Экстремали левоинвариантных сублоренцевых структур

Условия сохранения каузального типа

Алексей Подобряев

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН

alex@alex.botik.ru

Аннотация

В настоящей работе рассматриваются левоинвариантные (суб)лоренцевы структуры на группах Ли, заданные произвольным замкнутым выпуклым острым конусом в соответствующей алгебре Ли и ассоциированной с ним антинормой. Получены условия, при которых нормальные экстремальные траектории сохраняют свой каузальный тип. Кроме того, показано, что касательные векторы анормальных экстремальных траекторий либо светоподобны, либо являются касательными векторами некоторых субримановых анормальных экстремальных траекторий, которые определяются распределением плоскостей, порожденным конусом.

Введение

Последнее время вырос интерес к левоинвариантным лоренцевым и сублоренцевым задачам с точки зрения геометрической теории управления. Упомянем прежде всего пионерские в этом направлении работы М. Гроховского, посвященные сублоренцевой геометрии группы Гейзенберга. Это исследование было продолжено Ю. Л. Сачковым и Е. Ф. Сачковой. См. также работу Э. Гронга и А. Васильева о левоинвариантной сублоренцевой геометрии на пространстве анти-де Ситтера и работы Ю. Л. Сачкова о левоинвариантной лоренцевой геометрии на плоскости Лобачевского.

Мы рассматриваем более общую постановку задачи, в которой левоинвариантная сублоренцева структура задана с помощью произвольного замкнутого выпуклого острого конуса в алгебре Ли и ассоциированной с ним непрерывной антинормы. Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях нормальная экстремальная траектория сохраняет свой каузальный тип (т.е. ее касательный вектор всегда остается либо времениподобным, либо светоподобным). Кроме того, в отличие от римановой геометрии, анормальные экстремальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии. Эти анормальные траектории совпадают со светоподобными экстремальными траекториями, и тем самым, нестрого анормальны. В сублоренцевой геометрии, вообще говоря, анормальные экстремальные траектории могут иметь как светоподобные касательные векторы, так и касательные векторы, совпадающие с касательными векторами некоторых из субримановых анормальных траекторий, определяемых распределением плоскостей, которое линейно-порождено конусом. Если это распределение контактно, то анормальные экстремальные траектории светоподобны и нестрого анормальны.

Попутно оказывается, что для (суб)лоренцевых структур, заданных квадратичной формой, для описания экстремальных траекторий можно использовать квадратичный функционал «энергии», как и в субримановом случае. Заметим, что напрямую стандартный для субримановой геометрии трюк замены функционала длины на функционал энергии с использованием неравенства Коши-Буняковского-Шварца в (суб)лоренцевом случае не работает.

Результаты опубликованы в работе [1].

Постановка задачи

Пусть $\mathcal{C}$ есть замкнутый выпуклый конус в конечномерном вещественном векторном пространстве V. Обозначим через $\operatorname{ri}\mathcal{C}$ и $\partial_r\mathcal{C}$ его относительные внутренность и границу, соответственно.

Определение 1. *Антинормой*, ассоциированной с конусом $\mathcal{C}$, называется функция $\alpha : V \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ такая, что

(i) $\alpha|_{\operatorname{ri}\mathcal{C}} > 0$, $\alpha|_{\partial\mathcal{C}} = 0$, $\alpha|_{V\setminus\mathcal{C}} = -\infty$;

(ii) для любых $v \in V$ и $\lambda > 0$ выполнено равенство $\alpha(\lambda v) = \lambda\alpha(v)$;

(iii) для любых $v, w \in V$ выполнено $\alpha(v + w) \geqslant \alpha(v) + \alpha(w)$, т.е. функция α вогнута.

Будем называть антинорму α *непрерывной*, если функция $\alpha|_{\mathcal{C}}$ непрерывна.

Рассмотрим следующую левоинвариантную задачу оптимального управления на вещественной группе Ли G. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathfrak{g}$ — замкнутый выпуклый конус в соответствующей алгебре Ли, а α — ассоциированная с ним непрерывная антинорма. Требуется найти липшицеву кривую $g : [0, t_1] \to G$ и управление $u \in L^\infty([0, t_1], \mathcal{C}\setminus 0)$ такие, что

$$g(0) = \mathrm{id}, \qquad g(t_1) = g_1, \qquad \dot g(t) = L_{g(t)*}u(t), \qquad \int_0^{t_1} \alpha(u(t))\,dt \to \max, \tag{1}$$

где терминальное время t_1 свободно, а через L_g обозначен левый сдвиг на элемент $g \in G$.

Определение 2. Если касательный вектор $v \in T_gG$ таков, что $v \notin L_{g*}\mathcal{C}$ (или $v \in L_{g*}\partial_r\mathcal{C}$, или $v \in L_{g*}\operatorname{ri}\mathcal{C}$), то говорят, что он имеет *пространственноподобный* (или *светоподобный*, или *времениподобный*) *каузальный тип*.

Каузальным типом траектории $g : [0, t_1] \to G$ *в точке* $g(t)$ называется каузальный тип вектора $\dot g(t)$.

