ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2008, том 44, № 12, с. 1704–1707

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НИЛЬПОТЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

© 2008 г. Е. Ф. Сачкова

Рассматривается задача управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с линейными управлениями. Приводится решение задачи управления трехмерной нильпотентной системой с двумерным управлением в классах тригонометрических, кусочно-постоянных и оптимальных в смысле минимума функционала субримановой длины управлений. Построены соответствующие программные управления и семейства синтезов.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается специальный класс неголономных управляемых систем – нильпотентные системы. Задача управления для этих систем имеет точное решение в различных классах управлений. Это позволяет создавать приближенные методы решения задачи управления для произвольных нелинейных систем, линейных по управлению: нильпотентные системы являются аналогами линейных аппроксимаций (см. работы [1–5]).

В работе детально изучены трехмерные нильпотентные системы. Доказана эквивалентность всех трехмерных нильпотентных систем с двумерным управлением, на этом основании выбрана симметричная универсальная модель (6) (см. ниже) для таких систем. Для этой модели получены решения задачи управления в классах кусочно-постоянных, тригонометрических, оптимальных управлений в виде программных управлений, а также управлений с обратной связью и, как следствие, найдено выражение для субриманова расстояния на группе Гейзенберга [6].

2. Постановка задачи. Рассматривается управляемая система вида $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, $m < n$, где X_i – аналитические линейно независимые векторные поля в $\mathbb{R}^n$, $u_i = u_i(t)$ – кусочно-непрерывные управления. Для таких систем ставится *задача управления:* по заданным $T > 0$, $p, q \in \mathbb{R}^n$ найти управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, для которого соответствующая траектория $x(t)$ системы удовлетворяет условиям $x(0) = p$, $x(T) = q$. Эта задача разрешима в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\dim \mathrm{Lie}(X_1, \ldots, X_m)(x) = \dim \mathrm{span}(X_1, \ldots, X_m, [X_i, X_j], [X_i, [X_j, X_k]], \ldots) = n$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, где $[X_i, X_j] = \dfrac{\partial X_j}{\partial x} X_i - \dfrac{\partial X_i}{\partial x} X_j$ (см. [7, с. 27, 73, 78]). Если $[X_{i_1}, [X_{i_2}, \ldots, [X_{i_N}, X_{i_{N+1}}] \ldots]] = 0$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$ и любых $i_1, \ldots, i_{N+1} \in \{1, \ldots, m\}$, то управляемая система называется *нильпотентной,*

3. Нильпотентные системы. Рассматриваются трехмерные нильпотентные системы вида

$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0, \tag{2}$$

$$\dim \mathrm{Lie}(X_1, X_2)(x) = 3 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{3}$$

Именно такие системы возникают в качестве нильпотентных аппроксимаций нелинейных систем вида (1) (см. [3]).

Предложение 1. *Любые две системы вида (1)–(3) переводятся одна в другую с помощью некоторого локального диффеоморфизма в* $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Наряду с системой (1)–(3) в пространстве $\mathbb{R}^3_x$ рассмотрим аналогичную систему

$$\dot{z} = u_1 Z_1(z) + u_2 Z_2(z), \quad z \in \mathbb{R}^3_z, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

удовлетворяющую условиям (2), (3). Зафиксируем любые точки $x^0 \in \mathbb{R}^3_x$, $z^0 \in \mathbb{R}^3_z$ и докажем, что существует диффеоморфизм Φ окрестности $x^0 \in O_x \subset \mathbb{R}^3_x$ на окрестность $z^0 \in O_z \subset \mathbb{R}^3_z$ такой, что $\Phi_* X_i = Z_i$, где Φ_* – дифференциал отображения Φ.

