Решения и приложения левоинвариантных задач на группах Ли
(Лекция 3)

Ю.Л. Сачков

yusachkov@gmail.com

Курс «Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли»

Школа-конференция «Неголономные дни в Переславле»

26–30.08.2024

Содержание предыдущей лекции

1. Принцип максимума Понтрягина.
2. Решение задач оптимального управления.
3. Субримановы задачи.
4. Симметрийный метод исследования оптимальности.
5. Субриманова задача на группе движений плоскости.

План лекции

1. Задача Дидоны
2. Сублоренцева задача на группе Гейзенберга
3. Задача Эйлера об эластиках
4. Приложения к обработке изображений и робототехнике

Задача Дидоны

Субриманова задача на группе Гейзенберга

Задача Дидоны формулируется как следующая задача оптимального управления:

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), \qquad q \in M = \mathbb{R}^3_{x,y,z}, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \qquad q(t_1) = q_1,$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)\, dt \to \min,$$

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}.$$

- Задача левоинвариантна на группе Гейзенберга
$$M = \left\{ q = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
- *Существование решений* следует из теорем Рашевского-Чжоу и Филиппова.

Субриманова задача на группе Гейзенберга

- *Геодезические*.
- Введем линейные на слоях T^*M гамильтонианы:

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i \rangle, \qquad i = 1, 2, 3, \quad \lambda \in T^*M.$$

- *Аномальные экстремали* удовлетворяют гамильтоновой системе $\dot{\lambda} = u_1 \vec{h}_1(\lambda) + u_2 \vec{h}_2(\lambda)$, в координатах:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -u_2 h_3, \\ \dot{h}_2 &= u_1 h_3, \\ \dot{h}_3 &= 0, \\ \dot{q} &= u_1 f_1 + u_2 f_2, \end{aligned}$$

плюс тождества

$$h_1(\lambda_t) = h_2(\lambda_t) \equiv 0.$$

Таким образом, $h_3(\lambda_t) \neq 0$, и первые два уравнения гамильтоновой системы дают $u_1(t) = u_2(t) \equiv 0$. Поэтому аномальные траектории постоянны.

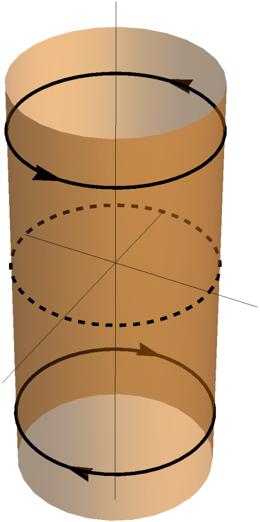
Субриманова задача на группе Гейзенберга

- *Нормальные экстремали* удовлетворяют гамильтоновой системе $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$ с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$, в координатах:

$$\dot{h}_1 = -h_2 h_3, \tag{1}$$
$$\dot{h}_2 = h_1 h_3, \tag{2}$$
$$\dot{h}_3 = 0, \tag{3}$$
$$\dot{q} = h_1 f_1 + h_2 f_2. \tag{4}$$

- Подсистема гамильтоновой системы для сопряженных переменных h_1, h_2, h_3 (*вертикальная подсистема*) (1)–(3) имеет интегралы H и h_3. Более того, в плоскости $\{h_3 = 0\}$ вертикальная подсистема остается неподвижной. Таким образом, на поверхности уровня $\{H = 1/2\}$ она имеет поток, показанный на следующем слайде: вращения по окружностям $\{H = 1/2,\ h_3 = \mathrm{const} \neq 0\}$ и неподвижные точки по окружности $\{H = 1/2,\ h_3 = 0\}$.

Субриманова задача на группе Гейзенберга: Поток вертикальной подсистемы гамильтоновой системы ПМП



Субриманова задача на группе Гейзенберга

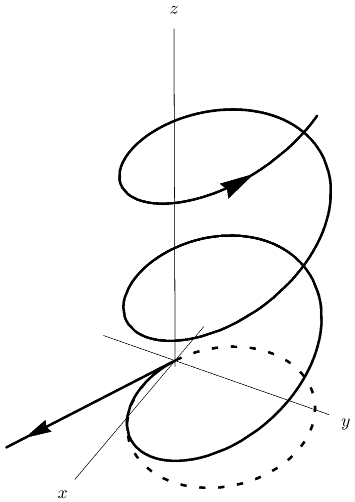
- На поверхности уровня $\{H = \frac{1}{2}\}$ введем полярную координату θ:

$$h_1 = \cos\theta, \quad h_2 = \sin\theta.$$

Параметризованные длиной дуги кратчайшие удовлетворяют нормальной гамильтоновой системе

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta} = h_3, \\
&\dot{h}_3 = 0, \\
&\dot{x} = \cos\theta, \\
&\dot{y} = \sin\theta, \\
&\dot{z} = -\frac{y}{2}\cos\theta + \frac{x}{2}\sin\theta, \\
&(x, y, z)(0) = (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Субриманова задача на группе Гейзенберга: Геодезические

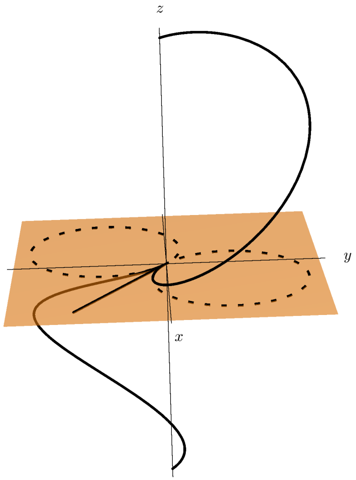


Субриманова задача на группе Гейзенберга: Оптимальность геодезических

- Прямые линии (случай $h_3 = 0$) минимизируют евклидово расстояние в $\mathbb{R}^2_{x,y}$, поэтому они оптимальны на любом отрезке $t \in [0, t_1]$, $t_1 > 0$.
- Спирали (случай $h_3 \neq 0$) не являются оптимальными после первого пересечения с осью z при $t = \frac{2\pi}{|h_3|}$, поскольку эти пересечения являются точками Максвелла.
- Если $t_1 = \frac{2\pi}{|h_3|}$, то существует континуум спиралей $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, приходящих в одну и ту же точку $q(t_1)$ на оси z; они получаются одна из другой вращениями вокруг этой оси, поэтому все они оптимальны.
- Часть оптимальной дуги является оптимальной, поэтому спирали оптимальны также для $t \in [0, t_1]$, $t_1 \in (0, \frac{2\pi}{|h_3|})$.
- Подводя итог, время разреза по геодезической $\operatorname{Exp}(\lambda, t)$ равно

$$t_{\mathrm{cut}}(\lambda) = \begin{cases} \frac{2\pi}{|h_3|} & \text{при } h_3 \neq 0, \\ +\infty & \text{при } h_3 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Субриманова задача на группе Гейзенберга: Оптимальные геодезические



Субриманова задача на группе Гейзенберга: Множество разреза и каустика

В задаче Дидоны *множество разреза*

$$\mathrm{Cut} = \{\mathrm{Exp}(\lambda, t_{\mathrm{cut}}(\lambda)) \mid \lambda \in C\}$$