Рассмотрим семейство функций $H^\nu_u : T^*G \to \mathbb{R}$ на кокасательном расслоении группы G (зависящее от параметров $u \in \mathcal{C}\setminus 0$ и $\nu \in \{0, 1\}$):

$$H^\nu_u(\lambda) = \langle L^*_{\pi(\lambda)}\lambda, u\rangle + \nu\alpha(u), \qquad \lambda \in T^*G.$$

Определение 3. Липшицева кривая $\lambda : [0, t_1] \to T^*G$ называется *экстремалью*, существуют допустимое управление $\hat u \in L^\infty([0, t_1], \mathcal{C}\setminus 0)$ и число $\nu \in \{0, 1\}$ такие, что $(\lambda, \nu) \neq 0$ и для почти всех $t \in [0, t_1]$ выполнено

$$\dot\lambda(t) = \vec H^\nu_{\hat u(t)}(\lambda(t)), \qquad H^\nu_{\hat u(t)}(\lambda(t)) = \max_{u\in\mathcal{C}\setminus 0} H^\nu_u(\lambda(t)), \qquad H^\nu_{\hat u(t)}(\lambda(t)) = 0,$$

где через $\vec H^\nu_{\hat u(t)}$ обозначено гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану $H^\nu_{\hat u(t)}$ относительно канонической симплектической структуры на кокасательном расслоении T^*G.

Если $\nu = 1$ ($\nu = 0$), то кривая λ называется *нормальной* (соответственно, *анормальной*) *экстремалью*. Пусть $\pi : T^*G \to G$ — естественная проекция. Кривая $\pi\circ\lambda : [0, t_1] \to G$ называется *нормальной/анормальной экстремальной траекторией*. Анормальная экстремальная траектория *строго анормальна*, если она не является проекцией никакой нормальной экстремали.

Вопрос. При каких условиях экстремальные траектории сохраняют свой каузальный тип?

Основной результат

Напомним некоторые необходимые определения из выпуклого анализа. Всюду ниже V^* обозначает двойственное пространство векторного пространства V, а $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ каноническое спаривание ковекторов и векторов.

Определение 4. Конус $\mathcal{C}^\vee = \{p \in V^* \,|\, p|_{\mathcal{C}} \leqslant 0\} \subset V^*$ называется *отрицательным двойственным конусом* для конуса $\mathcal{C}$. *Антисферой* радиуса r антинормы α называется множество $S_r = \{v \in V \,|\, \alpha(v) = r\}$. *Двойственной функцией* для функции α называется функция $\alpha^\vee : V^* \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ такая, что

$$\alpha^\vee(p) = -\sup_{v\in S_1}\langle p, v\rangle, \qquad p \in V^*.$$

Определение 5. Конус называется *острым*, если он не содержит ненулевых подпространств.

В силу левоинвариантности можно считать, что функции $H^\nu_{\hat u(t)}$ определены на двойственном пространстве алгебры Ли $\mathfrak{g}^*$ с координатами $h_1 = \langle\,\cdot\,, e_1\rangle, \dots, h_n = \langle\,\cdot\,, e_n\rangle$, где $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис пространства $\mathfrak{g}$. Тогда экстремаль $\lambda(t)$ определяется сопряженной подсистемой $\dot h_i(t) = \{H^\nu_{\hat u(t)}, h_i(t)\}$ на пространстве $\mathfrak{g}^*$, где $h(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t)) = L^*_{\pi(\lambda(t))}\lambda(t)$, а $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}$ есть стандартная пуассонова структура на пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Для ковектора $p \in \mathfrak{g}^*$ введем обозначение $u_p = \arg\max_{u\in\mathcal{C}\setminus 0} H^\nu_u(p)$. Вообще говоря, u_p определено неоднозначно. Ковектор $h(0) \in \mathfrak{g}^*$ и выбор значений управления $u(t) = u_{h(t)}$ однозначно определяет экстремаль $\lambda(t)$ с начальным условием $\lambda(0) = h(0)$.

Теорема 1. *Рассмотрим задачу оптимального управления* (1), *заданную замкнутым выпуклым острым конусом* $\mathcal{C}$ *и ассоциированной с ним непрерывной антинормой* α *такой, что функция* $\alpha^\vee$ *является антинормой, ассоциированной с конусом* $\mathcal{C}^\vee$. *Тогда всякая экстремальная траектория* $g(\cdot)$ *является решением уравнения* $\dot g(t) = L_{g(t)*}u_{h(t)}$, *где* $\dot h_i(t) = \{H_{u_{h(t)}}, h_i(t)\}$ *и* $H_{u_{h(t)}} = \langle h(t), u_{h(t)}\rangle$.