Рассмотрим сначала отображение $F_x : \mathbb{R}^3_t \to \mathbb{R}^3_x$, $F_x(t_1, t_2, t_3) = e^{t_3 X_3} \circ e^{t_2 X_2} \circ e^{t_1 X_1}(x^0)$, где $e^{\tau X}(x)$ – образ точки x под действием потока поля X. Легко видеть, что отображение F_x есть диффеоморфизм окрестности $(0,0,0) \in O_t \subset \mathbb{R}^3_t$ на окрестность $x^0 \in O_x \subset \mathbb{R}^3_x$, причем в этих окрестностях $F_{x*} e_1 = X_1 + t_2 X_3$, $F_{x*} e_2 = X_2$, $F_{x*} e_3 = X_3$, где e_i – векторы координатного репера в $\mathbb{R}^3_t$.

Рассуждая аналогично для полей Z_i, построим диффеоморфизм $F_z(t_1,t_2,t_3)=e^{t_3Z_3}\circ e^{t_2Z_2}\circ e^{t_1Z_1}(z^0)$ окрестности $(0,0,0)\in O_t\subset\mathbb{R}^3_t$ на окрестность $z^0\in O_z\subset\mathbb{R}^3_x$. Тогда искомая замена переменных имеет вид $\Phi=F_z\circ F_x^{-1}:\ O_x\to O_z$ или

$$\Phi(e^{t_3X_3}\circ e^{t_2X_2}\circ e^{t_1X_1}(x^0))=e^{t_3Z_3}\circ e^{t_2Z_2}\circ e^{t_1Z_1}(z^0). \tag{4}$$

Предложение доказано.

Доказанное утверждение конструктивно: формула (4) дает способ построения локальной замены переменных $z=\Phi(x)$. Предложение 1 позволяет свести исследование произвольной системы (1)–(3) к исследованию любой удобной модели вида (1)–(3). В качестве такой модели будем далее рассматривать симметричную нильпотентную систему

$$\dot z_1=u_1,\quad \dot z_2=u_2,\quad \dot z_3=(u_2z_1-u_1z_2)/2 \tag{5}$$

с граничными условиями

$$z(0)=z^0,\quad z(T)=0,\quad z^0\in\mathbb{R}^3. \tag{6}$$

Далее будем рассматривать задачу управления (5), (6). Будем искать решение в классах оптимальных в смысле минимума функционала субримановой длины, тригонометрических и кусочно-постоянных с одним переключением управлений.

Оптимальная задача в указанном смысле хорошо известна в теории оптимального управления и субримановой геометрии как субриманова задача на группе Гейзенберга (см., например, [6]). Однако, насколько нам известно, отсутствуют необходимые нам явные выражения для оптимальных управлений в этой задаче в зависимости от начальной точки z^0. Мы получим эти выражения в следующем пункте и построим оптимальный синтез.

4. Оптимальные управления. Рассмотрим задачу (5), (6) с функционалом качества

$$L=\int_0^T\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,dt\to\min. \tag{7}$$

Существование решения задачи (5)–(7) следует из теоремы А.Ф. Филиппова [7, с. 138].

С помощью принципа максимума Понтрягина [8, с. 25] отыскиваются два семейства экстремалей, выходящих из начала координат. Первое из них представляет собой трехпараметрическое семейство спиралей

$$z_1(t)=\rho(\sin(ct+b)-\sin b),\quad z_2(t)=\rho(\cos b-\cos(ct+b)),\quad z_3(t)=\rho^2(ct-\sin ct)/2, \tag{8}$$

где параметры $\rho\neq0$, $c\neq0$, $b\in\mathbb{R}^3$. Второе является двухпараметрическим семейством лучей

$$z_1(t)=at\cos b,\quad z_2(t)=at\sin b,\quad z_3(t)=0, \tag{9}$$

где параметры $a>0$, $b\in\mathbb{R}^3$.

Из условий оптимальности второго порядка [7, с. 329] следует, что спирали (8) оптимальны на промежутке $t\in[0,2\pi/|c|]$. Лучи (9) оптимальны на промежутке $t\in[0,\infty)$.

