© 2024 г. Ю.Л. САЧКОВ, д. ф.-м. наук,
(Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, с. Веськово)
И.А. ГАЛЯЕВ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЛОРЕНЦЕВА ЗАДАЧА НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассмотрены две левоинвариантные лоренцевы задачи на группе Гейзенберга. К обеим задачам применен принцип максимума Понтрягина, получена параметризация анормальных и нормальных экстремальных траекторий. Исследованы множества достижимости и существование оптимальных траекторий.

1. Группа Гейзенберга

Группа Гейзенберга есть пространство $G \simeq \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ с базисом левоинвариантных векторных полей

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

2. Первая задача

2.1. Постановка задачи

Сформулируем первую задачу Лоренца на группе Гейзенберга:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{3} u_i X_i, \qquad q = (x, y, z) \in G, \tag{2.1}$$

$$u \in U = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 \leqslant 0,\ u_3 \geqslant 0\}, \tag{2.2}$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \qquad q(t_1) = q_1, \tag{2.3}$$

$$J(\gamma) = \int_0^{t_1} \sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2}\, dt \to \max. \tag{2.4}$$

Рассмотрим следующую систему управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1, \\ \dot{y} = u_2, \\ \dot{z} = -\dfrac{y}{2}u_1 + \dfrac{x}{2}u_2 + u_3, \end{cases} \tag{2.5}$$

Для траектории $\gamma(t)$, соответствующей управлению $(u_1(t),\ u_2(t),\ u_3(t))$ за время $t_1 > 0$, определим функционал стоимости:

$$J(\gamma) = \int\limits_0^T \sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2}\, dt. \tag{2.6}$$

Для заданных граничных условий:

$$\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \gamma(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1). \tag{2.7}$$

Запишем общий вид функции Понтрягина

$$h_u^\nu = \langle p, \sum_{i=1}^{3} u_i X_i \rangle + \nu\sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2}, \quad p \in T^*M,\ \nu \leqslant 0.$$

Пусть $(u(t), q(t))$, $t \in [0, T]$, будет оптимальным, то выполняются следующие условия:

1) Гамильтонова система $\dot{p} = -\dfrac{\partial h_u^\nu}{\partial q},\ \dot{q} = \dfrac{\partial h_u^\nu}{\partial p}$;

2) Условие максимума $h_{u(t)}^\nu(p(t), q(t)) = \max\limits_{u \in \mathbb{R}^3} h_u^\nu(p(t), q(t))$;

3) Условие нетривиальности $(p(t), \nu) \neq (0, 0)\ \forall t \in [0, T]$.

Обозначим $h_i = \langle p, X_i \rangle$. Тогда функция Понтрягина выражается следующим образом:

$$h_u^\nu = u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3 - \nu\sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2}.$$

В формулировке ПМП, не ограничивая общности, достаточно рассмотреть два случая: $\nu = 0$ — аномальный случай и $\nu = -1$ — нормальный случай. Рассмотрим их подробно.

2.2. Аномальный случай принципа максимума Понтрягина ($\nu = 0$)

h_i - наперед заданные константы. Опишем пространство h_i, разделив его на 4 подпространства.
1) $h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 \leqslant 0$, $h_3 \geqslant 0$.
Запишем ограничения для случая 1

$$\begin{cases} u_3^2 \geqslant u_1^2 + u_2^2, \\ h_3^2 \geqslant h_1^2 + h_2^2, \end{cases}$$

Тогда справедливы следующие неравенства
$u_3^2 h_3^2 \geqslant u_1^2 h_1^2 + h_2^2 u_2^2 + u_1^2 h_2^2 + u_2^2 h_1^2$,
$u_1^2 h_1^2 + h_2^2 u_2^2 + u_1^2 h_2^2 + u_2^2 h_1^2 - (u_1 h_1 + u_2 h_2)^2 = (u_1 h_2 - u_2 h_1)^2 \geqslant 0$.
Откуда следует, что
$|u_3 h_3| \geqslant |u_1 h_1| + |u_2 h_2|$.

Исследуем u_3h_3. Если $h_3 > 0$, в совокупности с неограниченностью u_3, то и u_3h_3 неограниченна.
$u_3 = 0$ означает и $u_1 = u_2 = 0$.
Максимума функции h_u^0 либо не существует, либо решение тривиально.