и первая *каустика*

$$\mathrm{Conj}^1 = \left\{\mathrm{Exp}(\lambda, t^1_{\mathrm{conj}}(\lambda)) \mid \lambda \in C\right\}$$

совпадают друг с другом:

$$\mathrm{Cut} = \mathrm{Conj}^1 = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\}.$$

Субриманова задача на группе Гейзенберга: Субриманово расстояние

Опишем *СР расстояние* $d_0(q) = d(q_0, q)$, $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

- если $z = 0$, то $d_0(q) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- если $z \neq 0$, $x^2 + y^2 = 0$, то $d_0(q) = \sqrt{2\pi|z|}$,
- если $z \neq 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$, то расстояние определяется условиями

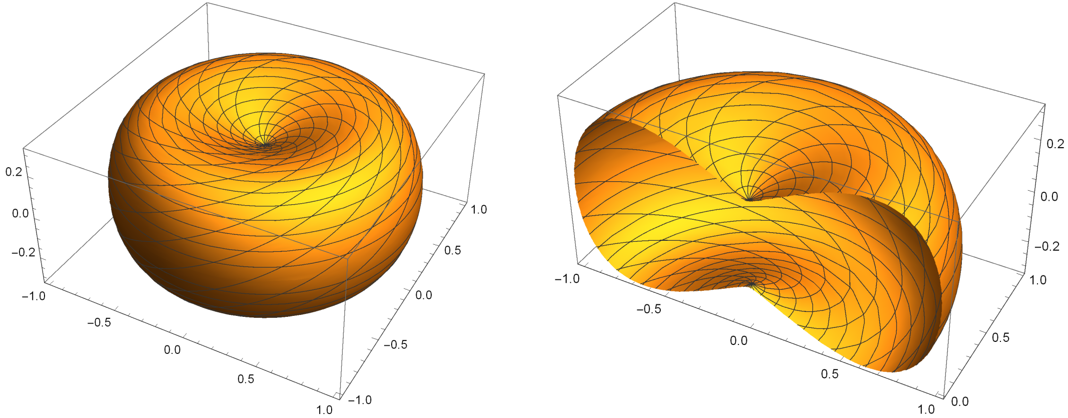
$$d_0(q) = \frac{p}{\sin p}\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\frac{2p - \sin 2p}{4\sin^2 p} = \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

Субриманова задача на группе Гейзенберга: Субримановы сферы

- Единичная *субриманова сфера* $S = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid d_0(q) = 1\}$ представляет собой поверхность вращения вокруг оси z в форме яблока, см. рисунки на следующем слайде.
- Она имеет две особые конические точки $z = \pm\frac{1}{4\pi}$, $x^2 + y^2 = 0$.
- Оставшиеся сферы $S_R = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid d_0(q) = R\}$ получаются из S в силу *дилатаций*:

$$\delta_s \ : \ (x, y, z) \mapsto (e^s x, e^s y, e^{2s} z), \qquad s \in \mathbb{R},$$
$$S_R = \delta_s(S), \qquad s = \ln R.$$

Субриманова задача на группе Гейзенберга: Субримановы сферы



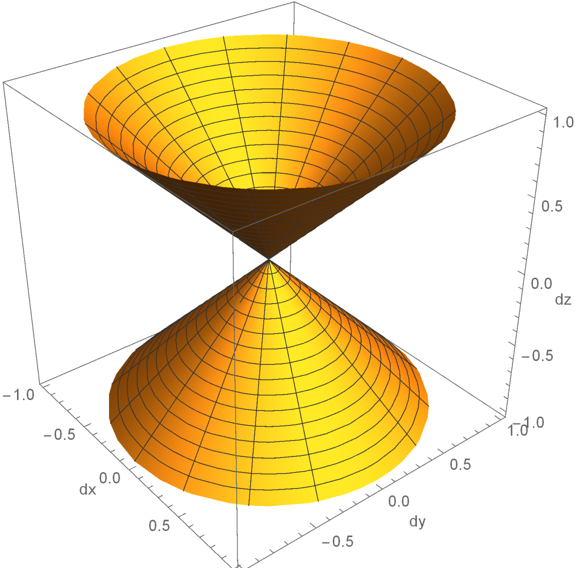
Сублоренцева геометрия

- Гладкое многообразие M,
- векторное распределение $\Delta = \{\Delta_q \subset T_qM \mid q \in M\}$, $\dim \Delta_q \equiv \mathrm{const}$,
- лоренцева метрика (невырожденная квадратичная форма индекса 1) в Δ:

$$g = \{g_q \text{ — лоренцева метрика в } \Delta_q \mid q \in M\}$$

- сублоренцева структура (Δ, g) на M
- горизонтальный вектор: $v \in \Delta_q$,
- горизонтальный вектор v называется:
    - времениподобным, если $g(v) < 0$
    - пространственноподобным, если $g(v) > 0$ или $v = 0$,
    - светоподобным, если $g(v) = 0$ и $v \neq 0$,
    - непространственноподобным, если $g(v) \leq 0$
- липшицева кривая в M называется времениподобной, если она имеет времениподобный вектор скорости п.в.,
- пространственноподобные, светоподобные и непространственноподобные кривые определяются аналогично.

Светоподобный конус для $g = dx^2 + dy^2 - dz^2$



Сублоренцева геометрия

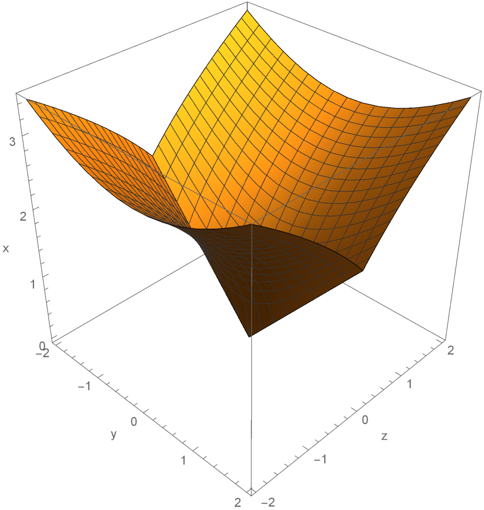
- Ориентация времени X — это времениподобное векторное поле в M.
- Непространственноподобный вектор $v \in \Delta_q$ направлен в будущее, если $g(v, X(q)) < 0$, и направлен в прошлое, если $g(v, X(q)) > 0$.
- Направленная в будущее времениподобная кривая $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, называется параметризованной длиной дуги, если $g(\dot{q}(t), \dot{q}(t)) \equiv -1$.
- Любая направленная в будущее времениподобная кривая может быть параметризована длиной дуги, аналогично параметризации длины дуги горизонтальной кривой в субримановой геометрии.
- Длина непространственноподобной кривой $\gamma \in \mathrm{Lip}([0, t_1], M)$ равна $l(\gamma) = \int_0^{t_1} |g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})|^{1/2} dt$.
- Для точек $q_1, q_2 \in M$ обозначим через $\Omega_{q_1 q_2}$ множество всех будущих направленных непространственноподобных кривых в M, которые соединяют q_1 с q_2. В случае $\Omega_{q_1 q_2} \neq \emptyset$ обозначим сублоренцево расстояние от точки q_1 до точки q_2 как

$$d(q_1, q_2) = \sup\{l(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{q_1 q_2}\}. \tag{6}$$

