Школа-конференция
«Неголономные дни в Переславле»
26-30 августа 2024 г., Переславль-Залесский

Об оптимальном периодическом сборе возобновляемого ресурса

А.В. Черникова
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия)
nastik.e@bk.ru

Введение

Как известно, многие виды животных имеют сезонный характер размножения. В этой связи представляет интерес исследование динамических режимов таких популяций [1]. При промысловом воздействии актуальной является задача описания режимов промысла, при которых сохраняется часть популяции и достигается наибольшее значение дохода, в том числе в долгосрочной перспективе [2, 3]. Настоящая работа является продолжением публикаций [4, 5], в которых положено начало исследований различных характеристик сбора возобновляемого ресурса. Здесь описан периодический режим сбора ресурса, при котором средняя временная выгода достигает наибольшего значения.

Определение характеристик сбора

Рассмотрим структурированную популяцию, разделенную на $n \geqslant 2$ видов или возрастных классов (при $n = 1$ назовем популяцию однородной, то есть состоящей из одного вида). Обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ численность популяции i-го вида или возрастного класса в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$. При отсутствии эксплуатации динамика $x(k) = \big(x_1(k), \dots, x_n(k)\big)$ задана системой разностных уравнений

$$x(k+1) = F\big(k, x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $F(k,x) = \big(F_1(k,x), \dots, F_n(k,x)\big)$, $F_i(k,x)$ — вещественные непрерывные функции на $\mathbb{R}^n_+ \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0\big\}$.

Предполагаем, что в моменты времени $k = 1, 2, \dots$ популяция подвержена промысловому воздействию $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0,1]^n$. Рассмотрим множество $U \doteq \big\{\overline{u} : \overline{u} = \big(u(1), \dots, u(k), \dots\big)\big\}$ и исследуем задачу выбора управлений $\overline{u} \in U$, доставляющих определенный результат сбора. Таким образом, исследуем модель популяции, подверженной промыслу, динамика которой определяется системой

$$X(k+1) = F\big(k, (1-u(k))X(k)\big), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $X_i(k)$ и $(1-u_i(k))X_i(k)$ — количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент k соответственно, $i = 1, \dots, n$, $(1-u(k))X(k) = \big((1-u_1(k))X_1(k), \dots, (1-u_n(k))X_n(k)\big)$. Отметим, что $X(1) = f(x(0))$.

Исследуем характеристику сбора возобновляемого ресурса — *среднюю временную выгоду*, которая определена функцией

$$H_*(\overline{u}, x(0)) \doteq \varliminf_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,,$$

где $C_i \geqslant 0$ — агрегированная стоимость условной единицы i-го вида. Если существует указанный предел, то среднюю временную выгоду будем обозначать $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$.

Пусть функции $F_i(j,x)$, $i = 1, \dots, n$ периодические с периодом $\tau \geqslant 2$. Исследуем периодический режим сбора ресурса $u_i(j)$, $i = 1, \dots, n$ с периодом τ (в случае, когда $\tau = 1$ режим является стационарным). Рассмотрим множество $U(\tau) \subset U$ периодических управлений с периодом τ, при которых уравнение (1) имеет периодическое решение с тем же периодом.

Пусть $x = (x(1), \dots, x(\tau)) \in \mathbb{R}^{n\tau}_+$. Рассмотрим функцию

$$D(x) = \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^{n} C_i \big(F_i(j, x(j)) - x_i(j)\big)$$

и множество

$$G \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^{n\tau}_+ : x(1) \leqslant F\big(\tau, x(\tau)\big) \neq 0;\ x(k) \leqslant F\big(k-1, x(k-1)\big) \neq 0,\ k = 2, \dots, \tau\big\}.$$

Теорема

Предположим, что функция $D(x)$ достигает наибольшего значения $D(x^*)$ в точке $x^* \in G$. Тогда для любых $\overline{u} \in U(\tau)$, $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ выполнено неравенство

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) \leqslant H\big(\overline{u}^*, x^*(0)\big) = D(x^*),$$

при следующих периодических управлениях $\overline{u}^* \in U(\tau)$:

$$u^*(1) = 1 - \frac{x^*(1)}{F\big(\tau, x^*(\tau)\big)}, \quad u^*(k) = 1 - \frac{x^*(k)}{F\big(k-1, x^*(k-1)\big)}, \quad k = 2, \dots, \tau$$

(здесь $x^*(0)$ таково, что $F(x^*(0)) = x^*(1)$).

