, соответствующего матрице вращения R. В § 5 вычислены асимптотические разложения траекторий этой системы вблизи устойчивого положения равновесия маятника. В § 6 исследуется поведение множества Максвелла MAX^1 для соответствующих экстремальных траекторий; исследована асимптотика функции $q_3(t)$, задающей это множество; получены оценки времени разреза вдоль экстремальных траекторий, соответствующих малым колебаниям маятника (1.9).

§ 2. Эллиптические координаты в прообразе экспоненциального отображения

Уравнения маятника (1.9) имеют интеграл энергии $E = c^2/2 - r\cos\theta \in [-r, +\infty)$. Цилиндр C разбивается на следующие инвариантные подмножества этого уравнения:

$$C = \bigcup_{i=1}^{7} C_i, \qquad C_i \cap C_i = \varnothing, \quad i \neq j,$$

$$C_1 = \{\lambda \in C \mid E \in (-r, r),\ r > 0\}, \qquad C_2 = \{\lambda \in C \mid E \in (r, +\infty),\ r > 0\},$$
$$C_3 = \{\lambda \in C \mid E = r > 0,\ c \neq 0\}, \qquad C_4 = \{\lambda \in C \mid E = -r,\ r > 0\},$$
$$C_5 = \{\lambda \in C \mid E = r > 0,\ c = 0\}, \qquad C_6 = \{\lambda \in C \mid r = 0,\ c \neq 0\},$$
$$C_7 = \{\lambda \in C \mid r = 0,\ c = 0\}.$$

При $\lambda \in \bigcup_{i=4}^{7} C_i$ уравнения маятника (1.9) легко интегрируются. Однако при $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{3} C_i$ для интегрирования этих уравнений и полной гамильтоновой системы (1.9)–(1.11) нам понадобятся специальные эллиптические координаты. Аналогичные координаты были применены к исследованию нескольких задач оптимального управления, для которых сопряженная система принципа максимума Понтрягина сводится к уравнению маятника (см. [12], [14], [15]).

В области $\widehat{C} = \bigcup_{i=1}^{3} C_i$ эллиптические координаты (φ, k, α, r) вводятся следующим образом (здесь и далее используются функции Якоби sn, cn, dn, E и полный эллиптический интеграл I рода K; см. [16], [17]).

Если $\lambda = (\theta, c, \alpha, r) \in C_1$, то

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k\,\mathrm{sn}(\sqrt{r}\varphi, k), \qquad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \mathrm{dn}(\sqrt{r}\varphi, k), \qquad \frac{c}{2} = k\sqrt{r}\,\mathrm{cn}(\sqrt{r}\varphi, k),$$

при этом $k = \sqrt{(E+r)/(2r)} \in (0,1)$, $\sqrt{r}\varphi \pmod{4K} \in [0, 4K]$.

Если $\lambda = (\theta, c, \alpha, r) \in C_2$, то

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\,\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right), \qquad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right),$$
$$\frac{c}{2} = \frac{\pm\sqrt{r}}{k}\,\mathrm{dn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right),$$

где $\pm = \operatorname{sgn} c$, при этом $k = \sqrt{2r/(E+r)} \in (0,1)$, $\sqrt{r}\varphi \pmod{2kK} \in [0, 2kK]$.

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\,\mathrm{th}(\sqrt{r}\varphi), \qquad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\sqrt{r}\varphi)}, \qquad \frac{c}{2} = \frac{\pm\sqrt{r}}{\mathrm{ch}(\sqrt{r}\varphi)},$$

где $\pm = \operatorname{sgn} c$, при этом $k = 1$, $\varphi \in (-\infty, +\infty)$.

Координата k есть перепараметризованная энергия маятника. Непосредственное дифференцирование показывает, что уравнения маятника (1.9) выпрямляются в координатах (φ, k, α, r):

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{k} = 0, \qquad \dot{\alpha} = 0, \qquad \dot{r} = 0, \tag{2.1}$$

т.е. координата φ – время движения маятника.

§ 3. Параметризация экстремалей

3.1. Интегрирование подсистемы для сопряженных переменных. Если $\lambda = (\varphi, k, \alpha, r) \in \widehat{C}$, то в силу уравнений (2.1) траектории маятника (1.9) в эллиптических координатах имеют вид $\varphi_t = \varphi + t$, $k, \alpha, r = \mathrm{const}$. Учитывая выражения для эллиптических координат в области $\widehat{C}$ (см. § 2), получаем следующую параметризацию решений (θ_t, c_t) системы (1.9).

Если $\lambda \in C_1$, то

$$\sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = k\,\mathrm{sn}(\sqrt{r}\varphi_t, k), \qquad \cos\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = \mathrm{dn}(\sqrt{r}\varphi_t, k), \qquad \frac{c_t}{2} = k\sqrt{r}\,\mathrm{cn}(\sqrt{r}\varphi_t, k).$$

Если $\lambda \in C_2$, то

$$\sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = \pm\,\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi_t}{k}, k\right), \qquad \cos\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = \mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi_t}{k}, k\right),$$
$$\frac{c_t}{2} = \frac{\pm\sqrt{r}}{k}\,\mathrm{dn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi_t}{k}, k\right), \qquad \pm = \operatorname{sgn} c.$$

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = \pm \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi_t), \qquad \cos\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t)},$$
$$\frac{c_t}{2} = \frac{\pm\sqrt{r}}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t)}, \qquad \pm = \operatorname{sgn} c.$$

Для случаев $\lambda \in \bigcup_{i=4}^{7} C_i$ система (1.9) интегрируется непосредственно:

$$\begin{array}{ll} \theta_t \equiv 0,\ c_t \equiv 0 & \text{при} \ \ \lambda \in C_4; \\ \theta_t \equiv \pi,\ c_t \equiv 0 & \text{при} \ \ \lambda \in C_5; \\ \theta_t = ct + \theta,\ c_t \equiv c \neq 0 & \text{при} \ \ \lambda \in C_6; \\ \theta_t \equiv \theta,\ c_t \equiv 0 & \text{при} \ \ \lambda \in C_7. \end{array}$$

3.2. Интегрирование уравнений для x, y. Для интегрирования уравнений (1.10) с начальными условиями $x_0 = y_0 = 0$ воспользуемся симметрией задачи – поворотом

$$\overline{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad \overline{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{3.1}$$

В новых переменных получаем задачу Коши

$$\dot{\overline{x}}_t = \cos\theta_t, \qquad \dot{\overline{y}}_t = \sin\theta_t, \qquad \overline{x}_0 = \overline{y}_0 = 0. \tag{3.2}$$

Используя полученные в п. 3.1 выражения для $\sin(\theta_t/2)$, $\cos(\theta_t/2)$, интегрируем уравнения (3.2) при $\lambda \in \widehat{C}$ и получаем следующую параметризацию эйлеровых эластик $(\overline{x}_t, \overline{y}_t)$.

Если $\lambda \in C_1$, то

$$\overline{x}_t = \frac{2(\operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi_t) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi)) - \sqrt{r}t}{\sqrt{r}}, \qquad \overline{y}_t = \frac{2k(\operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi) - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t))}{\sqrt{r}}.$$

Если $\lambda \in C_2$, то

$$\overline{x}_t = \frac{2(\operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi_t/k) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi/k) - (2-k^2)\sqrt{r}t/(2k))}{k\sqrt{r}},$$
$$\overline{y}_t = \frac{\pm 2(\operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi/k) - \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t/k))}{k\sqrt{r}}, \qquad \pm = \operatorname{sgn} c.$$

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\overline{x}_t = \frac{2(\operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi_t) - \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi)) - \sqrt{r}t}{\sqrt{r}},$$
$$\overline{y}_t = \frac{\pm 2(1/\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi) - 1/\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t))}{\sqrt{r}}, \qquad \pm = \operatorname{sgn} c.$$

При $\lambda \in \bigcup_{i=4}^{7} C_i$ уравнения (3.2) интегрируются непосредственно:

$$\overline{x}_t = t, \quad \overline{y}_t = 0 \qquad \text{при} \ \ \lambda \in C_4;$$
$$\overline{x}_t = -t, \quad \overline{y}_t = 0 \qquad \text{при} \ \ \lambda \in C_5;$$
$$\overline{x}_t = \frac{\sin(ct+\theta) - \sin\theta}{c}, \quad \overline{y}_t = \frac{\cos\theta - \cos(ct+\theta)}{c} \qquad \text{при} \ \ \lambda \in C_6;$$
$$\overline{x}_t = t\cos\theta, \quad \overline{y}_t = t\sin\theta \qquad \text{при} \ \ \lambda \in C_7.$$

В терминах эллиптических координат естественно формулируются условия того, что эластика $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0,t]\}$ центрирована в точке перегиба (в вершине), т.е. условия того, что средняя точка эластики $(x_{t/2}, y_{t/2})$ есть точка перегиба (соответственно вершина). Определим переменную τ следующим образом:

$$\tau = \sqrt{r}\left(\varphi + \frac{t}{2}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \in C_1 \cup C_3,$$
$$\tau = \frac{\sqrt{r}(\varphi + \frac{t}{2})}{k} \quad \text{при} \quad \lambda \in C_2.$$

Лемма 3.1. *Пусть* $\lambda \in \widehat{C}$, $\operatorname{Exp}(\lambda, s) = (x_s, y_s, R_s)$, $t > 0$, *и пусть* $\gamma = \{(x_s, y_s) \mid s \in [0,t]\}$.

(i) *Эластика* γ *центрирована в точке перегиба тогда и только тогда, когда* $\lambda \in C_1$ *и* $\operatorname{cn}\tau = 0$.

(ii) *Эластика* γ *центрирована в вершине в том и только том случае, когда*: $\operatorname{sn}\tau = 0$ *при* $\lambda \in C_1$; $\operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau = 0$ *при* $\lambda \in C_2$; $\tau = 0$ *при* $\lambda \in C_3$.

