Лоренцева задача на трехмерной группе Гейзенберга с произвольным множеством управлений

Постерный доклад для школы-конференции «Неголономные дни в Переславле», август 2024.

Автор: Евгений Ладейщиков

1 Лоренцева проблема на трёхмерной группе Гейзенберга

Обозначим $\mathbb{H}_3$ трехмерную группу Гейзенберга, то есть множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

со стандартной операцией матричного умножения. В этом докладе будут рассмотрены Лоренцевы структуры на группе $\mathbb{H}_3$, задаваемые множеством U особого типа. Для удобства сформулируем Подмножество плоскости $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

(i): Не пусто, выпукло, замкнуто, не содержит ноль, а также удовлетворяет «свойству лучей»:

$$\forall\ \lambda > 1\ \lambda\Omega \subset \Omega.$$

(*): на границе Ω «отсутствуют» лучи, выпущенные из начала координат, т.е.

$$\forall\ \lambda > 1\ \lambda\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset.$$

(**): граница $\partial\Omega$ сколь угодно близка к граничным лучам l_0, l_1 конуса $C = \mathrm{cl}(\mathbb{R}_+\Omega)$, то есть:

$$\partial C = l_0 \cup l_1,\ \mathrm{dist}(l_0, \Omega) = 0,\ \mathrm{dist}(l_1, \Omega) = 0.$$

2 Антиполяра и гиперболические функции

Определение 1. Антиполярой множества Ω называется множество

$$\Omega^\diamond = \{(p,q) \in \mathbb{R}^{2*} |\ px - qy \geq 1\ \forall (x,y) \in \Omega\}$$

Теорема 1 (о би-антиполяре). Пусть $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

- Если Ω не отделено строго от нуля, то $\Omega^\diamond = \emptyset$.
- Если Ω строго отделено от нуля, то $\Omega^\diamond$ удовлетворяет Предположению (i).
- Если Ω удовлетворяет Предположению (i), то $\Omega = \Omega^{\diamond\diamond}$
- Если Ω строго отделено от нуля, то $\Omega^{\diamond\diamond} = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(\bigcup_{\lambda \geq 1} \lambda\Omega))$

Теорема 2 (о двойственных свойствах). Для множества $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющего Предположению (i), верны следующие утверждения:

- Ω удовлетворяет Предположению $(*)$ только тогда, когда $\Omega^\diamond$ удовлетворяет Предположению $(**)$.
- $\Omega^\diamond$ удовлетворяет Предположению $(*)$ только тогда, когда Ω удовлетворяет Предположению $(**)$.

2.1 Функции ch_Ω, sh_Ω

Определение 2. Пусть Ω удовлетворяет указанному предположению. Пусть $\omega_0 = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$ - фиксированная точка. Пусть O - начало координат, $\omega = (x,y) \in \partial\Omega$ и θ - удвоенная площадь контура[a] $O\omega_0\omega O$ (далее будем говорить: «пусть θ - угол точки ω в множестве Ω» или просто «пусть θ - угол в множестве Ω»). Определим

$$\mathrm{ch}_\Omega(\theta) = x, \quad \mathrm{sh}_\Omega(\theta) = y. \tag{1}$$

Эти функции определены либо при всех вещественных углах θ, либо лишь на некотором интервале или открытом луче в силу того, что заметаемая площадь может быть в пределе конечной.

Предложение 1.

$$\mathrm{ch}_\Omega(\theta)\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}(\eta) - \mathrm{sh}_\Omega(\theta)\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}(\eta) = 1 \quad \Leftrightarrow \eta \in \theta^\diamond \Leftrightarrow \theta \in {}^\diamond\eta.$$

Теорема 3. Функции ch_Ω, sh_Ω имеют правые и левые производные на всей области определения. Если множество $\theta^\diamond$ содержит единственный элемент η, то

$$\frac{d}{d\theta}\mathrm{ch}_\Omega(\theta) = \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}(\eta), \qquad \frac{d}{d\theta}\mathrm{sh}_\Omega(\theta) = \mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}(\eta).$$

Для не более чем счетного набора углов θ левая и правая производные функций $\mathrm{ch}_\Omega, \mathrm{sh}_\Omega$ не совпадают. В таком случае их графики имеют разрывы, совпадающие с отрезками:

$$\{\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}(\eta) |\ \eta \in \theta^\diamond\}, \qquad \{\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}(\eta) |\ \eta \in \theta^\diamond\},$$

то есть концы этих отрезков задают правые и левые производные.

