



Управляемость общей модели колесного робота с двумя прицепами

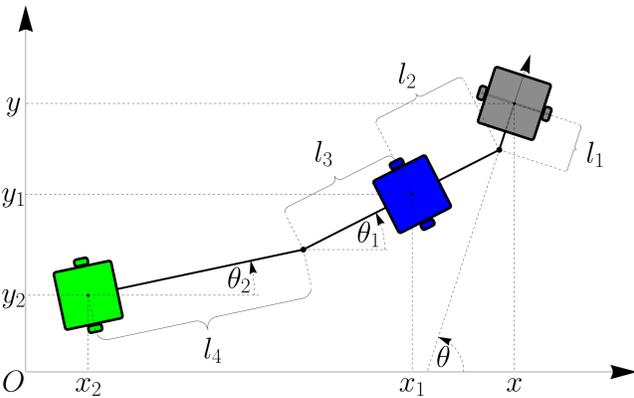
А. А. Ардентов

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский



Рассмотрена задача управления мобильным роботом с двумя прицепами на плоскости без препятствий. Робот состоит из платформы с закрепленной на ней колесной парой, прицепы имеют аналогичное описание. Прицепы последовательно крепятся к роботу в некоторых точках сцепки. Управление двумерно и соответствует линейной и угловой скорости робота (или, что эквивалентно, одного из прицепов). Из условия непроскальзывания колёс возникает неголономная система. В данной работе исследуется вопрос управляемости этой системы из произвольного начального положения робота с прицепами в произвольное конечное положение. Этот вопрос изучен Ф. Жаном [1] для частного вида сцепки робота с прицепами.

Геометрическая модель робота с двумя прицепами



Модель определяется расстояниями от колесных пар до точек сцепки $l_1 > 0, l_2 > 0, l_3 > 0, l_4 > 0$; голономными ограничениями

$$\begin{aligned} x_1 &= x - l_1 \cos \theta - l_2 \cos \theta_1, & y_1 &= y - l_1 \sin \theta - l_2 \sin \theta_1, \\ x_2 &= x_1 - l_3 \cos \theta_1 - l_4 \cos \theta_2, & y_2 &= y_1 - l_3 \sin \theta_1 - l_4 \sin \theta_2; \end{aligned}$$

а также неголономными ограничениями

$$\dot{x}_i \sin \theta_i - \dot{y}_i \cos \theta_i = 0, \quad \dot{x}_i \sin \theta_i - \dot{y}_i \cos \theta_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Замечание

Задача управления с неограниченным управлением в виде линейной и угловой скорости робота эквивалентна задаче управления с неограниченным управлением в виде линейной и угловой скорости первого прицепа.

Постановка задачи управления (относительно первого прицепа)

Положение робота с прицепами определяется вектором $q = (x_1, y_1, \theta_1, \theta, \theta_2) \in M = \mathbb{R}_{x_1, y_1}^2 \times S_{\theta_1}^1 \times S_{\theta}^1 \times S_{\theta_2}^1$.

Управляемая система принимает следующий вид:

$$q = (x_1, y_1, \theta_1, \theta, \theta_2) \in \mathbb{R}_{x_1, y_1}^2 \times S_{\theta_1}^1 \times S_{\theta}^1 \times S_{\theta_2}^1, \quad \dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad (1)$$

$$X_1 = \left(\cos \theta_1, \sin \theta_1, 0, \frac{\sin(\theta - \theta_1)}{l_1}, \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_4} \right),$$

$$X_2 = \left(0, 0, 1, -\frac{l_2 \cos(\theta - \theta_1)}{l_1}, -\frac{l_3 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_4} \right).$$

Коммутаторы векторных полей

Вопрос управляемости системы (1) исследуется с помощью теоремы Рашевского-Чжоу [4, 5]. Сначала найдём следующие коммутаторы базовых векторных полей X_1, X_2 :

$$X_3 = [X_1, X_2] = \left(\sin \theta_1, -\cos \theta_1, 0, \frac{l_2 + l_1 \cos(\theta - \theta_1)}{l_1^2}, -\frac{l_3 + l_4 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_4^2} \right),$$

$$X_4 = [X_1, X_3] = \left(0, 0, 0, -\frac{l_1 + l_2 \cos(\theta - \theta_1)}{l_1^3}, -\frac{l_4 + l_3 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_4^3} \right),$$

$$X_5 = [X_1, X_4] = \left(\cos \theta_1, \sin \theta_1, 0, \frac{(l_1^2 - l_2^2) \sin(\theta - \theta_1)}{l_1^4}, \frac{(l_4^2 - l_3^2) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_4^4} \right).$$

Составим из них матрицу 5×5 и вычислим её определитель

$$\begin{aligned} M_5 &= (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5), \\ \det M_5 &= \frac{1}{l_1^3 l_4^3} \left(l_2^2 (l_1 + l_2 \cos(\theta - \theta_1)) \sin(\theta_1 - \theta_2) - \right. \\ &\quad \left. - l_3^2 (l_4 + l_3 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \sin(\theta - \theta_1) \right). \end{aligned}$$

Если $\det M_5 \neq 0$, то система (1) управляема и имеет максимальный вектор роста $(2, 3, 5)$. Однако условие $\det M_5 = 0$ не гарантирует неуправляемость.

