ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ МАШИНЫ ДУБИНСА

Фёдор Сорокин, Юрий Сачков ИПС им. А.К. Айламазяна РАН

Аннотация

Исследуется задача об оптимальных траекториях машины Дубинса в классе траекторий, состоящих из прямолинейных отрезков и дуг окружностей максимально допустимой кривизны. Описано множество достижимости и оптимальные траектории для некоторых граничных условий.

Введение

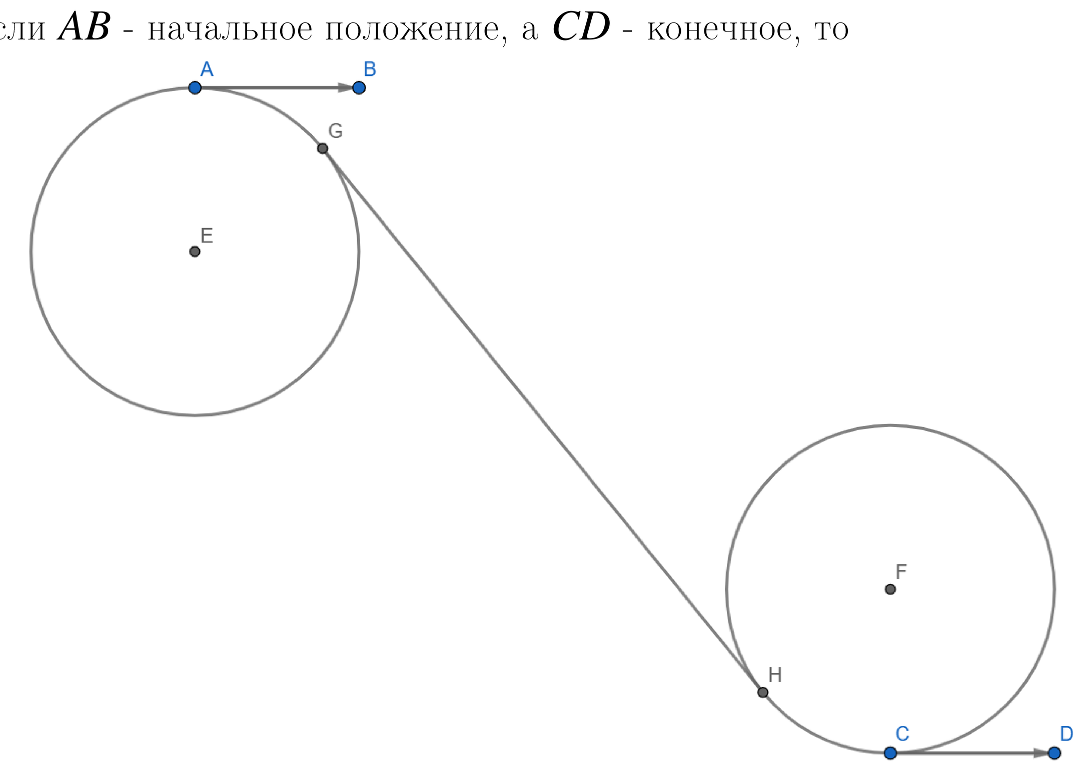
Машина Дубинса моделируется единичным вектором на плоскости. Вектор может перемещаться в произвольную точку (x, y) на плоскости и поворачиваться на произвольный угол $\theta \in [0, 2\pi)$. Таким образом, состояние системы есть тройка $q = (x, y, \theta)$, где $x, y \in \mathbb{R}^2$, а $\theta \in [0, 2\pi)$. Будем считать, что начальное состояние машины есть $q_0 = (0, 0, 0)$. Машина может совершать следующие движения:

1. Прямолинейное движение вперед по направлению θ
2. Движение по окружности радиуса 1 по часовой стрелке или против часовой стрелки