Постановка СЛ задачи на группе Гейзенберга

- Группа Гейзенберга — это пространство $M \simeq \mathbb{R}^3_{x,y,z}$ с законом умножения
$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)/2).$$
- Это трехмерная нильпотентная группа Ли с левоинвариантным репером
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{7}$$
с единственной ненулевой скобкой Ли $[X_1, X_2] = X_3$.
- Рассмотрим левоинвариантную СЛ задачу на группе Гейзенберга M, заданную ортонормированным репером (X_1, X_2), с ориентацией времени X_1:
$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \qquad q \in M, \tag{8}$$
$$u \in U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \geq |u_2|\}, \tag{9}$$
$$q(0) = q_0 = \mathrm{Id} = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1, \tag{10}$$
$$l(q(\cdot)) = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 - u_2^2}\, dt \to \max. \tag{11}$$

Клюв Гейзенберга (Множество достижимости из Id)



Клюв Гейзенберга

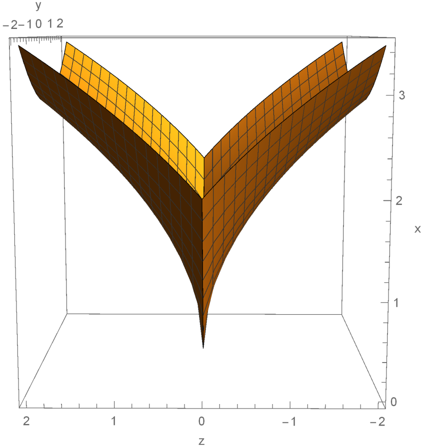


Рис.: Вид $\partial\mathscr{A}$ вдоль оси y

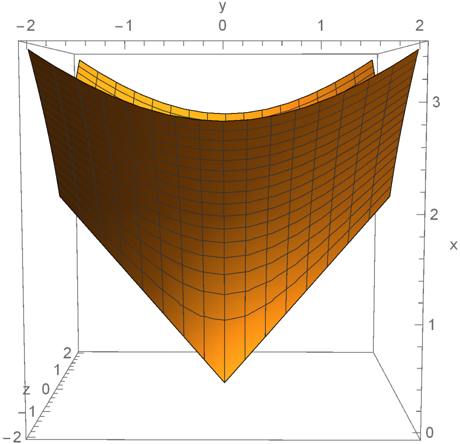


Рис.: Вид $\partial\mathscr{A}$ вдоль оси z

Экстремальные траектории

- Анормальные траектории — кусочно-гладкие светоподобные с не более чем одним переключением.
- Нормальные траектории — гладкие времениподобные.
- Параметризуются элементарными функциями.
- Все оптимальны.

Сублоренцево расстояние

Обозначим $d(q) := d(q_0, q)$, $q \in \mathscr{A}_{q_0}$.

Теорема

Пусть $q = (x, y, z) \in J^+(q_0)$. *Тогда*

$$d(q) = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \frac{p}{\sinh p}, \qquad p = \beta\left(\frac{z}{x^2 - y^2}\right). \tag{12}$$

В частности:

(1) $z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(q) = \sqrt{x^2 - y^2}$,

(2) $q \in J^+(q_0) \setminus I^+(q_0) \quad \Leftrightarrow \quad d(q) = 0$.

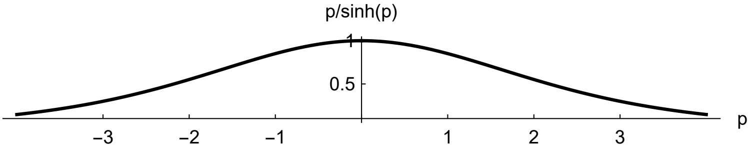


График $d|_{z=0} = \sqrt{x^2 - y^2}$

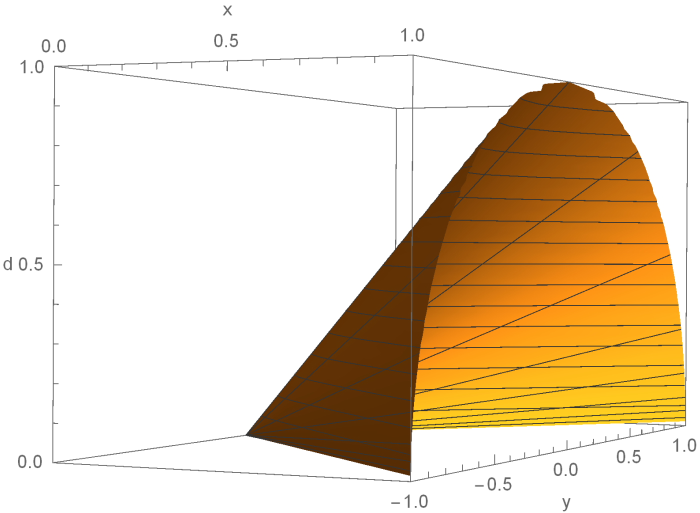


График $d|_{y=0}$

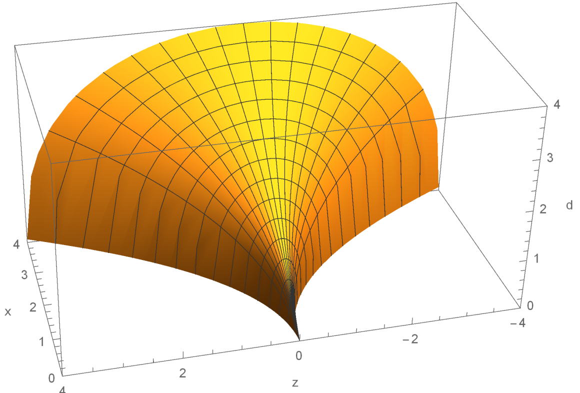
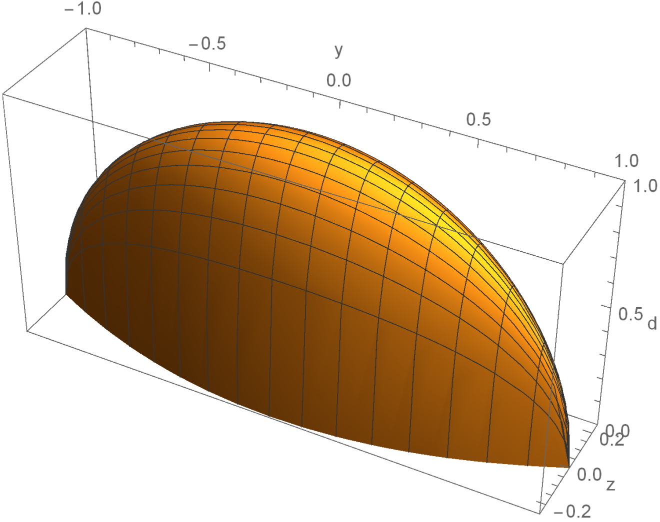