Оптимальные траектории (8), (9) разбивают все пространство состояний $\mathbb{R}^3$ на три подмножества: 1) плоскость $z_3=0$, 2) прямая $z_1^2+z_2^2=0$, 3) $\mathbb{R}^3\setminus\{z_3=0,\ z_1^2+z_2^2=0\}$. Любая точка первого множества достижима с помощью единственного радиального луча (9); в каждую точку второго приходит бесконечно много оптимальных спиралей (8), полученных одна из другой поворотами вокруг оси Oz_3 и соответствующих значению $t=2\pi/|c|$; в каждую точку третьего приходит единственная дуга оптимальной спирали (8), соответствующая некоторому значению $t\in(0,2\pi/|c|)$. Система (5) имеет следующие симметрии: дилатации $(z_1,z_2,z_3)\mapsto(\rho z_1,\rho z_2,\rho^2z_3)$, повороты вокруг оси Oz_3, отражения $(z_1,z_2,z_3)\mapsto(z_1,-z_2,-z_3)$. С помощью этих симметрий находятся оптимальные траектории, идущие из начала координат в точку $z^0\in\{z_3\neq0\}$.

Искомые значения параметров $\rho=\rho(z^0)$, $c=c(z^0)$, $b=b(z^0)$ для оптимальной траектории (8) вычисляются следующим образом (здесь и далее $r=\sqrt{z_1^2+z_2^2}$ – полярный радиус, φ – полярный угол точки (z_1,z_2); если $r=0$, то $\varphi\in[0,2\pi]$ – любое число):

$$\rho(z)=\begin{cases}\dfrac{r\operatorname{sign}z_3}{2\sin(\bar t/2)}, & z_3\neq0,\quad r\neq0,\\ \sqrt{|z_3|/\pi}\operatorname{sign}z_3, & z_3\neq0,\quad r=0,\end{cases}\qquad c(z)=\bar tT^{-1}\operatorname{sign}z_3,\quad z_3\neq0,\quad b(z)=\varphi-(\bar t/2)\operatorname{sign}z_3.$$

Используемая выше функция $\bar t = \bar t(z)$ определяется следующим образом: 1) если $z_3 \neq 0$, $r \neq 0$, то $\bar t$ – единственный корень уравнения $(\bar t - \sin \bar t)/\sin^2(\bar t/2) = 8|z_3|/r^2$ на промежутке $(0, 2\pi)$; 2) если $z_3 \neq 0$, $r = 0$, то $\bar t = 2\pi$; 3) если $z_3 = 0$, $r \neq 0$, то $\bar t = 0$. Заметим, что функция $\bar t(z)$ непрерывна на $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Искомые значения параметров $a = a(z^0)$, $b = b(z^0)$ для оптимальной траектории (9) имеют вид $a(z) = r/T$, $b(z) = \varphi$.

Для задания оптимальных программных управлений в задаче (5)–(7) воспользуемся следующими функциями:

$$\psi(z) = \varphi + (\bar t/2)\operatorname{sign} z_3, \quad d(z) = \begin{cases} |\rho|\bar t, & z_3 \neq 0, \\ r, & z_3 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Заметим, что $d(z)$ есть *субриманово расстояние* между точкой z и началом координат в субримановой задаче на группе Гейзенберга [6].

После обращения времени $t \to T - t$ на траекториях (8), (9) и дифференцирования $z_1(t)$, $z_2(t)$ получим *программные управления,* задающие решение задачи (5)–(7): $u_1(t) = (-d/T)\cos(\psi - ct\operatorname{sign}|z_3^0|)$, $u_2(t) = (-d/T)\sin(\psi - ct\operatorname{sign}|z_3^0|)$, где $d = d(z^0)$, $c = c(z^0)$, $\psi = \psi(z^0)$.

Вычисляя значения этих управлений в начальный момент $t = 0$ и выбирая $T = d(z)$, получаем *оптимальный синтез* в задаче (5)–(7).