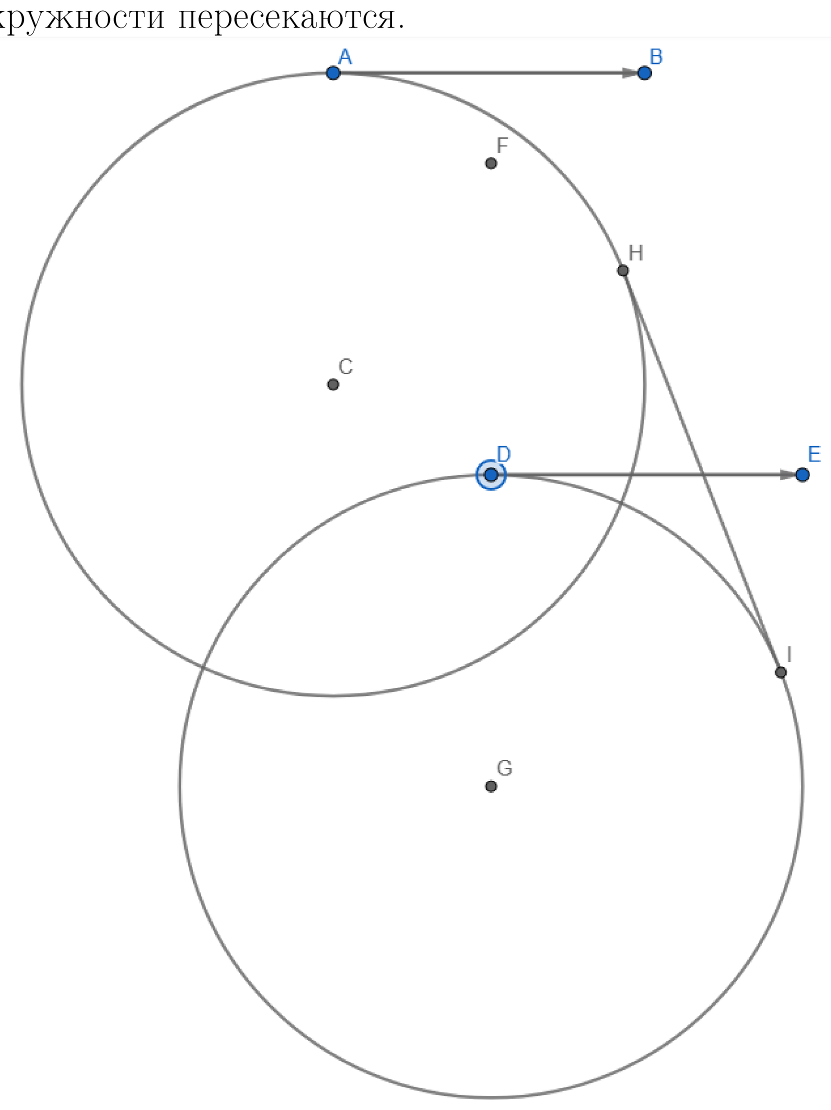
В связи с этим, естественным образом возникают задачи для исследования, решения которых представлены далее.
Сразу введем удобные обозначения: движение по часовой стрелке R, против L, а движение по прямой - S.