3 Формулировка результата

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - множество, удовлетворяющее Предположению 1, а непрерывная положительная функция $f :\to \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ такова, что ее надграфик удовлетворяет свойствам (i), (*) Предположения 1.

$$U \subset T_e\mathbb{H}_3, U =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_3 \\ 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \middle|\ u_3 \in,\ \exists \omega \in \Omega : (u_1, u_2) = f(u_3) \cdot \omega \right\}$$

Легко видеть, что множество U выпукло, неограниченно, не содержит начало координат и удовлетворяет свойству лучей: $\lambda U \subset U\ \forall \lambda > 1$. Значит, это множество является единичным шаром некоторой антинормы на конусе $\mathbb{R}_+ U$.

[a] Точки O и ω_0 и точки O и ω соединены отрезками, а точки ω_0 и ω соединены участком границы множества Ω.

Найдем явные формулы для геодезических в этой задаче. Как известно, вертикальная система уравнений ПМП на группе Гейзенберга выглядит как:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \\ \dot{x}_3 = u_3 + x_1 u_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_1 = -h_3 u_2, \\ \dot{h}_2 = h_3 u_1, \\ \dot{h}_3 = 0, \\ u \in \mathrm{argmax}_{u \in U}(u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3). \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 4. При почти всех моментах времени t верно $(h_1, -h_2)(t) \in \partial\Omega^\diamond$. Первыми интегралами вертикальной системы (2) являются

$$A = \mu_{\Omega^\diamond}(h_1, -h_2) = \mathrm{const} > 0, \quad h_3 = \mathrm{const} \in \mathbb{R}, \quad A^2 + h_3^2 \neq 0,$$

где $\mu_{\Omega^\diamond}(h_1, h_2) = \sup\{\lambda |\ \frac{1}{\lambda}(h_1, h_2) \in \Omega^\diamond\}$ - функция Минковского множества Ω°. В зависимости от их значений, экстремали ПМП, выпущенные в момент времени $t = 0$ из единицы группы $(0,0,0) \in \mathbb{H}_3$:

1. при $h_3 = 0$ имеют вид:

$$x_1(t) = W\mathrm{ch}_\Omega\theta_0 \int_0^t \alpha(s)\,ds + W\mathrm{ch}_\Omega\theta_1 \int_0^t (1 - \alpha(s))\,ds,$$

$$x_2(t) = W\mathrm{sh}_\Omega\theta_0 \int_0^t \alpha(s)\,ds + W\mathrm{sh}_\Omega\theta_1 \int_0^t (1 - \alpha(s))\,ds,$$

$$x_3(t) = u_3^0 \int_0^t \gamma(s)\,ds + u_3^1 \int_0^t (1 - \gamma(s))\,ds +$$

$$+W \int_0^t x_1[\alpha(s)\mathrm{sh}_\Omega\theta_0 + (1 - \alpha(s))\mathrm{sh}_\Omega\theta_1]\,ds$$

где α, γ - некоторые измеримые неотрицательные функции, не превосходящие 1, число η_0 - некоторая константа из области определения функций $\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}, \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}$, а точки ω_0, ω_1 (быть может, совпадающие) составляют отрезок $[\omega_0, \omega_1] = \{(\mathrm{ch}_\Omega\theta, \mathrm{sh}_\Omega\theta) |\ \theta \in {}^\diamond\eta\} \subset \partial\Omega$.

Заметим, что для почти всех η_0 множество ${}^\diamond\eta_0$ одноэлементно, а функция $\theta(t)$ постоянна (для всех η_0, если граница Ω не имеет углов).

2. при $h_3 \neq 0$ имеют вид:

$$x_1(t) = \frac{-A}{h_3}\left(\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta(t) - \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta_0\right),$$

$$x_2(t) = \frac{-A}{h_3}\left(\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta(t) - \mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta_0\right),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\frac{A^2}{h_3^2}[\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta(t)\left(\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta(t) - 2\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta_0\right) +$$

$$+\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta_0\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta_0 + \eta(t) - \eta_0] + \frac{H}{h_3}t.$$

где

$$H = \min_{v \in \mathbb{R}}(Af(v) + h_3 v) = \mathrm{const},$$

$$\eta(t) = \eta_0 + \frac{h_3^2}{A^2}\int_0^t u_3(s)\,ds - \frac{h_3 H}{A^2}t,$$

для некоторой константы η_0 из области определения функций $\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}, \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}$ и некоторой измеримой функции

$$u_3(t) \in \mathrm{argmin}_{v \in \mathbb{R}}(Af(v) + h_3 v).$$

Обратно: любая из перечисленных кривых в пунктах 1, 2 поднимается до экстремали ПМП.

