

## АСИМПТОТИКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ КРИВЫХ В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ ШАРА ПО ПЛОСКОСТИ

© 2011 г. А. П. МАШТАКОВ

Аннотация. В работе исследуется задача об оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания с заданными краевыми условиями. Для ее решения используются методы теории оптимального управления. Управляемая система для ориентации сферы записана через кватернион вращения. Вычислена асимптотика экстремальных траекторий при качении сферы по синусоидам малой амплитуды.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача об оптимальном качении сферы единичного радиуса по горизонтальной плоскости без прокручивания и проскальзывания. Состояние механической системы «сфера на плоскости» описывается точкой контакта сферы с плоскостью  $(x, y)$  и ориентацией сферы в трехмерном пространстве, которая задается правым ортонормированным репером  $(e_1, e_2, e_3)$ . Состояние системы задается набором  $Q = (x, y, e_1, e_2, e_3)$ . Заметим, что ориентация сферы в пространстве задается элементом специальной ортогональной группы  $SO_3$  (группа вращений трехмерного пространства), которая допускает различные параметризации. В частности, элемент  $SO_3$  можно задавать матрицей вращения  $R$  или, как это сделано в данной работе, кватернионом единичной длины  $q$ , определенным с точностью до знака (см. [2]).

Задача об оптимальном качении сферы по плоскости формулируется следующим образом. Даны две точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$  на плоскости. В обеих точках задана ориентация сферы:  $(e_1^0, e_2^0, e_3^0)$  для сферы, касающейся плоскости в точке  $(x_0, y_0)$ , и  $(e_1^1, e_2^1, e_3^1)$  — в точке  $(x_1, y_1)$ . Требуется перекатить сферу из начального состояния  $Q_0 = (x_0, y_0, e_1^0, e_2^0, e_3^0)$  в конечное состояние  $Q_1 = (x_1, y_1, e_1^1, e_2^1, e_3^1)$  так, чтобы кривая, пробегаемая точкой контакта сферы и плоскости, имела наименьшую длину.

Отсутствие проскальзывания означает, что мгновенная скорость точки контакта сферы и плоскости равна нулю, а отсутствие прокручивания означает, что вектор угловой скорости сферы горизонтален. Допустимое качение можно представить следующим образом: сфера, касающаяся горизонтальной плоскости (плоскость качения), накрывается сверху плоскостью, параллельной плоскости качения (накрывающая плоскость). После этого накрывающая плоскость поступательно перемещается в направлениях, параллельных плоскости качения. Возникающее при этом движение сферы является качением без прокручивания и проскальзывания. Качение одной поверхности по другой без прокручивания и проскальзывания моделирует работу руки робота-манипулятора, и задачи о таком движении вызывают большой интерес в механике, робототехнике и теории управления (см. [1, 7, 10–12]).

Задача об оптимальном качении сферы по плоскости была поставлена в работе Дж. Хаммерсли [9]. А. Артур и Дж. Уолш [6] доказали, что уравнения для экстремальных траекторий в этой задаче интегрируемы в эллиптических функциях, а В. Джарджевич [8] показал, что при оптимальном качении точка контакта сферы с плоскостью движется по эластичкам Эйлера (стационарным конфигурациям упругого стержня на плоскости [3, 5]). Исследование оптимальности экстремальных траекторий начато в статье Ю. Л. Сачкова [4]. В данной статье рассматривается задача об оптимальном качении сферы по плоскости, как это сделано в работах [4, 8], однако для задания ориентации сферы в пространстве используется кватернион единичной длины  $q$ , а не матрица вращения  $R$ , которая используется в работах [4, 8].

Данная статья продолжает исследование вопроса об оптимальности экстремальных траекторий (начатое в работе [4]), который остается открытым.

