Об энтропии дискретного синус-процесса

Косенков Никита

Дискретный синус-процесс

Под дискретным синус-процессом понимается борелевская *вероятностная мера*, введённая на пространстве двусторонних последовательностей $\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}) = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ следующим образом:
для набора попарно различных точек $x_1, ..., x_n \in \mathbb{Z}$ определим $n^{\text{ю}}$ *корреляционную функцию* равенством

$$\rho_n(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}\{x_1, ..., x_n \in X\}$$

Отметим, что корреляционные функции однозначно определяют меру. Нас интересует детерминантная мера, отвечающая следующим корреляционным функциям:

$$\rho_n(x_1, ..., x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

где $K_\theta(x, y) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ - *дискретное синус-ядро*, определяемое формулой

$$K_\theta(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\theta(x-y))}{\pi(x-y)}, & \text{если } x \neq y \\ \frac{\theta}{\pi}, & \text{если x=y} \end{cases} \qquad 0 < \theta < \pi$$

Факт того, что $K_\theta(x, y)$ действительно задаёт вероятностную меру, гарантируется *теоремой Маки-Сошникова.* В силу инвариантности K_θ относительно сдвига $(T\omega)_i = \omega_{i+1}$, полученная вероятностная мера также инвариантна относительно T и интерес представляет энтропия системы $(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}), \mathbb{P}, T)$.

Энтропия

Напомним, что *метрической энтропией* динамической системы $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ называют число (в т. ч. ∞)

$$h_\mu(T) = \sup_\xi h(T, \xi)$$

где ξ пробегает конечные измеримые разбиения X,

$$h(T, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee ... \vee T^{-n+1}\xi)$$

$$H(\xi) = -\sum_{A\in\xi} \mu(A) \log \mu(A)$$

и предел выше существует в силу *субаддитивности*. Метрическая энтропия является важным инвариантом динамических систем. Позже было введено понятие *топологической энтропии*. Пусть (X, d) - метрический компакт,$T : X \to X$ - непрерывно. Для $n \in \mathbb{N}$ введём метрики d_n на X:

$$d_n(x, y) = \max_{0\leq j\leq n} d(T^j(x), T^j(y))$$

т. е. $d_n(x, y)$ описывает $\max$ расстояние, на котором x и y оказываются за время первых n итераций. Для заданного $\varepsilon > 0$ обозначим через $r_n(\varepsilon)$ мощность наименьшей ε-сети (X, d_n). Определим *топологическую энтропию* системы как

$$h(T) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon)$$

Следующий *вариационный принцип* устанавливает связь между топологической и метрической энтропией:

Теорема
(X, d) - метрический компакт, $T : X \to X$ - непрерывно, $M(T, X)$ - инвариантные относительно T вероятностные меры на X. Тогда

$$h(T) = \sup_{M(X,T)} h_\mu(T)$$

$\mu \in M(X, T)$ называется *мерой максимальной энтропии*, если на ней достигается $\sup$. Вообще говоря такой меры может и не оказаться, известны соотв. примеры. Хорошо известен следующий результат о топологических Марковских цепях:

Теорема
Метрическая энтропия топологической марковской цепи (p, P) равна

$$h(T) = -\sum p_i p_{ij} \log p_{ij}$$

в то время как топологическая энтропия (если P - *неприводима*)

$$h(T) = \log \lambda$$

где $\lambda = \rho(A)$ - $\max$ по модулю собственное значение матрицы P.

Мера Парри как мера максимальной энтропии

Топологической марковской цепью назовём сдвиг на пространстве *разрешённых последовательностей*, заданном матрицей смежности A. Допустимые стохастические матрицы P в паре с начальным распределением $\mathbf{p}$ задают семейство марковских мер, которыми мы можем снабдить нашу цепь.Напомним теорему Перрона-Фробениуса:

