ТОЧКИ СОВПАДЕНИЯ ДВУХ ОТОБРАЖЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ И (q_1, q_2)–КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

О.А. Васянин

Аннотация. Рассматриваются точки совпадения двух отображений метрических пространств, одно из которых является непрерывным и накрывающим, а другое — липшицевым. Приводятся известные результаты теории точек совпадения. Вводится понятие (q_1, q_2)-квазиметрического пространства и приводятся результаты относительно точек совпадения отображений между пространствами такого типа. Указываются возможные приложения результатов о точках совпадения в математической экономике.

1 Определения и необходимые сведения

Дадим некоторые важные определения.

Пусть X — непустое множество, а функция $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$ такова, что

- $(\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y) \quad \forall x, y \in X$ (аксиома тождества);
- $\rho(y, x) = \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
- $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Тогда пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*, а функция ρ — *метрикой на нем*.

Если в данном определении опустить аксиому симметрии, а остальные две оставить, то функция ρ называется *квазиметрикой* [1]. Таким образом, для квазиметрики ρ, вообще говоря, $\rho(y, x) \neq \rho(x, y)$. Если же в определении квазиметрики заменить неравенство треугольника на следующее:

$$\rho(x, z) \leqslant q_1\rho(x, y) + q_2\rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X,$$

называемое (q_1, q_2)-*обобщенным неравенством треугольника* (q_1, q_2 — положительные числа), то пара (X, ρ) превращается в (q_1, q_2)-*квазиметрическое пространство* [1]. Заметим, что тем самым всякая метрика является (1,1)-квазиметрикой, но обратное неверно, поскольку (1,1)-квазиметрика необязательно симметрична.

Квазиметрические пространства существенно отличаются от метрических (см., например, §2 работы [5]). Так, в полном квазиметрическом пространстве необязательно выполнен принцип сжимающих отображений.

Квазиметрику ρ будем называть *слабо симметрической*, если

$$(\lim_{i\to\infty} \rho(\xi, x_i) = 0) \Rightarrow (\lim_{i\to\infty} (x_i, \xi) = 0) \quad \forall \{x_i\} \subset X, \forall \xi \in X.$$

Пара (X, ρ) — *слабо симметрическое квазиметрическое пространство.*

Пример 1. Возьмем вещественные числа $a < b < c$ и рассмотрим на прямой $\mathbb{R}$ множество $X = \{a\} \cup [b, c]$. Определим на $X \times X$ неотрицательную функцию ρ_X так:

$$\rho_X(a, b) = \rho_X(b, a) = 1, \quad \rho(a, x) = \rho_X(x, a) = 3 \quad \forall x \in (b, c],$$
$$\rho_X(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [b, c].$$

Функция ρ_X является симметрической (3,3)-квазиметрикой. Рассмотрим открытый шар $O^X(a, 2) = \{y \in X \,|\, \rho_X(y, a) < 2\}$. Это множество не является открытым: действительно, точка $b \in O^X(a, 2)$ для него не является внутренней. Для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$ верно, что $x_\varepsilon = b + \dfrac{\varepsilon}{2} \in (b, c]$, но $x_\varepsilon \notin O^X(a, 2)$, поскольку $\rho_X(x_\varepsilon, a) = 3$. Тем самым, в квазиметрическом пространстве открытый шар может и не быть открытым множеством!

Существуют различные примеры квазиметрических пространств, в которых последовательности точек имеют континуальное множество пределов [1].

Пример 2. (Прямая Зоргенфрея). Рассмотрим на прямой $\mathbb{R}$ квазиметрику ρ, определенную так:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geqslant x, \\ 1, & y < x. \end{cases}$$

Тогда в квазиметрическом пространстве $(\mathbb{R}, \rho)$ последовательность $x_n = -\dfrac{1}{n}$ является последовательностью Коши (то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $m, n \geqslant N$ верно $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$), однако не имеет предела. То есть пространство $(\mathbb{R}, \rho)$ не полно. С другой стороны, последовательность $y_n = \dfrac{1}{n}$ имеет единственный предел $y = 0$, поскольку $\rho(0, y_n) = \dfrac{1}{n}$, однако $\{y_n\}$ не является последовательностью Коши. Пример показывает, что в квазиметрических пространствах сходимость последовательностей, вообще говоря, не следует из их полноты, а полнота, вообще говоря, не следует из сходимости.