## 2. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В статье [8] задача о качении сферы по плоскости сформулирована как задача оптимального управления на группе Ли  $\mathbb{R}^2 \times SO_3$  с интегральным критерием минимальности функционала субримановой длины. Вращение трехмерного пространства удобно задавать с помощью кватерниона единичной длины [2]. Если параметризовать вращения кватернионом  $q$ , то управляемая система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \dot{y} = v, \\ \dot{q}_0 = \frac{1}{2}(q_2u - q_1v), \\ \dot{q}_1 = \frac{1}{2}(q_3u + q_0v), \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{2}(-q_0u + q_3v), \\ \dot{q}_3 = \frac{1}{2}(-q_1u - q_2v), \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  — точка контакта сферы с плоскостью,  $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in S^3$  — кватернион единичной длины, задающий ориентацию сферы в пространстве, а  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  — управление. Критерием оптимальности решения является минимальность функционала субримановой длины

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2} dt \rightarrow \min. \quad (2.2)$$

Граничные условия для переменной состояния  $Q = (x, y, q)$  имеют вид

$$Q(0) = Q_0, \quad Q(t_1) = Q_1, \quad Q_0, Q_1 \in \mathbb{R}^2 \times S^3. \quad (2.3)$$

Учитывая свойство левоинвариантности задачи (2.1)–(2.3), можно, не ограничивая общности, выбрать в качестве начального условия

$$Q(0) = (0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad (2.4)$$

т. е. в начальный момент времени сфера находится в начале координат и ориентирована как базисная система координат.

Управляемая система (2.1) имеет вид  $\dot{Q} = uX_1(Q) + vX_2(Q)$ , где  $X_1(Q) = \frac{1}{2}(2, 0, q_2, q_3, -q_0, -q_1)^T$  и  $X_2(Q) = \frac{1}{2}(0, 2, -q_1, q_0, q_3, -q_2)^T$  — векторные поля при управлениях.

В статье [8] к задаче об оптимальном качении шара по плоскости применен принцип максимума Понтрягина и записана гамильтонова система принципа максимума в координатах, в которых подсистема для сопряженных переменных становится независимой от переменных состояния, а ориентация сферы в пространстве задается матрицей вращения  $R$ . Перейдем от матрицы вращения  $R$  к кватерниону  $q$ , тогда нормальная гамильтонова система принципа максимума для задачи (2.1)–(2.3) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c, \\ \dot{c} = -r \sin \theta, \\ \dot{\alpha} = \dot{r} = 0, \quad r \geq 0, \\ \dot{Q} = uX_1(Q) + vX_2(Q), \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $u = \cos(\theta + \alpha)$ ,  $v = \sin(\theta + \alpha)$ .

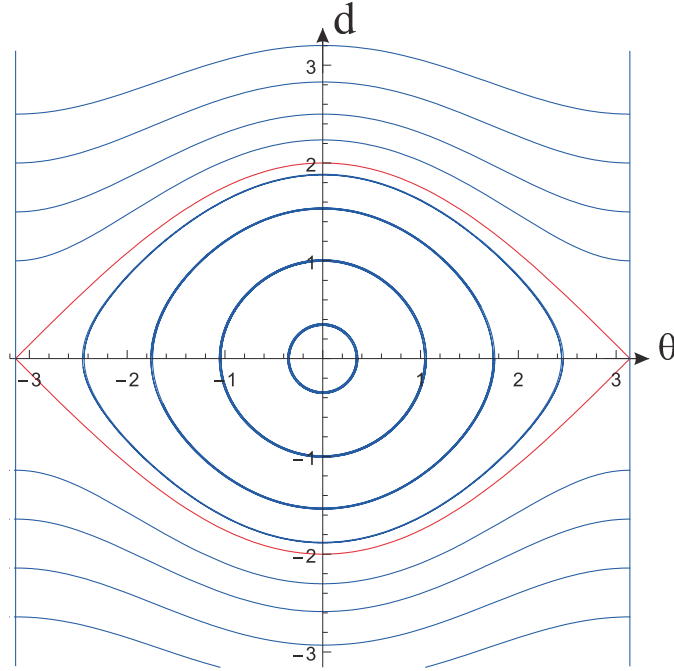


Рис. 1. Фазовый портрет маятника

### 3. АСИМПТОТИКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

В данном разделе вычислена асимптотика (при  $(\theta_0, c_0) \rightarrow (0, 0)$ ) экстремальных траекторий  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $q_0(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $q_3(t)$  в окрестности устойчивого положения равновесия математического маятника