Доказательство. Кривизна эластики γ в точке (x_s, y_s) равна $\dot\theta_s = c_s$. При $\lambda \in \widehat{C}$ эластика γ не вырождена (не является прямолинейным отрезком или дугой окружности), поэтому точки перегиба γ задаются условием $c_s = 0$, а вершины – условием $\dot c_s = -r\sin\theta_s = 0$.

(i) Средняя точка эластики $(x_{t/2}, y_{t/2})$ есть точка перегиба тогда и только тогда, когда $c_{t/2} = 0$. Воспользуемся выражениями для компоненты экстремалей c_s в эллиптических координатах (п. 3.1). Если $\lambda \in C_1$, то равенство $c_{t/2} = 0$ эквивалентно $\operatorname{cn}\tau = 0$; если $\lambda \in C_2$, то $c_{t/2} \neq 0$, так как $\operatorname{dn}\tau \neq 0$; если $\lambda \in C_3$, то $c_{t/2} \neq 0$, так как $1/\operatorname{ch}\tau \neq 0$.

Пункт (ii) доказывается аналогично.

3.3. Интегрирование уравнения для R**.** Для интегрирования уравнения (1.11) воспользуемся следующими результатами работы В. Джарджевича [7]. Вдоль экстремальных траекторий матрица R и вектор

$$\widetilde{P} = (H_1, H_2, H_3)^T = \big(\sin(\theta+\alpha) - r\sin\alpha, r\cos\alpha - \cos(\theta+\alpha), c\big)^T$$

удовлетворяют тождеству $R\widetilde{P} \equiv \text{const} \in \mathbb{R}^3$, $|R\widetilde{P}|^2 = 1 + r^2 + 2E =: M$. Пусть $M > 0$. Если $R\widetilde{P} = (0, 0, \sqrt{M})^T$, то матрица вращения имеет разложение $R(t) = e^{\varphi_1(t)A_3}e^{\varphi_2(t)A_2}e^{(\varphi_3(t)-\alpha)A_3}$, где углы Эйлера φ_1, φ_2, φ_3 удовлетворяют уравнениям

$$\cos\varphi_2 = \frac{c}{\sqrt{M}}, \qquad \sin\varphi_2 = \frac{\pm\sqrt{M - c^2}}{\sqrt{M}}, \tag{3.3}$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{\mp\sin\theta}{\sqrt{M - c^2}}, \qquad \sin\varphi_3 = \frac{\pm(r - \cos\theta)}{\sqrt{M - c^2}}, \tag{3.4}$$

$$\dot\varphi_1 = \frac{\sqrt{M}(1 - r\cos\theta)}{M - c^2}. \tag{3.5}$$

Уравнения (3.3)–(3.5) корректно определены, если $M - c^2 > 0$. В силу равенства $M - c^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2(\theta/2)$ при $r \neq 1$ имеем $M - c^2 > 0$. Если $r = 1$, то уравнения (3.3)–(3.5) по непрерывности переходят в следующие уравнения:

$$\cos\varphi_2 = \frac{c}{\sqrt{M}}, \qquad \sin\varphi_2 = \frac{\pm 2\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{M}}, \tag{3.6}$$

$$\cos\varphi_3 = \mp\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad \sin\varphi_3 = \pm\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{3.7}$$

$$\dot\varphi_1 = \frac{\sqrt{M}}{2}. \tag{3.8}$$

Если $R\widetilde{P}$ – произвольный вектор в $\mathbb{R}^3$ длины $\sqrt{M}$, то подходящим вращением он может быть переведен в вектор $(0,0,\sqrt{M})^T$. Воспользовавшись инвариантностью задачи относительно левых сдвигов на $\mathrm{SO}(3)$, получаем следующее выражение для матрицы вращения:

$$R(t) = e^{(\alpha-\varphi_3^0)A_3}e^{-\varphi_2^0 A_2}e^{\varphi_1(t)A_3}e^{\varphi_2(t)A_2}e^{(\varphi_3(t)-\alpha)A_3}, \tag{3.9}$$

где углы φ_i определяются из соотношений (3.3)–(3.5) при $r \neq 1$ и (3.6)–(3.8) при $r = 1$, а угол φ_1 удовлетворяет начальному условию $\varphi_1^0 = 0$.

Входящие в разложение (3.9) экспоненты матриц, содержащие φ_2, φ_3, выражаются через функции $\cos\varphi_2$, $\sin\varphi_2$, $\cos\varphi_3$, $\sin\varphi_3$, которые с помощью соотношений (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) выражены через переменные c, $\cos(\theta/2)$, $\sin(\theta/2)$, которые в свою очередь представлены в п. 3.1 как функции эллиптических координат или непосредственно. При $r = 1$ имеем $\varphi_1(t) = \sqrt{M}t/2$. Интегрирование уравнения (3.5) при $r \neq 1$ вынесено в п. 3.4.

В случае $M = 0$ имеем $r = 1$, $c = 0$, $\theta = 0$, откуда $u_1 = \cos\alpha$, $u_2 = \sin\alpha$. Поэтому $\Omega = u_2A_1 - u_1A_2 \equiv \mathrm{const}$ и $R(t) = e^{t\Omega}$.

3.4. Интегрирование уравнения для φ_1. Для интегрирования уравнения (3.5) с начальным условием $\varphi_1(0) = 0$ преобразуем правую часть этого уравнения:

$$\sqrt{M}\frac{1 - r\cos\theta}{M - c^2} = \sqrt{M}\left(\frac{1}{2} + \frac{1 - r^2}{2(M - c^2)}\right).$$

1) Пусть $\lambda \in C_1$; тогда из п. 3.1 получаем $c_s = 2k\sqrt{r}\,\mathrm{cn}(\sqrt{r}(\varphi + s))$, а из п. 2 получаем $E = 2k^2r - r$, откуда $M = (1-r)^2 + 4k^2r$. Преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{ds}{M - c_s^2} &= \int_0^t \frac{ds}{(1-r)^2 + 4k^2r\,\mathrm{sn}^2(\sqrt{r}(\varphi+s))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{r}(1-r)^2}\int_{\sqrt{r}\varphi}^{\sqrt{r}(\varphi+t)} \frac{dp}{1 - l\,\mathrm{sn}^2 p}, \qquad l = -\frac{4k^2r}{(1-r)^2}.\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение эллиптический интеграл III рода в следующей форме:

$$\Pi(n,u,k) = \int_0^u \frac{dt}{(1 - n\sin^2 t)\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}} = \int_0^{F(u,k)} \frac{dv}{1 - n\,\mathrm{sn}^2 v}.$$

Тогда

$$\int_0^t \frac{ds}{M - c_s^2} = \frac{1}{\sqrt{r}(1-r)^2}\big(\Pi(l, \mathrm{am}(\sqrt{r}(\varphi+t)), k) - \Pi(l, \mathrm{am}(\sqrt{r}\varphi), k)\big),$$

откуда

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{M}}{2}t + \frac{\sqrt{M}(1+r)}{2\sqrt{r}(1-r)}\big(\Pi(l, \operatorname{am}(\sqrt{r}(\varphi+t)), k) - \Pi(l, \operatorname{am}(\sqrt{r}\varphi), k)\big),$$

где $l = -4k^2 r/(1-r)^2$. Здесь и далее используются эллиптический интеграл первого рода F и амплитуда Якоби am (см. [16]).

2) Пусть $\lambda \in C_2$; тогда $c_s = \pm 2\sqrt{r}/k \operatorname{dn}(\sqrt{r}(\varphi+t)/k)$, $M = (1-r)^2 + 4r/k^2$, и аналогичное вычисление дает

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{M}}{2}t + \frac{\sqrt{M}k(1+r)}{2\sqrt{r}(1-r)}\left(\Pi\left(l, \operatorname{am}\left(\frac{\sqrt{r}(\varphi+t)}{k}\right), k\right) - \Pi\left(l, \operatorname{am}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}\right), k\right)\right),$$

где $l = -4r/(1-r)^2$.

3) Пусть $\lambda \in C_3$; тогда $c_s = \pm 2\sqrt{r}/\operatorname{ch}(\sqrt{r}(\varphi+s))$, $M = (1+r)^2$, и угол φ_1 выражается через элементарные функции:

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{M}}{2}t + \frac{\sqrt{M}k(1-r^2)}{8r^{3/2}}\big(I(\sqrt{r}(\varphi+t), a) - I(\sqrt{r}\varphi, a)\big),$$

$$I(v, a) = \int_0^v \frac{dt}{a^2 + \operatorname{th}^2 t} = \frac{at - \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}(e^t(a^2 \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)/a)}{a + a^3},$$

где $a = (1-r)/(2\sqrt{r})$.

4) Пусть $\lambda \in C_6$; тогда $r = 0$, $c \equiv \mathrm{const} \neq 0$, $M = 1 + c^2$, откуда $\dot\varphi_1 = \sqrt{M} = \sqrt{1+c^2}$, $\varphi_1(t) = \sqrt{1+c^2}t$.

5) В случае $\lambda \in C_4 \cup C_5 \cup C_7$ выражение для матрицы вращения вычисляется непосредственно:

$$\theta_t \equiv \mathrm{const} = \theta, \qquad \Omega = \sin(\alpha+\theta)A_1 - \cos(\alpha+\theta)A_2 \equiv \mathrm{const}, \qquad R(t) = e^{t\Omega}.$$

Итак, для задачи об оптимальном качении сферы по плоскости получена параметризация нормальных экстремалей, т.е. траекторий гамильтоновой системы (1.9)–(1.13). В п. 3.1 проинтегрированы уравнения для сопряженных переменных θ, c; в п. 3.2 – уравнения для точки контакта сферы и плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; наконец, в пп. 3.3, 3.4 проинтегрировано уравнение для матрицы вращения сферы $R \in \mathrm{SO}(3)$. В отличие от других родственных задач оптимального управления, в которых подсистема для сопряженных переменных принципа максимума сводится к уравнению маятника: субриманова задача в случае Мартине (см. [18]), нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2, 3, 5)$ (см. [17]), задача Эйлера об эластиках (см. [14]), субриманова задача на группе движений плоскости (см. [15]), где экстремали параметризуются функциями Якоби cn, sn, dn, E, в задаче о качении сферы по плоскости дополнительно возникает эллиптический интеграл III рода Π. Это представляет существенное новое затруднение при анализе задачи о качении сферы по плоскости и указывает на ее более сложную природу по сравнению с другими упомянутыми задачами. Другие признаки этого рода будут отмечены в § 6 после исследования предельного поведения множества Максвелла и времени разреза.

