

Геометрический метод решения линейных дифференциальных игр с многомерным фазовым вектором

Михайлов Антон, tigr-mav@yandex.ru

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, УрО РАН, Екатеринбург

Школа-конференция «Неголономные дни в Переславле», Переславль-Залесский, 26–30 августа 2024 г.

Постановка задачи

Антагонистическая дифференциальная игра:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(t)z + B(t)u + C(t)v, \quad t \in [t_0, T], \quad z \in \mathbb{R}^n, \\ u &\in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q, \\ z(T) &\in M + MSpace^\perp. \end{aligned} \quad (1)$$

Эквивалентная игра

Заменой переменных переменных $x(t) = X_{1,2,\dots,d}(T,t)z(t)$, определяемой d строками фундаментальной матрицы Коши, соответствующими целевым компонентам фазового вектора, можно перейти от игры (1) к эквивалентной игре:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= D(t)u + E(t)v, \quad t \in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ D(t) &= X_{1,2,\dots,d}(T,t)B(t), \quad E(t) = X_{1,2,\dots,d}(T,t)C(t), \\ u &\in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q, \\ x(T) &\in M. \end{aligned} \quad (2)$$

Теоретическая процедура

Второй метод Понтрягина:

$$W(t_i) = (W(t_{i+1}) + (-\Delta)D(t_i)P) * \Delta E(t_i)Q, \quad W(t_N) = M, \quad (3)$$

$t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} = t_i + \Delta < \dots < t_N = T$.

«+» — сумма Минковского: $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^d \mid a \in A, b \in B\}$.

«*» — разность Минковского: $A * B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x + B \subset A\} = \bigcap_{b \in B} (A + (-b))$.

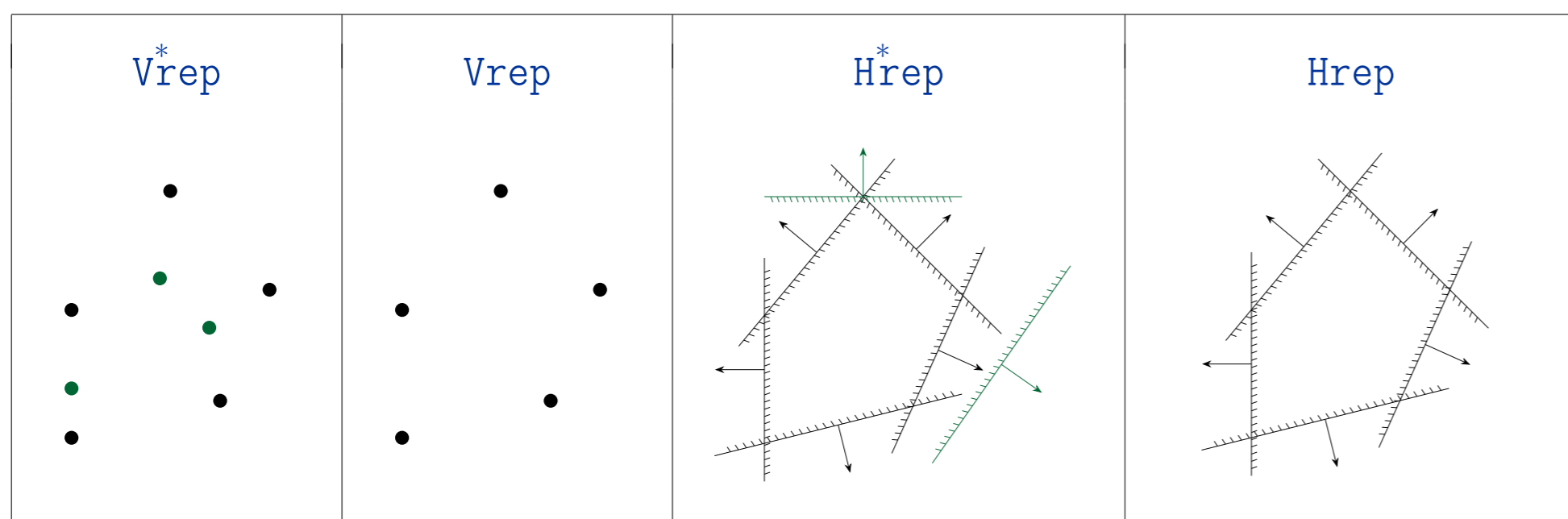
«conv» — выпуклая оболочка роя точек для получения многогранника $(-\Delta)D(t_i)P$.

Понтрягин Л.С., *Линейные дифференциальные игры, II* // Докл. АН СССР, 1967, Т. 75, № 4, С. 764–766.