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c, \\ \dot{c} = -r \sin \theta, \end{cases} \quad \theta(0) = \theta_0, \quad c(0) = c_0, \quad (3.1)$$

возникающего в подсистеме для сопряженных переменных гамильтоновой системы принципа максимума (2.5).

Обозначим  $m = \sqrt{r} > 0$  (в данной работе рассматривается случай  $r > 0$ ). Перепараметризуем время  $s = mt$  и введем вместо переменной  $c$  новую координату  $d = \frac{c}{m}$ . Система (3.1) примет вид

$$\begin{cases} \theta' = d, \\ d' = -\sin \theta, \end{cases} \quad (3.2)$$

где производная берется по переменной  $s$ :  $' = \frac{d}{ds}$ .

На рис. 1 изображен фазовый портрет системы (3.2). Обозначим через  $\theta(s; \theta_0, d_0)$ ,  $d(s; \theta_0, d_0)$  решение системы (3.2) с начальным условием  $\theta(0; \theta_0, d_0) = \theta_0$ ,  $d(0; \theta_0, d_0) = d_0$ , и пусть  $\rho_0 = \sqrt{\theta_0^2 + d_0^2}$ . Найдем асимптотику функций  $\theta(s; \theta_0, d_0)$ ,  $d(s; \theta_0, d_0)$  при  $(\theta_0, d_0) \rightarrow (0, 0)$  на произвольном конечном отрезке  $s \in [0, T]$ . Для этого запишем через дифференциалы формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функций  $\theta(s; \theta_0, d_0)$ ,  $d(s; \theta_0, d_0)$ :

$$\begin{cases} \theta(s; \theta_0, d_0) = \theta(s; 0, 0) + d\theta(s; \theta_0, d_0)|_{(0,0)} + O(\rho_0^2), \\ d(s; \theta_0, d_0) = d(s; 0, 0) + dd(s; \theta_0, d_0)|_{(0,0)} + O(\rho_0^2). \end{cases} \quad (3.3)$$

Так как начало координат является стационарной точкой системы (3.2), то

$$\theta(s; 0, 0) \equiv 0, \quad d(s; 0, 0) \equiv 0.$$

Таким образом, мы получили асимптотику решений системы (3.2):

$$\begin{cases} \theta(s; \theta_0, d_0) &= \theta_0 \frac{\partial \theta(s; \theta_0, d_0)}{\partial \theta_0} \Big|_{(0,0)} + d_0 \frac{\partial \theta(s; \theta_0, d_0)}{\partial d_0} \Big|_{(0,0)} + O(\rho_0^2) = \\ &= \theta_0 \beta_1 + d_0 \beta_2 + O(\rho_0^2), \\ d(s; \theta_0, d_0) &= \theta_0 \frac{\partial d(s; \theta_0, d_0)}{\partial \theta_0} \Big|_{(0,0)} + d_0 \frac{\partial d(s; \theta_0, d_0)}{\partial d_0} \Big|_{(0,0)} + O(\rho_0^2) = \\ &= \theta_0 \gamma_1 + d_0 \gamma_2 + O(\rho_0^2), \end{cases} \quad (3.4)$$

где коэффициенты  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  подлежат определению. Подставив (3.4) в систему (3.2) и приравняв коэффициенты при  $\theta_0$ ,  $d_0$ , получаем дифференциальные уравнения для  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$\begin{cases} \beta_1' = \gamma_1, & \beta_2' = \gamma_2, \\ \gamma_1' = -\beta_1, & \gamma_2' = -\beta_2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Решая эту систему и используя в качестве начальных условий  $\theta(0; \theta_0, d_0) = \theta_0$ ,  $d(0; \theta_0, d_0) = d_0$ , получаем асимптотику малых колебаний маятника:

$$\begin{cases} \theta(s; \theta_0, d_0) &= \theta_0 \cos s + d_0 \sin s + O(\rho_0^2), \\ d(s; \theta_0, d_0) &= -\theta_0 \sin s + d_0 \cos s + O(\rho_0^2). \end{cases} \quad (3.6)$$