Примеры

Пример 1. Найдем оптимальные режимы промысла однородной популяции, динамика которой задана дискретным логистическим уравнением

$$x(k+1) = a(k)x(k)(1 - x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x \in [0,1]$ — численность популяции, $a(k) > 0$ — коэффициент собственной скорости роста. Предполагаем, что коэффициент $a(k)$ периодический с периодом 2, например, $a(k) = 1.5$ для любого $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ и $a(k) = 3$ для любого $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Тогда развитие однородной популяции можно описать периодическими функциями

$$F\big(1, x(1)\big) = 1.5x(1)\big(1 - x(1)\big) \quad \text{и} \quad F\big(2, x(2)\big) = 3x(2)\big(1 - x(2)\big).$$

Без ограничения общности будем считать, что агрегированная стоимость условной единицы однородной популяции равна $C = 1$. Функция

$$D\big(x(1), x(2)\big) = \frac{1}{2}\Big(F\big(1, x(1)\big) - x(1) + F\big(2, x(2)\big) - x(2)\Big) = \\ = 0.25x(1)\big(1 - 3x(1)\big) + x(2)\big(1 - 1.5x(2)\big)$$

достигает наибольшего значения $\frac{1}{6}$ на множестве G при $x^*(1) = \frac{1}{3}$, $x^*(2) = \frac{1}{3}$ и управлениях $u^*(1) = 0.5$, $u^*(2) = 0$.

Пример 2. Рассмотрим двухвозрастную популяцию, динамика которой описана системой

$$\begin{cases} x_1(k+1) = b(k)x_1(k) + x_1(k)x_2(k) - 2x_1^2(k), \\ x_2(k+1) = 4x_2(k) + \frac{1}{4}x_1(k)x_2(k) - 3x_2^2(k), \end{cases}$$

где $x_1(k) \in [0,1]$ и $x_2(k) \in [0,1]$ — численность младшего и старшего возрастного класса соответственно в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots, b(k) > 0$ — периодический (с периодом 2) коэффициент собственной скорости роста младшего возрастного класса. Пусть $b(k) = 2$ для любого $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ и $b(k) = 4$ для любого $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Развитие двухвозрастной популяции можно описать периодическими функциями $F(1) = \big(F_1(1, x(1)), F_2(1, x(1))\big)$ и $F(2) = \big(F_1(2, x(2)), F_2(2, x(2))\big)$, где $x(1) = \big(x_1(1), x_2(1)\big)$, $x(2) = \big(x_1(2), x_2(2)\big)$,

$$F_1\big(1, x(1)\big) = 2x_1(1) + x_1(1)x_2(1) - 2x_1^2(1), \quad F_1\big(2, x(2)\big) = 4x_1(2) + x_1(2)x_2(2) - 2x_1^2(2),$$
$$F_2\big(1, x(1)\big) = 4x_2(1) + \frac{1}{4}x_1(1)x_2(1) - 3x_2^2(1), \ F_2\big(2, x(2)\big) = 4x_2(2) + \frac{1}{4}x_1(2)x_2(2) - 3x_2^2(2).$$

Пусть $C_1 = 2$, $C_2 = 4$. Функция

$$D\big(x(1), x(2)\big) = x_1(1)\big(1 - 2x_1(1)\big) + 6x_2(1)\big(1 - x_2(1)\big) + x_1(2)\big(3 - 2x_1(2)\big) + \\ + 6x_2(2)\big(1 - x_2(2)\big) + \frac{3}{2}x_1(1)x_2(1) + \frac{3}{2}x_1(2)x_2(2)$$

достигает наибольшего значения, приближенно равного 5.1867, на множестве G при $x_1^*(1) \approx 0.4590$, $x_2^*(1) \approx 0.5574$, $x_1^*(2) \approx 0.8115$, $x_2^*(2) \approx 0.6229$ и управлениях $u_1^*(1) \approx 0.8243$, $u_2^*(1) \approx 0.1746$, $u_1^*(2) \approx 0.2233$, $u_2^*(2) \approx 0.1519$.

Результаты исследования получены совместно с профессором кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, д.ф.-м.н. Л.И. Родиной.

Литература

[1] Шлюфман К.В., Фрисман Е.Я., Неверова Г.П. Динамические режимы модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром // *Нелинейная динамика*, **13**:3 (2017), 363-380.

[2] Belyakov A.O., Veliov V.M. On optimal harvesting in age-structured populations // *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making: Essays in Honor of Richard F. Hartl*, **22** (2016), 149-166.

[3] Давыдов А.А., Мельник Д.А. Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **27**:2 (2021), 99-107.

[4] Егорова А.В., Родина Л.И. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501-517.

[5] Родина Л.И., Черникова А.В. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени // *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **29**:1 (2023), 167-179.