2) $h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 < 0$, $h_3 < 0$.
Почти аналогично 1 случаю.

$$\begin{cases} u_3^2 \geqslant u_1^2 + u_2^2, \\ h_3^2 \geqslant h_1^2 + h_2^2, \end{cases}$$

Только из-за строгого равенства $h_u^0 \neq 0$. То есть в любом случае функция отрицательна. Максимума нет.

3) $h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 > 0$.
При $u = k(h_1, h_2, \sqrt{h_1^2 + h_2^2})$ получаем $h_u = k\sqrt{h_1^2 + h_2^2}(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} + h_3) \to +\infty$ при $k \to +\infty$.
Поэтому в случае 3) максимума не существует.

4) $h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 0$, $h_3 < 0$.
$u_3^2 = u_1^2 + u_2^2$. Выбираем натуральную параметризацию $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Максимум функции $h_u^0 = h_1u_1 + h_2u_2 + h_3u_3 = 0$, когда она равна 0.

$$\begin{cases} x = \sin(t - \theta_0) + \sin(\theta_0), \\ y = \cos(t - \theta_0) - \cos(\theta_0), \\ z = \sin(t)/2 + t/2. \end{cases}$$

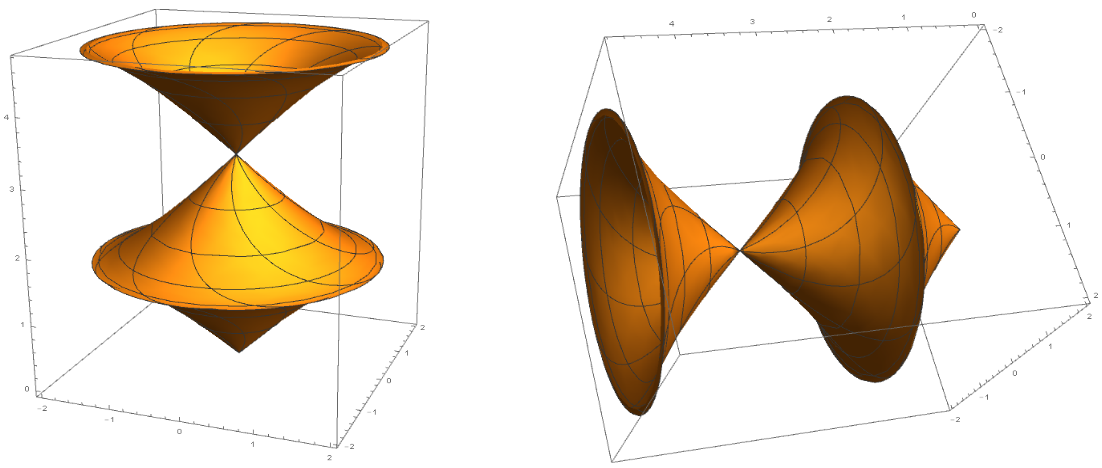

Рис. 1. График динамики системы при $\theta_0 \in [-2\pi, 2\pi], t \in [0, 10]$.

2.3. Нормальный случай принципа максимума Понтрягина ($\nu = -1$)

Функция Понтрягина для нормального случая

$$h_u = h_u^{-1} = u_1h_1 + u_2h_2 + u_3h_3 + \sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2}.$$

Рассмотрим несколько вариантов

1) $h_1^2+h_2^2-h_3^2\leqslant 0$, $h_3\geqslant 0$.

Если выбрать $(u_1,u_2,u_3)=k(h_1,h_2,h_3)$, то

$$h_u^{-1}\to+\infty, \text{ при } k\to\infty.$$

Поэтому в случае 1) максимума не существует.

2) $h_1^2+h_2^2-h_3^2>0$.

При $u=k(h_1,h_2,\sqrt{h_1^2+h_2^2})$ получаем $h_u=k\sqrt{h_1^2+h_2^2}(\sqrt{h_1^2+h_2^2}+h_3)\to+\infty$ при $k\to+\infty$.

Поэтому в случае 2) максимума не существует.

3) $h_1^2+h_2^2-h_3^2=0$, $h_3<0$.

Положим

$$\begin{aligned}
&u_3=\rho\cosh\alpha, \qquad u_1=\rho\sinh\alpha\cos\beta, \qquad u_2=\rho\sinh\alpha\sin\beta,\\
&h_3=-R, \qquad h_1=R\cos b, \qquad h_2=R\sin b.
\end{aligned}$$

Тогда $h_u=\rho(R(\sinh\alpha\cos(\beta-b)-\cosh\alpha)+1)\to+\infty$ при $\beta=b$, $\alpha\to+\infty$, $\rho\to+\infty$.