Гамильтонова система (2.5), заданная во времени  $s$ , имеет вид

$$\begin{cases} \theta' = d, & d' = -\sin \theta, \\ \alpha' = m' = 0, \\ Q' = \frac{1}{m}(uX_1(Q) + vX_2(Q)), \end{cases} \quad (3.7)$$

где  $u = \cos(\theta + \alpha)$ ,  $v = \sin(\theta + \alpha)$ .

Обозначим  $\tilde{u} = \cos \theta$ ,  $\tilde{v} = \sin \theta$ , тогда

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A(\alpha) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}, \quad \text{где } A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Выполним замену переменных, которая соответствует симметрии системы (3.7) — повороту траекторий на угол  $\alpha$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(\alpha) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = A(\alpha) \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} q_0 = \tilde{q}_0, \\ q_3 = \tilde{q}_3. \end{cases} \quad (3.9)$$

Подсистема гамильтоновой системы (3.7) для переменных состояния примет вид

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \frac{\tilde{u}}{m_1}, & \tilde{y}' = \frac{\tilde{v}}{m}, \\ \tilde{q}_0' = \frac{1}{2m}(\tilde{q}_2 \tilde{u} - \tilde{q}_1 \tilde{v}), \\ \tilde{q}_1' = \frac{1}{2m}(\tilde{q}_3 \tilde{u} + \tilde{q}_0 \tilde{v}), \\ \tilde{q}_2' = \frac{1}{2m}(-\tilde{q}_0 \tilde{u} + \tilde{q}_3 \tilde{v}), \\ \tilde{q}_3' = \frac{1}{2m}(-\tilde{q}_1 \tilde{u} - \tilde{q}_2 \tilde{v}). \end{cases} \quad (3.10)$$

Запишем асимптотику для управлений  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ :

$$\begin{cases} \tilde{u}(s; \theta_0, d_0) &= \cos(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s + O(\rho_0^2)) = \\ &= \tilde{u}(s; 0, 0) + d\tilde{u}(s; \theta_0, d_0)|_{(0,0)} + O(\rho_0^2), \\ \tilde{v}(s; \theta_0, d_0) &= \sin(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s + O(\rho_0^2)) = \\ &= \tilde{v}(s; 0, 0) + d\tilde{v}(s; \theta_0, d_0)|_{(0,0)} + O(\rho_0^2). \end{cases} \quad (3.11)$$

Вычислим коэффициенты разложения:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(s; 0, 0) &= 1, \quad \tilde{v}(s; 0, 0) = 0, \\ d\tilde{u}(s; \theta_0, d_0)|_{(0,0)} &= \theta_0 \frac{\partial \tilde{u}(s; \theta_0, d_0)}{\partial \theta_0} \Big|_{(0,0)} + d_0 \frac{\partial \tilde{u}(s; \theta_0, d_0)}{\partial d_0} \Big|_{(0,0)} = 0, \\ d\tilde{v}(s; \theta_0, d_0)|_{(0,0)} &= \theta_0 \frac{\partial \tilde{v}(s; \theta_0, d_0)}{\partial \theta_0} \Big|_{(0,0)} + d_0 \frac{\partial \tilde{v}(s; \theta_0, d_0)}{\partial d_0} \Big|_{(0,0)} = \theta_0 \cos s + d_0 \sin s,\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{cases} \tilde{u}(s; \theta_0, d_0) &= 1 + O(\rho_0^2), \\ \tilde{v}(s; \theta_0, d_0) &= \theta_0 \cos s + d_0 \sin s + O(\rho_0^2). \end{cases} \quad (3.12)$$

