Задача о кратчайших на диэдре

М. С. Федосеев

ООО «Научно–исследовательский институт космических и авиационных материалов», Переславль–Залесский

Рассматривается задача поиска кратчайших линий между двумя точками, расположенными на вырожденной призме D (диэдр), состоящей из двух (плоских) выпуклых многоугольников. Если точки расположены на одном многоугольнике, то решение есть прямая. Для граничным точек, расположенных на противоположных многоугольниках, решение представляется в виде ломаной, проходящей через некоторое общее ребро. Описаны граничные положения точек, при которых возникает больше одного решения. В общем случае алгоритм построения кратчайшей линии сведен к решению системы линейных уравнений и неравенств.

Постановка задачи

Пусть на плоскости задан следующий выпуклый многоугольник (быть может неограниченный):

$$P_+ = \{(x, y) \mid f_i(x, y) > 0, i = 1, \dots, n\}, \tag{1}$$

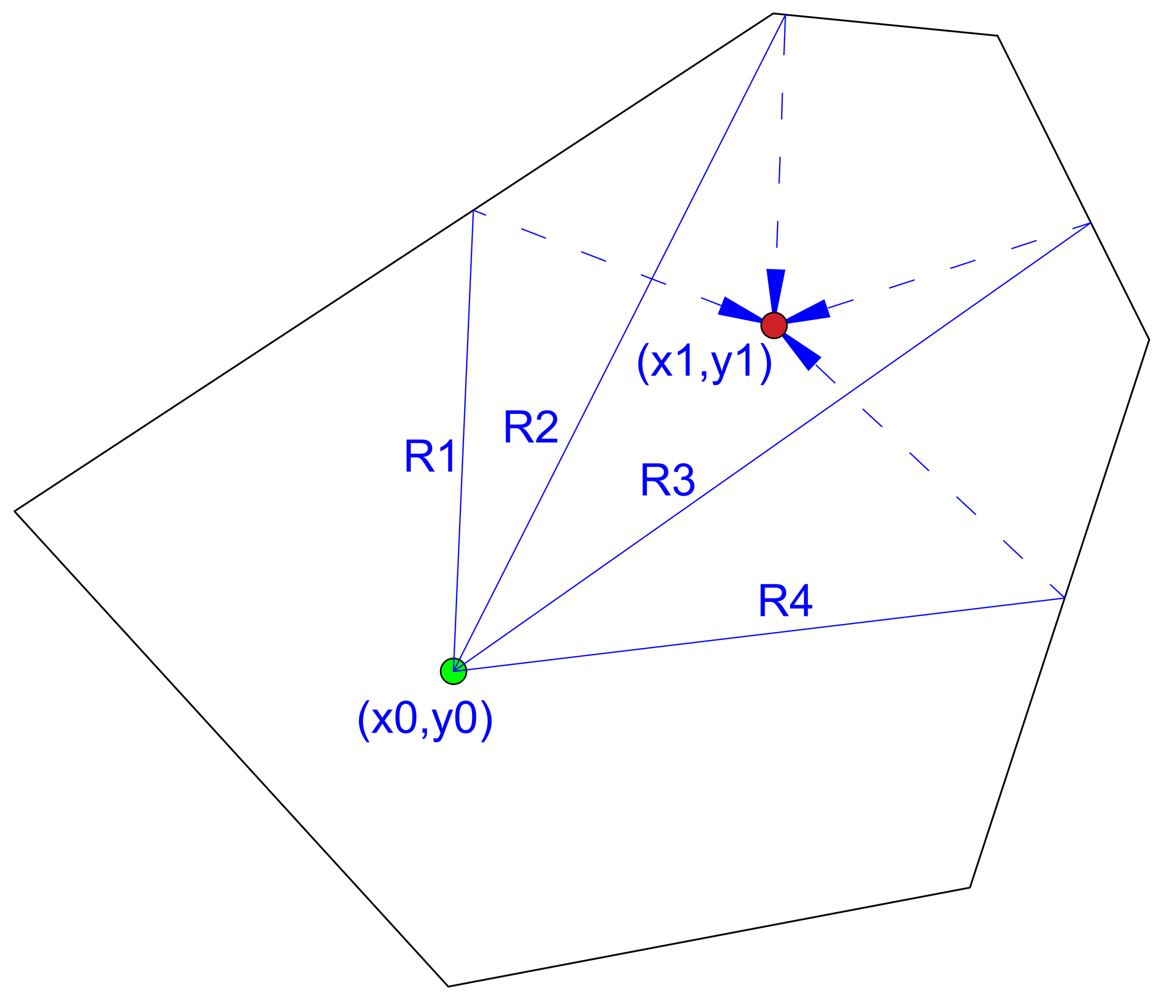
где n есть число ребер, а линейные функции f_i последовательно определяют каждое из ребер многоугольника.
Множество $P_- = P_+$ определяет противоположную грань вырожденной призмы, а $P_0 = \partial P_+ = \partial P_-$ есть граница обеих граней. Таким образом, определяется диэдр