Задача 1

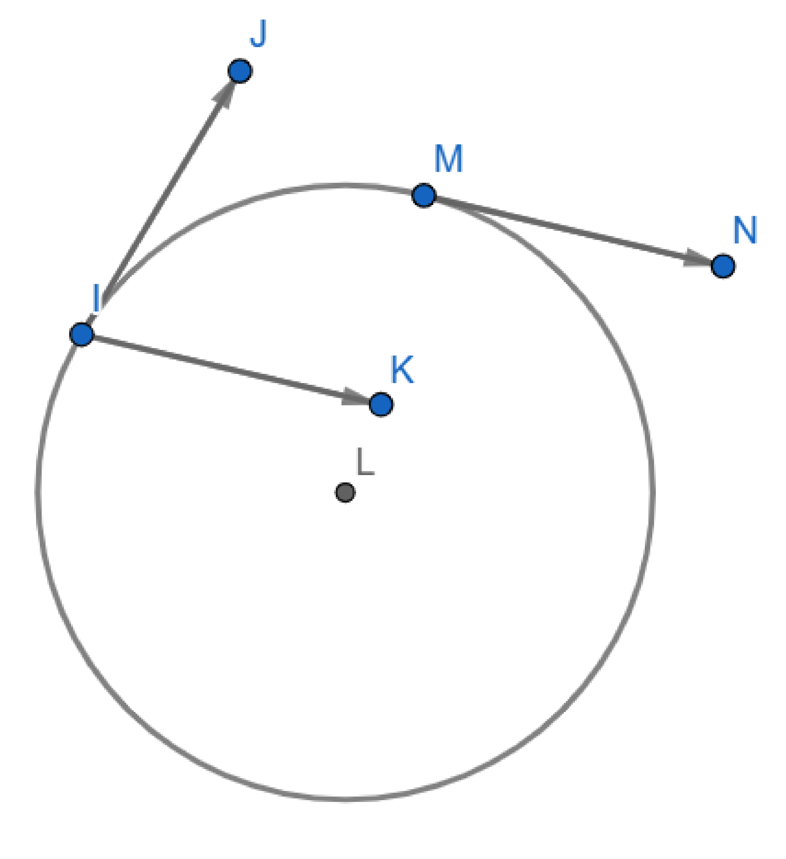
Для начала хотелось бы найти множество достижимости нашей машины, то есть понять, в какие состояния $q = (x, y, \theta)$ может переместиться машина из начального состояния q_0.
Из начального состояния машина может переместиться в любое. Достаточно понять, как реализуется поворот на месте на некоторый угол и параллельный перенос.
Параллельный перенос реализуется, например, так:
Если AB - начальное положение, а CD - конечное, то



из начального положения мы можем выйти по окружности с центром E, а в конечное можем прийти по окружности с центром F.
Соединим эти окружности отрезком касательной GH.
Таким образом, придя из начального положения в точку G, затем пройдя по прямой H и придя в конечное положение (RSL), мы реализуем параллельный перенос.
Может так случиться, что начальная и конечная точки близки, то есть окружности пересекаются.



Но и в этом случае без проблем реализуется, например, траектория $AHID - RSR$, где HI - отрезок касательной между двумя окружностями.
С поворотом тоже всё просто:



Если IJ - начальное положение, а IK - конечное, то движемся по окружности направо до положения MN - когда вектор станет параллелен конечному.
И теперь нам остается совершить параллельный перенос, который мы уже умеем делать.