Вычислим асимптотику проекций экстремальных траекторий на плоскость  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} \tilde{x}' &= \frac{\tilde{u}}{m} = \frac{1}{m} + O(\rho_0^2), \\ \tilde{y}' &= \frac{\tilde{v}}{m} = \frac{1}{m}(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s) + O(\rho_0^2), \end{cases} \quad (3.13)$$

где  $O(\rho_0^2) = (\theta_0^2 + d_0^2)\delta(s; \theta_0, d_0)$ ,  $|\delta(s; \theta_0, d_0)| \leq M$ .

Проинтегрируем систему (3.13):

$$\begin{cases} \tilde{x} - x_0 &= \frac{s}{m} + (\theta_0^2 + d_0^2) \int_0^s \delta(\tau; \theta_0, d_0) d\tau, \\ \tilde{y} - y_0 &= \frac{1}{m}(\theta_0 \sin s - d_0 \cos s) + (\theta_0^2 + d_0^2) \int_0^s \delta(\tau; \theta_0, d_0) d\tau. \end{cases} \quad (3.14)$$

В силу начальных условий (2.4)  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -\frac{d_0}{m}$ . Оценим интегральный множитель при  $(\theta_0^2 + d_0^2)$ . Ограничимся траекториями на конечном промежутке времени  $s \in [0, T]$ , где  $T$  фиксировано. Тогда справедлива оценка  $|\int_0^s \delta(\tau; \theta_0, d_0) d\tau| \leq MT$ . Итак, получена асимптотика для экстремальных кривых на плоскости  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} \tilde{x} &= \frac{s}{m} + O(\rho_0^2), \\ \tilde{y} &= \frac{1}{m}(\theta_0 \sin s + d_0(1 - \cos s)) + O(\rho_0^2), \end{cases} \quad (3.15)$$

где  $s \in [0, T]$ ,  $\rho_0 \rightarrow 0$ . Таким образом, в главном члене кривая  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , а поэтому и кривая  $(x, y)$ , есть синусоида малой амплитуды  $\frac{\rho_0}{m}$ .

Теперь найдем асимптотику для кватерниона вращения  $\tilde{q} = (\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)$ , задающего ориентацию сферы в пространстве. Уравнения гамильтоновой системы для кватерниона  $\tilde{q}$  имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{q}'_0 &= \frac{1}{2m}(\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2), \\ \tilde{q}'_1 &= \frac{1}{2m}(\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2), \\ \tilde{q}'_2 &= \frac{1}{2m}(-\tilde{q}_0 + \tilde{q}_3(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2), \\ \tilde{q}'_3 &= \frac{1}{2m}(-\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2(\theta_0 \cos s + d_0 \sin s)) + O(\rho_0^2). \end{cases} \quad (3.16)$$

Формула Тейлора для каждого  $\tilde{q}_i$ , где  $i = 0, \dots, 3$ , имеет вид:

$$\tilde{q}_i(s; \theta_0, d_0) = \tilde{q}_i(s; 0, 0) + d\tilde{q}_i(s; \theta_0, d_0)|_{(0,0)} + O(\rho_0^2).$$

Будем последовательно находить коэффициенты разложения. Разложение нулевого порядка удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} \tilde{q}'_0 = \frac{\tilde{q}_2}{2m}, \\ \tilde{q}'_1 = \frac{q_3}{2m}, \\ \tilde{q}'_2 = -\frac{q_0}{2m}, \\ \tilde{q}'_3 = -\frac{q_1}{2m} \end{cases} \quad (3.17)$$

с начальными условиями

$$\tilde{q}_0(0) = 1, \quad \tilde{q}_1(0) = 0, \quad \tilde{q}_2(0) = 0, \quad \tilde{q}_3(0) = 0. \quad (3.18)$$