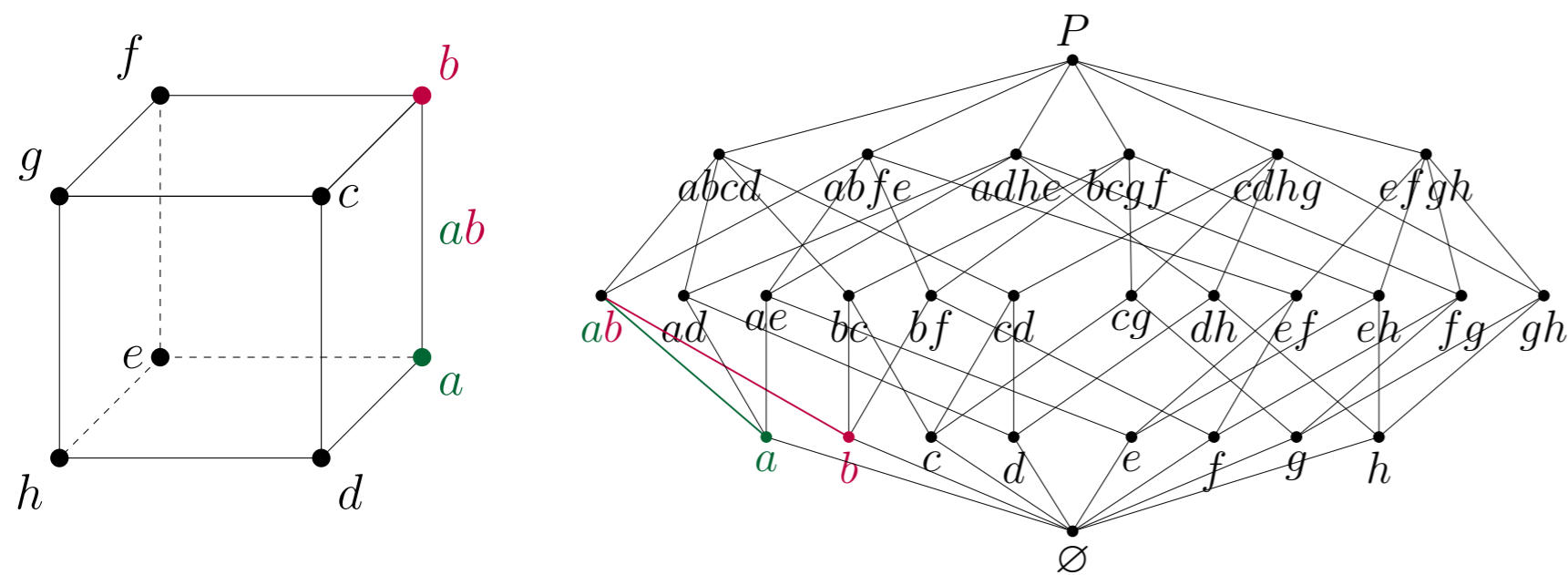
Реализации алгоритма

- Начало 1980-х, В.С. Пацко (ИММ УрО РАН): $d = 2$, точные алгоритмы.
- 1990-е, Н.Л. Григоренко (ВМК МГУ), Е.С. Половинкин (МФТИ): $d \geq 3$, приближённые алгоритмы.
- 1992, М.А. Зарх (ИММ УрО РАН): $d \geq 3$, точные алгоритмы, P, Q — зонотопы.
- 1992, Н.Д. Боткин (ИММ УрО РАН): $d \geq 3$, точные алгоритмы, **медленно**.

Представление выпуклого многогранника



FLrep; решётка граней



Существующие алгоритмы

- conv(V*rep A) → (Vrep A, Hrep A, FLrep A).
Swart Garret, *Finding the Convex Hull Facet by Facet* // Journal of Algorithms. 1985. Vol. 6. No. 1. pp. 17–48.
- sum(FLrep A, FLrep B) → FLrep C.
Das S., Dev S.R., Sarvottamananda S., *A Worst-Case Optimal Algorithm to Compute the Minkowski Sum of Convex Polytopes* // Algorithms and Discrete Applied Mathematics. CALDAM 2021. Lecture Notes in Computer Science (eds.: A. Mudgal, C.R. Subramanian), Vol. 12601. Cham: Springer, 2021. pp. 179–195.
- diff(Hrep A, Vrep B) → H*rep C
Боткин Н.Д., Рязанцева Е.А., *Алгоритм построения множества разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерности* // Тр. Ин-та мат. и мех. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. Т. 2. С. 128–134.
- H*rep A → Hrep A
Fukuda Komei, *Polyhedral Computation*. Educational materials, Department of Mathematics, Institute of Theoretical Computer Science ETH Zurich, 2020. pp 145.
Боткин Н.Д., Рязанцева Е.А., *Алгоритм построения множества разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерности* // Тр. Ин-та мат. и мех. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. Т. 2. С. 128–134.