Пусть X и Y — метрические пространства, а $\Phi : X \to Y$ и $\Psi : X \to Y$ — произвольные отображения. Точка $\xi \in X$, для которой выполнено равенство

$$\Phi(\xi) = \Psi(\xi),$$

называется *точкой совпадения отображений* Φ *и* Ψ.

В силу исторической традиции, изучаются точки совпадения пары отображений определенного вида, а именно, накрывающего и липшицева отображений [2].

Пусть $X = (X, \rho_X)$ и $Y = (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, а число $\alpha > 0$.

Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *α-накрывающим*, если выполнено включение

$$B^Y(\Psi(x), r) \subset \Psi(B^X(x, r)) \quad \forall x \in X, \forall r > 0.$$

Здесь $B^X(x, r) = \{y \in X \mid \rho_X(y, x) \leqslant r\}$ — замкнутый шар в X.

Пусть $X = (X, \rho_X)$ и $Y = (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, а число $\beta > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *β-липшицевым*, если

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leqslant \beta \rho_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

2 Результаты о точках совпадения

В этом разделе приведем результаты о точках совпадения двух отображений в метрических и квазиметрических пространствах.

Теорема 1 (О возмущении) (А.А. Милютин) [2]. Пусть X является метрическим пространством, а Y является векторным пространством. Пусть отображения $\Phi, \Psi : X \to Y$ таковы, что Ψ является непрерывным и $\alpha-$накрывающим, а Φ является $\beta-$липшицевым, причем $\alpha > \beta \geqslant 0$. Тогда отображения $\Psi \pm \Phi$ являются $(\alpha - \beta)$-накрывающими.

Заметим, что из Теоремы 1 следует, что существует точка совпадения Φ и Ψ, поскольку всякое накрывающее отображение является сюръективным. Такая точка $\xi \in X$, для которой $(\Psi - \Phi)(\xi) = 0$, и будет искомой точкой.

Теорема 2 (А.В. Арутюнов) [3]. Пусть $X = (X, \rho_X)$, $Y = (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, причем пространство X является полным. Пусть отображения $\Phi, \Psi : X \to Y$ таковы, что Ψ является непрерывным и $\alpha-$накрывающим, а Φ является $\beta-$липшицевым, причем $\alpha > \beta \geqslant 0$. Тогда для любой точки $x \in X$ существует такая точка совпадения ξ отображений Φ и Ψ, что выполнена оценка

$$\rho_X(\xi, x) \leqslant \frac{\rho_Y(\Phi(x), \Psi(x))}{\alpha - \beta}.$$

Эта теорема обобщает Теорему 1, ведь теперь пространство Y — произвольное метрическое. Факт накрывания для отображения $\Psi - \Phi$ с константой $\alpha - \beta$ следует из оценки расстояния до точки совпадения и рассмотрения вспомогательного отображения [3].

Теорема 3 (О.А. Васянин) [4]. Пусть $X = (X, \rho_X)$ является метрическим и одновременно линейно связным топологическим пространством, а пространство $Y = \mathbb{R}$. Пусть отображение $\Phi : X \to Y$ удовлетворяет условию

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leqslant \gamma(\rho_X(x_1, x_2)),$$

где неубывающая функция $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такова, что $\gamma(t) < t$ при $t > 0$, а отображение $\Psi : X \to Y$ является непрерывным 1-накрывающим. Тогда существует точка совпадения отображений Φ и Ψ.

Эта теорема гласит о существовании точки совпадения двух непрерывных функционалов, обладающих свойствами накрывания и липшицевости. В частном случае, когда пространство X конечномерно, — считаем без потери общности, что $X = \mathbb{R}^n$, — множество точек совпадения состоит из одного элемента при $n = 1$ и имеет мощность континуума при $n \geqslant 2$.