Доказательство

Заметим, что минимум гамильтониана ПМП может быть только положительным. Действительно, если минимум отрицателен, то умножая управление на произвольное число, большее единицы, получим меньшее значение гамильтониана (такое умножение возможно в силу свойства лучей множества управления). Если же минимум гамильтониана ПМП равен нулю, тогда на границе U есть луч, то есть (б.о.о. $u_3 > 0$), $\forall\ \lambda > 1\ \lambda(f(u_3)\omega, u_3) = (f(\lambda u_3)\omega(\lambda), \lambda u_3) \in \partial U$. Отсюда следует, что $\omega(\lambda) = \lambda_1\omega,\ \lambda_1 = \frac{\lambda f(u_3)}{f(\lambda u_3)}$, значит нашлись две точки на границе Ω, связанные умножением на некоторое число λ_1, что противоречит свойству (*) множества Ω. Таким образом минимум гамильтониана положителен.

Рассмотрим в таком случае несколько случаев. Для начала, пусть $h_1 = h_2 = 0$. В таком случае минимум гамильтониана может достигнут только при $h_3 = 0$, что невозможно в силу ПМП. Пусть $h_1^2 + h_2^2 > 0$. В таком случае минимум гамильтониана может быть достигнут только при условии, что $(h_1, h_2) = A(ch_{\Omega^\diamond}\eta, -sh_{\Omega^\diamond}\eta)$ для некоторых $A > 0, \eta \in \mathbb{R}$. Заметим, что динамика η есть

$$\dot{\eta} = \frac{-\dot{h}_2 ch_{\Omega^\diamond}\eta - \dot{h}_1 sh_{\Omega^\diamond}\eta}{A} = -\frac{h_3 f(u_3)}{A} \tag{3}$$

Ещё заметим, что $h_3, A > 0$ - постоянны. В зависимости от их значений найдём экстремали ПМП.

Пусть $h_3 = 0$. Тогда минимум гамильтониана достигается на $(u_1, u_2) = f(u_3)(ch_\Omega\theta, sh_\Omega\theta)$, где $u_3 \in \mathrm{argmin}_{v\in} f(v),\ \theta \in {}^\diamond\eta$. В таком случае, учитывая (3), получаем, что

$$\eta = \mathrm{const} \in \mathbb{R}.$$

Уравнения (2) не интегрируются явно в силу произвольности $\theta(t) \in {}^\diamond\eta$ и $u_3(t) \in \mathrm{argmin}_{\mathrm{v}\in} f(v)$, однако можно заметить, что множества $\mathrm{argmin}_{\mathrm{v}\in\mathbb{R}} f(v)$ и $\{(\mathrm{ch}_\Omega\theta, sh_\Omega\theta) |\ \theta \in {}^\diamond\eta\}$ есть отрезки, так что, обозначив их крайние точки за ω_0, ω_1 и u_3^0, u_3^1, соответственно, а минимум $f(v)$ за $W = \min_{v\in} f(v)$ получим:

$$x_1(t) = W\mathrm{ch}_\Omega\theta_0 \int_0^t \alpha(s)\,ds + W\mathrm{ch}_\Omega\theta_1 \int_0^t (1 - \alpha(s))\,ds,$$

$$x_2(t) = W\mathrm{sh}_\Omega\theta_0 \int_0^t \alpha(s)\,ds + W\mathrm{sh}_\Omega\theta_1 \int_0^t (1 - \alpha(s))\,ds,$$

$$x_3(t) = u_3^0 \int_0^t \gamma(s)\,ds + u_3^1 \int_0^t (1 - \gamma(s))\,ds +$$

$$+W \int_0^t x_1[\alpha(s)\mathrm{sh}_\Omega\theta_0 + (1 - \alpha(s))\mathrm{sh}_\Omega\theta_1]\,ds$$

где α, γ - некоторые измеримые неотрицательные функции, не превосходящие 1. Понятно, что, фиксировав произвольную пару таких функций, по формулам выше тоже получается экстремаль вида 1.