§ 4. Управляемая система в терминах кватернионов

Для описания изменения ориентации катящейся сферы удобно наряду с матрицей вращения R использовать кватернионы. В работе [11] кватернионы использованы для получения уравнений множеств Максвелла. В этом параграфе выводятся уравнения управляемой системы, описывающей качение сферы по плоскости, в терминах кватернионов.

Пусть $\mathbb{H} = \{q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \mid q_0, \dots, q_3 \in \mathbb{R}\}$ – алгебра кватернионов, $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}$ – единичная сфера, $I = \{q \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} q = q_0 = 0\}$ – подпространство чисто мнимых кватернионов. Любой кватернион $q \in S^3$ задает вращение евклидова пространства I (см. [19], [20]):

$$q \in S^3 \quad \Longrightarrow \quad R_q(a) = qaq^{-1}, \quad a \in I, \quad R_q \in \mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SO}(I).$$

Отображение $p\colon q \mapsto R_q$ есть двулистное накрытие S^3 над $\mathrm{SO}(3)$: $R_q = R_{\widehat{q}}$ тогда и только тогда, когда $q = \pm\widehat{q}$. В силу того, что проекция $p : S^3 \to \mathrm{SO}(3)$ есть локальный диффеоморфизм, любое векторное поле V на $\mathrm{SO}(3)$ имеет единственный лифт на S^3, т.е. такое векторное поле W на S^3, что $p_* W = V$. Поэтому и управляемая система $\dot{R} = R(u_2 A_1 - u_1 A_2)$ имеет единственный лифт на S^3. Для его вычисления воспользуемся выражением для матрицы $R_q = p(q) \in \mathrm{SO}(3)$, $\quad q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in S^3$, приведенным в книге [21]:

$$R = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2\,q_1\,q_2 - 2\,q_0\,q_3 & 2\,q_0\,q_2 + 2\,q_1\,q_3 \\ 2\,q_1\,q_2 + 2\,q_0\,q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & -2\,q_0\,q_1 + 2\,q_2\,q_3 \\ -2\,q_0\,q_2 + 2\,q_1\,q_3 & 2\,q_0\,q_1 + 2\,q_2\,q_3 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Продифференцировав эту матрицу в силу системы $\dot{R} = R(u_2 A_1 - u_1 A_2)$, получаем систему уравнений относительно $\dot{q}_0$, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$. Решая эту систему, получаем управляемую систему на S^3:

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = \dfrac{1}{2}(q_2 u_1 - q_1 u_2), \\ \dot{q}_1 = \dfrac{1}{2}(q_3 u_1 + q_0 u_2), \\ \dot{q}_2 = \dfrac{1}{2}(-q_0 u_1 + q_3 u_2), \\ \dot{q}_3 = \dfrac{1}{2}(-q_1 u_1 - q_2 u_2), \end{cases} \qquad q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in S^3, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.2}$$

Матрице $R(t)$, удовлетворяющей системе $\dot{R} = R(u_2 A_1 - u_1 A_2)$ и начальному условию $R(0) = \mathrm{Id}$, однозначно сопоставляется кватернион $q(t)$, удовлетворяющий системе (4.2) и начальному условию $q(0) = 1$. Итак, управляемая система на $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$ (1.1), (1.2) имеет лифт на $\mathbb{R}^2 \times S^3$ вида (1.1), (4.2) с начальными условиями $(x, y)(0) = (0, 0)$, $q(0) = 1$.

§ 5. Асимптотика экстремальных траекторий

Большой интерес представляет исследование экстремальных траекторий в рассматриваемой задаче. Ввиду сложности параметрических уравнений этих траекторий провести это исследование в полном объеме весьма затруднительно. В этом и следующем параграфах мы начнем это исследование с асимптотического случая, соответствующего малым колебаниям маятника (1.9); в этой асимптотике эластики (x, y), по которым катится сфера, представляются синусоидами малой амплитуды.

В этом параграфе выводится указанная асимптотика экстремальных траекторий. Для представления ориентации сферы в пространстве будет использоваться не матрица вращения $R \in \mathrm{SO}(3)$, а кватернион $q \in S^3$, так как используемые для определения оптимальности экстремальных траекторий множества

Максвелла описаны в работе [11] в терминах кватернионов. Поэтому используется введенная в § 4 управляемая система (4.2). Соответствующая нормальная гамильтонова система принципа максимума имеет вид

$$\dot\theta = c, \qquad \dot c = -r\sin\theta, \qquad \dot\alpha = \dot r = 0, \tag{5.1}$$

$$\dot x = u_1, \qquad \dot y = u_2, \tag{5.2}$$

$$\dot q_0 = \frac{1}{2}(q_2u_1 - q_1u_2), \tag{5.3}$$

$$\dot q_1 = \frac{1}{2}(q_3u_1 + q_0u_2), \tag{5.4}$$

$$\dot q_2 = \frac{1}{2}(-q_0u_1 + q_3u_2), \tag{5.5}$$

$$\dot q_3 = \frac{1}{2}(-q_1u_1 - q_2u_2), \tag{5.6}$$

$$u_1 = \cos(\theta+\alpha), \qquad u_2 = \sin(\theta+\alpha), \tag{5.7}$$

$$(x,y)(0) = (0,0), \qquad (q_0,q_1,q_2,q_3)(0) = (1,0,0,0). \tag{5.8}$$

Пусть $\lambda = (\theta, c, \alpha, r) \in C_1$, поэтому $r > 0$. Будем считать, что

$$r \in [r_{\min}, r_{\max}], \qquad r_{\max} > r_{\min} > 0, \tag{5.9}$$

и выведем асимптотику решений системы (5.1)–(5.8) при $\theta_0^2 + c_0^2 \to 0$.

Перейдем в системе (5.1)–(5.8) к новым переменным:

$$(t,\theta,c,\alpha,r,x,y,u_1,u_2,q_0,q_1,q_2,q_3) \to (s,\theta,d,\alpha,m,\overline{x},\overline{y},\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{q}_0,\overline{q}_1,\overline{q}_2,\overline{q}_3),$$

$$s = mt, \qquad d = \frac{c}{m}, \qquad m = \sqrt{r},$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A(\alpha)\begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(\alpha)\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = A(\alpha)\begin{pmatrix} \overline{q}_1 \\ \overline{q}_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} q_0 = \overline{q}_0, \\ q_3 = \overline{q}_3. \end{cases}$$

Обозначим дифференцирование по новому времени $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}$ через $'$. В новых переменных система (5.1)–(5.8) примет вид

$$\theta' = d, \qquad d' = -\sin\theta, \qquad \alpha' = m' = 0, \tag{5.10}$$

$$\overline{x}' = \frac{\overline{u}_1}{m}, \qquad \overline{y}' = \frac{\overline{u}_2}{m}, \qquad \overline{u}_1 = \cos\theta, \qquad \overline{u}_2 = \sin\theta, \tag{5.11}$$

$$\overline{q}_0' = \frac{1}{2m}(\overline{q}_2\overline{u}_1 - \overline{q}_1\overline{u}_2), \qquad \overline{q}_1' = \frac{1}{2m}(\overline{q}_3\overline{u}_1 + \overline{q}_0\overline{u}_2), \tag{5.12}$$

$$\overline{q}_2' = \frac{1}{2m}(-\overline{q}_0\overline{u}_1 + \overline{q}_3\overline{u}_2), \qquad \overline{q}_3' = \frac{1}{2m}(-\overline{q}_1\overline{u}_1 - \overline{q}_2\overline{u}_2), \tag{5.13}$$

$$(\overline{x},\overline{y})(0) = (0,0), \qquad (\overline{q}_0,\overline{q}_1,\overline{q}_2,\overline{q}_3)(0) = (1,0,0,0). \tag{5.14}$$

В силу условия (5.9) $O(\theta_0^2 + c_0^2)$ есть $O(\theta_0^2 + d_0^2)$, и обратно. Вычислим асимптотику решений системы (5.10)–(5.14) с начальным условием $\theta(0) = \theta_0$, $d(0) = d_0$ при $\theta_0^2 + d_0^2 \to 0$ с точностью до $O(\theta_0^2 + d_0^2)$. Обозначим $\rho_0 = \sqrt{\theta_0^2 + d_0^2}$.

Асимптотика решений уравнения маятника (5.10) хорошо известна – это малые колебания:

$$\theta(s) = \theta_0\cos s + d_0\sin s + O(\rho_0^2), \qquad d(s) = -\theta_0\sin s + d_0\cos s + O(\rho_0^2).$$

Отсюда

$$\overline{u}_1(s) = 1 + O(\rho_0^2), \qquad \overline{u}_2(s) = \theta_0 \cos s + d_0 \sin s + O(\rho_0^2). \tag{5.15}$$

Интегрируя обыкновенные дифференциальные уравнения (5.11) с начальными условиями (5.14), получаем

$$\overline{x}(s) = \frac{s}{m} + O(\rho_0^2), \tag{5.16}$$

$$\overline{y}(s) = \frac{1}{m}(\theta_0 \sin s + d_0(1 - \cos s)) + O(\rho_0^2). \tag{5.17}$$

Таким образом, с точностью до $O(\rho_0^2)$, кривая $(\overline{x}, \overline{y})$, а потому и исходная кривая (x, y), есть синусоида малой амплитуды ρ_0/m.

