Особые экстремали в задачах вариационного исчислениях на выпуклых кривых

Жеглов С.А.

МГУ им. М.В.Ломоносова

Рассмотрим классическую задачу вариационного исчисления:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,\dot{x})dt \to \min,\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1,\quad f\in C^2\left(\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\right),\ x\in \mathrm{Lip}([t_0,t_1]\to\mathbb{R}).$$

Решение этой задачи легко получить, используя идею малой вариации кривой, то есть решив уравнение Эйлера-Лагранжа. Однако, в приложениях часто необхожимо найти решение не в классе всех липшицевых кривых, а в классе всех выпуклых кривых. В этом случае идея малых вариаций уже не работает. Так, в задаче

$$J(x)=\int_0^1 xdt \to \max,\quad x(0)=x(1)=0$$

оптимальная выпуклая кривая имеет вид $\hat{x}(t)\equiv 0$, но при этом

$$J(\hat{x}+\varepsilon h)-J(\hat{x})=\varepsilon J(h)=O(\varepsilon)\neq O(\varepsilon^2).$$

Возникает идея наложить условие $\ddot{x}\geq 0$ и применить принцип максимума Понтрягина, положив $u=\ddot{x}$. При таком подходе u, вообще говоря, является обобщённой функцией, потому что оптимальная выпуклая кривая может иметь изломы. Это сильно затрудняет исследование. Например, у экстремалей в этой задаче может быть до двух изломов:

$$\int_{-1}^{1}\dot{x}^2(\dot{x}^2-1)^2dt\to\min,\ x(-1)=x(1)=0,$$

$$\hat{x}(t)=\max(|t|-1,a),\ a\in[-1,0].$$

Оказывается, есть способ свести задачу к принципу максимума, который избавлят нас от необходимости работать с обобщёнными функциями. В задачах, где функция f зависит только от $\dot{x}$, особые экстремали устроены довольно интересно. Работа посвящена именно им.

Определение

1-графиком выпуклой функции $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется

$$\mathrm{graph}^1 x=\{(t,x(t),y)\mid t\in\mathrm{dom}(x),\ y\in\partial x(t)\}.$$

Теорема

Если $\hat{x}$ – оптимальная выпуклая кривая в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,\dot{x})dt\to\min,\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1,\quad \dot{x}(t_0+0)\geq s_0,\ \dot{x}(t_1-0)\leq s_1,$$

то $\mathrm{graph}^1\hat{x}$ совпадает с графиком $(t(\alpha),x(\alpha),y(\alpha))$, где t, x, y получаются из некоторой экстремали следующей задачи оптимального управления:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(t,x,y)ud\alpha\to\min,\ u(\alpha)\in[0,1],\quad t'=u,\ x'=yu,\ y'=1-u,$$

$$t(\alpha_0)=t_0,\ t(\alpha_1)=t_1,\quad x(\alpha_0)=x_0,\ x(\alpha_1)=x_1,\quad y(\alpha_0)=y_0.\qquad (*)$$

Исследуем класс задач, в которых интегрант зависит только от скоростей, т.е. $f_t=f_x=0$. Дополнительно потребуем, чтобы множество нулей f_{yy} было конечным. Условимся обозначать $f(\cdot)=f(t,x,\cdot)$.

Пусть существует прямая, касающаяся графика $f(y)$ в точках $y_1,\dots,y_k$ и лежащая целиком под графиком. Обозначим наклон некоторой такой прямой за φ_0. Тогда исходная задача ВИ эквивалентна следующей:

$$\int_{t_0}^{t_1}(f(\dot{x})-\varphi_0\dot{x})dt\to\min,$$

Поскольку у функции $f(y)-\varphi_0 y$ есть ровно k минимумов, то новый функционал минимизируется очевидным образом – нужно, чтобы $\dot{x}$ в любой момент времени был равен одному из $y_1,\dots,y_k$. Среди таких экстремалей выпуклыми являются те, у которых $\dot{x}$ монотонно возрастает.

Что это за экстремали с точки зрения принципа максимума в задаче $(*)$?

Теорема

Описанные выше кривые – особые экстремали в $(*)$. Кроме того, в исследуемом классе задач особые экстремали всегда имеют такой вид.

Можно получить похожие результаты и для некоторых других классов задач. Например, если $f_y=0$ и $f>0$, то особые экстремали – тоже ломаные.