

# Ландшафт задачи максимизации наблюдаемых кубита на малых временах

Сафронов А.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт

## Введение

Рассмотрим динамику замкнутой двухуровневой квантовой системы под действием когерентного управления. Она описывается уравнением Шредингера:

$$i \frac{dU_t^f}{dt} = (H_0 + f(t)V)U_t^f, \quad U_{t=0}^f = I \quad (1)$$

Где  $U_t^f \in SU(2)$  — оператор эволюции, описывающий эволюцию квантовой системы,  $H_0$  — свободный гамильтониан и  $V$  — гамильтониан взаимодействия (т.е.  $H_0$  и  $V$  — эрмитовы операторы в  $\mathbb{C}^2$ ). Считается, что  $[H_0, V] \neq 0$  для нетривиальности динамики. Когерентное управление задается функциями  $f$  из некоторого пространства управлений, например,  $L_2(0, T)$ ,  $L_1(0, T)$ ,  $L_\infty(0, T)$  в зависимости от задачи.

Многие типичные задачи квантового управления можно сформулировать как задачу максимизации целевого функционала  $\mathcal{J}$  типа Майера при фиксированном времени  $T$ . Особый интерес составляет вопрос нахождения экстремумов следующих функционалов  $\mathcal{J}$ :

- $\mathcal{J}_{\psi_i \rightarrow \psi_f}(f) = P_{\psi_i \rightarrow \psi_f}(f) = |\langle \psi_f | U_T^f | \psi_i \rangle|^2 \rightarrow \max$  — задача максимизации вероятности перехода из начального чистого состояния  $|\psi_i\rangle$  в конечное чистое состояние  $|\psi_f\rangle$ .
- $\mathcal{J}_A(f) = \langle A \rangle_T^f = \text{tr}[U_T^f \rho_0 U_T^{f\dagger} A] \rightarrow \max$  — задача максимизации квантовой наблюдаемой  $A$  (задается эрмитовым оператором, т.е.  $A^\dagger = A$ ).
- $\mathcal{J}_W(f) = \frac{1}{N^2} |\text{tr}(W^\dagger U_T^f)|^2 \rightarrow \max$  — задача генерации квантового вентиля  $W \in SU(N)$ .

В нашем случае будет решаться задача максимизации функционала квантовой наблюдаемой  $\mathcal{J}_A(f)$ .

Ловушкой задачи квантового управления называется локальный, но не глобальный максимум (или минимум) целевого функционала.

Динамический ландшафт управления — график целевого функционала  $\mathcal{J}: L_2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Кинематический ландшафт управления — график функции  $J: SU(2) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Главной задачей теории квантового управления является нахождение оптимального управления, на котором функционал  $\mathcal{J}(f)$  достигает максимума. Для этого обращаются к численным методам. Основная проблема такого подхода заключается в том, что для задач с большим числом параметров важно иметь алгоритм, работающий оптимально по времени. Для этого используют алгоритмы локального поиска, однако они чувствительны к локальным экстремумам, поэтому для решения задач важно понимать, как устроен ландшафт функционала и есть ли на нем ловушки.

Ниже приведены примеры ландшафтов с отсутствием [1] и наличием ловушек [2].