Задача 2

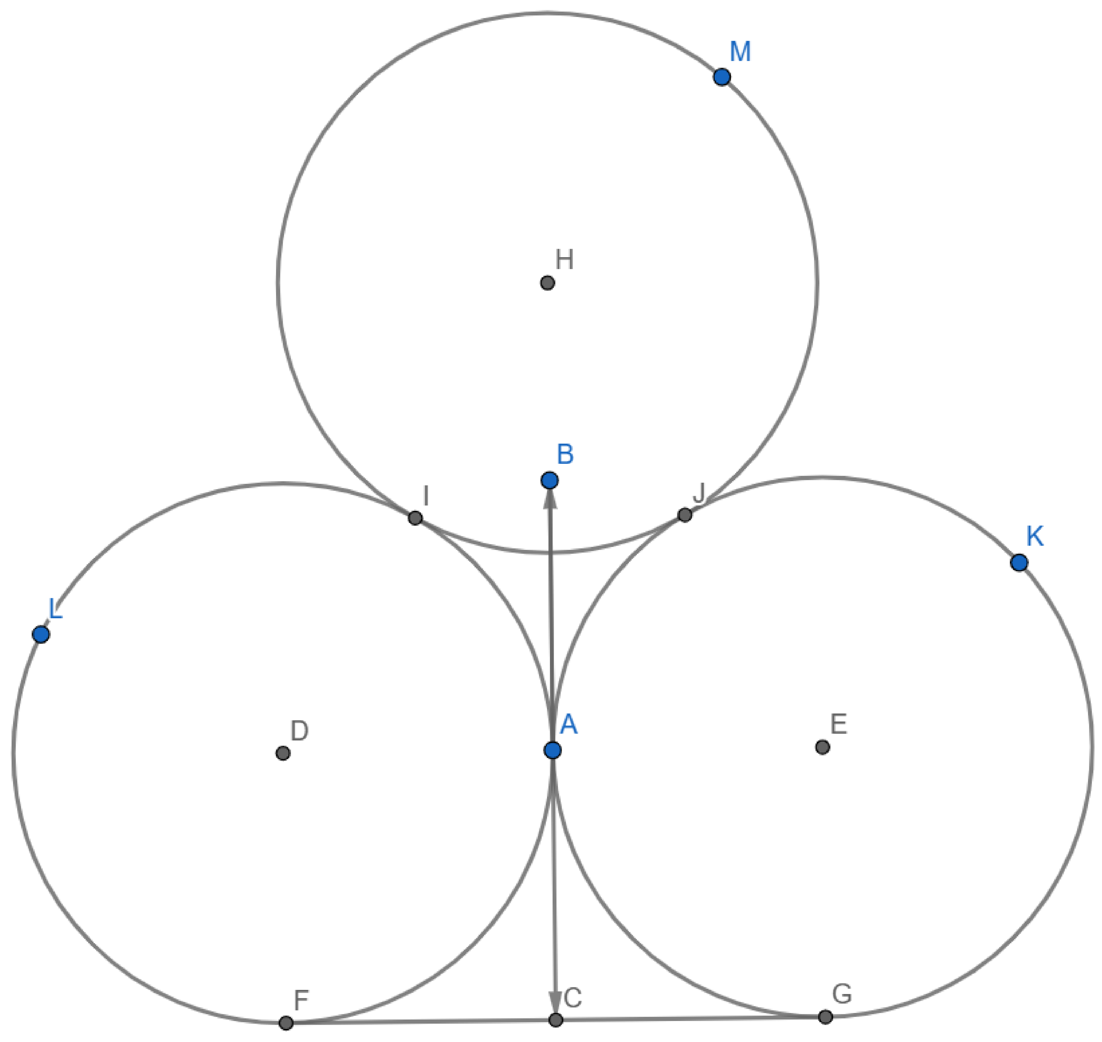
Теперь перед нами стоит задача найти оптимальное движение машины, т. е. движение по кратчайшей кривой $(x(t), y(t))$, в случае, когда расстояние между начальной точкой (x_0, y_0) и конечной точкой (x_1, y_1) больше 6.
Существование оптимальной траектории следует из теоремы Филиппова.
Пусть γ - кратчайшая кривая.
По теореме 4.5 из [1], оптимальные траектории могут быть одного из следующих двух типов:

1. Конкатенация дуги окружности единичного радиуса, прямолинейного отрезка и дуги окружности единичного радиуса
2. Конкатенация не более чем трех дуг окружностей единичного радиуса

Будем обозначать эти типы соответственно (1) и (2).
Таким образом, γ имеет тип (1) или (2).
Но γ не может иметь тип (2), так как окружности у нас единичного радиуса, а в этом случае по одной дуге машина может пройти расстояние не большее, чем 2, а значит для не более чем 3х дуг окружностей это расстояние будет не более, чем 6, что противоречит условию.
Таким образом, γ имеет тип (1).
Вспомним, как мы строили траекторию когда искали множество достижимости. Нетрудно понять, что так построенная траектория имеет тип (1).
Более того, аналогичным образом можно построить 8 траекторий (поскольку между согласованными окружностями 4 касательных, а пар таких окружностей 2)
Геометрически мы можем выбрать из этих 8 траекторий самую короткую или несколько самых коротких. Обозначим это семейство α.
Утверждается, что $l_\alpha = l_\gamma$.
Действительно, поскольку γ оптимальна, то $l_\gamma \leq l_\alpha$.
С другой стороны, так как γ имеет тип (1), то она попадёт в одну из 8-ми наших траекторий, а среди этих 8-ми мы выбирали α кратчайшей, то есть $l_\alpha \leq l_\gamma$.
Таким образом, $l_\alpha = l_\gamma$.