Система (3.17) состоит из двух независимых подсистем (для  $(\tilde{q}_0, \tilde{q}_2)$  и  $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_3)$ ), которые задают малые колебания математического маятника. Находим решения, удовлетворяющие начальным условиям (3.18):

$$\begin{cases} \tilde{q}_0 = \cos \frac{s}{2m}, \\ \tilde{q}_1 = 0, \\ \tilde{q}_2 = -\sin \frac{s}{2m}, \\ \tilde{q}_3 = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Итак, получены коэффициенты нулевого порядка. Теперь рассмотрим разложение первого порядка для кватерниона  $\tilde{q}$ . Выведем обозначения

$$\alpha_{i1}(s) = \frac{\partial \tilde{q}_i(s; \theta_0, d_0)}{\partial \theta_0} \Big|_{(0,0)}, \quad \alpha_{i2}(s) = \frac{\partial \tilde{q}_i(s; \theta_0, d_0)}{\partial d_0} \Big|_{(0,0)}, \quad i = 0, \dots, 3.$$

В силу граничных условий (3.18), имеем

$$\alpha_{ij}(0) = 0, \quad i = 0, \dots, 3; \quad j = 1, 2. \quad (3.20)$$

Асимптотика первого порядка для кватерниона  $q$  имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{q}_0(s; \theta_0, d_0) = \cos \frac{s}{2m} + \theta_0 \alpha_{01}(s) + d_0 \alpha_{02}(s) + O(\rho_0^2), \\ \tilde{q}_1(s; \theta_0, d_0) = \theta_0 \alpha_{11}(s) + d_0 \alpha_{12}(s) + O(\rho_0^2), \\ \tilde{q}_2(s; \theta_0, d_0) = -\sin \frac{s}{2m} + \theta_0 \alpha_{21}(s) + d_0 \alpha_{22}(s) + O(\rho_0^2), \\ \tilde{q}_3(s; \theta_0, d_0) = \theta_0 \alpha_{31}(s) + d_0 \alpha_{32}(s) + O(\rho_0^2), \end{cases} \quad (3.21)$$

где  $s \in [0, T]$ ,  $\rho_0 \rightarrow 0$ .

Подставим (3.21) в систему (3.16) и приравняем коэффициенты при  $\theta_0$  и  $d_0$ . Получаем дифференциальные уравнения, задающие  $\alpha_{ij}(s)$ :

$$\begin{cases} \alpha'_{01} = \frac{1}{2m} \alpha_{21}, \\ \alpha'_{21} = -\frac{1}{2m} \alpha_{01}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha'_{02} = \frac{1}{2m} \alpha_{22}, \\ \alpha'_{22} = -\frac{1}{2m} \alpha_{02}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha'_{11} = \frac{1}{2m} (\alpha_{31} + \cos \frac{s}{2m} \cos s), \\ \alpha'_{31} = \frac{1}{2m} (-\alpha_{11} + \sin \frac{s}{2m} \cos s), \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha'_{12} = \frac{1}{2m} (\alpha_{32} + \cos \frac{s}{2m} \sin s), \\ \alpha'_{32} = \frac{1}{2m} (-\alpha_{12} + \sin \frac{s}{2m} \sin s). \end{cases}$$

Находим решения, удовлетворяющие начальным условиям (3.20):

$$\begin{cases} \alpha_{01}(s) \equiv 0, & \alpha_{02}(s) \equiv 0, \\ \alpha_{11}(s) = \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left( m \cos \frac{s}{2m} \sin s - (1 + \cos s) \sin \frac{s}{2m} \right), \\ \alpha_{12}(s) = \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left( m(1 - \cos s) \cos \frac{s}{2m} - \sin s \sin \frac{s}{2m} \right), \\ \alpha_{21}(s) \equiv 0, & \alpha_{22}(s) \equiv 0, \\ \alpha_{31}(s) = \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left( (-1 + \cos s) \cos \frac{s}{2m} + m \sin s \sin \frac{s}{2m} \right), \\ \alpha_{32}(s) = \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left( \sin s \cos \frac{s}{2m} - m(1 + \cos s) \sin \frac{s}{2m} \right). \end{cases} \quad (3.22)$$