Предлагаемая вычислительная схема

doNextSection(FLrep W_{i-1} , FLrep P_i , V*rep Q_i) → FLrep W_i ,

$P_i = (-\Delta)D(t_i)P$, $Q_i = (-\Delta)E(t_i)Q$

По шагам:

- sum(FLrep W_{i-1} , FLrep P_i) → FLrep A_i
- FLrep A_i → Hrep A_i
- diff(Hrep A_i , Vrep Q_i) → H*rep W_i
- H*rep W_i → Vrep W_i
- conv(Vrep W_i) → FLrep W_i

Разработанные алгоритмы

FLrep A → Hrep A.

Для каждой $(d-1)$ -грани многогранника:

- Строим / берём аффинный базис $(d-1)$ -грани.
- Строим / берём строго внутреннюю точку многогранника.
- Вычисляем внешнюю нормаль. Используем численно устойчивый алгоритм QR-разложения на основе метода отражений.

H*rep A → Vrep A

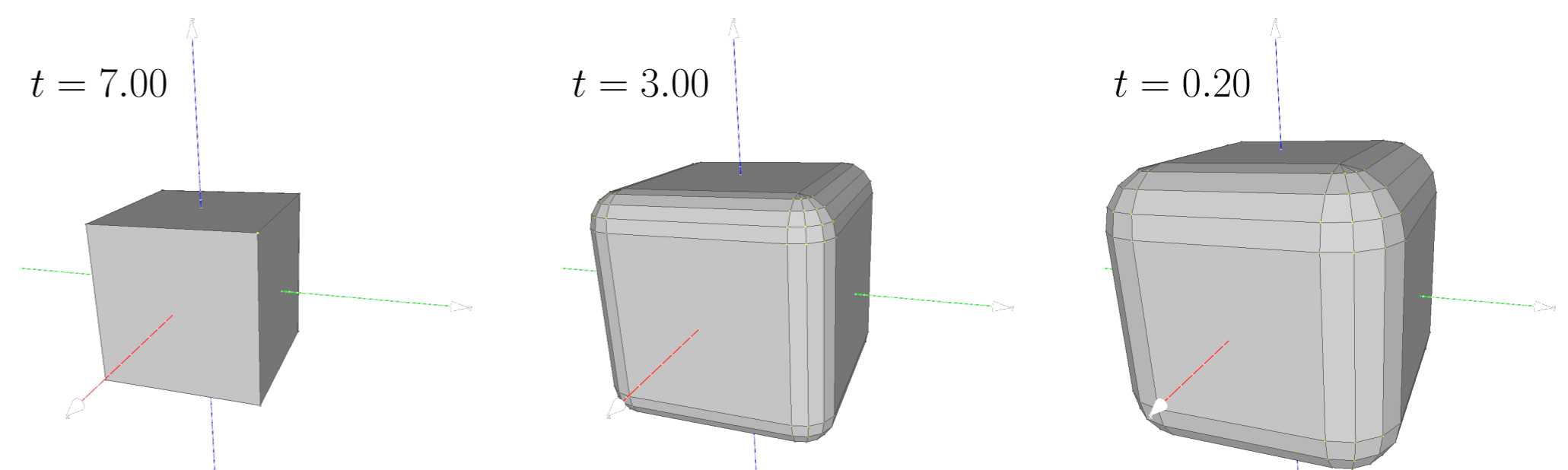
Предлагается геометрический алгоритм решения данной задачи:

- Находим какую-то вершину многогранника (перебор или задача ЛП);
- Строим лучи, содержащих одномерные рёбра;
- Вдоль каждого ребра находим соседнюю вершину;
- Ведём поиск по рёберному графу многогранника.

Примеры

Простые движения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + v, \\ t \in [t_0, T] &= [0, 7], \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u &\in \tilde{\mathcal{B}}_2(0, 1), \quad v \in \tilde{\mathcal{B}}_2(0, 0.9), \quad \text{— аппроксимации шаров} \\ M &= \mathcal{B}_\infty(0, 1) \text{ — куб,} \\ \Delta &= 0.2. \end{aligned}$$



Материальная точка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + v, \\ \dot{x}_2 &= u, \\ \dot{x}_3 &= 0 \text{ — значение функции платы,} \\ t \in [t_0, T] &= [0, 7], \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \rightarrow \quad t \in [t_0, T] = [0, 7], \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3, \\ u &\in [-1, 1], \quad v \in [-0.9, 0.9], \\ \varphi(x(T)) &= \|x(T)\| \rightarrow \min_u \max_v \\ (x_1(T), x_2(T), x_3(T))^T &\in M = \text{epi } \varphi \\ \bar{M} &= M \cap \{x_3 \leq 2\}, \quad \Delta = 0.1. \end{aligned}$$