Теперь вычислим асимптотику для компонент кватерниона $\overline{q}_0, \overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3$. Из уравнений (5.12), (5.13) и разложений (5.15) получаем уравнения

$$\overline{q}_0'(s) = \frac{1}{2m}(\overline{q}_2 - \overline{q}_1(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2), \tag{5.18}$$

$$\overline{q}_1'(s) = \frac{1}{2m}(\overline{q}_3 + \overline{q}_0(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2), \tag{5.19}$$

$$\overline{q}_2'(s) = \frac{1}{2m}(-\overline{q}_0 + \overline{q}_3(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2), \tag{5.20}$$

$$\overline{q}_3'(s) = \frac{1}{2m}(-\overline{q}_1 - \overline{q}_2(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2). \tag{5.21}$$

Пусть $\overline{q}_i(s) = \alpha_{i0}(s) + \alpha_{i1}(s)\theta_0 + \alpha_{i2}(s)d_0 + O(\rho_0^2)$, $i = 0, \dots, 3$. Тогда из разложений (5.18)–(5.21) получаем

$$\alpha_{00}' = \frac{\alpha_{20}}{2m}, \qquad \alpha_{10}' = \frac{\alpha_{30}}{2m}, \qquad \alpha_{20}' = -\frac{\alpha_{00}}{2m}, \qquad \alpha_{30}' = -\frac{\alpha_{10}}{2m},$$

из начальных условий (5.14) получаем

$$\alpha_{00}(0) = 1, \qquad \alpha_{10}(0) = \alpha_{20}(0) = \alpha_{30}(0) = 0.$$

Поэтому

$$\alpha_{00} = \cos\frac{s}{2m}, \qquad \alpha_{10} = 0, \qquad \alpha_{20} = -\sin\frac{s}{2m}, \qquad \alpha_{30} = 0.$$

Для коэффициентов α_{i1}, α_{i2} получаем из (5.18)–(5.21) дифференциальные уравнения

$$\alpha_{01}' = \frac{\alpha_{21}}{2m}, \qquad \alpha_{02}' = \frac{\alpha_{22}}{2m},$$

$$\alpha_{21}' = -\frac{\alpha_{01}}{2m}, \qquad \alpha_{22}' = -\frac{\alpha_{02}}{2m},$$

$$\alpha_{11}' = \frac{1}{2m}\left(\alpha_{31} + \cos\frac{s}{2m}\cos s\right), \qquad \alpha_{12}' = \frac{1}{2m}\left(\alpha_{32} + \cos\frac{s}{2m}\sin s\right),$$

$$\alpha_{31}' = \frac{1}{2m}\left(-\alpha_{11} + \sin\frac{s}{2m}\cos s\right), \qquad \alpha_{32}' = \frac{1}{2m}\left(-\alpha_{12} + \sin\frac{s}{2m}\sin s\right)$$

с начальными условиями $\alpha_{ij}(0) = 0$, $i = 0, \dots, 3$, $k = 1, 2$. Решение этих дифференциальных уравнений имеет вид

$$\alpha_{01}(s) \equiv 0, \quad \alpha_{02}(s) \equiv 0,$$
$$\alpha_{11}(s) = \frac{1}{2(m^2-1)}\left(m\cos\frac{s}{2m}\sin s - (1+\cos s)\sin\frac{s}{2m}\right),$$
$$\alpha_{12}(s) = \frac{1}{2(m^2-1)}\left(m(1-\cos s)\cos\frac{s}{2m} - \sin s\sin\frac{s}{2m}\right),$$
$$\alpha_{21}(s) \equiv 0, \quad \alpha_{22}(s) \equiv 0,$$
$$\alpha_{31}(s) = \frac{1}{2(m^2-1)}\left((-1+\cos s)\cos\frac{s}{2m} + m\sin s\sin\frac{s}{2m}\right),$$
$$\alpha_{32}(s) = \frac{1}{2(m^2-1)}\left(\sin s\cos\frac{s}{2m} - m(1+\cos s)\sin\frac{s}{2m}\right).$$

Таким образом, получаем следующую асимптотику для компонент кватерниона $\overline{q}_i$:

$$\overline{q}_0(s) = \cos\frac{s}{2m} + O(\rho_0^2), \tag{5.22}$$
$$\begin{aligned}\overline{q}_1(s) = {}& \frac{1}{2(m^2-1)}\left(m\cos\frac{s}{2m}\sin s - (1+\cos s)\sin\frac{s}{2m}\right)\theta_0 \\ & + \frac{1}{2(m^2-1)}\left(m(1-\cos s)\cos\frac{s}{2m} - \sin s\sin\frac{s}{2m}\right)d_0 + O(\rho_0^2),\end{aligned} \tag{5.23}$$
$$\overline{q}_2(s) = -\sin\frac{s}{2m} + O(\rho_0^2), \tag{5.24}$$
$$\begin{aligned}\overline{q}_3(s) = {}& \frac{1}{2(m^2-1)}\left((-1+\cos s)\cos\frac{s}{2m} + m\sin s\sin\frac{s}{2m}\right)\theta_0 \\ & + \frac{1}{2(m^2-1)}\left(\sin s\cos\frac{s}{2m} - m(1+\cos s)\sin\frac{s}{2m}\right)d_0 + O(\rho_0^2).\end{aligned} \tag{5.25}$$

Заметим, что эти разложения имеют устранимую особенность при $m = 1$, так как числители всех дробей со знаменателем $m^2 - 1$ обращаются в нуль при $m = 1$:

$$\alpha_{11}(s) = \frac{1}{4}\cos\frac{s}{2}(s + \sin s) + O(m-1),$$
$$\alpha_{12}(s) = \frac{1}{4}\sin\frac{s}{2}(s + \sin s) + O(m-1),$$
$$\alpha_{31}(s) = \frac{1}{4}\sin\frac{s}{2}(-s + \sin s) + O(m-1),$$
$$\alpha_{32}(s) = \frac{1}{4}\cos\frac{s}{2}(s - \sin s) + O(m-1),$$
$$\overline{q}_1 = \alpha_{11}\theta_0 + \alpha_{12}d_0 + O(\rho_0^2), \qquad \overline{q}_3 = \alpha_{31}\theta_0 + \alpha_{32}d_0 + O(\rho_0^2).$$

Итак, получены асимптотические разложения для переменных $\overline{x}$ (5.16), $\overline{y}$ (5.17) и $\overline{q}_i$ (5.22)–(5.25). Разложения для исходных x, y, q_i выражаются через найденные разложения с помощью формул (5.10).

В следующем параграфе мы используем полученную асимптотику при исследовании точек Максвелла и времени разреза при $\rho_0 \to 0$.

§ 6. Предельное поведение множества Максвелла и времени разреза

В статье [11] получено уравнение, задающее множество Максвелла MAX[1] для невырожденных и не центрированных в точке перегиба эластик $q_3(t) = 0$ (см. теорему 1.1 или [11; теорема 4.11]). В этом параграфе исследуется асимптотика корней этого уравнения при $\rho_0 \to 0$.

Воспользуемся равенством (5.25). Обозначим $p = s/2$ и вернемся к исходному $q_3(t) = \overline{q}_3(t)$; тогда

$$q_3(p, m, \theta_0, d_0) = \frac{d_0 \cos p - \theta_0 \sin p}{m^2 - 1}\left(\cos\frac{p}{m}\sin p - m\cos p \sin\frac{p}{m}\right) + O(\rho_0^2). \quad (6.1)$$

Корни множителя $d_0 \cos p - \theta_0 \sin p$ имеют простой геометрический смысл для синусоиды $(\overline{x}^0(s), \overline{y}^0(s)) = (s/m, (\theta_0 \sin s + d_0(1 - \cos s))/m)$ – главного члена асимптотики эластики $(\overline{x}(s), \overline{y}(s))$, а потому и для синусоиды $(x^0(s), y^0(s)) = (\cos\alpha\overline{x}^0(s) + \sin\alpha\overline{y}^0(s), -\sin\alpha\overline{x}^0(s) + \cos\alpha\overline{y}^0(s))$ – главного члена асимптотики эластики $(x(s), y(s))$ при $\rho_0 \to 0$. Легко видеть, что синусоида $\{(x^0(\sigma), y^0(\sigma)) \mid \sigma \in [0, s]\}$ центрирована в точке перегиба тогда и только тогда, когда $d_0 \cos p - \theta_0 \sin p = 0$.

В силу теоремы 1.1 обращение в нуль функции q_3 означает наличие точки Максвелла для эластик, не центрированных в точке перегиба. Поэтому мы исследуем корни множителя $(\cos\frac{p}{m}\sin p - m\cos p\sin\frac{p}{m}))/(m^2-1)$. При $m = 0$ этот множитель имеет неустранимую особенность, а при $m = 1$ он не обращается в нуль для $p \neq 0$. Поэтому далее будет рассмотрена функция

$$g_1(p, m) = \cos\frac{p}{m}\sin p - m\cos p\sin\frac{p}{m}, \qquad m \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \qquad p > 0, \quad (6.2)$$

и исследован ее первый положительный корень

$$p_1(m) = \min\{p > 0 \mid g_1(p, m) = 0\}. \quad (6.3)$$

Будет показано, что траектории $Q_t = \operatorname{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda = (\theta_0, d_0, m, \alpha) \in C_1$, при $\rho_0 \to 0$ содержат точку разреза (т.е. не оптимальны) на отрезках $t \in [0, t_1 + \varepsilon]$, $t_1 = 2p_1(m)/m$.

6.1. Исследование функции $p_1(m)$. В теореме 6.1 доказана конечность функции $p_1(m)$ при $m > 0$, $m \neq 1$, приведены ее двусторонние оценки и доказаны свойства монотонности и регулярности.

