Динамика асимметричного флюгера в разреженном потоке

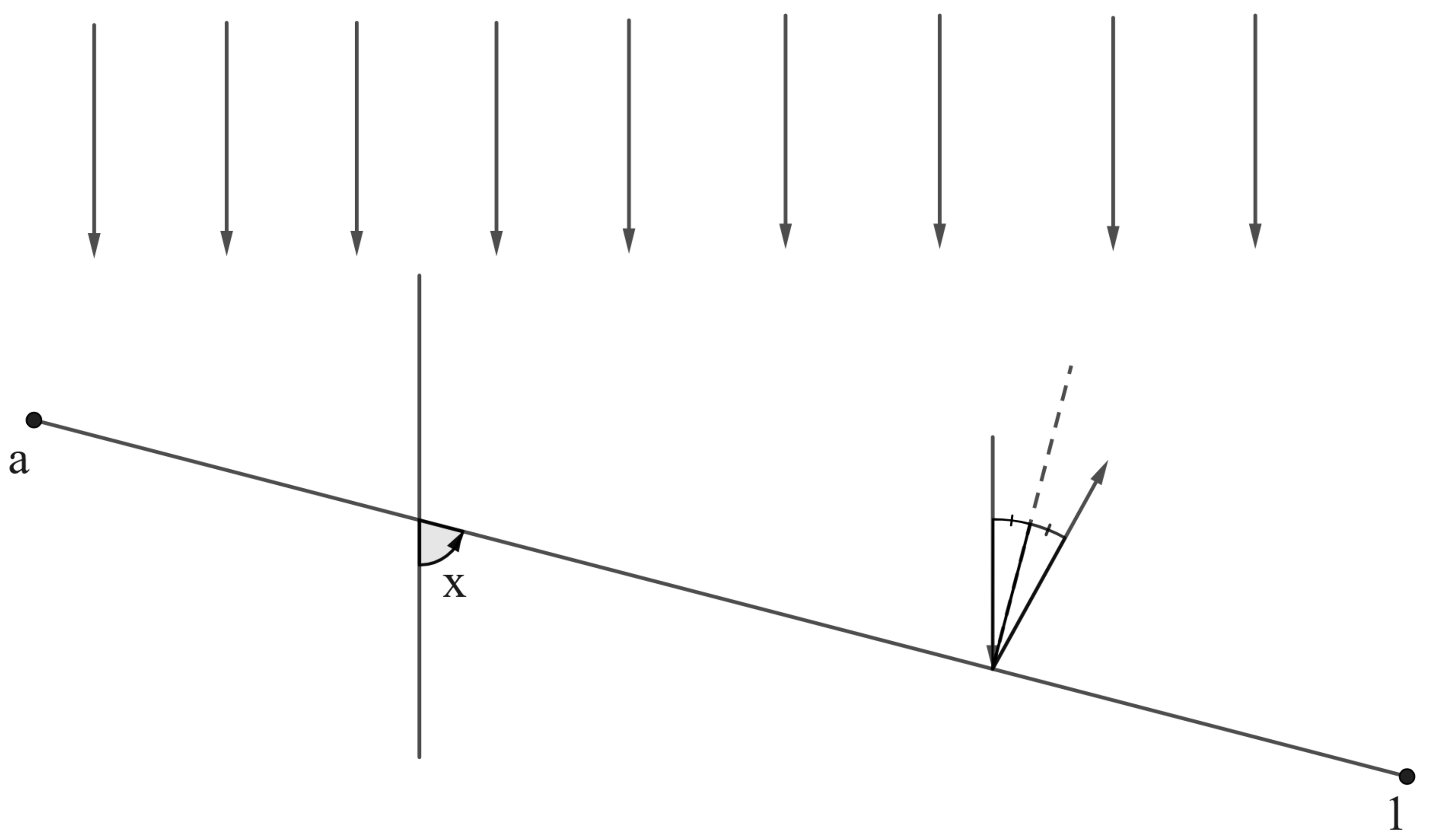
Зиатдинов Наиль

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Аннотация

Для динамики стержня на плоскости, асимметрично закрепленного в одной из своих точек со свободным вращением вокруг нее, в потоке невзаимодействующих точечных частиц, движущихся с постоянной скоростью и при столкновении со стержнем взаимодействующих с ним по закону биллиарда не более одного раза, получены уравнения динамики стержня, изучены локальные фазовые портреты вблизи особых точек системы уравнений динамики, дано качественное описание фазового портрета этой системы в целом. Оказалось, что с точностью до гомеоморфизма её фазовый портрет совпадает с фазовым портретом математического маятника с трением.