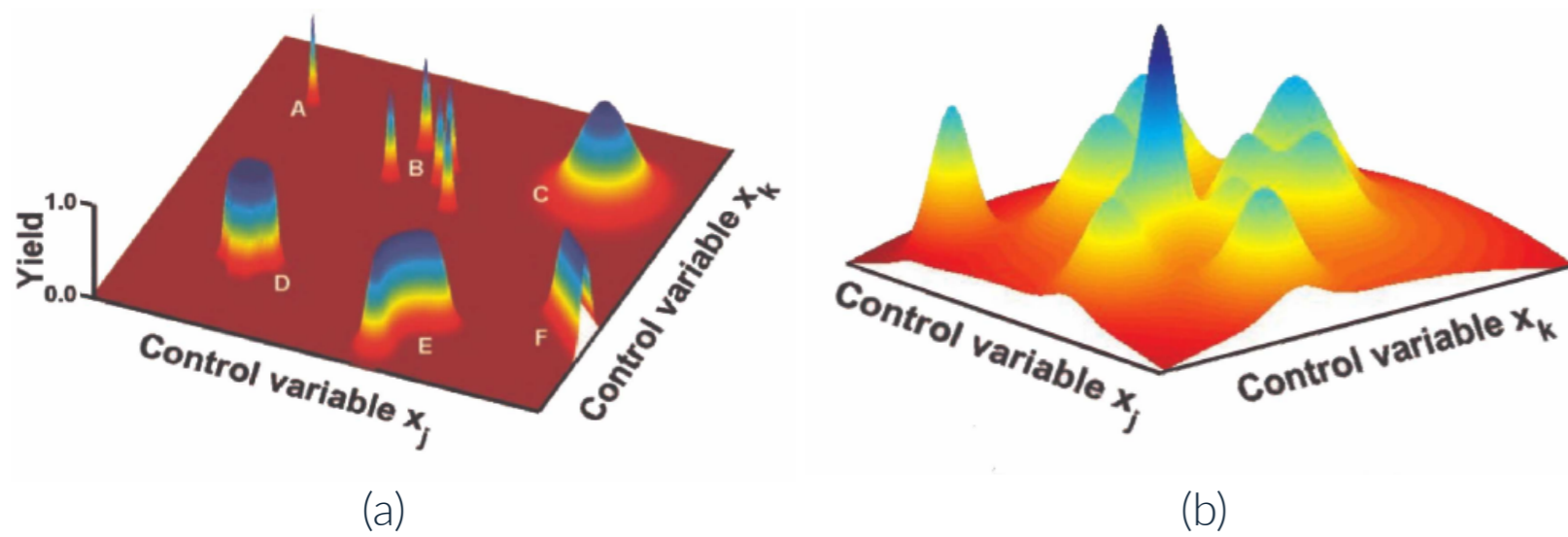


Рис. 1. Примеры ландшафтов задачи квантового управления

Было доказано [3], что никакое управление, кроме постоянного

$$f_0 := \frac{-(\text{tr}V \text{tr}H_0 + 2\text{tr}(H_0V))}{(\text{tr}V)^2 + 2\text{tr}(V^2)} \quad (2)$$

не может являться ловушкой. Было найдено критическое время

$$T_0 := \pi / \|H_0 - (1/2) \text{tr} H_0 + f_0 V\| \quad (3)$$

такое, что для времен больше  $T_0$  доказано отсутствие ловушек для функционала квантовой наблюдаемой.

## Параметризация

При условиях  $\text{tr}(H_0V) \neq 0$  и  $\text{tr}(V) = 0$  задача поиска ловушек для общего случая уравнения Шредингера сводится с помощью унитарного преобразования и перемасштабирования времени к задаче поиска ловушек для уравнения Шредингера следующего вида:

$$i \frac{dU_t^f}{dt} = [\sigma_z + (\sigma_x v_x + \sigma_y v_y) f(t)] U_t^f, \quad U_0^f = \mathbb{I}, \quad (4)$$

где

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

— матрицы Паули. Ниже  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  — вектор матриц Паули.

При таких условиях особое управление (2) принимает вид  $f_0 = 0$ , а критическое время  $T_0 = \pi$ .

Следуя работе [4], используем параметризацию  $\mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , где

$$V = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \rho_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad A = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0) = (\cos(\zeta), \sin(\zeta), 0), \quad \mathbf{r} = (r_x, r_y, 0), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, 0) = (v \cos(\phi), v \sin(\phi), 0).$$

Введем обозначения

$$\Phi := (\mathbf{v} \times \mathbf{r})_z (\mathbf{v} \times \mathbf{a})_z = (v_x r_y - v_y r_x)(v_x a_y - v_y a_x)$$

$$\Psi := (\mathbf{r} \times \mathbf{a})_z = r_x a_y - r_y a_x.$$

$$\mathcal{D}_I = \{(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) | \mathbf{a}_z = \mathbf{r}_z = \mathbf{v}_z = 0, \Psi > 0, \Phi > 0\},$$

$$\mathcal{D}_{II} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) | \mathbf{a}_z = \mathbf{r}_z = \mathbf{v}_z = 0, \Psi > 0, \Phi < 0\},$$

$$\mathcal{D}_{III} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) | \mathbf{a}_z = \mathbf{r}_z = \mathbf{v}_z = 0, \Psi < 0, \Phi < 0\},$$

$$\mathcal{D}_{IV} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) | \mathbf{a}_z = \mathbf{r}_z = \mathbf{v}_z = 0, \Psi < 0, \Phi > 0\}.$$

В работе [4] было доказано, что при значениях параметров  $(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) \in \mathcal{D}_{II}, \mathcal{D}_{IV}$  особое управление  $f_0$  является седловой точкой при любом времени  $T > 0$ . Нам будет интересен случай времен  $T < T_0$  в областях параметров  $\mathcal{D}_I$  и  $\mathcal{D}_{II}$ , где должны существовать ловушки, согласно [3].