График $d|_{x=1}$



Единичная СЛ сфера

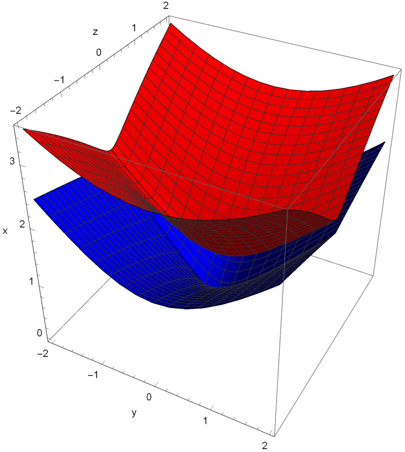


Рис.: Сфера S и клюв Гейзенберга $\partial\mathscr{A}$

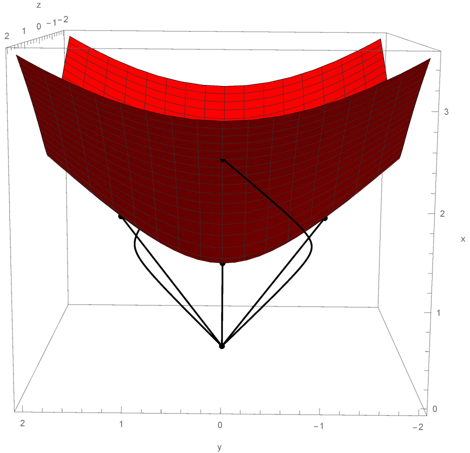
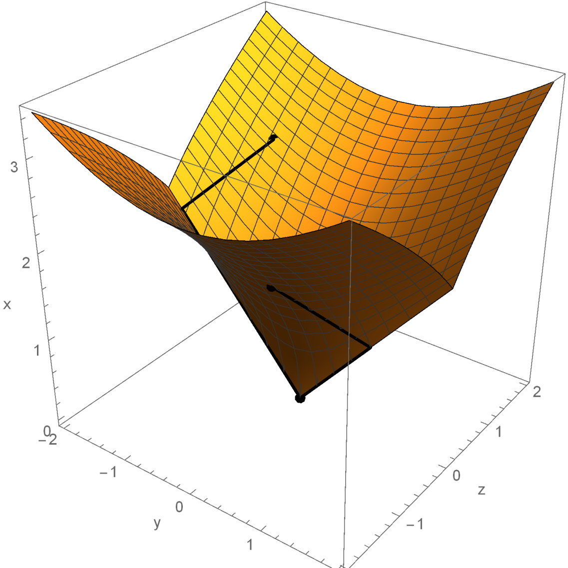
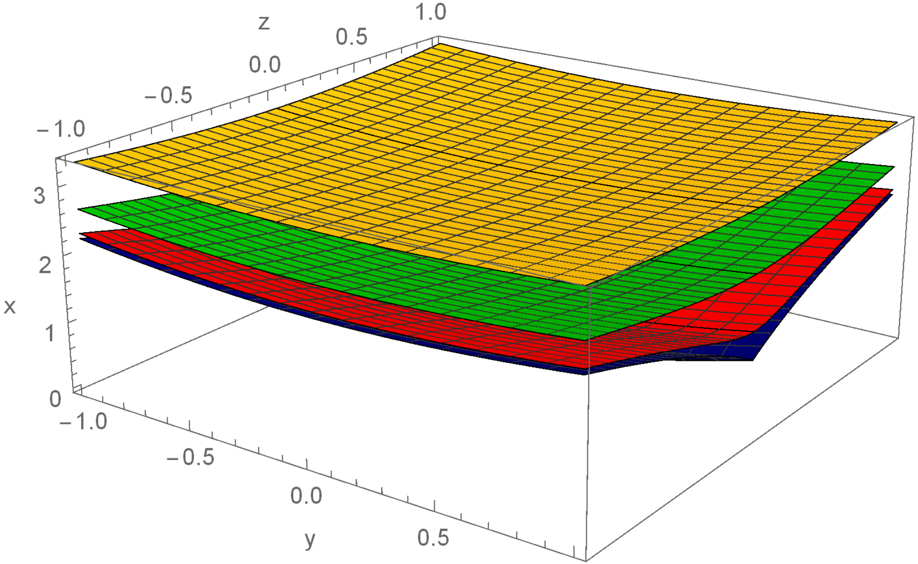


Рис.: Длиннейшие, соединяющие q_0 и S

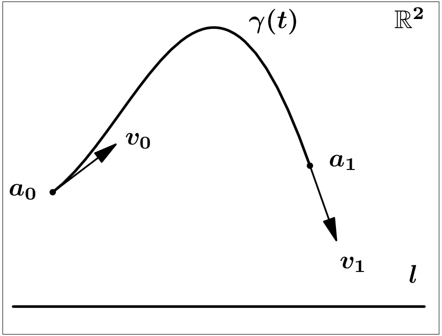
Светоподобные длиннейшие, заполняющие $S(0)$



СЛ сферы радиусов 0, 1, 2, 3



Задача Эйлера об эластиках



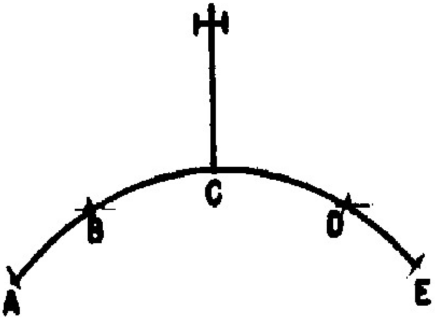
Дано: $l > 0$, $a_i \in \mathbb{R}^2$, $v_i \in T_{a_i}\mathbb{R}^2$, $|v_i| = 1$, $i = 1, 2$.
Найти: $\gamma(t)$, $t \in [0, t_1]$:
$\gamma(0) = a_0$, $\dot{g}(0) = v_0$, $\gamma(t_1) = a_1$, $\dot{g}(t_1) = v_1$. $|\dot{g}(t)| \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = l$
Упругая энергия $J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{t_1} k^2\, dt \to \min$, $k(t)$ — кривизна $\gamma(t)$.

XIII век: Жорданус де Неморе

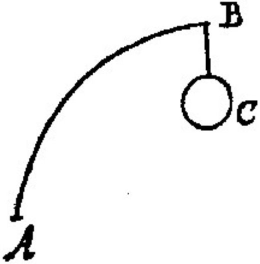
Jordanus de Nemore, *De Ratione Ponderis*,
Книга 4, Предложение 13:

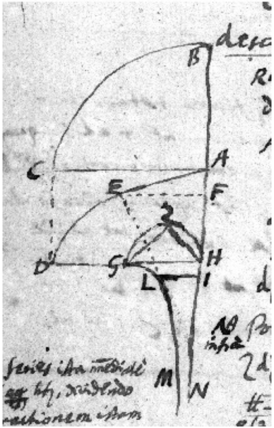
Упругие кривые — окружности.

(Неверное решение).