Определим следующие функции:

$$\widehat{p}(m) = \begin{cases} m\rho & \text{при } \ m \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right], \\ m\pi\left(\left[\dfrac{m}{1-m}\right] + 1\right) & \text{при } \ m \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right), \\ \pi\left(\left[\dfrac{1}{m-1}\right] + 1\right) & \text{при } \ m \in (1, 2], \\ \rho & \text{при } \ m > 2, \end{cases} \qquad \text{где } \ \rho = \operatorname{tg}\rho, \quad \rho \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\widetilde{p}(m) = \begin{cases} m\pi\left(\left[\dfrac{m}{1-m}\right] + 2\right) & \text{при } \ m \in (0, 1), \\ \pi\left(\left[\dfrac{1}{m-1}\right] + 2\right) & \text{при } \ m \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $m \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. *Тогда функция* $g_1(p,m)$ *имеет минимальный положительный корень* $p_1(m)$, *удовлетворяющий следующим свойствам*:

a) $\widehat{p}(m) \leqslant p_1(m) < \widetilde{p}(m)$, *поэтому* $\lim_{m\to 1} p_1(m) = +\infty$;

b) $p_1(m)$ *возрастает при* $m \in (0,1)$ *и убывает при* $m \in (1,+\infty)$;

c) *функция* $p_1(m)$ *непрерывна при* $m \in (0,1) \cup (1,+\infty)$;

d) *функция* $p_1(m)$ *имеет следующие частные значения*:
- *если* $m^* = 1 + \frac{1}{n}$, *то* $p_1(m^*) = \pi(n+1)$,
- *если* $m^* = \frac{n}{n+1}$, *то* $p_1(m^*) = \pi n$,
- *если* $m^* = 1 + \frac{2}{2n+1}$, *то* $p_1(m^*) = \pi\big(n + \frac{3}{2}\big)$,
- *если* $m^* = \frac{2n+1}{2n+3}$, *то* $p_1(m^*) = \pi(n + \frac{1}{2})$;

e) *функция* $p_1(m)$ *непрерывно дифференцируема при*

$$m \in (0,1) \cup (1,+\infty) \setminus \left(\left\{ \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \right).$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ $p_1'(\frac{n}{n+1}) = +\infty$, $p_1'(\frac{n+1}{n}) = -\infty$;

f) *в точке* $p = p_1(m)$ *функция* $p \mapsto g_1(p,m)$ *меняет знак.*

Доказательство этой теоремы основывается на леммах 6.1–6.9, приведенных далее. Графики функций $p_1(m)$ и ее границ $\widehat{p}(m)$, $\widetilde{p}(m)$ приведены на рис. 1.

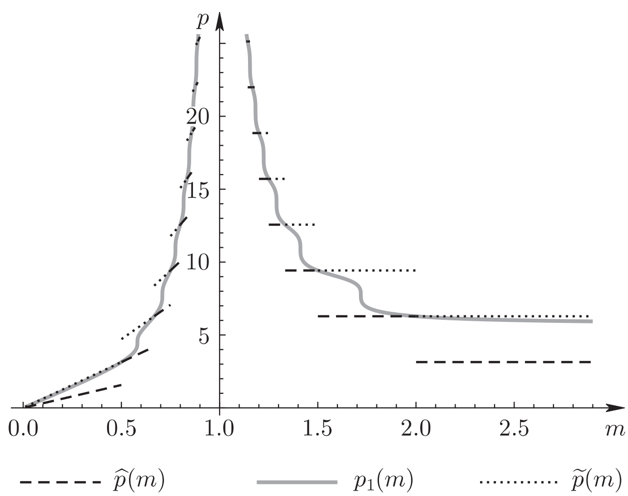

Рис. 1. Графики функций $\widehat{p}(m)$, $p_1(m)$ и $\widetilde{p}(m)$, где $\widehat{p}(m) \leqslant p_1(m) < \widetilde{p}(m)$

Лемма 6.1. *Если* $m > 1$ *и* $p \in (0,\pi)$, *то* $g_1(p,m) > 0$, *поэтому* $p_1(m) > \pi$.

Доказательство. В силу выражения для производной

$$\frac{\partial g_1}{\partial p} = \frac{m^2-1}{m} \sin p \sin \frac{p}{m} \tag{6.4}$$

функция $p \mapsto g_1(p,m)$ возрастает при $p \in (0,\pi)$. Так как $g_1(0,m) = 0$, то $g_1(p,m) > 0$ для любого $p \in (0,\pi)$.

Лемма 6.2. *Если* $m > 1$, *то* $g_1(\widetilde{p}(m), m) < 0$, *поэтому* $p_1(m) < \widetilde{p}(m)$.

Доказательство. Пусть m принадлежит промежутку $(1, 2]$. Этот промежуток покрывается полуинтервалами $\widetilde{I}(n) = \left(1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n}\right]$, где $n \in \mathbb{N}$. Если $m \in \widetilde{I}(n)$, то $\widetilde{p} = \widetilde{p}(m) = \pi(n+2)$ и $g_1(\widetilde{p}, m) = (-1)^{n+1} m \sin\left(\frac{2+n}{m}\pi\right)$. Так как $n < \frac{2+n}{m} < n+1$, то:
– если $n = 2s$, то $\sin\left(\frac{2+n}{m}\pi\right) > 0$, поэтому $g_1(\widetilde{p}, m) < 0$;
– если $n = 2s - 1$, то $\sin\left(\frac{2+n}{m}\pi\right) < 0$, поэтому $g_1(\widetilde{p}, m) < 0$.

Для случая $m > 2$ имеем $\widetilde{p}(m) = 2\pi$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $g_1(2\pi, m) = -m \sin \frac{2\pi}{m} < 0$.

Лемма 6.3. *Если* $m = 1 + \frac{1}{n}$, *где* $n \in \mathbb{N}$, *то* $p_1(m) = \pi(n+1) = \widehat{p}(m)$.

Доказательство. Обозначим $m^* = 1 + \frac{1}{n}$, $p^* = \pi(n+1)$, где $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $g_1(p^*, m^*) = 0$. Докажем, что $g_1(p, m^*) > 0$ для всех $p \in (0, p^*)$. Рассмотрим значения функции $g_1(p, m^*)$ в критических точках по переменной p, когда $\frac{\partial g_1}{\partial p} = 0$. Функция g_1 имеет две серии таких критических точек: $p^1(k_1) = \pi k_1$ и $p^2(k_2) = \pi k_2 m$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Рассматривая эти критические точки $p^1(k_1), p^2(k_2) \in (0, p^*)$, заключаем, что в них $g_1(p, m^*) > 0$. Поэтому $g_1(p, m^*) > 0$ для всех $p \in (0, p^*)$. Следовательно, $p_1(m^*) = p^*$.

Лемма 6.4. *Пусть* $\Omega = (1, +\infty) \setminus \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. *Тогда* $p_1 \in C^1(\Omega)$ *и* $p_1'(m) < 0$ *при* $m \in \Omega$.

Доказательство. Лемма 6.3 дает опорные точки $m^* = 1 + \frac{1}{n}$, в которых известно значение функции $p_1(m^*) = p^* = \pi(n+1)$. В этих точках $\frac{\partial g_1}{\partial p}\big|_{(p^*, m^*)} = 0$ и график функции $p_1(m)$ имеет вертикальную касательную. В данной лемме утверждается, что функция $p_1(m)$ гладкая при $m > 1$, $m \neq m^*$; докажем это включение, опираясь на неравенство $\frac{\partial g_1}{\partial p}\big|_{p = p_1(m)} \neq 0$ и теорему о неявной функции.

Пусть $m \in \Omega \cap (1, 2]$; тогда $m \in I(n) = \left(1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим значения $g_1(p^i(k_i), m)$ в критических точках $p^1(k_1), p^2(k_2)$, где $\frac{\partial g_1}{\partial p} = 0$. Легко проверить, что $g_1(p^i(k_i), m) \neq 0$, т.е. при всех $m \in I(n)$ выполнено $\frac{\partial g_1}{\partial p}\big|_{p = p_1(m)} \neq 0$ и по теореме о неявной функции $p_1(m)$ есть непрерывно дифференцируемая функция на $I(n)$, причем

$$p_1'(m) = \left. \frac{-\frac{\partial g_1(p,m)}{\partial m}}{\frac{\partial g_1(p,m)}{\partial p}} \right|_{p = p_1(m)} = -\left. \frac{p + m \operatorname{ctg} p \left(-m + p \operatorname{ctg} \frac{p}{m}\right)}{m(m^2 - 1)} \right|_{p = p_1(m)}.$$

Из условия $g_1(p, m)|_{p = p_1(m)} = 0$ получаем, что

$$m \operatorname{ctg} p \big|_{p = p_1(m)} = \operatorname{ctg} \frac{p}{m} \bigg|_{p = p_1(m)}.$$

Тогда $\operatorname{sign}(p_1'(m)) = -\operatorname{sign}(f(p_1(m), m))$, где $f(p, m) = p - m \operatorname{ctg} \frac{p}{m} + p \operatorname{ctg}^2 \frac{p}{m}$. Рассмотрим функцию f как полином второй степени относительно $\operatorname{ctg} \frac{p}{m}$. Так как $m \leqslant 2$ и по лемме 6.1 $p_1(m) > \pi > 1$, то дискриминант этого полинома $\mathrm{D}(f) = m^2 - 4p^2 < 0$, поэтому $f(p_1(m), m) > 0$ и $p_1'(m) < 0$.

Пусть $m > 2$. Тогда $\frac{\partial g_1}{\partial p}\big|_{p = p_1(m)} \neq 0$. Функция $f(p, m)$ больше нуля при $p = p_1(m)$, так как либо $\mathrm{D}(f) < 0$, а значит, $f(p, m) > 0$, либо $\mathrm{D}(f) \leqslant 0$, тогда

$m \geqslant 2p$, а $\operatorname{ctg} \frac{p}{m} > q_2$, где q_2 – больший из корней функции f как квадратичного полинома относительно $\operatorname{ctg} \frac{p}{m}$. Таким образом, $f(p_1(m), m) > 0$, поэтому $p_1'(m) < 0$.

