Аналитический подход синтеза многополосных фильтров.

Гараев Т. Р.

Введение

Обработка различных сигналов сегодня является очень важной прикладной задачей. Часто при передаче сигналов возникают помехи, избавиться от которых помогают фильтры. В зависимости от конкретной проблемы – их физическая реализация может быть различной (аналоговая, цифровая, микроволновая), однако оптимизационная задача схожая:
Задача 1. Дана совокупность E непересекающихся отрезков действительной оси, имеющих смысл частотных диапазонов. Эти отрезки разделены на две группы: полосы задержки E^- и полосы пропускания E^+. Индикаторную функцию определим равенством $F(x) = \pm 1$ при $x \in E^\pm$. Требуется среди вещественных рациональных функций $R(x)$ заданной степени n найти наилучшее приближение индикаторной функции в равномерной метрике на указанных отрезках: $||R-F||_E := \max_{x\in E}|R(x)-F(x)| \to min$. Известно, что для функции $R(x)$, которая является решением задачи 1, функция $R(x) - F(x)$ принимает значения из $\{1 \pm ||R-F||_E, -1\pm||R-F||_E\}$ на множестве E ровно $2n+2$ раза. С помощью дробно-линейного отображения можно перевести множество $\{1\pm||R-F||_E, -1\pm||R-F||_E\}$ в множество $\mathbf{Q} := \mathbf{Q}(\kappa) := \{\pm 1, \pm 1/\kappa\}$. Поэтому достаточно найти такую рациональную функцию $R(x)$, что $R(x) - F(x)$ принимает на множестве E ровно $2n + 2$ раза значение из $\mathbf{Q}$. Такую задачу мы обозначим как задачу 1'. Размерность пространства рациональных функций равна $2n + 2$. В данном докладе мы расскажем про анзац метод, который позволяет дать явную аналитическую формулу решения задачи 1' и заметно понизить размерность пространства возможных решений.

Введение

Около 50 лет назад при построении n-стадийных явных устойчивых методов Рунге-Кутты p-го порядка точности и была поставлена оптимизационная задача о наилучшем многочлене устойчивости. Решение данной задачи известно как наилучший многочлен устойчивости. При $p = 1$ этот многочлен выражается через классические многочлены Чебышева: $R_n(x) = T_n(1 + x/n^2)$. Многочлены Золотарева, представимые параметрически через эллиптические функции, дают решение задачи при $p = 2$. Многие авторы отмечают, что при $p > 2$ решение $R_n(x)$ в замкнутой аналитической форме неизвестно, и предлагают различные итерационные методы для его численного определения. Прямая численная оптимизация оказывается очень трудоемкой и практически невозможной при больших степенях многочлена. Специально для решения оптимизационной задачи о наилучшем многочлене устойчивости был разработан итерационный метод [Le93]. Данный метод потребовал при $p = 3$ четырех суток вычислений на многопроцессорной рабочей станции для решения задачи с $n = 576$. Дать явную аналитическую формулу решения тем не менее можно и для случая $p > 2$.
Решение упомянутой выше задачи для $n = 576$ с помощью алгоритма, основанного на анзац методе, теперь занимает лишь пару секунд машинного времени на персональном компьютере.

Ссылки

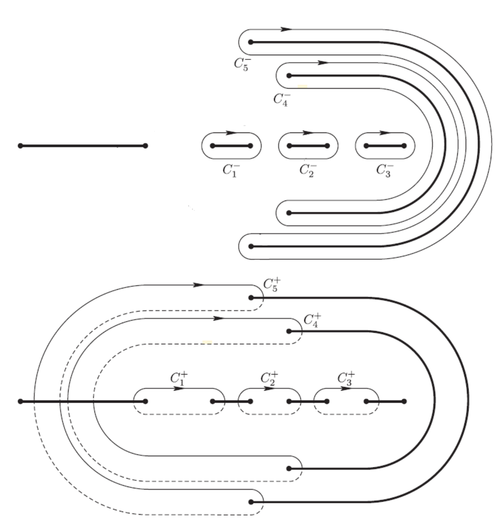
Список литературы

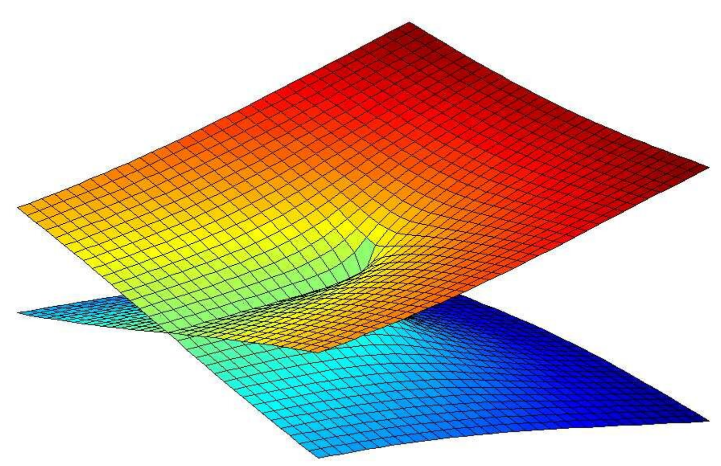
[Le93] Lebedev V.I. A new method for determining the roots of polynomials of least deviation on a segment with weight and subject to additional conditions. Part I, Part II.// Russ. J. of Numer. Anal. and Mathem. Modelling., 8:3 (1993), 195–222; 8:5 (1993), 397–426.