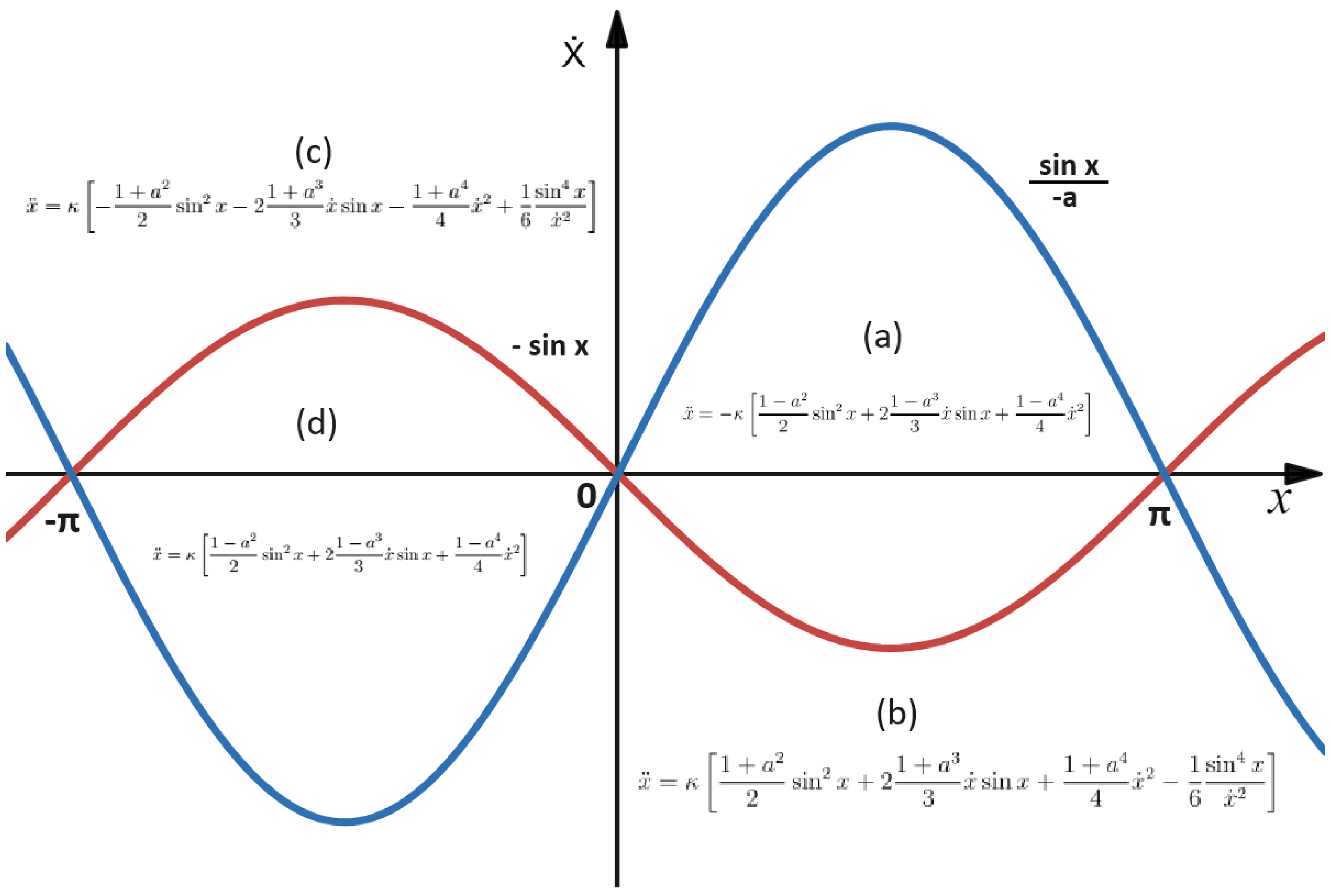
Уравнения динамики



Путем изменения масштаба длины, мы добьемся, чтобы "большая"часть флюгера от опорной точки имела длину 1, а "меньшая $(-a)$ при $a \in (-1, 0]$. Таким образом, его общая длина тогда равна 1+a. Теперь изменением масштаба времени сделаем величину скорости потока равной единице.Обозначая через $x, x = x(t)$, угол, образуемый в момент времени t большей частью флюгера (от опорной точки) с направлением вектора скорости потока, придем в следующему уравнению динамики

$$\ddot{x} = -\kappa \int_a^1 (\sin x + r\dot{x}) |\sin x + r\dot{x}| r dr, \qquad (1)$$