1691: Якоб Бернулли, прямоугольная эластика





$$dy = \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad x \in [0,1]$$

1742: Даниил Бернулли

- Упругая энергия

$$E = \mathrm{const} \cdot \int \frac{ds}{R^2},$$

  R — радиус кривизны.
- Попытки решения вариационной задачи

$$E \to \min .$$

- Письмо Леонарду Эйлеру: предложение решить эту задачу.

1744: Леонард Эйлер

- “Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле”, Лозанна, Женева, 1744,
- Приложение «Об упругих кривых»:

  «...в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.»

- *«Среди всех кривых одной и той же длины, которые не только проходят через A и B, но и касаются в этих точках прямых, заданных по положению, определить ту, для которой значение выражения $\int \frac{ds}{R^2}$ будет наименьшим.»*

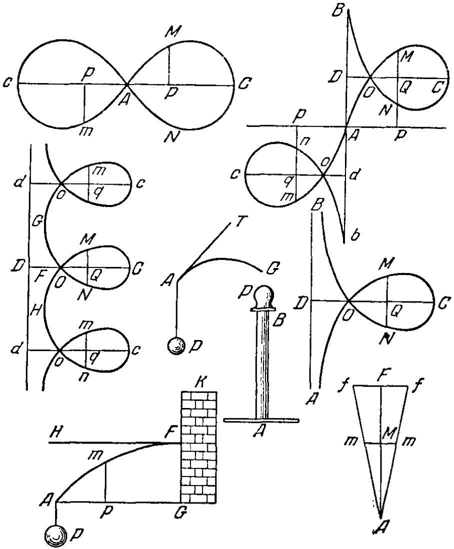
1744: Леонард Эйлер

- Задача вариационного исчисления,
- Уравнение Эйлера-Пуассона,
- Сведение к квадратурам

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}}, \quad ds = \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}},$$

- Качественный анализ интегралов,
- Типы решений (эластики).

Эскизы Эйлера



1807: Пьер Симон Лаплас

Форма поверхности капилляра

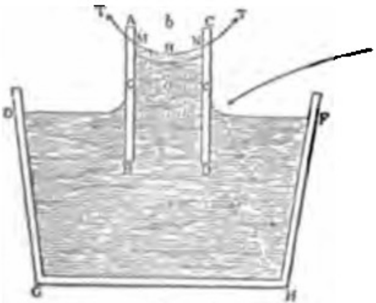


FIG. 6.

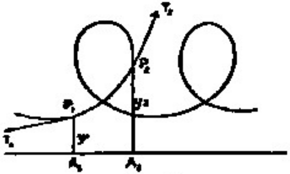
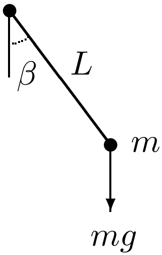


FIG. 8.

Рисунки Дж.Максвелла (Британская Энциклопедия, 1890 г.)

1859: Г.Р. Кирхгоф

Кинетический аналог: математический маятник



$$\ddot{\beta} = -r \sin\beta, \qquad r = \frac{g}{L}$$

1880: Л. Заалшютц

Первая явная параметризация эйлеровых эластик функциями Якоби:

L.Saalschütz, *О стержне, нагруженном действием боковой силы*, Лейпциг, 1880.

1906: Макс Борн

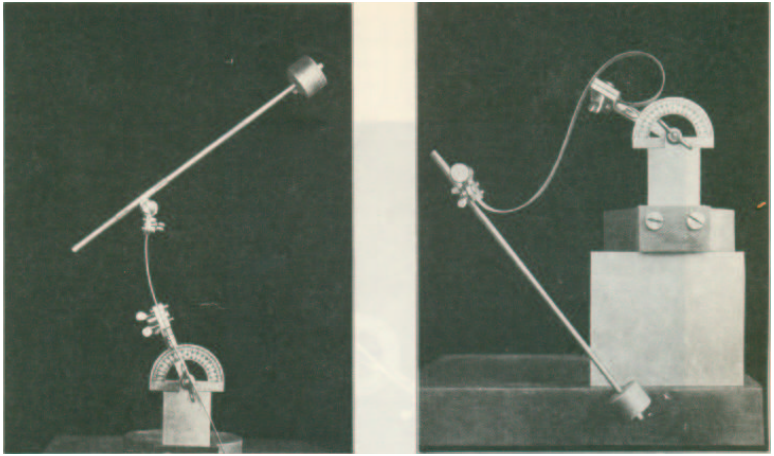
- Диссертация «Устойчивость упругих кривых на плоскости и в пространстве», Геттинген, 1906 г.
- Уравнения Эйлера-Лагранжа $\Rightarrow$

$$\dot{x} = \cos\theta, \qquad \dot{y} = \sin\theta,$$
$$A\ddot{\theta} + B\sin(\theta - \gamma) = 0, \qquad A,\ B,\ \gamma = \text{const},$$

- эластика без точек перегиба $\Rightarrow$ устойчивость,
- эластика с точками перегиба $\Rightarrow$ численное исследование сопряженных точек,
- чертежи эластик на основе приближенных вычислений.

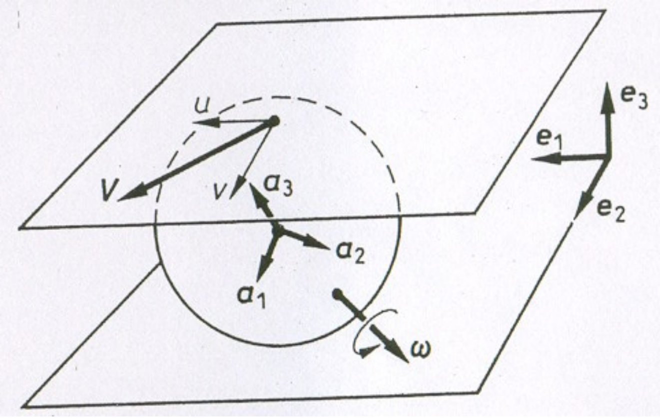
1906: Макс Борн

Эксперименты с упругими стержнями:



1993: В. Джарджевич

Эйлеровы эластики в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания



1993: Р. Брокетт и Л. Даи

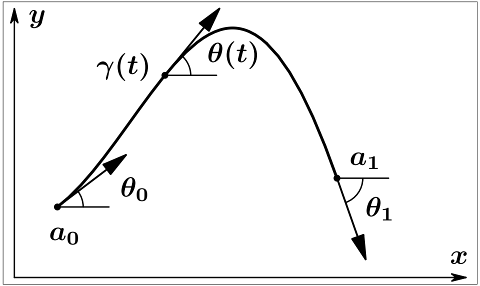
Эйлеровы эластики в нильпотентной субримановой задаче с вектором роста (2,3,5):

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \qquad q \in \mathbb{R}^5, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$
$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min,$$
$$[X_1, X_2] = X_3, \qquad [X_1, X_3] = X_4, \qquad [X_2, X_3] = X_5.$$

Приложения эйлеровых эластик

- теория упругости и сопротивление материалов (моделирование колонн, балок, упругих стержней),
- размер и форма в биологии (максимальная высота дерева, изгиб пальм под действием ветра, кривизна позвоночника, механика крыльев насекомых),
- нелинейные сплайны в теории аппроксимации (Г.Биркхоф, К.Р. де Бур, 1964),
- восстановление скрытых изображений в компьютерном видении (Д.Мамфорд, 1994),
- моделирование тонких оптических волокон и гибких соединений в микроэлектронике (В.Джеирезбхой, 2008),
- динамика оси вихря и кубическое уравнение Шредингера (Х.Хасимото, 1971),
- моделирование молекул ДНК (Р.С.Маннинг, 1996), ...

