Принцип максимума Понтрягина. Субримановы задачи. Симметрийный метод. *(Лекция 2)*

Ю.Л. Сачков

yusachkov@gmail.com

Курс «Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли»

Школа-конференция «Неголономные дни в Переславле»

26–30.08.2024

Содержание предыдущей лекции

1. Примеры задач оптимального управления.
2. Постановка задачи оптимального управления.
3. Гладкие многообразия и векторные поля.
4. Группы Ли, алгебры Ли и левоинвариантные задачи оптимального управления.
5. Элементы симплектической геометрии.
6. Принцип максимума Понтрягина.

Решения задач

1. Дан маятник, совершающий малые колебания под действием силы, ограниченной по абсолютной величине. Найти силу, которая переводит маятник из произвольного положения и скорости в устойчивое равновесие за минимальное время.

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\
&\dot{x}_2 = -x_1 + u, \qquad |u| \leq 1, \\
&x(0) = x^0, \qquad x(t_1) = 0, \\
&t_1 \to \min .
\end{aligned}
$$

Задача не левоинвариантна т.к. векторное поле $x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ не левоинвариантно.

2. Дана сфера, катящаяся без проскальзывания и прокручивания по горизонтальной плоскости. Заданы начальная и конечная конфигурация сферы (точки контакта и ориентации в пространстве). Требуется перекатить сферу из начальной конфигурации в конечную вдоль кратчайшей кривой.

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\dot{R} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & 0 & -v \\ u & v & 0 \end{pmatrix},$$

$$q = (x, y, R) \in \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3),$$

$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2}\, dt \to \min.$$

Задача левоинвариантна на группе Ли $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$.

Решения задач

3. Рассмотрим следующее естественное обобщение задачи Дидоны. Зададим, кроме двух точек (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, соединяющей их кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$ и числа $S \in \mathbb{R}$, также точку на плоскости $c \in \mathbb{R}^2$. Необходимо найти кратчайшую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), такую, чтобы область $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченная парой кривых γ_0 и γ, имела заданные алгебраическую площадь S и центр масс c.

$$q = (x, y, z, v, w) \in \mathbb{R}^5, \qquad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$\dot{x} = u_1, \qquad \dot{y} = u_2, \qquad \dot{z} = \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1),$$
$$\dot{v} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_2, \qquad \dot{w} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_1,$$
$$q(0) = q_0 = 0, \qquad q(t_1) = q_1, \qquad l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min.$$

Задача левоинвариантна на группе Картана $\mathbb{R}^5$.

План лекции

1. Принцип максимума Понтрягина.
2. Решение задач оптимального управления.
3. Субримановы задачи.
4. Симметрийный метод исследования оптимальности.

Гамильтонианы принципа максимума Понтрягина

- Задача оптимального управления

$$\dot{q} = f(q,u), \qquad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m,$$
$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$
$$J = \int_0^{t_1} \varphi(q,u)\,dt \to \min,$$
t_1 фиксировано или свободно.

- Определим семейство *гамильтонианов ПМП*

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f(q,u) \rangle + \nu\varphi(q,u), \qquad \nu \in \mathbb{R}, \quad u \in U, \quad \lambda \in T^*M, \quad q = \pi(\lambda).$$

Формулировка принципа максимума Понтрягина

Теорема (ПМП)

Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $q(t), t \in [0, t_1]$, оптимальны в задаче с фиксированным t_1, то существуют кривая $\lambda_t \in \mathrm{Lip}([0, t_1], T^*M)$, $\lambda_t \in T^*_{q(t)}M$ и число $\nu \leq 0$ такое, что почти для всех $t \in [0, t_1]$ выполняются следующие условия:

(1) $\dot{\lambda}_t = \vec{h}^{\nu}_{u(t)}(\lambda_t)$,

(2) $h^{\nu}_{u(t)}(\lambda_t) = \max\limits_{w \in U} h^{\nu}_w(\lambda_t)$,

(3) $(\lambda_t, \nu) \neq (0, 0)$.

Если терминальное время t_1 свободно, то к (1)–(3) добавляется следующее условие:

(4) $h^{\nu}_{u(t)}(\lambda_t) \equiv 0$.