где $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ первая и вторая производная от x по t, а параметр κ равен удвоенному отношению плотности потока к моменту инерции флюгера. Интегрирование происходит по-разному в зависимости от значений x и $\dot{x}$.



После стандартного ввода переменной $y = \dot{x}$ получим:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \kappa v(x, y). \qquad (4)$$

У системы две особые точки: $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ с точностью до 2π по первой координате.

Особая точка $(\pi, 0)$

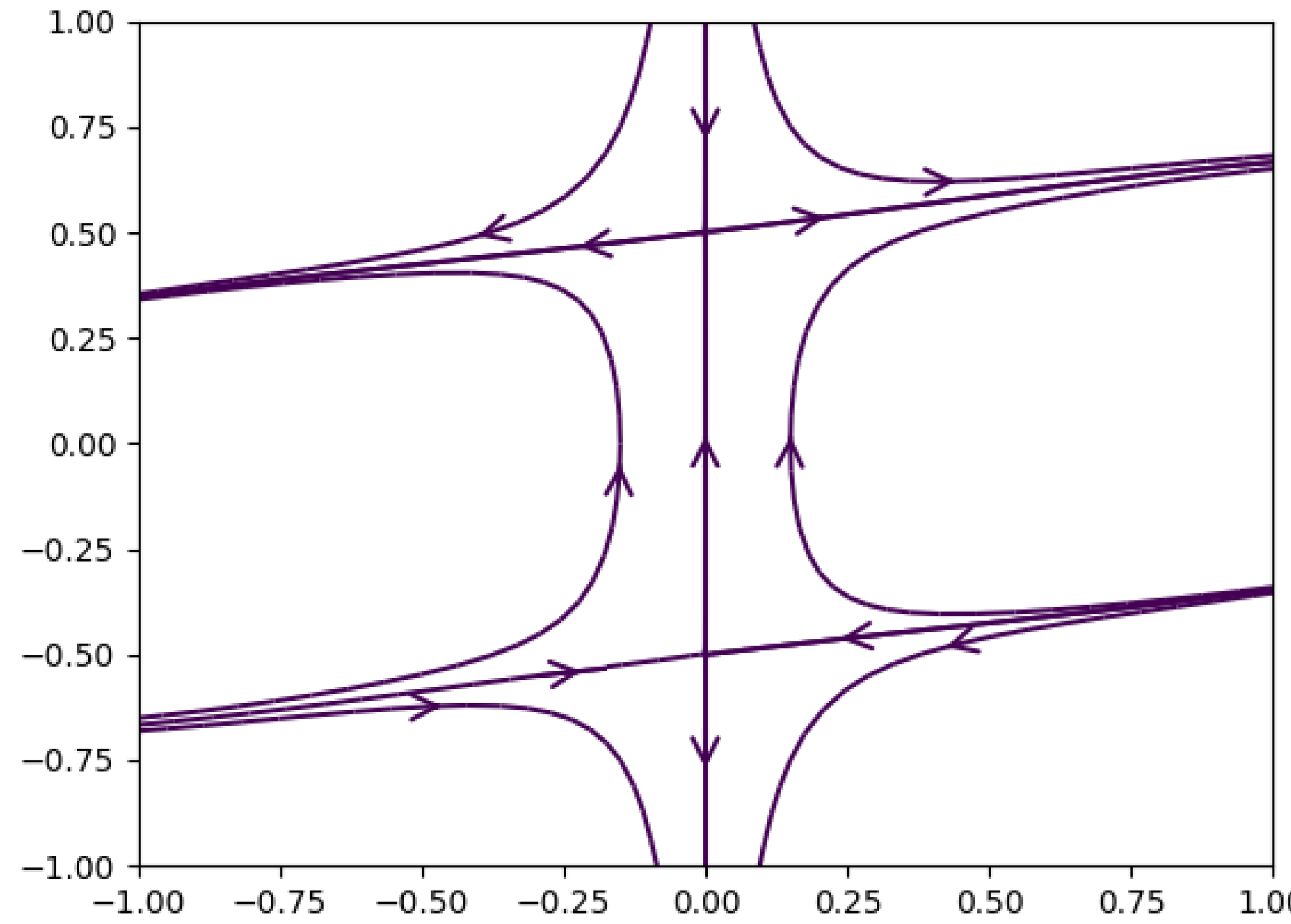
Рассмотрим область (d), заменим координаты вблизи $(\pi, 0)$ на z, w:

$$x = \pi + z^2, \quad y = wz^3, \; z > 0$$

После деления на z получаем:

$$\dot{z} = \frac{wz}{2}, \quad \dot{w} = \kappa\left\{-\frac{3}{2}w^2 + \frac{1-a^2}{2}\frac{\sin^2 z^2}{z^4} + 2\frac{1-a^3}{3}\frac{\sin z^2}{z^2}wz + \frac{1-a^4}{4}w^2 z^2\right\}$$

Эта система гладко продолжается на всю плоскость z, w. У системы две неподвижные точки: $z_0 = 0, w_0 = w_\pm$ с $w_\pm = \pm\sqrt{\frac{1-a^2}{3}}$. Линеаризация в этих точках: $\begin{pmatrix} \frac{w_0}{2} & 0 \\ \frac{2(1-a^3)}{3}\kappa w_0 & -3\kappa w_0 \end{pmatrix}$. Собственные значения: $\frac{w_0}{2}, -3\kappa w_0$ Они вещественны и имеют разные знаки, значит, точки - невырожденные седла.



После замены координат в области (c) w, y, где $wy = \sin x$:

$$\dot{w} = -\sqrt{1 - w^2y^2} - wyF(w, y), \quad \dot{y} = y^2 F(w, y),$$

$$\text{где } F(w, y) = -\kappa\left[\frac{1+a^2}{2}w^2 + 2\frac{1+a^3}{3}w + \frac{1+a^4}{4} - \frac{w^4}{6}\right]$$

Вблизи отрезка $S = \{-1 \geqslant w \geqslant -a, y = 0\}$ кривая от $(w = -a, y_0)$,где $y_0 > 0$, пересекает линию $w = -1$ при $y > 0$. Отсюда около $(\pi, 0)$ фазовые кривые от точек $y = -\frac{\sin x}{a}$ при $a \neq 0$ идут к точкам $y = -\sin x$ с положительной скоростью по оси x.