Поэтому в случае 3) максимума не существует.

4) $h_1^2+h_2^2-h_3^2<0$, $h_3<0$.

Положим

$$\begin{aligned}
&u_3=\rho\cosh\alpha, \qquad u_1=\rho\sinh\alpha\cos\beta, \qquad u_2=\rho\sinh\alpha\sin\beta,\\
&h_3=-R\cosh a, \qquad h_1=R\sinh a\cos b, \qquad h_2=R\sinh a\sin b.
\end{aligned}$$

Тогда $h_u=\rho(R(\sinh\alpha\sinh a\cos(\beta-b)-\cosh\alpha\cosh a)+1)$.

Если $R<1$, то $h_u\to+\infty$ при $\beta=b$, $\alpha=a$, $\rho\to+\infty$, $h_u=\rho(1-R)$.

Если $R>1$, то $\max h_u=0$ при $\rho=0$.

Если $R=1$, то $\max h_u=\sqrt{h_1^2+h_2^2-h_3^2}+1$ при $(u_1,u_2,u_3)=(h_1,h_2,-h_3)/\sqrt{h_1^2+h_2^2-h_3^2}$. Без ограничений общности задаем, что $h_1^2+h_2^2-h_3^2=1$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases}
x=-\operatorname{th}a\sin(\theta_0-t\cosh a)+\operatorname{th}a\sin\theta_0,\\
y=\operatorname{th}a\cos(\theta_0-t\cosh a)-\operatorname{th}a\cos\theta_0,\\
z=t/(2\cosh a)+t\cosh a/2+\operatorname{th}^2a\sin(t\cosh a)/2.
\end{cases}$$

3. Вторая задача

Сформулируем вторую задачу Лоренца на группе Гейзенберга:

$$\dot q=\sum_{i=1}^3 u_iX_i, \qquad q=(x,y,z)\in G, \tag{3.1}$$

$$u\in U=\{(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3 \mid -u_1^2+u_2^2+u_3^2\leqslant 0,\ u_1\geqslant 0\}, \tag{3.2}$$

$$q(0)=q_0=(0,0,0), \qquad q(t_1)=q_1, \tag{3.3}$$

$$J(\gamma)=\int_0^{t_1}\sqrt{u_1^2-u_2^2-u_3^2}\,dt\to\max. \tag{3.4}$$

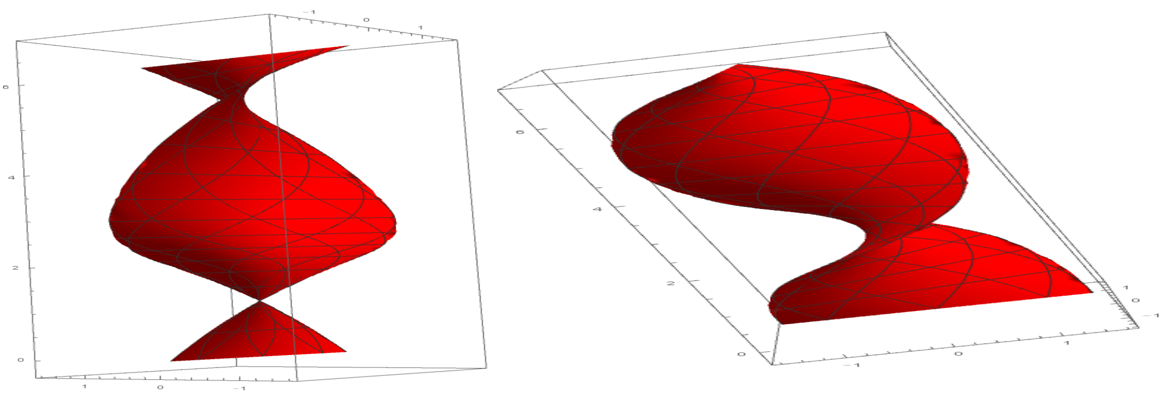

Рис. 2. График динамики системы при $a = 1, \theta_0 \in [-2\pi, 2\pi], t \in [0, 6]$.