Задача Эйлера: Координаты в $\mathbb{R}^2 \times S^1$



- $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \theta \in S^1,$
- $\gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in [0, t_1],$
- $a_0 = (x_0, y_0), \qquad a_1 = (x_1, y_1),$
- $v_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0), \qquad v_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1).$

Задача оптимального управления

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = \cos\theta,\\
&\dot{y} = \sin\theta,\\
&\dot{\theta} = u,\\
&q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2_{x,y} \times S^1_\theta, \qquad u \in \mathbb{R},\\
&q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \theta_0), \;\; q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1), \;\; t_1 \text{ фиксировано.}
\end{aligned}
$$

$$
k^2 = \dot{\theta}^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} u^2 \, dt \to \min .
$$

Допустимые управления $u(t) \in L_2[0, t_1]$.

Левоинвариантная задача на группе движений плоскости

$$\mathrm{SE}(2) = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \theta \in S^1 \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\dot q = X_1(q) + uX_2(q), \qquad q \in \mathrm{SE}(2), \quad u \in \mathbb{R}. \\
&q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1, \qquad t_1 \text{ фиксировано}, \\
&J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} u^2\,dt \to \min,
\end{aligned}$$

Левоинвариантный репер на SE(2):

$$X_1(q) = qE_{13},\ X_2(q) = q(E_{21} - E_{12}),\ X_3(q) = [X_1, X_2](q) = -qE_{23}.$$

Непрерывные симметрии и нормализация условий задачи

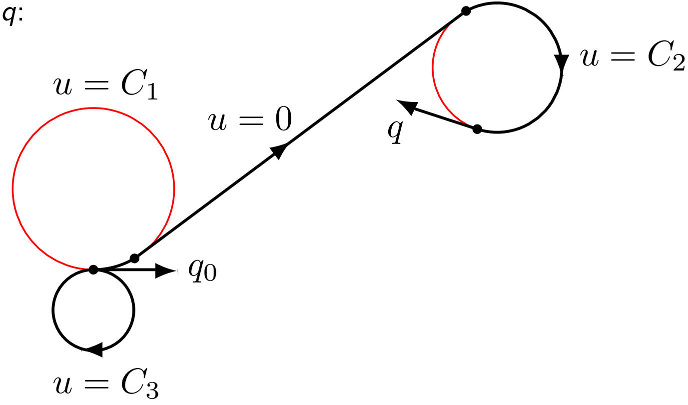
- Левые сдвиги на $\mathrm{SE}(2) \quad \Rightarrow \quad q_0 = \mathrm{Id} \in \mathrm{SE}(2)$:
  - Параллельные переносы в $\mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$
  - Повороты в $\mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 0$
- Гомотетии в $\mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1$

Множество достижимости

$q_0 = (0,0,0)$, $t_1 = 1$

$$\mathscr{A}_{q_0}(1) = \{(x,y,\theta) \mid x^2 + y^2 < 1 \;\; \forall\, \theta \in S^1 \text{ или } (x,y,\theta) = (1,0,0)\}.$$

Перевод q_0 в q:



Множество достижимости и существование оптимальных траекторий

$q_1 \in \mathscr{A}_{q_0}(t_1) \quad \Rightarrow \quad \exists$ оптимальная траектория $q(t) \in \mathrm{Lip}[0, t_1]$

Принцип максимума Понтрягина в инвариантной форме

$$\dot{q} = X_1(q) + uX_2(q), \;\; q \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \qquad J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} u^2\, dt \to \min$$

- $T_q M = \operatorname{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)), \qquad X_3 = [X_1, X_2]$
- $T_q^* M = \{(h_1, h_2, h_3)\}, \qquad h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \; \lambda \in T^*M$
- Гамильтоновы векторные поля $\vec{h}_i \in \operatorname{Vec}(T^*M)$
- $h_u^\nu = \langle \lambda, X_1 + uX_2 \rangle + \frac{\nu}{2} u^2 = h_1(\lambda) + uh_2(\lambda) + \frac{\nu}{2} u^2$

Теорема (Принцип максимума Понтрягина)

$u(t)$ и $q(t)$ оптимальны $\quad\Rightarrow\qquad \exists\ \lambda_t \in T^*_{q(t)}M,\ \nu \in \{-1,\ 0\}$:

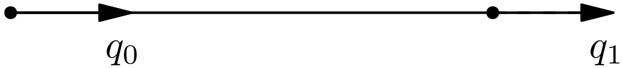
$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}^\nu_{u(t)}(\lambda_t) = \vec{h}_1(\lambda_t) + u(t)\,\vec{h}_2(\lambda_t),$$

$$h^\nu_{u(t)}(\lambda_t) = \max_{v \in \mathbb{R}} h^\nu_v(\lambda_t),$$

$$(\nu, \lambda_t) \neq 0, \qquad t \in [0, t_1].$$

Анормальные экстремальные траектории

$\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \equiv 0, \qquad x = t, \qquad y \equiv 0$



$J = 0 = \min \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ анормальные экстремальные траектории оптимальны при $t \in [0, t_1] \quad \forall\ t_1 > 0.$

Единственная траектория из $q_0 = (0,0,0)$ в $(t_1, 0, 0) \in \partial \mathscr{A}_{q_0}(t_1)$.

Гамильтонова система для нормальных экстремалей

$\nu = -1 \quad \Rightarrow$ неединственность экстремальных траекторий

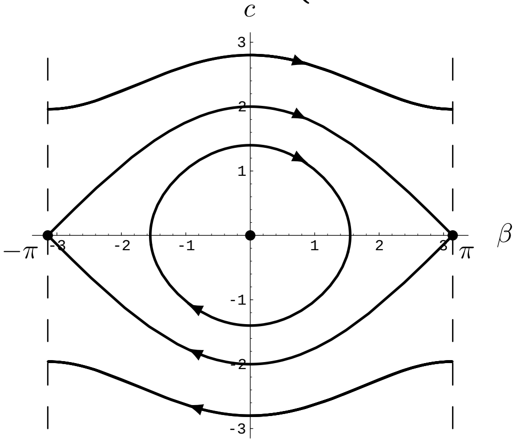
Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} \dot h_1 &= -h_2 h_3, & \dot x &= \cos\theta \\ \dot h_2 &= h_3, & \dot y &= \sin\theta \\ \dot h_3 &= h_1 h_2, & \dot\theta &= h_2 \end{aligned}$$

$$h_1^2 + h_3^2 = r^2 \equiv \text{const} \quad \Rightarrow \quad h_1 = -r\cos\beta, \;\; h_3 = -r\sin\beta$$

Уравнение маятника

$$\ddot{\beta} = -r\sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\beta} = c, \\ \dot{c} = -r\sin\beta \end{cases}$$



Нормальные экстремальные траектории

$$\ddot{\theta} = -r \sin(\theta - \gamma), \qquad r, \ \gamma = \text{const},$$
$$\dot{x} = \cos\theta,$$
$$\dot{y} = \sin\theta.$$

Система интегрируема в функциях Якоби.