Лемма 6.5. *Функция $p_1(m)$ непрерывна при $m > 1$.*

Доказательство. С учетом лемм 6.3, 6.4 требуется доказать, что существуют пределы

$$\lim_{m \to 1+1/n\pm 0} p_1(m) = p_1\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \pi(n+1).$$

В силу монотонности и ограниченности $p_1(m)$ при $m \neq 1 + \frac{1}{n}$ существуют конечные пределы

$$p_\pm(n) = \lim_{m \to 1+1/n\pm 0} p_1(m).$$

Неравенства $p_+(n) < \pi(n+1)$, $p_-(n) < \pi(n+1)$ противоречат равенству

$$p_1\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \pi(n+1).$$

А неравенства $p_+(n) > \pi(n+1)$, $p_-(n) > \pi(n+1)$ противоречат непрерывности кривой $\{(p,m) \mid g_1(p,m) = 0\}$ в окрестности точки $\left(\pi(n+1), 1 + \frac{1}{n}\right)$, следующей по теореме о неявной функции из неравенства

$$\frac{\partial g_1}{\partial m}\left(\pi(n+1), 1 + \frac{1}{n}\right) = -m\left(1 + \frac{1}{n}\right) \neq 0.$$

Лемма 6.6. *Если $m > 1$, то $p_1(m) \geqslant \widehat{p}(m)$, поэтому $\lim_{m \to 1+0} p_1(m) = +\infty$.*

Доказательство. Из лемм 6.4, 6.5 следует, что функция $p_1(m)$ монотонно убывает при $m \in (1, +\infty)$.

Пусть $m \in (1, 2] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{I}(n)$. Если $m \in \widetilde{I}(n)$, то $p_1(m) \geqslant \pi(n+1) = \pi([\frac{1}{m-1}] + 1) = \widetilde{p}(m)$. Так как $\lim_{m \to 1+0} \widetilde{p}(m) = +\infty$ и $p_1(m) \geqslant \widetilde{p}(m)$ для любого $m \in (1, 2]$, то $\lim_{m \to 1+0} p_1(m) = +\infty$.

При $m > 2$ рассмотрим предел $\lim_{m \to +\infty} g_1(p, m) = \sin p - p \cos p$. Так как $p_1(m)$ убывает, то $p_1(m) > \rho = \widehat{p}(m)$, где $\rho \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ – корень уравнения $p = \operatorname{tg} p$, эквивалентного уравнению $\sin p - p \cos p = 0$.

Лемма 6.7. *Если $m = 1 + \frac{2}{2n+1}$, то $p_1(m) = \pi(n + \frac{3}{2})$.*

Доказательство. Обозначим $m_* = 1 + \frac{2}{2n+1}$, $p_* = \pi(n + \frac{3}{2})$. Очевидно, что $g_1(p_*, m_*) = 0$. Далее, проверим, что на отрезке $p \in [\widehat{p}(m_*), p_*]$, где $\widehat{p}(m_*) = \pi(n+1)$, нет других корней функции $g_1(p, m_*)$, кроме p_*. Это следует из того, что $g_1(\widehat{p}(m_*), m_*) > 0$ и $\frac{\partial g_1}{\partial p}(p, m_*) \neq 0$ при $p \in [\widehat{p}(m_*), p_*)$.

Лемма 6.8. *Если $m > 1$, то функция $p \mapsto g_1(p, m)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $p = p_1(m)$.*

Доказательство. Из леммы 6.4 следует, что $\frac{\partial g_1}{\partial p}\big|_{p = p_1(m)} \neq 0$ при $m \in \Omega$, поэтому $g_1(p, m)$ меняет знак при переходе через точку $p = p_1(m)$. Из леммы 6.1 следует, что $g_1(p, m) > 0$ для всех $p \in (0, p_1(m))$. Поэтому при переходе через $p = p_1(m)$ знак меняется с плюса на минус.

Пусть $m = m^* = 1 + \frac{1}{n}$. Из лемм 6.1, 6.3 следует, что $g_1(p, m^*) > 0$ при $p \in (0, p_1(m^*))$. Так как $g_1(p,m)$ – аналитическая функция, то $p_1(m^*)$ – изолированный корень функции $g_1(p, m^*)$. Из предыдущего абзаца по непрерывности следует, что $g_1(p, m^*)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $p_1(m^*)$.

Лемма 6.9. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ $p_1'\big(1 + \frac{1}{n}\big) = -\infty$.

Доказательство. В силу леммы 6.3 для любого $m^* = 1 + \frac{1}{n}$ известно явное значение $p^* = p_1(m^*) = \pi(n+1)$. Имеем

$$\frac{\partial g_1(p^*, m^*)}{\partial m} = \pi n, \qquad \frac{\partial g_1(p^*, m^*)}{\partial p} = 0,$$

поэтому

$$\lim_{m \to m^*} p_1'(m) = - \lim_{m \to m^*} \left. \frac{\frac{\partial g_1}{\partial m}(p,m)}{\frac{\partial g_1}{\partial p}(p,m)} \right|_{p = p_1(m)} = \infty.$$

В силу непрерывности $p_1(m)$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях получаем

$$p_1'(m^*) = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{p_1(m^* + \Delta m) - p_1(m^*)}{\Delta m} = \lim_{\Delta m \to 0} p_1'(\widetilde{m}) = \lim_{m \to m^*} p_1'(m) = \infty,$$

где $\widetilde{m} \in (m^*, m^* + \Delta m)$. В силу убывания функции $p_1(m)$ при $m > 1$ заключаем что $p_1'(m^*) = -\infty$.

Доказательство теоремы 6.1. В случае $m > 1$ теорема следует из приведенных выше лемм 6.2–6.9.

В случае $m \in (0,1)$ воспользуемся заменой переменных $\overline{p} = \frac{p}{m}$, $\overline{m} = \frac{1}{m} > 1$, в которых $g_1(\overline{p}, \overline{m}) = \frac{1}{m} g_1(p,m)$. Заключаем, что $g_1(\overline{p}, \overline{m}) = 0$ тогда и только тогда, когда $g_1(p,m) = 0$. Таким образом, $p_1(m) = m p_1(\frac{1}{m})$ и при $m \in (0,1)$ свойства a)–f) функции $p_1(m)$ вытекают из этих же свойств для $m > 1$.

6.2. Время Максвелла и время разреза при качении сферы по синусоидам малой амплитуды. Пусть $\lambda = (\theta, d, m, \alpha) \in C_1$. В этом пункте исследуется поведение множества Максвелла MAX^1 и времени разреза

$$t_{\mathrm{cut}}(\lambda) = \sup\big\{t > 0 \mid Q_s = \mathrm{Exp}(\lambda, s) \text{ оптимальна при } s \in [0,t]\big\}$$

при $(\theta, d) \to (0,0)$, т.е. вблизи устойчивого положения равновесия математического маятника (1.9). В этом случае эластики (x_t, y_t) в главном члене являются синусоидами малой амплитуды $\frac{\rho}{m}$. С учетом леммы 3.1 приведенная в § 1 теорема 1.1 утверждает следующее. Если $t > 0$ таково, что $q_3(t) = 0$ и $\operatorname{cn} \tau = \operatorname{cn}\big(m\big(\frac{t}{2} + \varphi\big), k\big) \neq 0$, то $(\lambda, t) \in \mathrm{MAX}^1$ и траектория $Q_s = \mathrm{Exp}(\lambda, s)$, $s \in [0,t]$, не оптимальна, поэтому $t_{\mathrm{cut}}(\lambda) \leqslant t$.

Введем полярные координаты $(\rho, \chi) : d = \rho \cos \chi$, $\theta = \rho \sin \chi$; тогда равенство (6.1) переписывается в виде

$$q_3(\rho, \chi, m, t) = \rho \frac{\cos(\chi + \frac{tm}{2})}{m^2 - 1} g_1\left(\frac{tm}{2}, m\right) + \rho^2 h, \quad \text{где } |h| \leqslant C. \tag{6.5}$$

Зафиксируем $\overline{\chi} \in S^1$ и $\overline{m} > 0$, $\overline{m} \neq 1$. Для исследования поведения времени Максвелла при $\rho \to 0$, $\chi \to \overline{\chi}$, $m \to \overline{m}$ введем множества

$$D_\delta = \big\{\lambda = (\rho, \chi, m, \alpha) \in C_1 \mid 0 < \rho < \delta, \ |\chi - \overline{\chi}| < \delta, \ |m - \overline{m}| < \delta\big\}.$$

Обозначим $t_1 = t_1(\overline{m}) = \frac{2p_1(\overline{m})}{\overline{m}} > 0$, где $p_1(m)$ – минимальный положительный корень функции $g_1(p,m)$ (см. п. 6.1). Обозначим также

$$I_\varepsilon = \{t > 0 \mid t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Следующая теорема описывает поведение множества Максвелла в окрестности устойчивого положения равновесия маятника $(\theta, d) = (0, 0)$.

Теорема 6.2. *Пусть* $\overline{\chi} \in S^1$ *и* $\overline{m} > 0$, $\overline{m} \neq 1$, $\cos(\overline{\chi} + t_1\overline{m}/2) \neq 0$. *Тогда*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\,\lambda \in D_\delta \quad \exists\, t \in I_\varepsilon \colon (\lambda, t) \in \mathrm{MAX}^1 .$$

При доказательстве этой теоремы мы используем следующую лемму, гарантирующую отсутствие эластик, центрированных в точке перегиба, для рассматриваемых значений параметров λ, t.

Лемма 6.10. *Пусть* $\overline{m}$, t_1, $\overline{\chi}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 6.2. *Тогда существуют такие* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$, *что для любых* $\lambda \in D_\delta$ *и* $t \in I_\varepsilon$

$$\mathrm{cn}\left(m\left(\frac{t}{2} + \varphi\right), k\right) \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют такие последовательности $t^n \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_n = (\rho_n, \chi_n, m_n, \alpha_n) \in C_1$, что $\rho_n \to 0$, $m_n \to \overline{m}$, $\chi_n \to \overline{\chi}$, $t^n \to t_1$ и $\mathrm{cn}(m_n(t^n/2 + \varphi_n), k_n) = 0$. Из определений эллиптических координат (φ, k) (см. § 2) и полярных координат (χ, ρ) получаем

$$k^2 = \frac{d^2}{4} + \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{\rho^2}{4}\left(\cos^2\chi + \sin^2\chi\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{(\frac{\theta}{2})^2}\right),$$

$$\mathrm{cn}(m\varphi, k) = \cos\chi\frac{\rho}{2k}, \qquad \mathrm{sn}(m\varphi, k) = \sin\chi\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\,\frac{\frac{\rho}{2}}{k}.$$

Следовательно, $k_n \sim \rho_n/2$ и $m_n\varphi_n \to \overline{\chi}$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$\mathrm{cn}\left(m_n\left(\frac{t^n}{2} + \varphi_n\right), k_n\right) \to \cos\left(\overline{\chi} + \frac{t_1\overline{m}}{2}\right) \neq 0,$$

противоречие.