Теперь перейдём к экстремалям вида 3. Пусть $h_3 \neq 0$ (напомним, что $A > 0$). Тогда, учитывая, что $\theta(t) \in {}^\diamond\eta$ и (3), а также правило дифференцирования гиперболических функций $\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}, \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}$, получаем, что можно явно вычислить интегралы (учитывая, что в момент $t = 0$ траектория в точке $(0,0,0)$, и полагая η_0 - произвольная константа из области определения гиперболических функций для антиполяры $\Omega^\diamond$):

$$x_1(t) = \int_0^t f(u_3)\mathrm{ch}_\Omega\theta(s)\,ds = \frac{-A}{h_3}\left(\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta(t) - \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta_0\right),$$

$$x_2(t) = \int_0^t f(u_3)\mathrm{sh}_\Omega\theta(s)\,ds = \frac{-A}{h_3}\left(\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta(t) - \mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta_0\right).$$

Обратим внимание, что здесь θ как (однозначная) функция от η определена при почти всех θ из свойств гиперболических функций, а так же производная η строго положительна, так что выбор значения $\theta \in {}^\diamond\eta$ в точках неоднозначности не играет роли при интегрировании.

Чтобы проинтегрировать $\dot{x}_3$, предварительно вычислим интеграл от формы $\mathrm{sh}_\Omega\theta\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta\,d\eta$, а также выразим $\int_0^t u_3(s)\,ds$ через $\eta(t)$.

Пусть $\dot{\eta} > 0$, так что угол $\theta \in {}^\diamond\eta$ определен однозначно в почти все моменты времени. Вычислим первообразную:

$$I = \int \mathrm{sh}_\Omega\theta\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta\,d\eta = \int \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta\,d\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta = \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta -$$

$$-\int \mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta\mathrm{ch}_\Omega\theta, d\eta =$$

$$\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta - \int (1 + \mathrm{sh}_\Omega\theta\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta)\,d\eta = \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta - \eta - I.$$

Отсюда получаем, что

$$I = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta - \eta\right)$$

Действительно, производная этого выражения по η при почти всех η равняется

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}_\Omega\theta\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta + \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta\mathrm{sh}_\Omega\theta - 1\right) = \mathrm{sh}_\Omega\theta\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta.$$

Теперь выразим $\int_0^t u_3(s)\,ds$ через $\eta(t)$. Заметим, что величина $H = \min_{v\in}(Af(v) + h_3 v)$ постоянна, а значит

$$\dot{\eta} = \frac{-h_3 f(u_3)}{A} = \frac{h_3^2}{A^2}u_3 - \frac{h_3 H}{A^2}$$

. Отсюда мы получаем, что при начальном условии $\eta(0) = \eta_0$, произвольно выбранном из области определения функций $\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}, \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}$, получаем равенства:

$$\eta(t) - \eta_0 = \frac{h_3^2}{A^2}\int_0^t u_3(s)\,ds - \frac{h_3 H}{A^2}t,$$

$$\int_0^t u_3(s)\,ds = \frac{A^2}{h_3^2}(\eta(t) - \eta_0) + \frac{H}{h_3}t.$$

Теперь выпишем $x_3(t)$, также имея в виду начальное условие $x_3(0) = 0$.

$$x_3 = \int_0^t u_3(s)\,ds + \frac{A^2}{h_3^2}\int_0^t \left(\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta(s) - \mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta_0\right)\mathrm{sh}_\Omega\theta(s)\dot{\eta}(s)\,ds.$$

Заметим, что для $u_3(s)$ уже найдено выражение, а второе слагаемое (интеграл $x_1 u_2\,ds$) распадается в сумму интеграла $\mathrm{sh}_\Omega\theta\,d\eta$, который явно вычисляется, а также интеграла $\mathrm{sh}_\Omega\theta\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta\,d\eta$, который тоже посчитан. Итого, приведя подобные слагаемые, получим

$$x_3 = \frac{1}{2}\frac{A^2}{h_3^2}[\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta(t)\left(\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta(t) - 2\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta_0\right) +$$

$$+\mathrm{sh}_{\Omega^\diamond}\eta_0\mathrm{ch}_{\Omega^\diamond}\eta_0 + \eta(t) - \eta_0] + \frac{H}{h_3}t.$$

Таким образом, экстремали типа 3 двигаются по границе множества

$$\frac{-A}{h_3}\Omega^\diamond = \left\{\frac{-h_3}{|h_3|}(p,q) |\ px - qy \geq \frac{A}{|h_3|}\ \forall (x,y) \in \Omega\right\},$$

причем заметаемая площадь (т.е. угол η) меняется со скоростью $\frac{-f(u_3)h_3}{A}$ для некой измеримой функции $u_3(t) \in \mathrm{argmin}_{v\in\mathbb{R}}(Af(v) + h_3(v))$. Заметим, что при почти всех соотношениях $\frac{A}{h_3}$ эта функция $u_3(t)$ является постоянной, так что заметаемая площадь η меняется линейно на почти всех экстремалях.