Теорема
Пусть $A \geq 0$ - неприводима. Тогда $\rho(A)$ является собственным значением A и $\exists!$ (с точностью до умножения на const) положительный $v > 0$, отвечающий $\rho(A)$.
Пусть $a_{ij} \in \{0, 1\}$ и $\exists n : A^n > 0$. Пусть λ - $\max$ собственное значение из теоремы Перрона-Фробениуса, $v > 0$ - соответствующий λ собственный вектор. Понятно также, что тогда существует положительный *левый собственный вектор* $u > 0$ т.ч. $u^\top A = \lambda u^\top$. Нормируя u, добьёмся $u \cdot v = 1$. Тогда марковская мера, задаваемая вектором вероятностей

$$p_i = u_i v_i \quad \text{и матрицей переходов} \quad p_{ij} = \frac{a_{ij} v_j}{\lambda v_i}$$

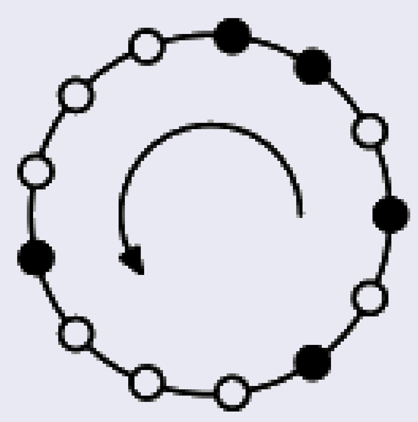
называется *мерой Парри*. Легко убедиться, что полученная матрица $P = (p_{ij})$ - стохастическая, а $\mathbf{p}$ - её единичный (по построению) левый инвариантный вектор. Мера Парри отличается тем, что все *допустимые* цепочки переходов фиксированной длины между заданными начальным и конечным состояниями *равновероятны:*

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} ... p_{i_{n-1} i_n} = \frac{a_{i_0 i_1} v_{i_1}}{\lambda v_{i_0}} \frac{a_{i_1 i_2} v_{i_2}}{\lambda v_{i_1}} ... \frac{a_{i_{n-1} i_n} v_{i_n}}{\lambda v_{i_{n-1}}} = \frac{v_{i_n}}{\lambda^n v_{i_0}}$$

Оказывается также, что если A - *неприводима*, то мера Парри - *единственная мера* $\max$ *энтропии.* (то, что на ней достигается $\sup$ - проверяется прямым вычислением)

Энтропия модификации TASEP

Вслед за [3] рассмотрим топологическую марковскую цепь, состояниями которой являются конфигурации из N (неразличимых) частиц на дискретной окружности из L ячеек, а переходы состоят в перемещении *одной из частиц* на одну ячейку *в положительном направлении* (нахождение двух частиц в одной ячейке запрещено).



Теорема (A. Gordenko)
Топологическая энтропия описанной выше системы равна

$$\ln \frac{\sin \frac{\pi N}{L}}{\sin \frac{\pi}{L}}$$

Начнём со случая, когда N *нечётно.* Каждое из $\binom{L}{N}$ состояний цепи отвечает упорядоченному набору $k_1 < ... < k_N$ номеров ячеек, занятых частицами. Обозначим $V = \mathbf{C}^L$ и сопоставим этому набору элемент

$$v_{k_1,...,k_N} = e_{k_1} \wedge ... \wedge e_{k_N} \in \Lambda^N V$$

Совокупность этих векторов образует базис пространства $\Lambda^N V$. Если понимать матрицу T переходов топологической цепи как записанный в этом базисе линейный оператор на $\Lambda^N V$, то его действие на базисных векторах выглядит как

$$T(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_N}) = Ce_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_N} + ... + e_{i_1} \wedge ... \wedge Ce_{i_N}$$

$$C : \Lambda^N V \to \Lambda^N V \qquad Ce_k = e_{k+1 \bmod L}$$

Итак, собственные значения оператора T есть всевозможные суммы попарно различных λ_i длины N, где $1 \leq i \leq L$. Очевидно, что наибольшие по модулю суммы получаются при сложении *последовательных* λ_i, а так как мы рассматриваем случай $N = 2m+1$, мы можем взять

$$\lambda_{-m} + ... + \lambda_0 + ... + \lambda_m = e^{\frac{-2m\pi i}{L}} \cdot \frac{1 - e^{\frac{2\pi i(2m+1)}{L}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{L}}} = \frac{\sin(\frac{\pi N}{L})}{\sin \frac{\pi}{L}}$$