Собственные подпространства дискретного преобразования Хартли

Автор: Романенко Иван Александрович

Матрица дискретного преобразования Хартли

Матрица дискретного преобразования Хартли (ДПХарт) порядка N:

$$X_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_1 & C_2 & \dots & C_{N-1} \\ 1 & C_2 & C_4 & \dots & C_{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{N-1} & C_{2(N-1)} & \dots & C_{(N-1)^2} \end{pmatrix},$$

где $C_n = C_n(N) = cas\frac{2\pi n}{N} = \cos\frac{2\pi n}{N} + \sin\frac{2\pi n}{N}$.

Матрица ДПХарт служит действительным аналогом матриц дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и Уолша (ДПУ). Причем матрица X_4 совпадает с матрицей ДПУ в нумерации Пэли.

Свойства матрицы дискретного преобразования Хартли

1) МатрицаX_Nсимметрична по определению.
2) Коэффициенты $C_n(N)$ периодически с периодом N:

$$C_n = C_{n+N}.$$

3) Квадрат матрицы ДПХарт равен произведению порядка N на единичную матрицу E, т.е.

$$X_N^2 = N \cdot E.$$

Ортогональные проекторы на собственные подпространства дискретного преобразования Хартли

Матрица$J = \frac{1}{\sqrt{N}} X_N$ задает оператор инволюции:$J^2 = E$.

Относительнооператора инволюции Jвсе пространствораскладывается в прямую сумму двухсобственных подпространств$X = R_+ \oplus R_-$, отвечающих собственным числам 1 и -1. Ортогональные проекторы на эти подпространства

$$P_+ = \frac{1}{2}(E + J) \text{ и } P_- = \frac{1}{2}(E - J).$$

Значит, собственные числа оператора ДПХартX_Nесть $\sqrt{N}$и $-\sqrt{N}$.

Размерности собственных подпространств дискретного преобразования Хартли

Теорема 1:

Если размерность исходного пространства нечетная (N=2n+1), то

$$dimR_+ = n + 1 и dimR_- = n.$$

Если N=4n, то

$$dimR_+ = 2n + 1 и\ dimR_- = 2n - 1.$$

Если N=4n+2, то

$$dimR_+ = dimR_- = 2n + 1.$$

Кронекерова степень матрицы дискретного преобразования Хартли

Матрица ДПХарт в виде кронекеровой степени $-X_N^{\otimes n}$
Свойства кронекеровой степени матрицы ДПХарт:
симметричность матрицы – $(X_N^{\otimes n})^T = X_N^{\otimes n}$
ее ортогональность – $(X_N^{\otimes n})^2 = N^n \cdot E$
После нормировки $J = \frac{1}{N^{n/2}} X_N^{\otimes n}$матрица становится матрицей инволюции, что влечет наличие двух собственных подпространств и вид операторов проектирования.

Теорема 2:
Для матриц$X_N^{\otimes n}$*размерности собственных подпространств:*
$dimR_+ = dimR_- + 1$, *если* N – *нечетное;*
$dimR_+ = dimR_-$, *если* $N = 4k + 2$;
$dimR_+ = \frac{1}{2}N^n + 2^{n-1}$ *и* $dimR_- = \frac{1}{2}N^n - 2^{n-1}$, *если* $N = 4k$.

Список литературы

1. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 175 с.
2. Беспалов М.С., Скаляренко В.А. Дискретные функции Уолша и их приложения. Владимир: ВлГУ. 2014. -68 с.
3. Беспалов М.С. Дискретные и вероятностные модели. Владимир: ВлГУ. 2017. -84 с.
4. Виноградов И.М. Суммы Гаусса и приложения их к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2021. т. 22, вып. 4, с. 7 – 49.
5. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа. 2004. – 640 с.