$$D = P_+ \cup P_- \cup P_0. \tag{2}$$

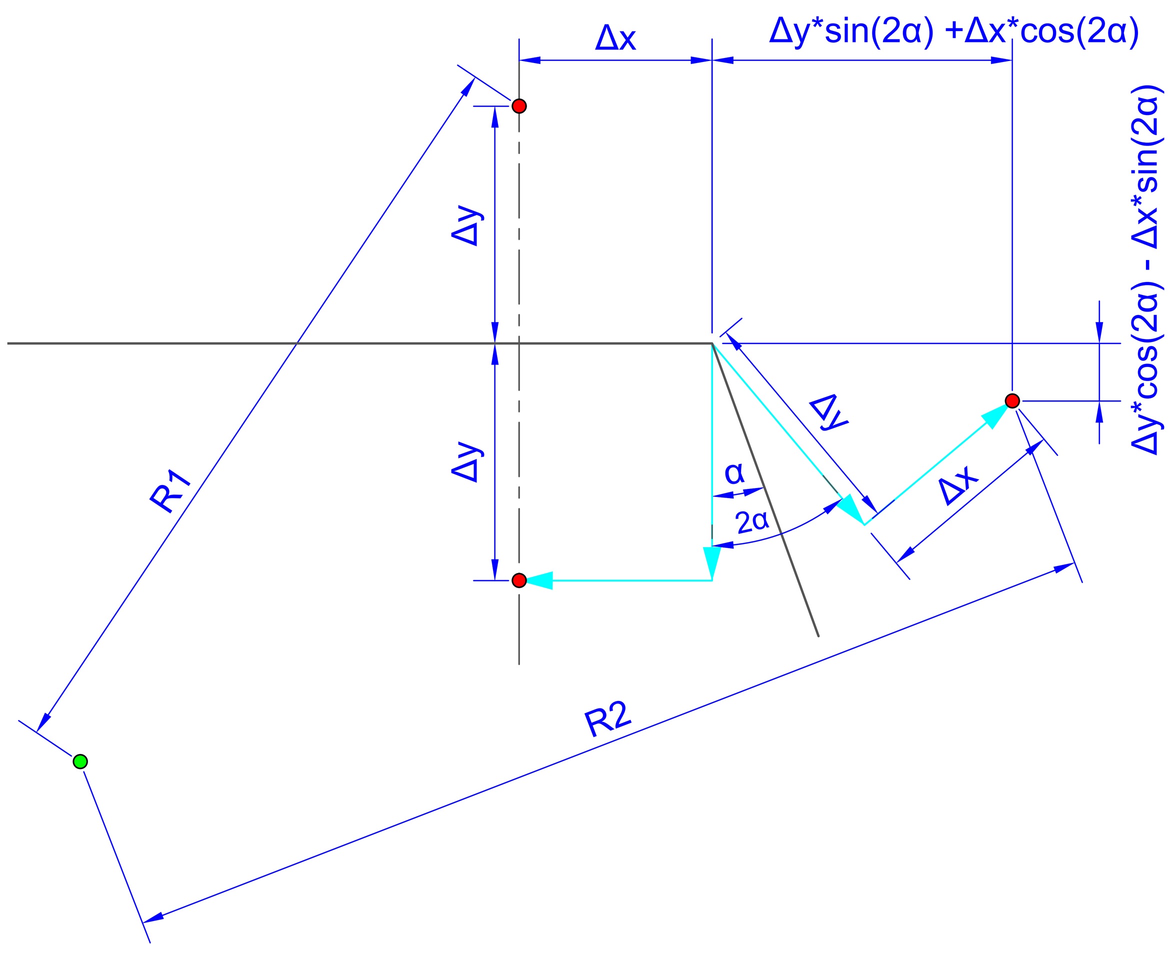
Далее, рассмотрим точки на противоположных гранях

