

УДК 517.538

И. Ю. Бесчастный

## Об оптимальном качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания

Рассматривается задача о качении сферы по плоскости с прокручиванием, без проскальзывания. Требуется перекатить сферу из одной конфигурации в другую так, чтобы достигался минимум действия. Получена полная параметризация экстремальных траекторий и исследуются естественные симметрии гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина (вращения и отражения) и их неподвижные точки. На основе полученных оценок для неподвижных точек доказаны верхние оценки времени разреза, т.е. момента времени, когда экстремальная траектория теряет оптимальность. Более детально рассмотрена задача о переориентации сферы, в частности, найдены диффеоморфные области в прообразе и образе экспоненциального отображения, которые используются для построения оптимального синтеза.

Библиография: 15 названий.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, геометрические методы, симметрии, качение поверхностей.

DOI: 10.4213/sm8296

### § 1. Введение

Рассматривается механическая система, состоящая из сферы, катящейся по плоскости с прокручиванием, но без проскальзывания. Состояние такой системы в каждый момент времени характеризуется точкой на плоскости и ориентацией сферы в пространстве. Требуется перекатить сферу из заданного начального состояния в заданное конечное так, чтобы достигался минимум действия. Отсутствие проскальзывания означает, что точка контакта сферы и плоскости имеет нулевую мгновенную скорость, наличие прокручивания означает, что вектор угловой скорости сферы может быть направлен в произвольном направлении.

Эта задача является естественной модификацией задачи об оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания, которая была впервые поставлена в работе Дж. Хаммерсли [1]. Позже А. Артур и Дж. Уолш получили уравнения для экстремальных траекторий в терминах кватернионов [2]. В. Джурджевич провел качественное исследование этих траекторий и показал, что при оптимальном качении точка контакта сферы и

---

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.В25.31.0029) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-00913 и № 13-01-91162-ГФЕН\_а).