## Импульсное управление и соответствующий ему оператор эволюции

Любую матрицу  $U \in SU(2)$  можно разложить в углы Эйлера:

$$U = e^{-i\sigma_z \gamma / 2} e^{-i\sigma_x \beta / 2} e^{-i\sigma_z \alpha / 2}.$$

Для системы с гамильтонианом типа Ландау-Зинера было показано [5], что управление, переводящее начальное состояние  $|\psi_{in}\rangle$  в конечное  $|\psi_{fin}\rangle$  за минимальное время  $T_{min}$ , имеет вид "импульс-ожидание-импульс", тогда оператор эволюции, соответствующий этому управлению, выглядит следующим образом:

$$U_H(T) = e^{-i\alpha f \sigma_z} e^{-i\omega T \sigma_x} e^{-i\alpha_{in} \sigma_z}. \quad (6)$$

Это послужило мотивацией для выбора в нашей работе оператора эволюции вида

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha(v_x \sigma_x + v_y \sigma_y)} e^{-i\beta \sigma_z} e^{-i\gamma(v_x \sigma_x + v_y \sigma_y)}, \quad \alpha, \gamma \in [0, 2\pi/v), \beta \in [0, T].$$

Будем считать  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1$ .

Рассмотрим задачу поиска экстремума функционала  $\mathcal{J}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{tr}(U(\alpha, \beta, \gamma) \rho_0 U^\dagger(\alpha, \beta, \gamma) A)$  на многообразии

$$\Pi_0(T) = \mathbb{S}^1 \times [0, T] \times \mathbb{S}^1. \quad (7)$$

## Формулы для градиенты

Были вычислены формулы градиент и гессиан функционала квантовой наблюдаемой  $\mathcal{J}(\alpha, \beta, \gamma)$ . Ниже приведены формулы для градиента.

$$\mathcal{J}'_\alpha = \sin(\zeta - \phi) [\sin(2\alpha) \cos(2\beta) \cos(2\gamma) (r_x \sin(\phi) - r_y \cos(\phi)) - \sin(2\alpha) \sin(2\beta) (r_x \cos(\phi) + r_y \sin(\phi)) + \cos(2\alpha) \sin(2\gamma) (r_x \sin(\phi) - r_y \cos(\phi))],$$

$$\mathcal{J}'_\beta = -\cos(2\gamma) (r_y \cos(\phi) - r_x \sin(\phi)) \times (\cos(2\alpha) \sin(2\beta) \sin(\zeta - \phi) + \cos(2\beta) \cos(\zeta - \phi)) - ((r_x \cos(\phi) + r_y \sin(\phi)) \times (\sin(2\beta) \cos(\zeta - \phi) - \cos(2\alpha) \cos(2\beta) \sin(\zeta - \phi))),$$

$$\mathcal{J}'_\gamma = (r_y \cos(\phi) - r_x \sin(\phi)) (\sin(2\beta) \sin(2\gamma) \cos(\zeta - \phi) - \sin(\zeta - \phi) (\cos(2\alpha) \cos(2\beta) \sin(2\gamma) + \sin(2\alpha) \cos(2\gamma))).$$

## Отсутствие ловушек для примера из области $\mathcal{D}_I$

Рассмотрим частный набор параметров в области  $\mathcal{D}_I$ , где могут существовать ловушки при  $f \in L_1[0, T]$ :

$$\{r_x = 0, r_y = 1, \phi = 0, \zeta = 3\pi/4\} \in \mathcal{D}_I. \quad (8)$$

При таком выборе параметров квантовая наблюдаемая, начальное состояние и гамильтониан взаимодействия выглядят следующим образом:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}\mathbb{I} - \sigma_x + \sigma_y), \quad \rho_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \sigma_y), \quad V = \sigma_x. \quad (9)$$

Функционал квантовой наблюдаемой при данном выборе параметров принимает вид:

$$\mathcal{J}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4} [\sqrt{2} \cos(2\gamma) (\cos(2\alpha) \cos(2\beta) + \sin(2\beta)) - \sqrt{2} \sin(2\alpha) \sin(2\gamma) + 2]. \quad (10)$$

**Теорема 1.** Точка  $(0, T, 0) \in \Pi_0$  при  $T \in (0, \pi/8)$ , соответствующая нулевому управлению с временем ожидания  $T$ , является точкой глобального максимума целевого функционала  $\mathcal{J}$  на многообразии  $\Pi_0(T)$ , т.е. не является ловушкой.

**Замечание.** Наличие системы, описываемой параметрами из области  $\mathcal{D}_I$ , такой, что в ней отсутствуют ловушки, говорит о противоречии с ранее известными результатами [4] о том, что все системы из  $\mathcal{D}_I$  должны обладать ловушками.

## Динамический ландшафт

Визуальное подтверждение Теоремы 1 можно наблюдать на следующих графиках динамического ландшафта функционала квантовой наблюдаемой (10) при различных значениях времени  $T$ .