$$(x_0, y_0) \in P_+, \qquad (x_1, y_1) \in P_-. \tag{3}$$

Требуется построить кратчайшую линию соединяющую начальную точку (x_0, y_0) с конечной (x_1, y_1).



Решение для двух ребер ($n = 2$)



Зафиксируем начальную точку (x_0, y_0) и найдем множество точек (x_1, y_1), для которых $R_1 = R_2$, т.е. существуют две кратчайших. Для этого нужно найти соотношение $\Delta x, \Delta y$ при $R_1 = R_2$.
Составим для них уравнения

$$R_1 = \left((x - \Delta x)^2 + (y - \Delta y)^2\right)^{1/2}, \tag{4}$$

$$R_2 = \left(\left(x + \Delta y * \sin(2\alpha) + \Delta x * \cos(2\alpha)\right)^2 + \left(y + \Delta x * \sin(2\alpha) - \Delta y * \cos(2\alpha)\right)^2\right)^{1/2}. \tag{5}$$

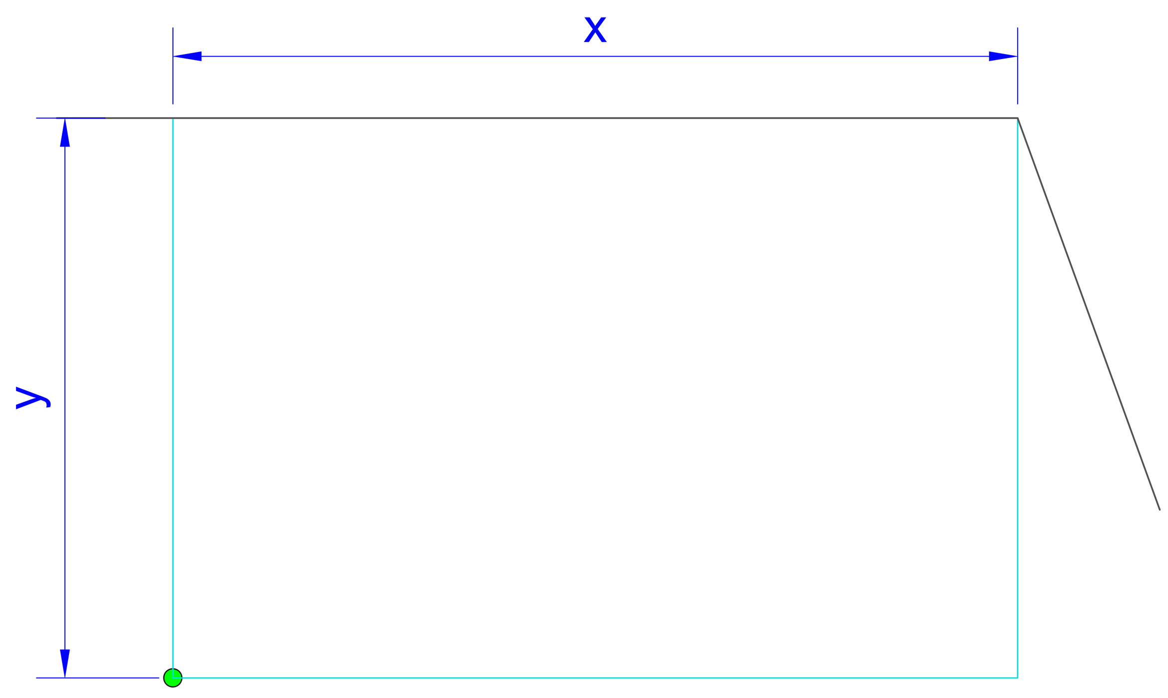
Приравниваем R_1, R_2 и находим следующее соотношение:

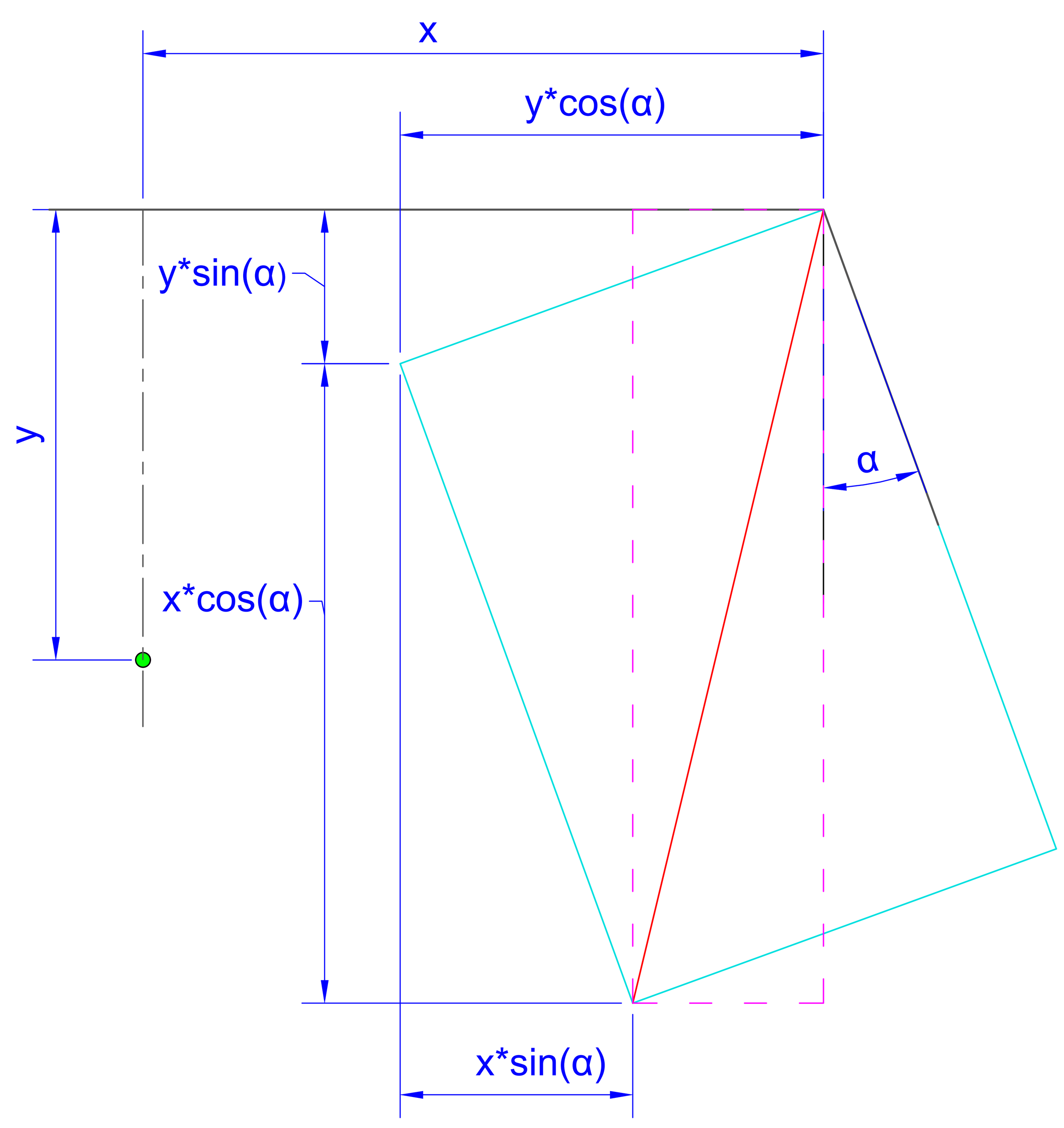
$$\Delta y = \Delta x \frac{x \cos\alpha + y \sin\alpha}{y \cos\alpha - x \sin\alpha}. \tag{6}$$