$\theta(t), x(t), y(t)$ параметризованы функциями Якоби $\mathrm{cn}, \mathrm{sn}, \mathrm{dn}, \mathrm{E}$.

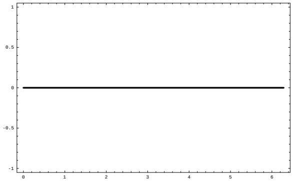
Эйлеровы эластики

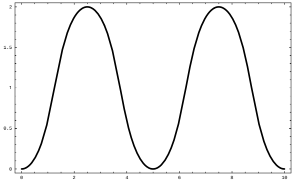
Энергия маятника

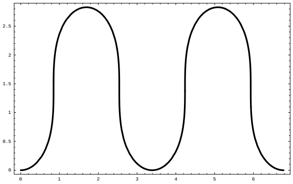
$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - r\cos(\theta - \gamma) \equiv \mathrm{const} \in [-r, +\infty)$$

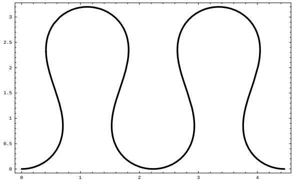
- $E = -r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ прямые,
- $E \in (-r, r),\ r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ инфлексионные эластики,
- $E = r \neq 0,\ \theta - \gamma = \pi \quad \Rightarrow \quad$ прямые,
- $E = r \neq 0,\ \theta - \gamma \neq \pi \quad \Rightarrow \quad$ критические эластики,
- $E > r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ неинфлексионные эластики,
- $r = 0 \quad \Rightarrow \quad$ окружности и прямые.

Эйлеровы эластики

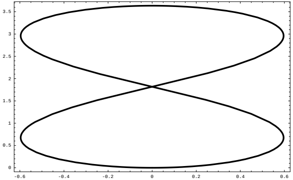


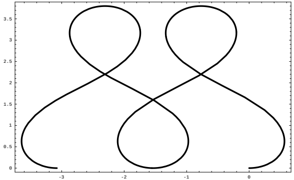


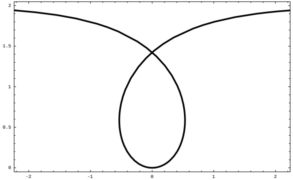


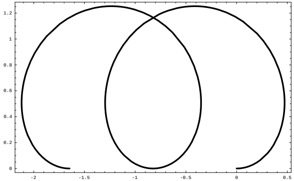


Эйлеровы эластики

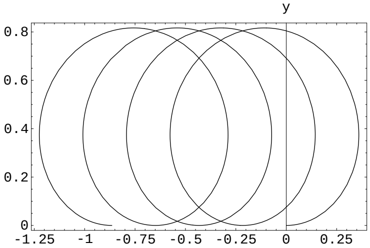


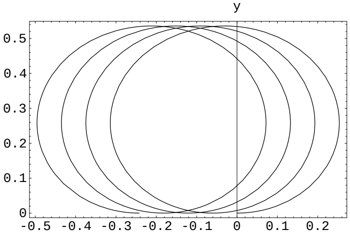


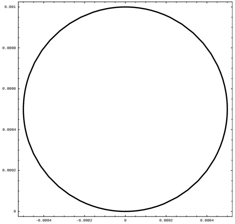




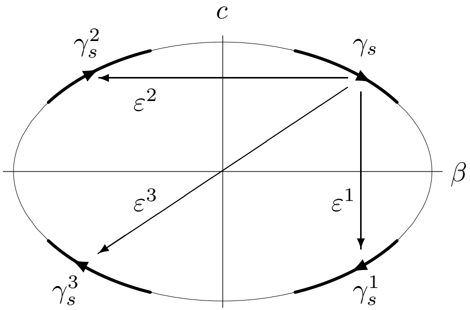
Эйлеровы эластики







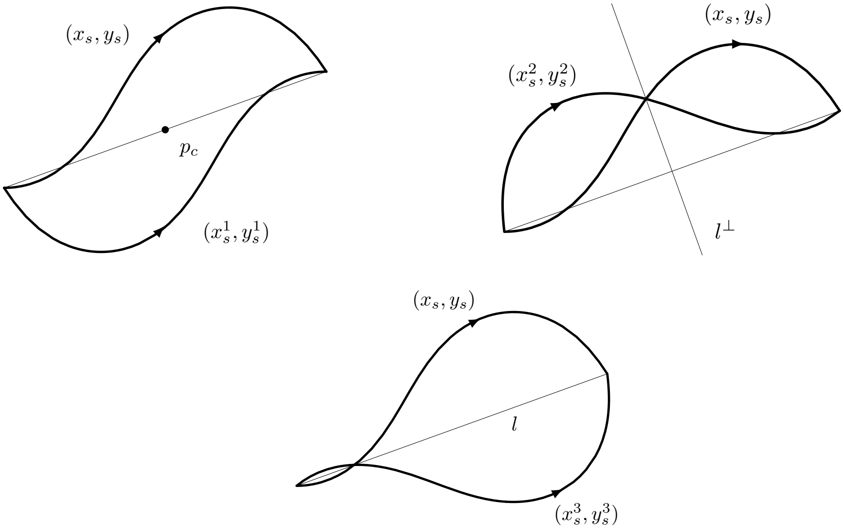
Отражения в фазовом цилиндре маятника $\ddot{\beta} = -r \sin \beta$



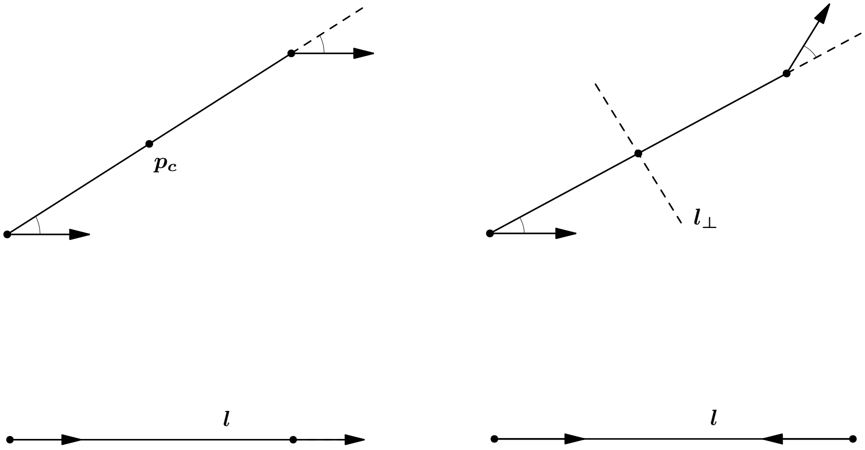
Группа симметрий прямоугольника

$$D_2 = \{\mathrm{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Действие отражений ε^1, ε^2, ε^3 на эластики