Задача 3

Теперь мы хотим найти оптимальный разворот машины, т.е. движение по кратчайшей кривой $(x(t), y(t))$ в случае $(x_0, y_0, \theta_0) = (0, 0, 0)$, $(x_1, y_1, \theta_1) = (0, 0, \pi)$.
Для поворота есть две траектории:



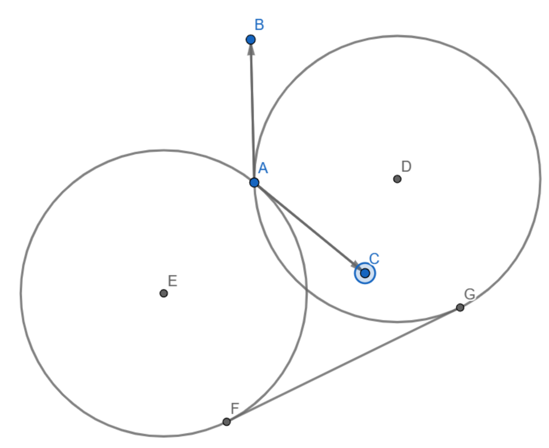
Пусть AB - начальное положение, а AC - конечное.
Траектория $AJKGFLIA$, которая в терминах нашего движения будет RSR, будет иметь тип (1).
Траектория $AJMIA$, которая в терминах нашего движения будет RLR, будет иметь тип (2) (окружность с центром — это окружность, которая касается двух наших окружностей допустимого движения).
Обозначим α - траекторию 1-го типа, а через β - построенную траекторию 2-го типа.
Пусть γ - оптимальная траектория для поворота. Она существует по следствию из теоремы Филиппова. По теореме 4.5 она имеет тип (1) или (2).
Если бы γ имела тип (1), то аналогично тому, как мы искали оптимальное движение в случае расстояния большего чем 6, можем заключить, что она бы совпала с α.
Но геометрически мы знаем, что α длиннее β, так что таким образом, γ имеет тип (2).
Покажем, что γ совпадает с β.
В конечное положение мы можем попасть двумя образами: двигаясь по "левой"окружности направо, и по "правой"налево.
Ограничимся рассмотрением "левой"окружности.

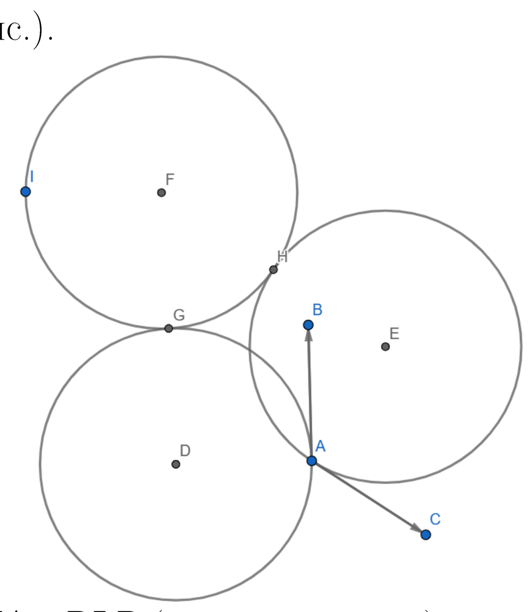
Задача 3 (продолжение)

Поскольку у нас тип (2), то наше движение будет иметь вид RLR (движения должны чередоваться, потому что иначе они бы склеивались в одну дугу).
Таким образом мы видим, что из начального положения мы должны повернуть направо.
Наше движение происходит по трем дугам, так что когда мы меняем направление, мы по сути переходим на касающиеся окружности.
Так что видим, что в нашей стратегии, окружность, по которой мы движемся влево, касается как "правой" , так и "левой".
Ну а такая конфигурация совпадает с β.