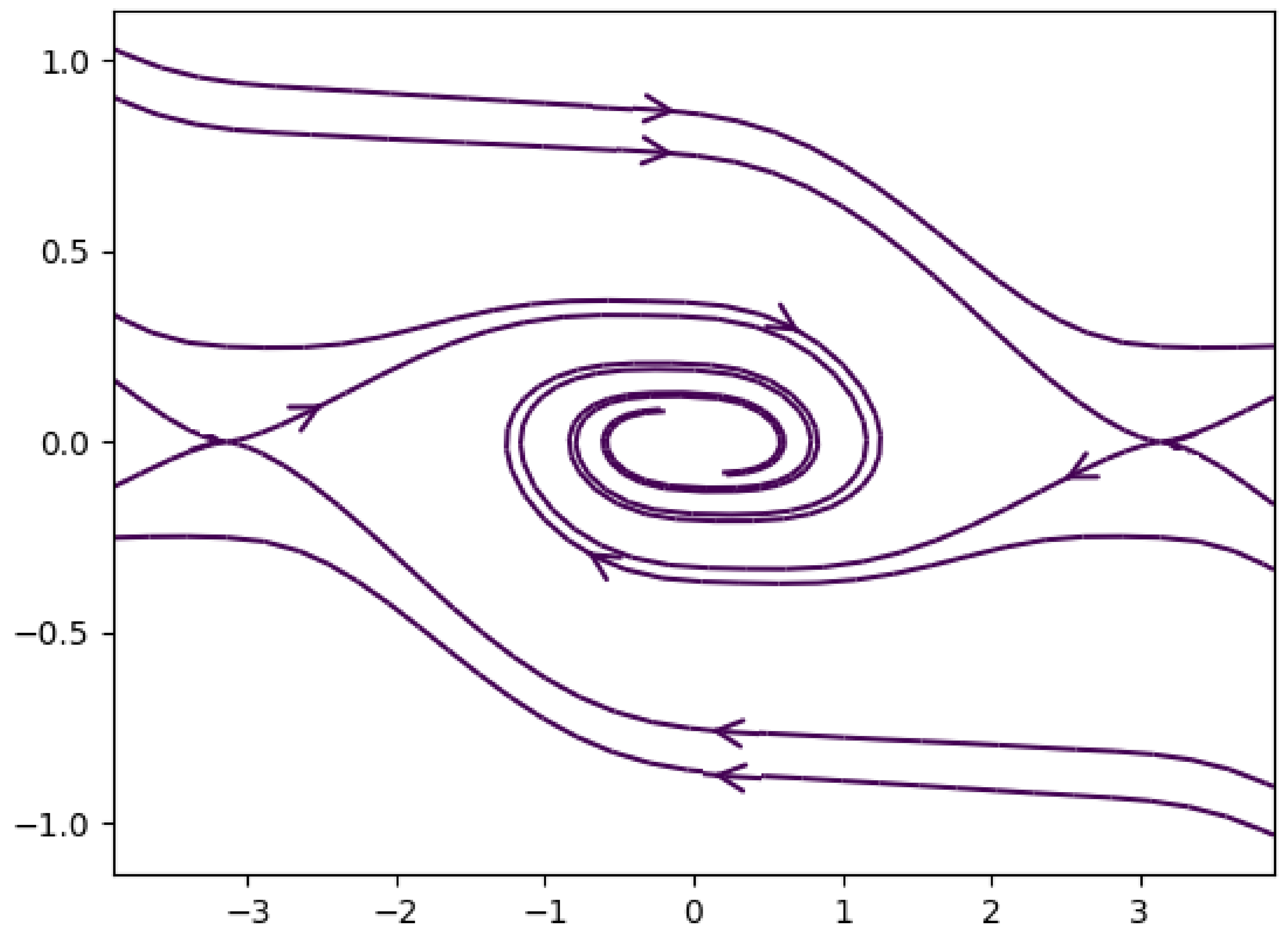
Особая точка $(\pi, 0)$ топологически является седлом

Особая точка $(0, 0)$

Пусть $\frac{dy}{dx}(x, y) = \frac{v(x,y)}{y}$ - наклон векторного поля. Сепаратрисы, исходящие из седла, стремятся к $(0, 0)$.

Лемма 1. *Если* $y \sin x > 0$, *тогда* $\frac{dy}{dx}(x, y) \leq -\frac{dy}{dx}(-x, y)$. *Если, кроме того, одна из точек* (x, y) *и* $(-x, y)$ *лежит внутри области (b) или (c) тогда это неравенство является строгим.*

Следствие 1. *Точка* $(0, 0)$ *топологически является устойчивым фокусом системы.*



Список литературы

[1] *A. Davydov, A. Plakhov.* Dynamics of a pendulum in a rarefied flow, Regular and Chaotic Dynamics, 2024, 29:1, 134–142

[2] *Зиатдинов Н.* Курсовая работа ”Динамика асимметричного маятника в разреженном потоке” , 2024.