Неподвижные точки отражений ε^1, ε^2, ε^3



Точки Максвелла, соответствующие отражениям

Неподвижные точки отражений ε^i:

$$t = t^n_{\varepsilon^i}, \qquad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

T = период колебаний маятника $\quad \Rightarrow$

$$t^n_{\varepsilon^1} = nT, \qquad \left(n - \frac{1}{2}\right) T < t^n_{\varepsilon^2} < \left(n + \frac{1}{2}\right) T.$$

Верхняя оценка времени разреза:

$$t_{\text{cut}} \leq \min(t^1_{\varepsilon^1}, t^1_{\varepsilon^2}) \leq T$$

Сопряженные точки

Экспоненциальное отображение

$$\mathrm{Exp}_t \, : \, T^*_{q_0} M \to M, \qquad \lambda_0 \mapsto q(t) = \pi \circ e^{t\vec{h}}(\lambda_0)$$

$q(t)$ — сопряженная точка $\quad \Leftrightarrow \quad$ $q(t)$ — критическое значение Exp_t

$\mathrm{Exp}_t(h_1, h_2, h_3) = (x, y, \theta)$

$$\frac{\partial(x, y, \theta)}{\partial(h_1, h_2, h_3)} = 0$$

Локальная оптимальность нормальных экстремальных траекторий

Теорема (Условие Якоби)

Нормальные экстремальные траектории теряют локальную оптимальность в первой сопряженной точке.

Первое сопряженное время $t^1_{\mathrm{conj}} \in (0, +\infty]$.

- Нет точек перегиба $\quad \Rightarrow \quad t^1_{\mathrm{conj}} = +\infty$,
- Инфлексионный случай $\quad \Rightarrow \quad t^1_{\mathrm{conj}} \in [t^1_{\varepsilon^1}, t^1_{\varepsilon^2}]$.

Устойчивость инфлексионных эластик

- $t_1 \le \dfrac{1}{2} T \quad \Rightarrow \quad$ устойчивость
- $t_1 \ge \dfrac{3}{2} T \quad \Rightarrow \quad$ неустойчивость

В частности:

- нет точек перегиба $\quad \Rightarrow \quad$ устойчивость (М. Борн),
- 1 или 2 точки перегиба $\quad \Rightarrow \quad$ устойчивость или неустойчивость,
- 3 точки перегиба $\quad \Rightarrow \quad$ неустойчивость.

Глобальная оптимальность эластик

$$q_1 \in \mathscr{A}_{q_0}(t_1), \qquad\qquad \text{оптимальная } q_t = ?$$

$$q_t = \mathrm{Exp}_t(\lambda) \text{ оптимальна при } t \in [0, t_1] \quad \Rightarrow \quad t_1 \leq \min(t^1_{\varepsilon_1}(\lambda), t^1_{\varepsilon_2}(\lambda))$$

$$N' = \{\lambda \in T^*_{q_0}M \mid t_1 \leq \min(t^1_{\varepsilon_1}(\lambda), t^1_{\varepsilon_2}(\lambda))\}$$

$$\mathrm{Exp}_{t_1} \; : \; N' \to \mathscr{A}_{q_0}(t_1) \text{ сюръективно, невырождено, неинъективно}$$

$\exists$ открытые всюду плотные $\widetilde{N} \subset N'$, $\widetilde{M} \subset \mathscr{A}_{q_0}(t_1)$ такие, что

$$\mathrm{Exp}_{t_1} \; : \; \widetilde{N} \to \widetilde{M} \text{ прямая сумма диффеоморфизмов}$$

Глобальная структура экспоненциального отображения

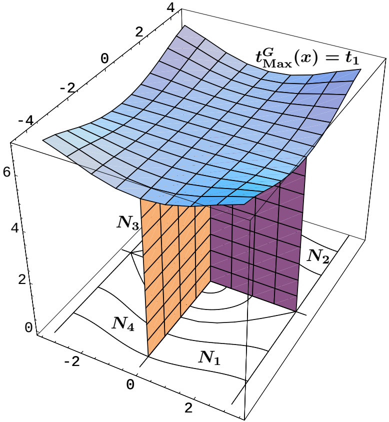


Рис.: $\widetilde{N} = \cup_{i=1}^4 L_i$

$\xrightarrow{\mathrm{Exp}_{t_1}}$

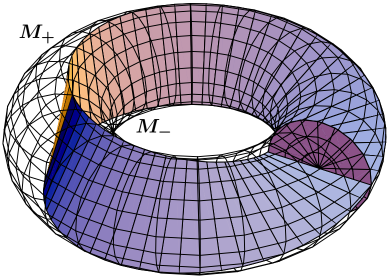
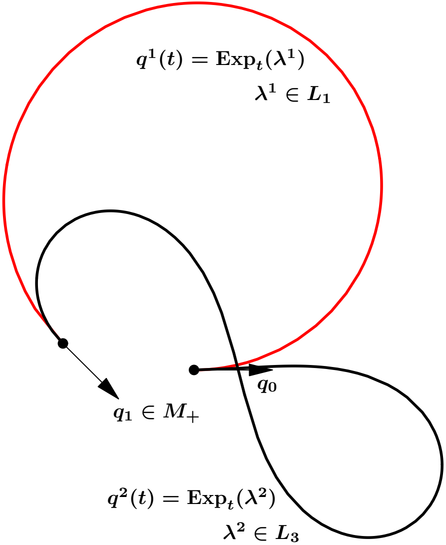


Рис.: $\widetilde{M} = M_+ \cup M_-$

$\mathrm{Exp}_{t_1} \ : \ L_1, \ L_3 \to M_+$ диффео, $\qquad \mathrm{Exp}_{t_1} \ : \ L_2, \ L_4 \to M_-$ диффео

Конкурирующие эластики



$$? \quad : \quad J[q^1_\cdot] \lesseqgtr J[q^2_\cdot]$$

Литература

1. Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи*. Итоги науки и техники: Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 16, ВИНИТИ, Москва, 1987, 5–85.
2. М.И. Зеликин, *Оптимальное управление и вариационное исчисление*, М.: URSS, 2014.
3. V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
4. R. Montgomery, *A tour of subriemannnian geometries, their geodesics and applications*, Amer. Math. Soc., 2002.
5. А.А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, 2005.
6. A.A. Agrachev, *Some open problems*, Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry, pp. 1–13. Springer INdAM Series, vol. 5. Springer, 2014.
7. А.А.Аграчев, Некоторые вопросы субримановой геометрии, *УМН*, 71:6 (432), 2016, 3–36.

Литература

8. A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge University Press, 2019.
9. Сачков Ю.Л. *Введение в геометрическую теорию управления*, М.: URSS, 2021, 160 С.
10. Ю. Л. Сачков, Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификации и задачи, интегрируемые в элементарных функциях, УМН, 77:1(463) (2022), 109–176
11. Ю. Л. Сачков, Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли, интегрируемые в эллиптических функциях, УМН, 78:1(469) (2023), 67–166
12. `http://control.botik.ru`

Спасибо за внимание!