5. Тригонометрические управления. Рассмотрим задачу (5), (6) с управлениями вида

$$u_1 = \alpha_1/T + \beta\sin(2\pi/T)t, \quad u_2 = \alpha_2/T + \gamma\cos(2\pi/T)t. \tag{11}$$

Следующие соотношения для параметров дают решение задачи управления (5), (6), (11), где $\gamma \neq -(2/T)z_2^0$ – свободный параметр:

$$\alpha_1 = -z_1^0, \quad \alpha_2 = -z_2^0, \quad \beta(\gamma) = 4\pi z_3^0/(T(2z_2^0 + \gamma T)). \tag{12}$$

Заметим, что программные управления (11), (12) не порождают синтез.

Решим задачу управления (5), (6) с кусочно-тригонометрическими управлениями вида

$$u_1 = \begin{cases} -\mu\sin(\varphi^0 + \gamma t), & t \in [0, t_p), \\ -\nu\cos\varphi_p, & t \in [t_p, T], \end{cases} \qquad u_2 = \begin{cases} \mu\cos(\varphi^0 + \gamma t), & t \in [0, t_p), \\ -\nu\sin\varphi_p, & t \in [t_p, T], \end{cases} \tag{13}$$

где момент переключения t_p соответствует условию $z_3(t_p) = 0$. Следующие соотношения для параметров при $r^0 z_3^0 \neq 0$ дают решение задачи (5), (6), (13):

$$|\gamma| > 2|z_3^0|/(T(r^0)^2), \quad \operatorname{sign}\gamma = -\operatorname{sign} z_3^0, \tag{14}$$

$$t_p = 2|z_3^0|/(|\gamma|(r^0)^2), \quad \varphi_p = \varphi^0 - 2z_3^0/(r^0)^2, \tag{15}$$

$$\mu = -|\gamma| r^0 \operatorname{sign} z_3^0, \quad \nu = r^0/(T - t_p), \tag{16}$$

где $r^0 = r(z^0)$, $\varphi^0 = \varphi(z^0)$.

Формулы (13)–(16) задают следующий закон движения точки $z(t)$: на отрезке $t \in [0, t_p]$ проекция $(z_1(t), z_2(t))$ движется по дуге окружности радиуса r^0 с центром в начале координат, а на отрезке $t \in [t_p, T]$ – по радиусу-вектору вплоть до начала координат. Очевидно, что этот закон движения порождает некоторый синтез, так как алгоритм движения из любой промежуточной точки траектории является продолжением исходной траектории. Таким образом, программные управления (13)–(16), вычисленные при $t = 0$, порождают управления в виде обратной связи; если положить $|u| = 1$, то $\gamma(z) = -(\operatorname{sign} z_3)/r$, $T(z) = r(z)$, и искомый *кусочно-тригонометрический синтез* имеет вид

$$u_1 = \begin{cases} (\operatorname{sign} z_3)\sin\varphi, & r z_3 \neq 0, \\ -\cos\varphi, & z_3 = 0, \end{cases} \qquad u_2 = \begin{cases} -(\operatorname{sign} z_3)\cos\varphi, & r z_3 \neq 0, \\ -\sin\varphi, & z_3 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Синтез (17) имеет особое множество – ось Oz_3 : на этой оси закон управления (17) не определен и необходимо использовать другой алгоритм управления.

6. Кусочно-постоянные управления. Рассмотрим задачу (5), (6) в классе кусочно-постоянных управлений.

Сначала рассмотрим случай постоянных управлений

$$u_1(t) = \alpha, \quad u_2(t) = \beta, \quad t \in [0, T]. \tag{18}$$

Задача управления (5), (6), (18) имеет решение только при $z_3^0 = 0$. В этом случае $\alpha = -z_1^0/T$, $\beta = -z_2^0/T$.