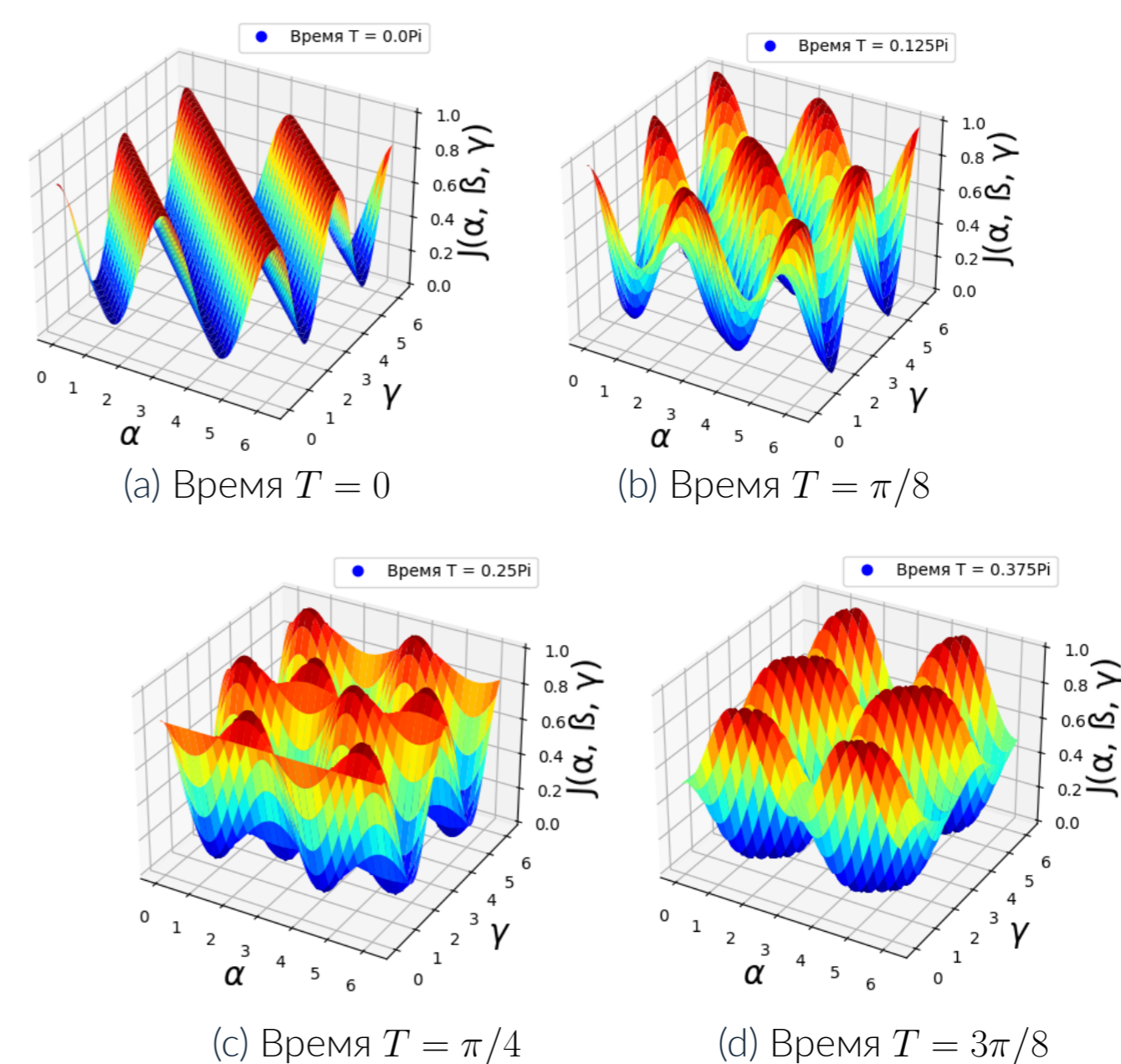


Рис. 2. Кинематические ландшафты для целевого функционала квантовой наблюдаемой  $\mathcal{J}(\alpha, T, \gamma)$  системы (8) при временах  $T = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$

## Список литературы

- H. Rabitz, M. Hsieh, and C. Rosenthal, "Quantum optimally controlled transition landscapes," *Science*, vol. 303, no. 5666, pp. 1998–2001, 2004.
- A. Pechen and D. Tanner, "Are there traps in quantum control landscapes?" *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, no. 12, 2011. 120402.
- A. Pechen and N. Il'in, "Coherent control of a qubit is trap-free," *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 285, no. 1, pp. 233–240, 2014.
- A. Pechen and N. Il'in, "Control landscape for ultrafast manipulation by a qubit," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 50, p. 075301, jan 2017.
- G. Hegerfeldt, "Driving at the quantum speed limit: optimal control of a two-level system," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, no. 26, 2017. Article no. 075301.