Геометрический смысл множества Максвелла для угла

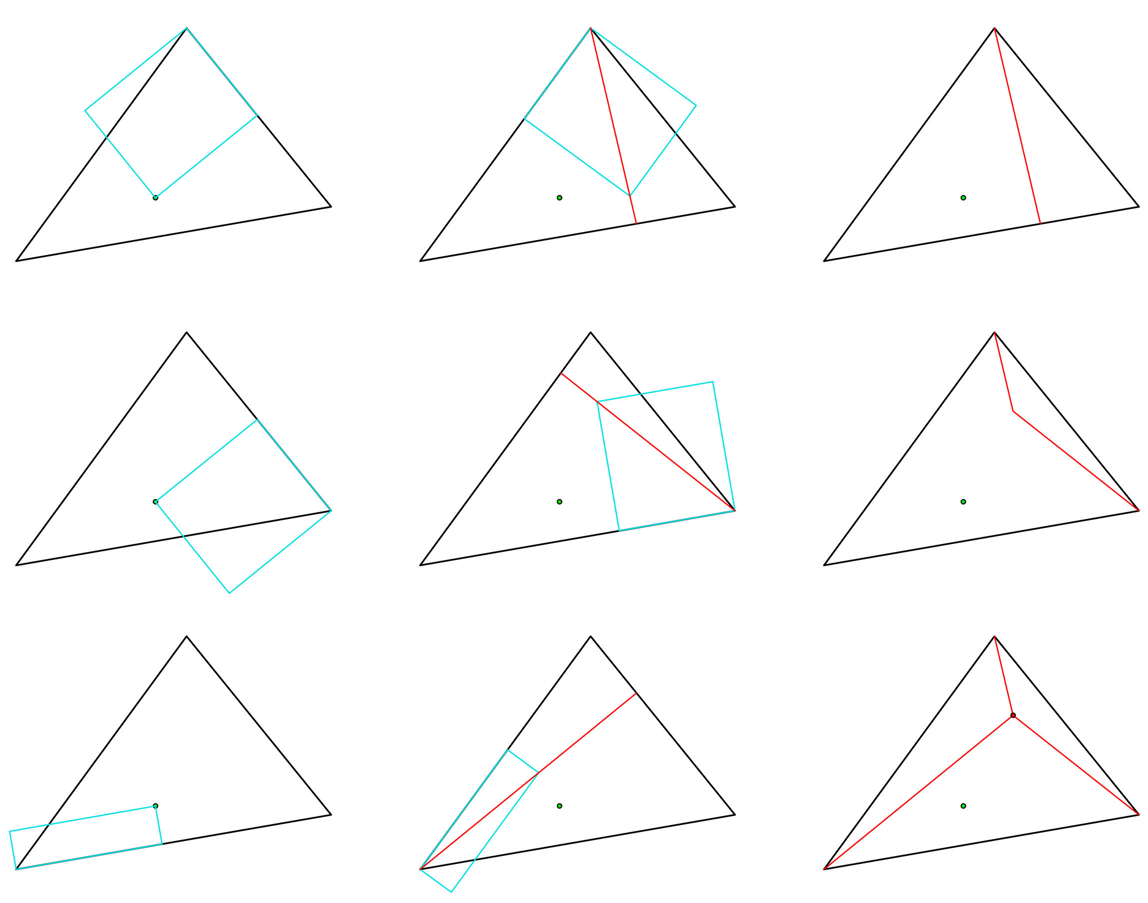
Определение

Множество Максвелла для фиксированной начальной точки (x_0, y_0) есть множество конечных точек (x_1, y_1), для которых существует несколько решений (кратчайших траекторий).

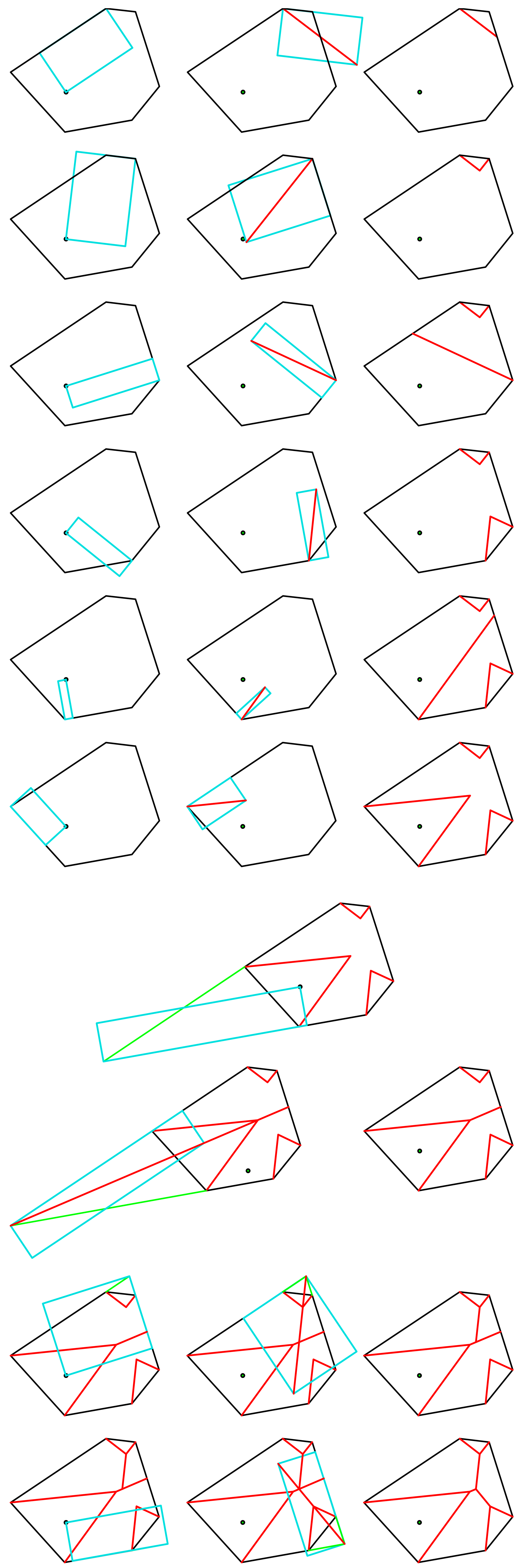




Пример построения множества Максвелла для треугольника



Пример построения множества Максвелла для шестиугольника



Заключение

В результате получен алгоритм, который делит множество конечных точек P_- на два подмножества для каждой пары ребер. В одном из подмножеств содержатся конечные точки, кратчайшие траектории к которым проходят через одно ребро, а в другом подмножестве содержатся конечные точки, кратчайшие траектории к которым пересекают другое ребро. Таким образом, решение сведено к нахождению множества P_i для каждого i-ого ребра. Это делаем путём отсечения от множества P_- других подмножеств, содержащих в себе конечные точки, кратчайшие к которым ведут не через данное ребро.