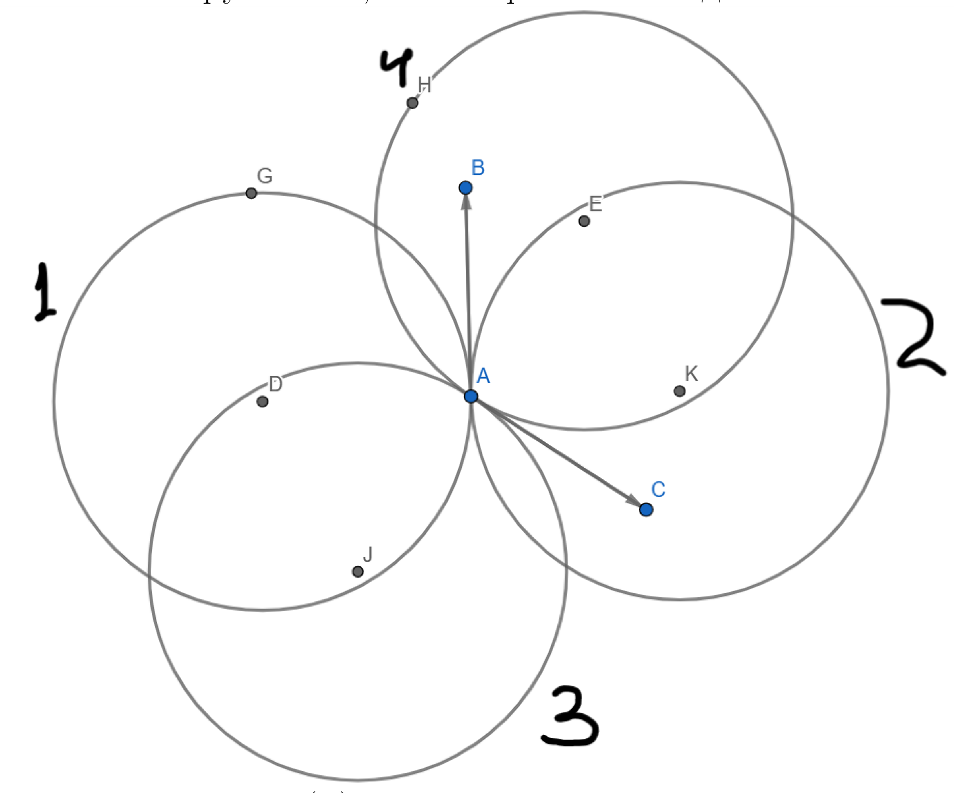
Задача 4

А что если мы хотим повернуть на произвольный угол?
Найти оптимальное движение машины в случае $(x_0, y_0, \theta_0) = (0, 0, 0)$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $\theta_1 \in (0, \pi)$
В общем-то тоже самое.
Построим две траектории - α и β - 1-го и 2-го типа соответственно.
Если AB - начальное положение, а AC - конечное, то траектория α будет иметь вид $AGFA$ - RSR (см. левый рис.).





Траектория β будет иметь вид $AGIHA$ - RLR (см. правый рис.).
Геометрически показывается, что β короче α.
Итак, мы рассматриваем поворот на угол θ направо. Пусть γ - оптимальная траектория. Если бы она имела тип (1), то как мы знаем из предыдущих задач, она бы совпала с α. Значит, γ имеет тип (2)
Покажем, что в таком случае она совпадает с β.
В положение AC можно попасть из двух окружностей, обозначим их как 3 и 4. А окружности, по которым мы входим - 1 и 2.



Поскольку у нас тип (2), то некоторые комбинации окружностей отпадают:
Выйдя по 1, мы будем двигаться L, а чтобы зайти по 3 нам надо двигаться R. Но между ними должна быть ещё одна дуга, где машина меняет направление, а такое невозможно.
Аналогично, выйдя по 2, мы не сможем зайти по 4.
Выйдя по 2 мы могли бы перейти на 3 с помощью касающейся окружности, но тогда переход бы происходил по дуге, а у нас уже есть такой переход с помощью типа (1), который происходит по отрезку. А длина дуги больше, чем длина отрезка, а значит такой переход и подавно больше нашего.
Остается выход по 1 с переходом на 4 - наша искомая траектория.

Библиография

[1] Сачков Ю. Л., Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификации и задачи, интегрируемые в элементарных функциях, УМН, 2022, том 77, выпуск 1(463), 109-176. [2] Марков А. А., Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах, Сообщ. Харьков. матем. общ. 2-я сер., 1:2 (1889), с. 250–276. [3] Dubins L.E., On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents, Amer. J. Math. 1957. V. 79. No. 3. P. 497–516. [4] Laumond J.-P., Nonholonomic motion planning for mobile robots. Tutorial notes., LAAS-CNRS. Toulouse. 1998.