Теперь рассмотрим управления с одним переключением

$$u_1 = \begin{cases} \alpha, & t \in [0, T/2), \\ \beta, & t \in [T/2, T], \end{cases} \qquad u_2 = \begin{cases} \gamma, & t \in [0, T/2), \\ \delta, & t \in [T/2, T]. \end{cases} \tag{19}$$

Следующие соотношения для параметров при $r^0 \neq 0$ дают решение задачи (5), (6), (19):

$$\beta = -\alpha - 2z_1^0/T, \quad \delta = -\gamma - 2z_2^0/T, \quad \alpha z_2^0 - \gamma z_1^0 = 4z_3^0/T. \tag{20}$$

Если z^0 лежит на оси $Oz_3 \setminus \{0\}$, то множеством достижимости является плоскость $z_3 = z_3^0$, следовательно, поставленная задача решения не имеет: необходимо, как минимум, два переключения.

При $\gamma = 0$ формулы (19), (20) задают следующий закон движения точки $z(t)$. На отрезке $t \in [0, T/2]$ проекция $(z_1(t), z_2(t))$ движется параллельно оси $z_2 = 0$ до выполнения условия $z_3(T/2) = 0$; а на отрезке $t \in [T/2, T]$ – по радиусу-вектору вплоть до начала координат. Очевидно, что этот закон движения порождает некоторый синтез, так как алгоритм движения из любой промежуточной точки траектории является продолжением исходной траектории. Таким образом, программные управления (19), (20) при $\gamma = 0$, $z_2^0 \neq 0$ порождают управления в виде обратной связи. Применяя к ним симметрии системы (5) – повороты вокруг оси Oz_3 на угол $\theta \in [0, 2\pi]$, – полагая $|u| = 1$ и, следовательно, $T(z) = 4|z_3|/(r|w(z)|)$, для задачи (5), (6) получаем семейство *кусочно-постоянных синтезов*

$$u_1 = \begin{cases} v\cos\theta, & z_3 w(z) \neq 0, \\ -\cos\varphi, & z_3 = 0, \end{cases} \qquad u_2 = \begin{cases} v\sin\theta, & z_3 w(z) \neq 0, \\ -\sin\varphi, & z_3 = 0, \end{cases} \tag{21}$$

где $w(z) = z_2\cos\theta - z_1\sin\theta$, $v(z) = \operatorname{sign}(z_3 w(z))$. Синтез (21) имеет особую плоскость $w(z) = 0$, на которой закон управления (21) не определен, и необходимо использовать другой алгоритм управления.

7. Заключение. В данной работе получены программные управления и управления в виде обратной связи для произвольной трехмерной нильпотентной системы с двумерным управлением, которые позволят создавать эффективные приближенные алгоритмы для решения задачи управления произвольными трехмерными нелинейными системами с двумерным управлением, что может найти применение в робототехнике [9].

Автор выражает благодарность В.И. Гурману за помощь при подготовке работы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 06-01-00330).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аграчев А.А., Сарычев А.В.* // Докл. АН СССР. 1987. № 295. С. 777–781.
2. *Hermes H.* // SIAM J. Contr. Optimiz. 1986. V. 24. P. 731–736.
3. *Bellaiche A., Risler J.-J.* // Sub-Riemannian geometry. Basel, 1996. P. 1–78.
4. *Laferriere G. and Sussmann H.J.* // Nonholonomic Motion Planning / Eds. Li Zexiang and Canny J.F.. The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science. 1992. V. 192.
5. *Sachkov Yu.L., Sachkova E.F.* // Generalized solutions in control problems (IFAC workshop). M., 2004. P. 227–235.
6. *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы. Т. 7, 8. М., 1986.
7. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М., 2005.
8. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.
9. *Laumond J.P.* // Lecture notes in Control and Information Sciences. V. 229. Springer, 1998. P. 343.

Институт программных систем РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию
21.05.2007 г.