Ничего не изменится сравнительно с предыдущим случаем, кроме
Обозначим $h_i = \langle p, X_i \rangle$. Тогда функция Понтрягина выражается следующим образом:

$$h_u^\nu = u_1h_1 + u_2h_2 + u_3h_3 - \nu\sqrt{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2}.$$

3.1. Аномальный случай принципа максимума Понтрягина ($\nu = 0$)

Аналогично первой задаче 1) $h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 \leqslant 0$, $h_1 \geqslant 0$.
Запишем ограничения для случая 1

$$\begin{cases} u_1^2 \geqslant u_2^2 + u_3^2, \\ h_1^2 \geqslant h_2^2 + h_3^2, \end{cases}$$

Тогда справедливы следующие неравенства
$u_1^2h_1^2 \geqslant u_2^2h_2^2 + h_3^2u_3^2 + u_2^2h_3^2 + u_3^2h_2^2$,
$u_2^2h_2^2 + h_3^2u_3^2 + u_2^2h_3^2 + u_3^2h_2^2 - (u_2h_2 + u_3h_3)^2 = (u_2h_3 - u_3h_2)^2 \geqslant 0$.
Откуда следует, что
$|u_1h_1| \geqslant |u_2h_2| + |u_3h_3|$.
Исследуем u_1h_1. Если $h_1 > 0$, в совокупности с неограниченностью u_1, то и u_1h_1 неограниченна.
$u_1 = 0$ означает и $u_2 = u_3 = 0$.
Максимума функции h_u^0 либо не существует, либо решение тривиально.

2) $h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 < 0$, $h_1 < 0$.
Почти аналогично 1 случаю.

$$\begin{cases} u_1^2 \geqslant u_2^2 + u_3^2, \\ h_1^2 \geqslant h_2^2 + h_3^2, \end{cases}$$

Только из-за строгого равенства $h_u^0 \neq 0$. То есть в любом случае функция отрицательна. Максимума нет.

3) $h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 > 0$.
При $u = k(\sqrt{h_2^2 + h_3^2}, h_2, h_3)$ получаем $h_u = k\sqrt{h_2^2 + h_3^2}(\sqrt{h_2^2 + h_3^2} + h_1) \to +\infty$ при

$k \to +\infty$.
Поэтому в случае 3) максимума не существует.

4) $h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 = 0$, $h_1 < 0$.
$u_1^2 = u_2^2 + u_3^2$.
Максимум функции $h_u^0 = h_1 u_1 + h_2 u_2 + h_3 u_3 = 0$, когда она равна 0.
$h_1^2 = h_2^2 + h_3^2$, $h_1 = -\sqrt{h_2^2 + h_3^2}$.
$h_2 u_2 + h_3 u_3 - \sqrt{h_2^2 + h_3^2}\sqrt{u_2^2 + u_3^2} = 0$.

В случае $h_3 = 0$, что $x = t$, $y = \pm t$, $z = 0$.
$h_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} x = \pm \sinh(C_1 \pm t) \mp \sinh C_1, \\ y = \pm \cosh(C_1 \pm t) \mp \cosh C_1, \\ z = \pm \sinh t/2 \pm t/2, \end{cases}$$