Доказательство теоремы 6.2. Из неравенств $\cos(\overline{\chi} + t_1\overline{m}/2) \neq 0$, $\overline{m} \neq 1$, следует, что существует окрестность $D_{\delta_0} \times I_{\varepsilon_0}$, в которой $\cos(\chi + tm/2) \neq 0$ и $m^2 - 1 \neq 0$. Учитывая лемму 6.10 и уменьшая при необходимости δ_0, ε_0, получаем, что для всех $(\lambda, t) \in D_{\delta_0} \times I_{\varepsilon_0}$ выполнено неравенство $\mathrm{cn}\,\tau = \mathrm{cn}(m(t/2 + \varphi), k) \neq 0$. Поэтому если для некоторого $(\lambda, t) \in D_{\delta_0} \times I_{\varepsilon_0}$ выполняется равенство $q_3(\lambda, t) = q_3(\rho, \chi, m, t) = 0$, то $(\lambda, t) \in \mathrm{MAX}^1$ в силу теоремы 1.1 и леммы 3.1.

Для $\lambda \in D_{\delta_0}$, $t \in I_{\varepsilon_0}$ определим функцию

$$\widetilde{q}_3(\lambda, t) = \frac{q_3(\lambda, t)}{\rho\cos(\chi + \frac{tm}{2})}(m^2 - 1),$$

для которой в силу (6.5) имеем разложение

$$\widetilde{q}_3(\lambda, t) = g_1\left(\frac{tm}{2}, m\right) + \rho\widetilde{h}, \quad \text{где} \quad |\widetilde{h}| \leqslant C.$$

По теореме 6.1 существует такое $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено $g_1(\overline{m}(t_1 - \varepsilon)/2, \overline{m}) > 0$ и $g_1(\overline{m}(t_1 + \varepsilon)/2, \overline{m}) < 0$ в случае $\overline{m} > 1$ (в случае $\overline{m} \in (0, 1)$ знаки функции g_1 противоположные и рассуждения не меняются). В силу непрерывности функции $g_1(p, m)$ существуют такие $\delta_1(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$ и $\gamma > 0$, что для всех $m \in (\overline{m} - \delta_1, \overline{m} + \delta_1)$ имеем $g_1(m(t_1 - \varepsilon)/2, m) > \gamma$ и $g_1(m(t_1 + \varepsilon)/2, m) < -\gamma$. Поэтому существует такое $\delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_1(\varepsilon)]$, что при $\lambda \in D_{\delta_2}$ имеем $\widetilde{q}_3(\lambda, t_1 - \varepsilon) > \gamma/2$ и $\widetilde{q}_3(\lambda, t_1 + \varepsilon) < -\gamma/2$. Следовательно, существует $t \in I_\varepsilon$, для которого $\widetilde{q}_3(\lambda, t) = 0$, поэтому $q_3(\lambda, t) = 0$.

Итак, для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ существует такое $\delta = \delta_2(\varepsilon)$, что для любого $\lambda \in D_\delta$ найдется $t \in I_\varepsilon$, для которого $q_3(\lambda, t) = 0$, $\operatorname{cn} \tau \neq 0$, поэтому $(\lambda, t) \in \mathrm{MAX}^1$. Утверждение теоремы доказано для малых ε. Увеличивая ε и оставляя неизменным δ, получаем утверждение теоремы для произвольных $\varepsilon > 0$.

Следствие 6.1. *Пусть последовательность* $\lambda_n = (\rho_n, \chi_n, m_n, \alpha_n) \in C_1$ *удовлетворяет условиям*

$$\rho_n \to 0, \qquad m_n \to \overline{m} > 0, \qquad \overline{m} \neq 1, \qquad \chi_n \to \overline{\chi}, \qquad \cos\left(\frac{\overline{m} t_1}{2} + \overline{\chi}\right) \neq 0.$$

Тогда

$$\varlimsup_{n \to \infty} t_{\mathrm{cut}}(\lambda_n) \leqslant t_1, \qquad t_1 = t_1(\overline{m}). \tag{6.6}$$

Доказательство. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Для достаточно больших n элемент λ_n принадлежит области D_δ, указанной в теореме 6.2. Тогда существует $t^n \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$, для которого $(\lambda_n, t^n) \in \mathrm{MAX}^1$, поэтому $t_{\mathrm{cut}}(\lambda_n) \leqslant t^n < t_1 + \varepsilon$. В силу произвольности ε заключаем, что $\varlimsup_{n \to \infty} t_{\mathrm{cut}}(\lambda_n) \leqslant t_1$.

Докажем, что в формулировке следствия 6.1 можно избавиться от условий $\chi_n \to \overline{\chi}$, $\cos(\overline{m} t_1/2 + \overline{\chi}) \neq 0$.

Теорема 6.3. *Пусть последовательность* $\lambda_n = (\rho_n, \chi_n, m_n, \alpha_n) \in C_1$ *удовлетворяет условиям* $\rho_n \to 0$, $m_n \to \overline{m} > 0$, $\overline{m} \neq 1$. *Тогда выполняется неравенство* (6.6).

Иными словами, теорема 6.3 утверждает, что

$$\varlimsup_{\rho \to 0,\, m \to \overline{m}} t_{\mathrm{cut}}(\lambda) \leqslant t_1(\overline{m}) \quad \text{при} \ \ \overline{m} > 0, \ \overline{m} \neq 1.$$

Доказательство теоремы 6.3. Начнем с нескольких замечаний к задаче (1.1), (1.2), (1.3), (1.5) с общими граничными условиями $Q(0) = Q_0'$, $Q(t_1) = Q_1' \in \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$. В силу инвариантности этой задачи относительно левых сдвигов на $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$ любое решение с общим граничным условием получается из некоторого решения с частным граничным условием (1.4) левым сдвигом на элемент $Q_0' = (x_0', y_0', R_0')$, т.е. параллельным переносом на вектор (x_0', y_0') в плоскости (x, y) и умножением матрицы $R(t)$ слева на матрицу R_0'.

Из гамильтоновой системы (1.9)–(1.12) получаем, что эластика $(x(t), y(t))$ и матрица R_0' однозначно задают матрицу $R(t)$. Будем называть экстремальную кривую $(x(t), y(t), R(t))$ качением сферы по эластике $(x(t), y(t))$. Если качение $(x(t), y(t), R(t))$, $t \in [0, \widehat{t}\,]$, оптимально, то в силу инвариантности задачи относительно левых сдвигов на $\mathrm{SO}(3)$ оптимально и любое другое качение по той же эластике $(x(t), y(t), \widetilde{R}R(t))$, $t \in [0, \widehat{t}\,]$. В этом случае будем говорить, что эластика $(x(t), y(t))$, $t \in [0, \widehat{t}\,]$, оптимальна. В силу инвариантности задачи относительно сдвигов на $\mathbb{R}^2$ эластика $(x(t), y(t))$, $t \in [0, \widehat{t}\,]$, оптимальна тогда и только тогда, когда оптимален любой ее сдвиг $(x(t) + \widetilde{x}, y(t) + \widetilde{y})$, $t \in [0, \widehat{t}\,]$.

Эллиптическая координата φ (см. § 2) есть время на траекториях маятника. Поэтому если ввести с использованием эллиптических координат ковекторы $\lambda = (\varphi, k, m, \alpha)$, $\lambda = (\varphi + \sigma, k, m, \alpha) \in C_1$, $\sigma \in \mathbb{R}$, и обозначить соответствующие им эластики как $(x(t), y(t))$, $(x'(t), y'(t))$, получим $(x(t+\sigma), y(t+\sigma)) = (x'(t), y'(t)) + (x(\sigma), y(\sigma))$.

Перейдем к доказательству неравенства (6.6). От противного, пусть

$$\exists\,\varepsilon > 0 \ \ \forall\, N \in \mathbb{N} \ \ \exists\, n > N\colon \ Q_n(t) = \operatorname{Exp}(\lambda_n, t), \ t \in [0, t_1 + \varepsilon], \text{ оптимальна.}$$

Возьмем любую подпоследовательность последовательности λ_n, на которой сходится последовательность $\chi_n \in S^1$; обозначим $\lim_{n\to\infty} \chi_n = \overline{\chi}$. Сохраним для этой подпоследовательности обозначение λ_n. Учитывая следствие 6.1, достаточно рассмотреть случай $\cos(\overline{m} t_1/2 + \overline{\chi}) = 0$. Представим ковектор λ_n с помощью эллиптических координат: $\lambda_n = (\varphi_n, k_n, m_n, \alpha_n)$. Так же, как в лемме 6.10, заключаем, что $\varphi_n \to \overline{\varphi} = \overline{\chi}/\overline{m}$. Для малого $\sigma > 0$ (которое выберем ниже) определим ковектор $\lambda'_n = (\varphi_n + \sigma/m_n, k_n, m_n, \alpha_n) \in C_1$ и соответствующую экстремальную траекторию $Q'_n(t) = \operatorname{Exp}(\lambda'_n, t) = (x'_n(t), y'_n(t), R'_n(t))$. В силу совпадения параметров k и m кривые $(x_n(t), y_n(t))$ и $(x'_n(t), y'_n(t))$ принадлежат с точностью до движений плоскости одной бесконечной эластике, но имеют разные начальные фазы φ_n и $\varphi_n + \sigma/m_n$. Имеем $m_n(\varphi_n + \sigma/m_m) \to \overline{\chi} + \sigma = \overline{\chi}'$, поэтому $\cos(\overline{m} t_1/2 + \overline{\chi}') \neq 0$ для достаточно малых σ. В силу следствия 6.1 существует такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что при $n > N_1$ траектория $Q'_n(t)$, $t \in [0, t_1 + \varepsilon/2]$, не оптимальна, т.е. эластика $\gamma'_n = \{(x'_n(t), y'_n(t)) \mid t \in [0, t_1 + \varepsilon/2]\}$ не оптимальна. Но дуга γ'_n совпадает с точностью до сдвигов плоскости с дугой $\gamma_n = \{(x_n(t), y_n(t)) \mid t \in [\sigma/m_n, \sigma/m_n + t_1 + \varepsilon/2]\}$, поэтому дуга γ_n не оптимальна. Выберем $\sigma > 0$ настолько малым, что $[\sigma/m_n, \sigma/m_n + t_1 + \varepsilon/2]\} \subset [0, t_1]$. Тогда неоптимальная дуга γ_n содержится в оптимальной дуге $\{(x_n(t), y_n(t)) \mid t \in [0, t_1 + \varepsilon]\}$, противоречие.