[Bo10] A.B. Bogatyrev, Chebyshev representation for rational functions, Sb. Math., 201:11 (2010), pp. 1579–1598.

[Ah29] Н.И. Ахиезер, Об одной задаче Е.И. Золотарева, Изв. Акад. наук СССР, VII серия, 1929, №10, стр. 919–931

Гиперэллиптическая кривая





Чебышевксое представление

Для рациональной функции $R(x)$, представленной ввиде несократимой дроби степени n, справедливо равенство

$$(R^2(x) - 1)(\kappa^2 R^2(x) - 1) =: W(x)S^2(x), \tag{1}$$

где $S(x)$ – рациональная функция, знаменатель которой равен квадрату знаменателя $R(x)$, и где $W(x)$ – свободный от квадратов многочлен.
Нетрудно заметить, что все корни производной функции $R(x)$ будут нулями функции $S(x)$. Поэтому для некоторого многочлена $\rho(x)$ справедливо равенство

$$R'(x) = \rho(x)S(x).$$

Теперь уравнение (1) можно переписать в дифференциальном виде:

$$\frac{dR(x)}{\sqrt{(R^2(x)-1)(\kappa^2R^2(x)-1)}} = \frac{\rho(x)dx}{\sqrt{W(x)}}.$$

Решение уравнения выше имеет вид

$$R(x) = sn(\int_e^x \frac{\rho(x)dx}{\sqrt{W(x)}}\,dx). \tag{2}$$

Представление функции $R(x)$ ввиде равенства (2) называют чебышевским представлением. Верхняя оценка на степень многочленов $\rho(x)$ и $W(x)$ не зависит от n, но зависит от числа полос пропускания и задержки, см 1. Поэтому при большом n и при маленьком числе полос пропускания и задержки уравнение (2) позволяет искать оптимальное решение задачи 1' в пространстве низкой размерности.

Степень $W(x)$

Теорема 1. Степень многочлена $W(x)$ четная и не превосходит $2m - 4$ при $m \geq 2$, где m – число полос пропускания и задержки. Степень многочлена $\rho(x)$ меньше или равна $\frac{\deg W(x)}{2} - 1$.

Доказательство. Четность степени многочлена $W(x)$ легко следует из равенства (1).
В данном абзаце мы покажем, что степень многочлена $W(x)$ не превосходит $2m - 4$. Из теоремы об альтернансе, см [Ah29], следует, что на E имеется $2n + 2$ точки экстремальные точки, в которых R принимает значения из $\mathbf{Q}$. Экстремальные точки, которые лежат во внутренности E, являются нулями производной $R(x)$. Экстремальные точки $R(x)$ на границе E могут не обнулять производную функции $R(x)$. Поэтому число точек из E, где $R'(x) = 0$, не меньше $2n + 2 - |\partial E| = 2n + 2 - 2m$. Следовательно, степень числителя $S^2(x)$ не меньше $2n + 2 - 2m$, а степень $W(x)$ не больше $2m - 4$. Неравенство $\deg\rho(x) \leq \frac{\deg W(x)}{2} - 1$ выводится из равенства

$$R'(x) = \rho(x)S(x)$$

и из оценки на асимптотику на бесконечности $R(x)$ и $S(x)$. □

Чебышевское соответствие

Функции $R(x), S(x)$ и $W(x)$ определены в разделе Чебышевское представление. Если подставить произвольные многочлены $\rho(x)$ и $W(x)$ в равенство (2), то, вообще говоря, функция $sn(\int_e^x \frac{\rho(x)dx}{\sqrt{W(x)}}\,dx)$ не обязана быть рациональной. Написать необходимые условия, многочлены $\rho(x)$ и $W(x)$, чтобы в правой части равенства 2 получилась рациональная функция – непросто. Для этого нам потребуется воспользоваться римановыми поверхностями.
Каждой рациональной функции $R(x)$ сопоставим риманову поверхность $X = M(e)$ с ветвлениями в точках множества e, в которых функция принимает значения из множества $\mathbf{Q}$ с нечетной кратностью, см рис. Афинная часть данной кривой задается уравнением

$$w^2 = W(x), \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2.$$

Такие кривые, где многочлен $W(x)$ не имеет кратных корней, называются гиперэллиптическими.

Замечание 2. a) Точки множества e в точности являются нулями многочлена $W(x)$.
b) Род кривой X равен

$$g := 1 + \sum_{x:R(x)\notin\mathbf{Q}} \text{ord } dR(x) + \sum_{x:R(x)\in\mathbf{Q}} [\frac{1}{2}\text{ord } dR(x)],$$

а степень многочлена $W(x)$ равна $2g + 2$.