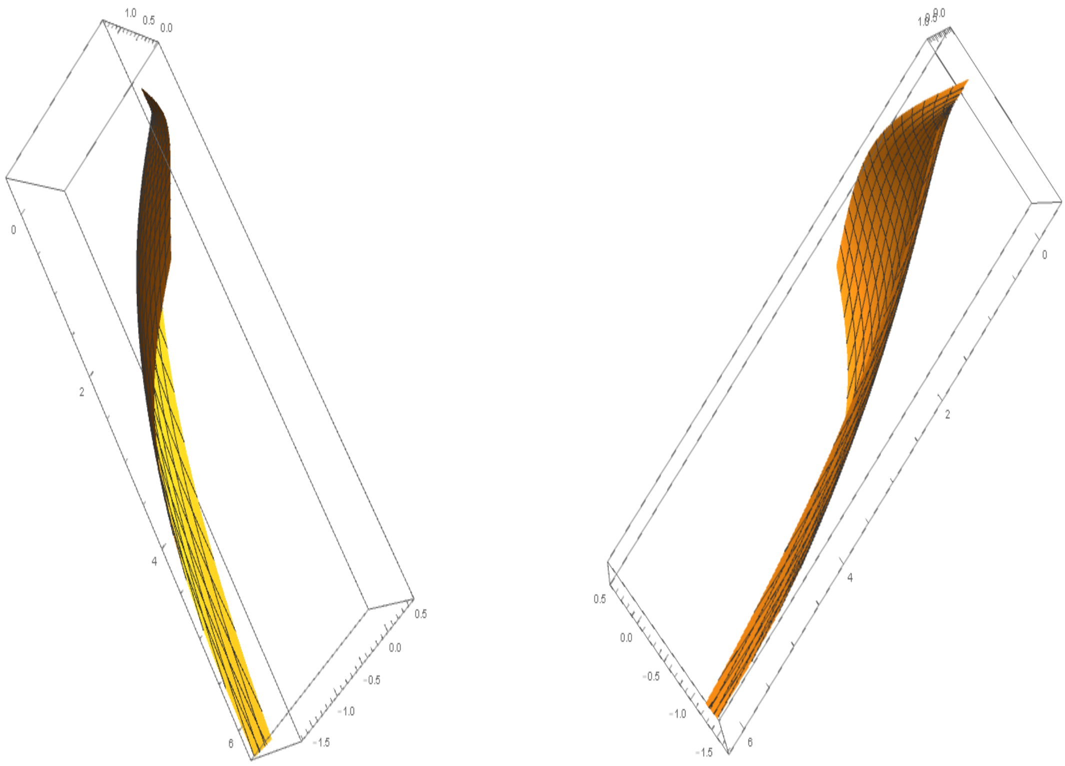

Рис. 3. График динамики системы при выбранных верхних знаках и $C_1 \in [-1, 1], t \in [0, 2]$.

3.2. Нормальный случай принципа максимума Понтрягина ($\nu = -1$)

Рассмотрим несколько вариантов
1) $h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 \leqslant 0$, $h_1 \geqslant 0$.
Если выбрать $(u_1, u_2, u_3) = k(h_1, h_2, h_3)$, то

$$h_u^{-1} \to +\infty, \text{ при } k \to \infty.$$

Поэтому в случае 1) максимума не существует.

2) $h_2^2+h_3^2-h_1^2>0$.

При $u=k(\sqrt{h_2^2+h_3^2},h_2,h_3)$ получаем $h_u=k\sqrt{h_2^2+h_3^2}(h_1+\sqrt{h_2^2+h_3^2})\to+\infty$ при $k\to+\infty$.

Поэтому в случае 2) максимума не существует.

3) $h_2^2+h_3^2-h_1^2=0$, $h_1<0$.

Положим

$$\begin{aligned}
&u_1=\rho\cosh\alpha, \qquad u_2=-\rho\sinh\alpha\cos\beta, \qquad u_3=-\rho\sinh\alpha\sin\beta,\\
&h_1=-R\cosh b, \qquad h_2=-R\sinh b, \qquad h_3=-R.
\end{aligned}$$

Тогда $h_u=\rho(R(-\cosh\alpha\cosh b+\sinh\alpha\sinh b\cos\beta+\sinh\alpha\sin\beta)+1)\to+\infty$ при $b=0$, $b\to+\infty$, $\alpha\to+\infty$, $\rho\to+\infty$.

Поэтому в случае 3) максимума не существует.

4) $h_2^2+h_3^2-h_1^2<0$, $h_1<0$.

Положим

$$\begin{aligned}
&u_1=\rho\cosh\alpha, \qquad u_2=\rho\sinh\alpha\cos\beta, \qquad u_3=\rho\sinh\alpha\sin\beta,\\
&h_1=-R\cosh b, \qquad h_2=R\sinh b, \qquad h_3=R.
\end{aligned}$$

Тогда $h_u=\rho(R(-\cosh\alpha\cosh b+\sinh\alpha\sinh b\cos\beta+\sinh\alpha\sin\beta)+1)\to+\infty$ при $b=0$, $b\to+\infty$, $\alpha\to+\infty$, $\rho\to+\infty$.

Если $R<1$, то $h_u\to+\infty$ при $\beta=0$, $b=\alpha$, $h_u=\rho(1-R)$. $\rho\to+\infty$.

Если $R>1$, то $\max h_u=0$ при $\rho=0$.

Если $R=1$, то $\max h_u=\sqrt{h_2^2+h_3^2-h_1^2}+1$ при $(u_1,u_2,u_3)=(-h_1,h_2,h_3)/\sqrt{h_2^2+h_3^2-h_1^2}$. Рассмотрим случай $h_3=0$

$$\begin{cases}
x=(\sqrt{c^2-1})t,\\
y=ct,\\
z=0.
\end{cases}$$

где $c=const>1$.