Заключение

Определены условия на параметры сцепки робота с прицепами, для которых доказана полная управляемость с помощью теоремы Рашевского-Чжоу. В оставшихся случаях доказана неуправляемость, а именно получено разбиение конфигурационного пространства на инвариантные множества, при сужении на которые система (1) является вполне управляемой.

Коммутаторы векторных полей более высоких порядков

Далее для уточнения условия управляемости посчитаем следующие коммутаторы:

$$X_6 = [X_1, X_4] = \left(0, 0, 0, \frac{l_2 + l_1 \cos(\theta - \theta_1)}{l_1^4}, -\frac{l_3 + l_4 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_4^4} \right),$$

$$X_7 = [X_1, X_5] = 0, \quad X_8 = [X_2, X_4] = 0,$$

$$X_9 = [X_2, X_5] = \left(-\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0, \frac{(l_2^2 - l_1^2)(l_2 + l_1 \cos(\theta - \theta_1))}{l_1^4}, \frac{(l_4^2 - l_3^2)(l_3 + l_4 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_4^4} \right).$$

$$X_{10} = [X_1, X_6] = \left(0, 0, 0, -\frac{l_1 + l_2 \cos(\theta - \theta_1)}{l_1^5}, -\frac{l_4 + l_3 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_4^5} \right),$$

$$X_{11} = [X_2, X_6] = \left(0, 0, 0, \frac{(l_1^2 - l_2^2) \sin(\theta - \theta_1)}{l_1^5}, \frac{(l_4^2 - l_3^2) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_4^5} \right),$$

$$X_{12} = [X_1, X_9] = \left(0, 0, 0, \frac{(l_1^2 - l_2^2)(l_1 + l_2 \cos(\theta - \theta_1))}{l_1^5}, \frac{(l_4^2 - l_3^2)(l_4 + l_3 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_4^5} \right),$$

$$X_{13} = [X_2, X_9] = \left(-\cos \theta_1, -\sin \theta_1, 0, -\frac{(l_1^2 - l_2^2)^2 \sin(\theta - \theta_1)}{l_1^5}, -\frac{(l_3^2 - l_4^2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_4^5} \right),$$

$$X_{14} = [X_3, X_4] = -X_{11}, \quad X_{15} = [X_3, X_5] = X_{12}.$$

Число всевозможных миноров порядка 5 матрицы

$$M_{11} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13})$$

равно $C_{11}^5 = \frac{11!}{5! 6!} = 462$, число ненулевых уникальных (с точностью до умножения на ненулевые множители) равно 40. Составим из них вектор m_{40} . Для вычисления и анализа m_{40} использовалась программа, написанная в системе Wolfram Mathematica.

Если в модели с фиксированными l_1, l_2, l_3, l_4 и φ_1, φ_2 выполнено условие $m_{40} = \mathcal{K}$, то система подозрительна на неуправляемость.

Приведем некоторые ключевые компоненты вектора m_{40} : $(m_{40}^1, m_{40}^2, m_{40}^3, m_{40}^4) =$

$$\begin{aligned} &= \left((l_2 - l_3)(l_1 \cos(\theta - \theta_1) + l_2)(l_3 + l_4 \cos(\theta_1 - \theta_2)), \right. \\ &\quad (l_1 - l_4)(l_1 + \cos(\theta - \theta_1)l_2)(\cos(\theta_1 - \theta_2)l_3 + l_4), \\ &\quad l_2 \cos(\theta - \theta_1)((l_1^2 l_2 + l_3^2)l_4 + l_3(l_1^2 l_2 + l_3 l_4^2) \cos(\theta_1 - \theta_2)) + \\ &\quad \left. + l_1((l_2^3 + l_3^3)l_4 + l_3(l_2^3 + l_3 l_4^2) \cos(\theta_1 - \theta_2)), \right. \\ &\quad \left. (l_1^2 l_2^2 l_3^2 + (l_1^2 l_3^2 - l_2^2(l_1^2 + l_3^2))l_4^2) \sin(\theta - \theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_2) \right). \end{aligned}$$

В результате анализа корней системы уравнений

$$(m_{40}^1, m_{40}^2, m_{40}^3, m_{40}^4) = (0, 0, 0, 0)$$

было уточнено условие управляемости системы, а также сформулирована гипотеза о неуправляемых случаях. Для каждого из этих случаев было доказано, что конфигурационное пространство M разбивается на инвариантные множества. Таким образом, доказана следующая теорема, описывающая основной результат данной работы.