Не каждая поверхность Римана соответствует рациональной функции.

Образ чебышевского соответствие

Теорема 3. Гиперэллиптическая кривая M является образом рациональной функции при чебышевском соответствии тогда и только тогда, когда она (возможно с ветвлениями) голоморфно накрывает тор $T(\mathbf{Q})$, аффинную часть которого задает уравнение

$$s^2 = (r^2 - 1)(\kappa^2 r^2 - 1), \quad (r, s) \in \mathbb{C}^2.$$

Набросок доказательства. Если кривая M получена в результате применения чебышевской конструкции к рациональной функции R, то накрытие тора задается рациональным отображением

$$M \ni (x, w) \xrightarrow{\widetilde{R}} (R(x), wS(x)) = (r, s) \in T(\mathbf{Q}).$$

Ниже мы приведем набросок доказательства утверждения в другую сторону.
Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\widetilde{R}} & T(\mathbf{Q}) \\ {\scriptstyle pr_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_{T(\mathbf{Q})}} \\ \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{R} & \mathbb{C}P^1 \end{array}$$

где $pr_M(x, w) := x$, $pr_{T(\mathbf{Q})}(x, w) = x$ и где $\widetilde{R}$ – голоморфное накрытие поверхностей. Для каждой гиперэллиптической кривой

$$M' : w^2 = f(x) \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2,$$

обозначим через $J_{M'} : M' \to M'$ конфорную инволюцию, заданную формулой $J_{M'}(x, w) = (x, -w)$. Можно показать, что
a) накрытие $\widetilde{R}$ можно выбрать таким образом, что $\widetilde{R}J_M = J_{T(\mathbf{Q})}\widetilde{R}$;
b) условия a) достаточно, чтобы показать, что $\widetilde{R}$ опускается на базы диаграммы выше.
Мы не будем доказывать пункты a) и b), но мы покажем, как по модулю пунктов a) и b) доказывается теорема 3.
То, что $R(x)$ из пункта b) является рациональной функцией – следует из того, что $R(x)$ конформное отображение из сферы Римана в сферу Римана. В следующем абазаце мы покажем, что при чебышевском соответствии $R(x)$ соответствует кривая M.
Заметим, что множество неподвижных точек при отображении $J_{M'}$ в точности равно $\{(e_j, 0)\}$, где e_j – нули многочлена $f(x)$. Из пункта a) следует, что отображение $\widetilde{R}$ переводит неподвижные точки инволюции J_M в неподвижные точки инволюции $J_{T(\mathbf{Q})}$ и имеет в них нечетный индекс ветвления. Соответственно, образ дивизора ветвления $R\{e_j\}$ целиком лежит в $\mathbf{Q}$ и индекс ветвления $R(x)$ в каждой из точек e_j – нечетный. Во всех других прообразах $x \in R^{-1}\mathbf{Q}$ индекс – четный, т.к. индексы отображений при композиции перемножаются и

$$\text{ind pr}_M(x, w) = \begin{cases} 1 & x = e_j \\ 2 & x \neq e_j \end{cases} \qquad \text{ind pr}_{T(\mathbf{Q})}(x, w) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 2 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}.$$

Поэтому точки $\{e_j\}$ являются точками, в которых функция $R(x)$ принимает значения в $\mathbf{Q}$ с нечетной кратностью. По замечанию 2.a, множество $\{e_j\}$ является корнями многочлена $W(x)$. Следовательно, аффинная часть M задается уравнением

$$w^2 = W(x), \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2.$$

□
Теорема 3 дает описание всех римановых поверхностей, которые лежат в образе чебышевского соответствия. Однако условие данной теоремы сложно проверяются.

Основная теорема

В теореме 4 мы не определяем функцию K и число τ, см. [Bo10].

Теорема 4. [Bo10] Вещественная гиперэллиптическая кривая $M(e)$, имеющая хотя бы один вещественный овал, является образом вещественной рациональной функции $R(x)$ при чебышевском соответствии с множеством $\mathbf{Q}(\kappa)$, $0 < \kappa < 1$, если и только если на кривой существует голоморфный дифференциал $d\zeta$, периоды которого удовлетворяют условиям:

$$\int_C d\zeta \in 4\mathbb{Z}, C \in L_M^+ := (I + \bar{J_M})H_1(M, \mathbb{Z}),$$

$$\int_C d\zeta \in 2\tau\mathbb{Z}, C \in L_M^- := (I - \bar{J_M})H_1(M, \mathbb{Z}).$$

При выполнении условий выше восстановить рациональную функцию можно по формуле

$$R(x) = sn(2K(\tau)\int_{(e,0)}^{(x,w)} d\zeta + A(e)|\tau), \qquad A(e) := K(\tau)\begin{cases} \pm 1 & R(e) = \pm 1 \\ \pm 1 + \tau & R(e) = \pm 1/\kappa \end{cases},$$

в которой результат вычисления не зависит от пути интегрирования на X, от двузначности в выборе $w(x)$ и от точки ветвления e, выбранной в качестве начальной точки интегрирования.