Случай $h_3\neq0$

$$\begin{cases}
x=C_1\exp(-h_3t)/h_3-C_2\exp(h_3t)/h_3-C_1/h_3+C_2/h_3,\\
y=-C_1\exp(-h_3t)/h_3-C_2\exp(h_3t)/h_3+C_1/h_3+C_2/h_3,\\
z=h_3t+C_1^2\exp(-h_3t)/h_3^2-C_2^2\exp(h_3t)/h_3^2-C_1^2/h_3^2+C_2^2/h_3^2.
\end{cases}$$

Теорема 1. *Множество достижимости системы 3.1, 3.2 из точки q_0 за произвольное неотрицательное время есть*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{q_0}=\{(x,y,z)\in M|0<|z|\leqslant(t+\sinh t)/2, t=\operatorname{arcosh}(\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2)/2+1)\}\cup\\
\cup\{(x,y,z)\in M|x\geqslant|y|, z=0\}.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Доказательство. Следует из теоремы Адамара о глобальном диффеоморфизме [3].

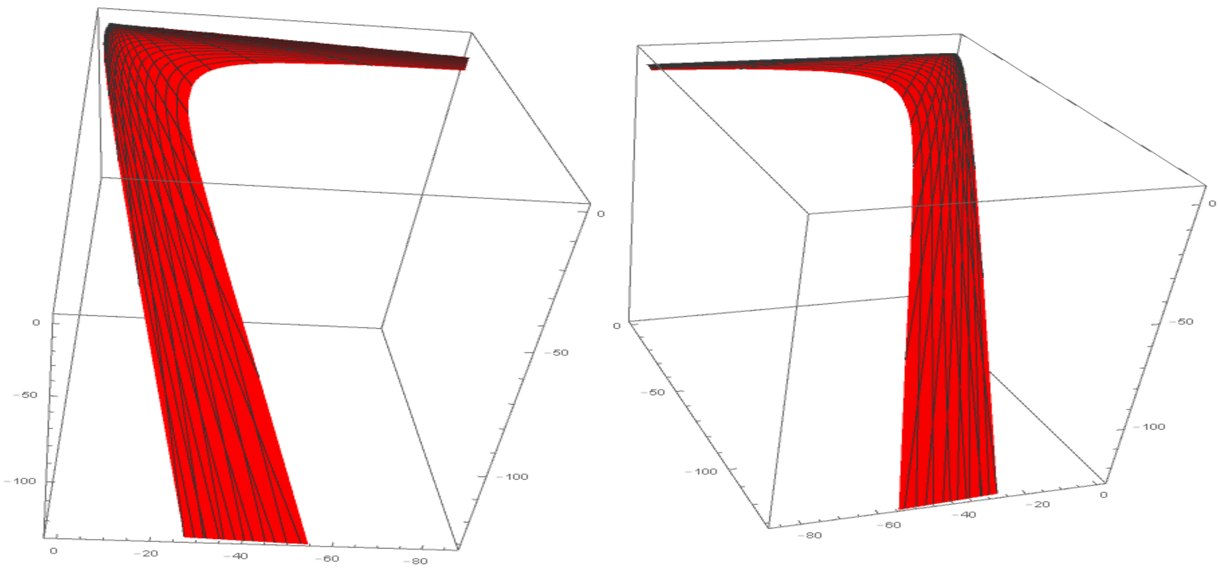

Рис. 4. График динамики системы при $C_1 = 2, C_2 = 1/2, h_3 \in [0.1, 2], t \in [0, 5]$.

Т е о р е м а 2. *Для любых точек $q_0 \in M, q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}$ существует лоренцева длиннейшая, их соединяющая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из теоремы о существовании лоренцевых длиннейший в глобально гиперболических лоренцевых многообразиях [4].

4. Заключение

В представленном докладе исследованы две левоинвариантные лоренцевы задачи на группе Гейзенберга. Обе задачи решались с помощью принципа максимума Понтрягина. Для анормальных и нормальных экстремальных траекторий получена явная параметризация. Найдены множества достижимости системы, а так же доказано существование лоренцевых длиннейших.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зеликин М.И.* Оптимальное управление и вариационное исчисление, М.: СССР, 2014.

2. *Сачков Ю.Л.* Введение в геометрическую теорию управления, М.: ЛЕНАНД, 2021, 160 С.

3. *Beem J.K., Ehrlich P.E. Easley K.I.* Global Lorentian Geometry. Monographs Textbooks Pure Appl. Math. 202, Marcel Dekker Inc. 1996.

4. *Krantz S.G., Parks H.R.* The Implicit Function Theorem: History, Theory and Applications, Birkauser, 2001.