



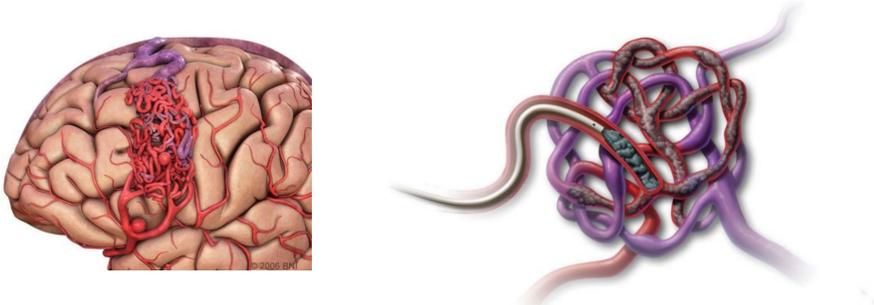
Анализ задачи эмболизации АВМ методами теории оптимального управления

И.А. Петренко¹, А.А. Черевко², Т.С. Шарифуллина²

¹Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия)

²Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Предмет исследования

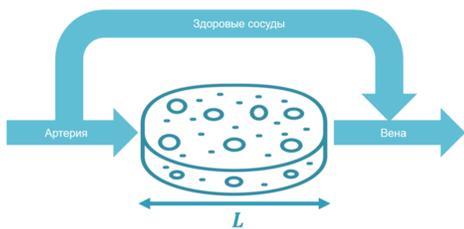


Артериовенозная мальформация (АВМ) – это церебральная сосудистая аномалия развития. Для нее характерно образование в некоторых участках головного мозга сосудистого клубка, состоящего из артерий и вен, соединяющихся друг с другом непосредственно, то есть без участия капиллярной сети.

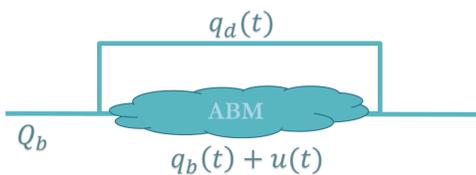
Эмболизация: В питающий АВМ сосуд вводятся специальные вещества, которые блокируют патологический кровоток. Это предотвращает опасность кровоизлияния при разрыве патологии и нормализует кровоснабжение окружающих тканей.

Задача исследования: Выработать рекомендации по режиму введения эмболического агента, обеспечивающие наибольшее заполнение патологии эмболическим агентом и способствующие уменьшению вероятности осложнений.

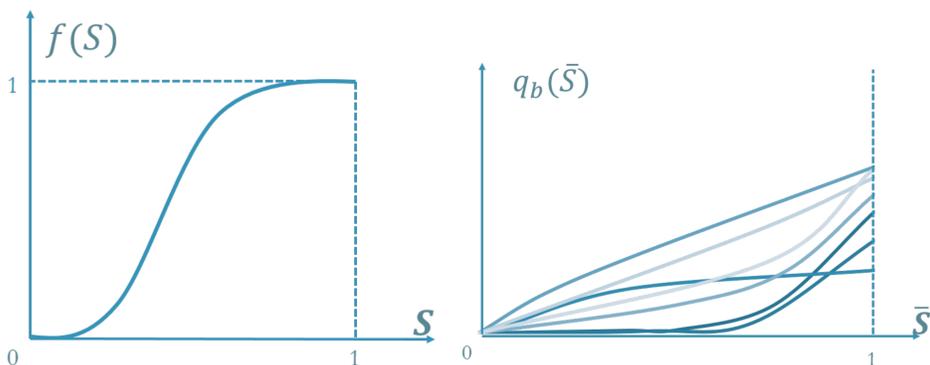
АВМ как пористое тело с перетоком. Одномерная модель



- $t \in [0, T]$ – время;
- $x \in [0, L]$ – координата вдоль АВМ (от входа артерии $x = 0$ до выхода на вену $x = L$);
- $S = S(t, x) \in [0, 1]$ – кровосодержание в момент времени t в поперечном сечении с координатой x ;
- $\bar{S} = \bar{S}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L S(t, x) dx \in [0, 1]$ – среднее кровосодержание в АВМ в момент времени t ;
- $p_{in} = p_{in}(t)$ – давление крови в артерии в момент времени t ;
- p_{out} – постоянное давление крови в вене;
- G – постоянная проводимость обводных здоровых сосудов;
- Q_b – постоянный суммарный расход крови, идущей через АВМ и обводные сосуды;
- $q_b = q_b(\bar{S}(t))$ – расход крови на входе в АВМ в момент времени t ;
- $q_d = q_d(t) = Q_b - q_b(t)$ – расход крови через обводные сосуды в момент времени t ;
- $u = u(t)$ – расход эмболического агента на входе в АВМ в момент времени t .