Зафиксируем любой компакт $K \subset \{m \in \mathbb{R} \mid m > 0, m \neq 1\}$ и определим подмножество цилиндра C:

$$\Lambda_\delta = \bigl\{\lambda = (\rho, \chi, m, \alpha) \in C_1 \mid 0 < \rho < \delta, \ m \in K\bigr\}.$$

В следующей теореме получена оценка времени разреза $t_{\mathrm{cut}}(\lambda)$ для ковекторов $\lambda \in \Lambda_\delta$ при достаточно малых δ, т.е. для малых колебаний маятника (1.9).

Теорема 6.4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $\lambda \in \Lambda_\delta$ выполнено неравенство $t_{\mathrm{cut}}(\lambda) \leqslant \max_{m\in K} t_1(m) + \varepsilon$.*

Иными словами, теорема 6.4 утверждает, что

$$\varlimsup_{\rho\to 0, m\in K} t_{\mathrm{cut}}(\lambda) \leqslant \max_{m\in K} t_1(m).$$

Доказательство теоремы 6.4. Предположим противное. Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $\delta_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, существует $\lambda_n \in \Lambda_{1/n}$, для которого $t_{\mathrm{cut}}(\lambda_n) > \max_{m\in K} t_1(m) + \varepsilon$. Тогда для последовательности $\lambda_n = (\rho_n, \chi_n, m_n, \alpha_n)$ имеем $\rho_n \to 0$. В силу того, что $(\chi_n, m_n) \in S^1 \times K$ – компакт, существует сходящаяся подпоследовательность $(\chi_{n_k}, m_{n_k}) \to (\overline{\chi}, \overline{m})$, $\overline{x} \in S^1$, $\overline{m} \in K$. Из теоремы 6.3 заключаем, что $t_{\mathrm{cut}}(\lambda_{n_k}) \leqslant t_1(\overline{m}) + \varepsilon$ для достаточно больших k, поэтому $t_{\mathrm{cut}}(\lambda_{n_k}) \leqslant \max_{m\in K} t_1(m) + \varepsilon$. Это противоречит неравенству $t_{\mathrm{cut}}(\lambda_n) > \max_{m\in K} t_1(m) + \varepsilon$.

В §§ 5, 6 исследованы свойства оптимальности экстремальных траекторий $Q_t = \mathrm{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda = (\theta, d, m, \alpha)$, в окрестности устойчивого положения равновесия $(\theta, d) = (0, 0)$ уравнения маятника (5.10). В § 5 вычислены главные члены асимптотики экстремальных траекторий при $\rho = \sqrt{\theta^2 + d^2} \to 0$. В § 6 исследовано поведение при $\rho \to 0$ множества Максвелла MAX^1. На основе этого при $\rho \to 0$, $m \to \overline{m}$ для экстремальных траекторий $Q_t = \mathrm{Exp}(\lambda, t)$ получена верхняя оценка времени разреза вида $t_{\mathrm{cut}}(\lambda) < t_1(\overline{m}) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало́. Задающая эту оценку функция $t_1(m) = 2p_1(m)/m$ характеризуется весьма сложным поведением: ее график имеет вертикальные касательные при $m = (n+1)/n$ и $m = n/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$; помимо этого $\lim_{m \to 1} t_1(m) = +\infty$.

Момент времени $t = t_1(\overline{m})$ определяет для траекторий Q_t при $\rho \to 0$, $m \to \overline{m}$ асимптотику времени Максвелла, соответствующего отражению ε^1 фазового портрета маятника (1.9) в оси координат θ. Аналогичный момент времени $t = t_2(\overline{m})$ можно определить для отражения ε^2 фазового портрета маятника (1.9) в оси координат c (т.е. для страта Максвелла MAX^2). Поведение функции $t_2(m)$ аналогично поведению функции $t_1(m)$; можно показать, что графики этих функций имеют бесконечное число точек пересечения. Приближенные вычисления показывают также, что функции $t_1(m)$ и $t_2(m)$ являются границами первого сопряженного времени $t_{\mathrm{conj}}(m)$ вдоль экстремальных траекторий (рис. 2).

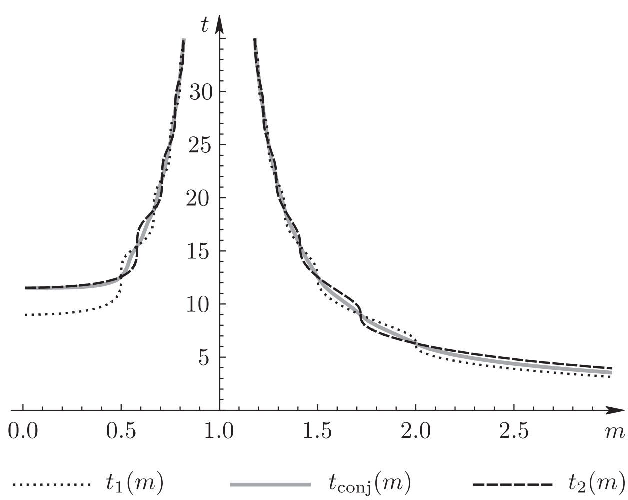

Рис. 2. Графики функций $t_1(m)$, $t_{\mathrm{conj}}(m)$, $t_2(m)$

Отметим, что в родственных задачах оптимального управления: субриманова задача в случае Мартине (см. [18]), нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2, 3, 5)$ (см. [17]), задача Эйлера об эластиках (см. [14]), субриманова задача на группе движений плоскости (см. [15]), глобальное поведение аналогичных времен Максвелла $t_1(\lambda)$, $t_2(\lambda)$, $\lambda \in C$, гораздо проще, чем асимптотика $t_1(\overline{m})$, $t_2(\overline{m})$ в задаче о качении сферы по плоскости. Это отражает более сложный характер данной задачи по сравнению с указанными родственными задачами. А с учетом сложности параметризации экстремальных траекторий в данной задаче представляется затруднительным получить ее точное решение. Однако на основе полученных результатов возможна разработка алгоритма и программы приближенного решения задачи о качении сферы по плоскости, что составит предмет будущей работы.

Список литературы

[1] Z. Li, J. Canny, "Motion of two rigid bodies with rolling constraint", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, **6**:1 (1990), 62–72.

[2] A. Bicchi, D. Prattichizzo, S. S. Sastry, "Planning motions of rolling surfaces", *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control* (New Orleans, LA , USA, 1995), 2812–2817.

[3] A. Marigo, A. Bicchi, "Rolling bodies with regular surface: the holonomic case", *Differential geometry and control* (Boulder, CO, 1997), Proc. Sympos. Pure Math., **64**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 241–256.

[4] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2004.

[5] J. M. Hammersley, "Oxford commemoration ball", *Probability, statistics and analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **79**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1983, 112–142.

[6] A. M. Arthurs, G. R. Walsh, "On Hammersley's minimum problem for a rolling sphere", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **99**:3 (1986), 529–534.

[7] V. Jurdjevic, "The geometry of the plate-ball problem", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **124**:4 (1993), 305–328.

[8] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., **52**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[9] Л. Эйлер, "Приложение I, "Об упругих кривых"", *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле*, ГТТИ, М.–Л., 1934, 447–572.

[10] А. Ляв, *Математическая теория упругости*, ОНТИ, М.–Л., 1935; пер. с англ.: A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

[11] Ю. Л. Сачков, "Симметрии и страты Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости", *Матем. сб.*, **201**:7 (2010), 99–120; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, "Maxwell strata and symmetries in the problem of optimal rolling of a sphere over a plane", *Sb. Math.*, **201**:7 (2010), 1029–1051.

[12] Ю. Л. Сачков, "Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны", *Матем. сб.*, **197**:6 (2006), 111–160; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, "Complete description of the Maxwell strata in the generalized Dido problem", *Sb. Math.*, **197**:6 (2006), 901–950.

[13] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1976; англ. пер.: L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *Selected works. Vol. 4. The mathematical theory of optimal processes*, Classics Soviet Math., Gordon & Breach, New York, 1986.

[14] Yu. L. Sachkov, "Maxwell strata in the Euler elastic problem", *J. Dyn. Control Syst.*, **14**:2 (2008), 169–234.

[15] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, "Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane", *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **16**:2 (2010), 380–399.

[16] Ю. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, УРСС, М., 2002; пер. с англ.: E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, New York, 1962.

[17] Ю. Л. Сачков, "Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны", *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 63–90; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, "Exponential map in the generalized Dido problem", *Sb. Math.*, **194**:9 (2003), 1331–1359.

[18] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka, "Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case", *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **2** (1997), 377–448.

[19] В. И. Арнольд, *Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов*, МЦНМО, М., 2002.

[20] Л. С. Понтрягин, *Обобщения чисел*, Библиотека "Квант", **54**, Наука, М., 1986; нем. пер.: L. S. Pontrjagin, *Verallgemeinerungen der Zahlen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1991.

[21] Э. Т. Уиттекер, *Аналитическая динамика*, УРСС, М., 2004; пер. с англ.: E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

А. П. Маштаков (A. P. Mashtakov)
Институт програмных систем им. А. К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский
E-mail: alexey.mashtakov@gmail.com

Поступила в редакцию
24.06.2010

Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)
Институт програмных систем им. А. К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский
E-mail: sachkov@sys.botik.ru