Получаем асимптотику для кватерниона  $\tilde{q}$ :

$$\begin{cases} \tilde{q}_0(s; \theta_0, d_0) = \cos \frac{s}{2m} + O(\rho_0^2), \\ \tilde{q}_1(s; \theta_0, d_0) = \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left( m \cos \frac{s}{2m} \sin s - (1 + \cos s) \sin \frac{s}{2m} \right) \theta_0 + \\ \quad + \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left( m(1 - \cos s) \cos \frac{s}{2m} - \sin s \sin \frac{s}{2m} \right) d_0 + O(\rho_0^2), \\ \tilde{q}_2(s; \theta_0, d_0) = -\sin \frac{s}{2m} + O(\rho_0^2), \\ \tilde{q}_3(s; \theta_0, d_0) = \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left( (-1 + \cos s) \cos \frac{s}{2m} + m \sin s \sin \frac{s}{2m} \right) \theta_0 + \\ \quad + \frac{1}{2(m^2 - 1)} \left( \sin s \cos \frac{s}{2m} - m(1 + \cos s) \sin \frac{s}{2m} \right) d_0 + O(\rho_0^2). \end{cases} \quad (3.23)$$

Асимптотические разложения для исходных переменных  $x$ ,  $y$ ,  $q_i$  выражаются через полученные разложения (3.15), (3.23) с помощью формул (3.9).

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, получена асимптотика экстремальных траекторий в случае, когда сфера катится по синусоиде малой амплитуды. Эта работа продолжает исследование оптимальности экстремальных траекторий, начатое Ю. Л. Сачковым [4]. Дальнейшей целью является вычисление асимптотики уравнений, задающих точки Максвелла, в которых экстремальная кривая теряет оптимальность. Требуется найти первое время Максвелла на экстремальной траектории. Вывод уравнений, задающих время Максвелла в задаче о качении шара по плоскости, приведен в статье [4]. Решение этих уравнений представляет собой сложную задачу, ввиду аналитической сложности записи экстремальных траекторий, которые выражаются в эллиптических функциях Якоби  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$ . Асимптотика экстремальных траекторий выражается в тригонометрических функциях, но даже в этом простом асимптотическом случае определение первого времени разреза является нетривиальной задачей, которая будет предметом дальнейшей работы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 09-01-00246-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005.
2. Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. — М.: МЦНМО, 2002.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.
4. Сачков Ю. Л. Симметрии и страты Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости // Математический сборник. — 2010. — 201, № 7. — С. 99–120.
5. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Петербургской Академии Наук, Приложение I, «Об упругих кривых», ГТТИ, Москва—Ленинград, 1934. — С. 447–572.
6. Arthur A. M., Walsh G. R. On the Hammersley's minimum problem for a rolling sphere // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1986. — 99. — С. 529–534.
7. Bicchi A., Prattichizzo D., Sastry S. Planning motions of rolling surfaces // IEEE Conf. on Decision and Control, 1995.

8. *Jurdjevic V.* The geometry of the plate-ball problem // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1986. — 124. — С. 305–328.
9. *Hammersley J. M.* Oxford commemoration ball // London Math. Soc. Lecture Note Ser. — 1983. — 79. — С. 112–142.
10. *Laumond J. P.* Nonholonomic motion planning for mobile robots// LAAS Report 98211, May 1998, LAAS-CNRS, Toulouse, France.
11. *Li Z., Canny J.* Motion of two rigid bodies with rolling constraint// IEEE Trans. on Robotics and Automation, — 1983. — 6, № 1. — С. 62–72.
12. *Marigo A., Bicchi A.* Rolling bodies with regular surface: the holonomic case// Proc. Sympos. Pure Math. — 1999. — 64. — С. 241–256.

А. П. Маштаков

Институт программных систем РАН, Переславль-Залесский, Россия

E-mail: alexey.mashtakov@gmail.com