Клинические данные



$f(S)$ – типичная функция Баклея-Левретта, выражающая долю эмболического агента в общем потоке;

$q_b(\bar{S})$ – функция расхода крови.

Интегро-дифференциальная задача фильтрации

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + (q_b(\bar{S}(t)) + u(t)) \frac{\partial f(S(t, x))}{\partial x} = 0,$$

$$S(0, x) \equiv 1,$$

$$f(S(t, 0)) = \frac{q_b(\bar{S}(t))}{q_b(\bar{S}(t)) + u(t)}, \quad t \in (0, T],$$

$$\bar{S}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L S(t, x) dx.$$

Ограничения и целевой функционал

Неотрицательность управления:

$$u(t) \geq 0.$$

Ограничение на совокупный расход фаз через патологию:

$$q_b(\bar{S}(t)) + u(t) \leq \bar{Q}.$$

Ограничение на входное давление:

$$p_{in}(t) = p_{out} + \frac{Q_b - q_b(\bar{S}(t))}{G} \leq p_{max},$$

или, что то же самое, $\bar{S} \geq \bar{S}_{min}$, где $\bar{S}_{min} = q_b^{-1}(Q_b - G(p_{max} - p_{out}))$.

Запрет на выход в вену:

$$S(t, L) = 1.$$

Цель – минимизировать долю крови в конце операции:

$$J = \frac{1}{L} \int_0^L S(T, x) dx.$$

Формальная постановка задачи оптимального управления

$$J = \frac{1}{L} \int_0^L S(T, x) dx \rightarrow \min_{\substack{0 \leq u(t) \leq \bar{Q} - q_b(\bar{S}(t)), \\ \bar{S} \geq \bar{S}_{min}, \\ S(t, L) = 1}}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + (q_b(\bar{S}(t)) + u(t)) \frac{\partial f(S(t, x))}{\partial x} = 0, & (t, x) \in [0, T] \times [0, L], \\ \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} = \frac{S(t, x)}{L}, & x \in [0, L], \\ S(0, x) = 1, & x \in [0, L], \\ f(S(t, 0)) = \frac{q_b(\bar{S}(t))}{q_b(\bar{S}(t)) + u(t)}, & t \in [0, T], \\ \bar{S}(t, 0) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Оптимальный режим эмболизации

$$u^*(t) = \begin{cases} -V\bar{S}'(t) & t \in [0, T], \\ 0 & t \notin [0, T], \end{cases}$$

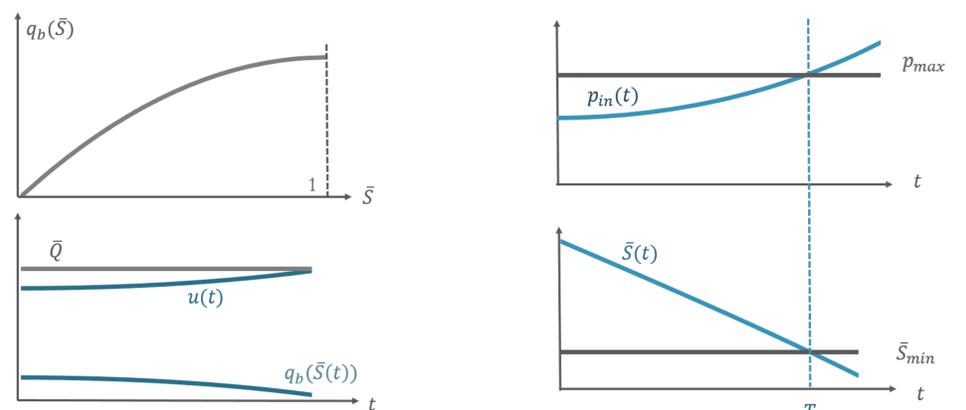
где V – полный объём АВМ, \bar{S} – решение начально-краевой задачи

$$\begin{cases} q_b(\bar{S}(t)) - V\bar{S}'(t) = \bar{Q}, \\ \bar{S}(0) = 1. \end{cases}$$

Терминальное ограничение:

$$T = \min_{t \in [0, \infty]} \{t : p_{in} = p_{max} \text{ или } S(t, L) < 1\}.$$

Пример



Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00264).