Теорема

Если $l_1 \neq l_2, l_3 \neq l_4$, а также выполнено одно из условий $l_1 \neq l_4$ или $l_2 \neq l_3$, тогда система (1) вполне управляема и имеет один из следующих векторов роста: $(2, 3, 5), (2, 3, 4, 5)$ либо $(2, 3, 4, 4, 5)$.

Иначе система (1) не является вполне управляемой, возможны следующие случаи разбиения конфигурационного пространства M на инвариантные множества.

► При $l_1 = l_2, l_3 = l_4$ возникает четыре инвариантных множества $\{\theta_1 - \theta = \theta_2 - \theta_1 = \pi\}, \{\theta_1 - \theta = \pi, \theta_2 - \theta_1 \neq \pi\}, \{\theta_1 - \theta \neq \pi, \theta_2 - \theta_1 = \pi\}, \{\theta_1 - \theta \neq \pi, \theta_2 - \theta_1 \neq \pi\}$.

► При $l_1 = l_2, l_3 \neq l_4$ система имеет два инвариантных множества $\{\theta_1 - \theta = \pi\}, \{\theta_1 - \theta \neq \pi\}$.

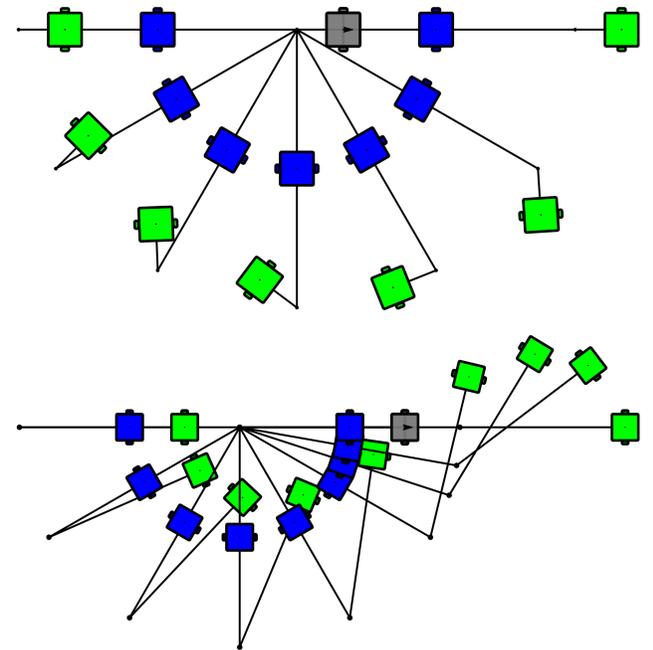
► При $l_1 \neq l_2, l_3 = l_4$ имеем два инвариантных множества $\{\theta_2 - \theta_1 = \pi\}, \{\theta_2 - \theta_1 \neq \pi\}$.

► При $l_1 = l_4, l_2 = l_3, l_1 \neq l_2$ имеем два инвариантных множества

$$\begin{cases} \sin(\theta - \theta_1) = \frac{(l_1^2 - l_2^2) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2}, \\ \cos(\theta - \theta_1) = -\frac{2l_1 l_2 + (l_1^2 + l_2^2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sin(\theta - \theta_1) \neq \frac{(l_1^2 - l_2^2) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2} \text{ либо} \\ \cos(\theta - \theta_1) \neq -\frac{2l_1 l_2 + (l_1^2 + l_2^2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2} \end{cases}$$

Ниже приведены примеры семейств конфигураций из инвариантного множества (2). Робот, изображенный серым цветом, расположен в нуле, т.е. $x = y = 0$. Положение первого прицепа, изображенного синим цветом, определяется углом $\theta_1 = i\pi/6, i = 0, 1, \dots, 6$. Положение второго (зеленого) прицепа определяется через (2). В первом примере $l_1 = 1/3, l_2 = 1$, во втором $l_1 = 3/2, l_2 = 1$.



Библиография

- [1] F. Jean, The car with N trailers: characterisation of the singular configurations // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 1996, Vol. 1, 241–266.
- [2] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, Геометрическая теория управления, Физматлит, М., 2005.
- [3] Andrei Ardentov, Gil Bor, Enrico Le Donne, Richard Montgomery and Yuri Sachkov, Bicycle paths, elasticae and sub-Riemannian geometry // Nonlinearity, 2021, Volume 34, Number 7, 4661–4683.
- [4] П. К. Рашевский, О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Учен. зап. Моск. гос. пед. ин.-та. им. К. Либкхнехта, Сер. физ.-мат., 1938, Т. 3, № 2, С. 83–94.
- [5] W.-L. Chow, Über systeme von liearren partiellen differentialgleichungen erster ordnung // Math. Ann 117 (1940), 98–105.