Для формулировки следующей теоремы нам понадобятся дополнительные определения.

Для функции $f : X \times X \to [0, +\infty)$ и точки $(x_1, x_2) \in X \times X$ введем *нижний предел функции по второй переменной*:

$$\underline{\lim}_{\eta \to x_2} \rho_X(x_1, \eta) = \inf_{\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}} \underline{\lim}_{i \to \infty} f(x_1, \eta_i).$$

Здесь инфимум в правой части берется по всем последовательностям $\{\eta_i\} \subset X$ таким, что $\eta_i \to x_2$. В силу неотрицательности F нижний предел существует и конечен.

Для отображения $F : X \to Y$ введем его *график*, то есть множество

$$\operatorname{gph} F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = F(x)\}.$$

Будем говорить, что отображение F *замкнуто*, если для любых последовательностей $\{x_i\} \subset X$ и $\{y_i\} \subset Y$ таких, что $x_i \to x_0 \in X$, $y_i \to y_0 \in Y$, $(x_i, y_i) \in \operatorname{gph} F \quad \forall i$ верно, что $(x_0, y_0) \in \operatorname{gph} F$.

Обозначим для чисел $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, 1)$ сумму первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем θ : $1 + \theta + \ldots + \theta^{n-1} = S(\theta, n) = \dfrac{1 - \theta^n}{1 - \theta}$. Удобно положить $S(\theta, 0) = 0$.

Теорема 4 (А.В. Арутюнов, А.В. Грешнов) [5]. Пусть (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ_X) является полным. Пусть отображение Ψ является $\alpha-$накрывающим и замкнутым, а отображение Φ является β-липшицевым. Зафиксируем точку $x_0 \in X$. Тогда существует точка совпадения ξ отображений Φ и Ψ такая, что

$$\underline{\lim}_{\eta \to \xi} \rho_X(x_0, \eta) \leqslant \frac{q_1^2 \alpha^{m_0 - 1} S\Big(\dfrac{q_2 \beta}{\alpha}, m_0 - 1\Big) + q_1 (q_2 \beta)^{m_0 - 1}}{\alpha^{m_0} - q_2 \beta^{m_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Если пространство (X, ρ_X) является слабо симметрическим, то для ξ также выполнена оценка

$$\rho_X(x_0, \xi) \leqslant q_1 \frac{q_1^2 \alpha^{m_0-1} S\Big(\dfrac{q_2\beta}{\alpha}, m_0 - 1\Big) + q_1 (q_2\beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2\beta^{m_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Здесь число $m_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \,|\, q_2\beta^j < \alpha^j\}$.

3 Прикладное значение

Сами по себе квазиметрические пространства активно изучаются в топологии, функциональном и метрическом анализе [6] и имеют приложения в выпуклом анализе и теории оптимизации. Теория точек совпадения (результаты о существовании точек совпадения, мощности их множества и устойчивости к возмущениям отображений) нашла приложения в математической экономике: в модели "спрос-предложение" точка совпадения пары отображений (спроса и предложения), определенных на специальном подмножестве в $\mathbb{R}^n$, оказывается вектором равновесных цен [7]. Экономическая же интерпретация квазиметрических пространств автору пока неизвестна.

Список литературы

[1] Wilson, W. A. (1931). On Quasi-Metric Spaces. American Journal of Mathematics, 53(3), 675–684

[2] *Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35, № 6 (216). С. 11—46.

[3] *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.

[4] *Васянин О.А.* Точки совпадения и задачи управления // Труды 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIV, Москва, 2024). М.: ИПУ РАН, 2024.

[5] *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* (Q-1,Q-2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points // Izvestiya Mathematics. 2018. Vol. 82, Iss. 2. C. 245-272.

[6] *Александров П.С., Немыцкий В.В.* Условие метризуемости топологических пространств и аксиома симметрии // Матем. сб., 3(45):3 (1938), 663–672.

[7] *Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А.* Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Матем. моделирование. 2016. Т. 28, № 3. С. 3–22.