(1) *Если траектория нормальна, то выполнено одно из двух условий:*

(а) $h(t) \in S^\vee_1 = \{p \in \mathfrak{g}^* \,|\, \alpha^\vee(p) = 1\}$ *для всех* t *и траектория времениподобна;*

(б) $h(t) \in S^\vee_0 = \{p \in \mathfrak{g}^* \,|\, \alpha^\vee(p) = 0\}$ *для всех* t *и траектория светоподобна.*

(2) *Касательные векторы анормальных экстремальных траекторий либо светоподобны, либо являются касательными векторами субримановых анормальных траекторий, которые определяются распределением подпространств* $L_{g*}\operatorname{span}\mathcal{C} \subset T_gG$. *В частности, светоподобные дуги нестрого анормальны.*

Контрпример

Рассмотрим группу Гейзенберга, ее алгебра Ли есть пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z.

Рассмотрим левоинвариантную сублоренцеву структуру, заданную следующими конусом и антинормой на нем:

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \,|\, x, y \geqslant 0,\ z = 0\},$$

$$\alpha(x, y) = xy/(x + y),\ x^2 + y^2 \neq 0.$$

Тогда функция $\alpha^\vee$ на двойственном конусе имеет вид:

$$\mathcal{C}^\vee = \{(h_1, h_2, h_3) \in (\mathbb{R}^3)^* \,|\, h_1, h_2 \leqslant 0\},$$

$$\alpha^\vee(h_1, h_2, h_3) = \left(\sqrt{|h_1|} + \sqrt{|h_2|}\right)^2.$$

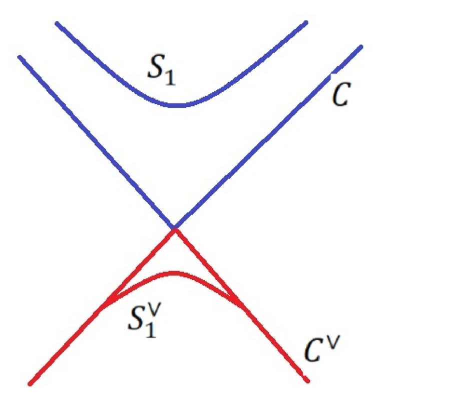

Рис. 1. Сфера, конус, двойственный конус и антисфера.

Заметим, что $\alpha^\vee|_{\partial_r(\mathcal{C}^\vee)} \neq 0$, следовательно $\alpha^\vee$ не является антинормой и условие теоремы 1 не выполняется. Можно проверить, что сопряженная подсистема нормальной гамильтоновой системы задается формулой:

$$\begin{cases} \dot h_1 = -h_3u_2, \\ \dot h_2 = h_3u_1, \\ \dot h_3 = 0, \end{cases} \qquad u_h = (u_1, u_2) = \begin{cases} \left(\sqrt{h_2/h_1} + 1, \sqrt{h_1/h_2} + 1\right), & \text{если } h_1h_2 \neq 0, \\ (a, 0), & \text{если } h_1 = 0, \\ (0, b), & \text{если } h_2 = 0, \end{cases}$$

где u_h есть управление, соответствующее ковектору $h = (h_1, h_2, h_3) \neq 0$, а числа $a, b > 0$. Легко показать, что на любой нормальной экстремальной траектории имеется не более двух переключений между времениподобным и светоподобным управлениями.

Некоторые следствия

Следствие 1. *Пусть антинорма* α *задается квадратичной формой* q *сигнатуры* $(1, r)$ *на алгебре Ли* $\mathfrak{g}$, *т.е.* $\alpha(u) = \sqrt{q(u)}$, *где в некотором базисе* $e_0, e_1, \dots, e_r, \dots, e_n$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *имеем* $q(u) = u_0^2 - u_1^2 - \dots - u_r^2$. *Тогда нормальные экстремальные траектории задачи* (1) *геометрически совпадают с нормальными времениподобными или светоподобными экстремальными траекториями той же управляемой системы с квадратичным функционалом*

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left(u_0^2(t) - u_1^2(t) - \dots - u_r^2(t)\right)dt \to \max$$

с фиксированным терминальным временем t_1 *и управлением* $u \in L^\infty([0, t_1], \mathfrak{g}\setminus 0)$.

Следствие 2. *В лоренцевом случае, т.е. при* $\operatorname{span}\mathcal{C} = \mathfrak{g}$, *анормальные экстремальные траектории светоподобны, в частности, нестрого анормальны.*

Тем самым анормальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии, в отличие от римановой геометрии, где нет анормальных траекторий.

Определение 6. Распределение плоскостей Δ на трехмерном гладком многообразии M называется *контактным*, если существует 1-форма ω такая, что $\Delta_m = \operatorname{Ker}\omega_m$ для любой точки $m \in M$ и $\omega\wedge d\omega \neq 0$.

Следствие 3. *Если распределение плоскостей* $L_{g*}\operatorname{span}\mathcal{C}$ *контактно, то все анормальные траектории сублоренцевой задачи* (1) *светоподобны и, в частности, нестрого анормальны.*

Список литературы

[1] А. В. Подобряев. Сублоренцевы экстремали, заданные антинормой. *Дифференциальные уравнения*, 60(3):386–398, 2024.

Благодарности

Исследование выполнено в Институте программных систем им. А. К. Айламазяна Российской академии наук за счет гранта Российского научного фонда, № 22-21-00877 (https://rscf.ru/project/22-21-00877/).