Кривая λ_t, удовлетворяющая ПМП, называется *экстремальной*, кривая $q(t)$ — *экстремальной траекторией*, управление $u(t)$ — *экстремальным управлением*.

Задача быстродействия

- Применим ПМП к *задаче быстродействия*

$$\dot{q} = f(q, u), \qquad q \in M, \quad u \in U,$$
$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$
$$t_1 = \int_0^{t_1} 1\, dt \to \min .$$

- Гамильтониан ПМП имеет вид $h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f(q, u) \rangle + \nu$. Определим *укороченный гамильтониан* $g_u(\lambda) = \langle \lambda, f(q, u) \rangle$.
- Тогда формулировка ПМП для задачи быстродействия принимает вид:

(1) $\dot{\lambda}_t = \vec{h}^\nu_{u(t)}(\lambda_t) = \vec{g}_{u(t)}(\lambda_t)$,

(2) $h^\nu_{u(t)}(\lambda_t) = \max\limits_{w \in U} h^\nu_w(\lambda_t) \quad \Leftrightarrow \quad g_{u(t)}(\lambda_t) = \max\limits_{w \in U} g_w(\lambda_t)$,

(3) $\lambda_t \neq 0$,

(4) $h^\nu_{u(t)}(\lambda_t) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_{u(t)}(\lambda_t) \equiv \mathrm{const} \geq 0$.

Случай гладкого максимизированного гамильтониана

Обозначим *максимизированный нормальный гамильтониан ПМП*

$$H(\lambda) = \max_{u \in U} h_u^{-1}(\lambda), \qquad \lambda \in T^*M.$$

Теорема

Пусть $H \in C^2(T^*M)$. Тогда кривая λ_t является нормальной экстремалью тогда и только тогда, когда она является траекторией гамильтоновой системы $\dot{\lambda}_t = \vec{H}(\lambda_t)$.

Пример: остановка поезда

- Задача быстродействия имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \le 1,$$
$$x(0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1 = (0,0), \qquad t_1 \to \min .$$

- Мы покажем, что для любого $x^0 \in \mathbb{R}^2$ $\qquad x^1 \in \mathcal{A}_{x^0}$.
- Из общей теоремы существования (теорема Филиппова) следует существование оптимальной траектории.

Пример: остановка поезда

- Применим ПМП, используя канонические координаты (p_1, p_2, x_1, x_2) на $T^*\mathbb{R}^2$. Разложим ковектор $\lambda = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 \in T^*\mathbb{R}^2$, тогда укороченный гамильтониан PMP будет иметь вид $h_u(\lambda) = p_1 x_2 + p_2 u$, а гамильтонова система $\dot\lambda = \vec{h}_u(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= x_2, & \dot p_1 &= 0, \\ \dot x_2 &= u, & \dot p_2 &= -p_1. \end{aligned}$$

- Условие максимума ПМП имеет вид

$$h_u(\lambda) = p_1 x_2 + p_2 u \to \max_{|u|\le 1},$$

и условие нетривиальности $(p_1(t), p_2(t)) \neq (0, 0)$.

Пример: остановка поезда

- Условие максимальности дает:

$$p_2(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = 1, \qquad p_2(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = -1.$$

- Таким образом, экстремальными траекториями являются параболы

$$x_1 = \pm \frac{x_2^2}{2} + C,$$

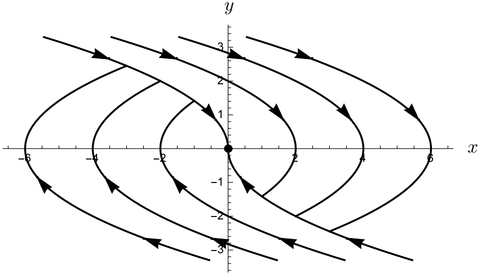
  а число переключений (разрывов) управления не более 1.
- Построим такие траектории назад во времени, начиная с $x^1 = (0, 0)$:
  - управления $u = 1$ и $u = -1$ порождают две полупараболы, оканчивающиеся в точке x^1:

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2}, \quad x_2 \leq 0 \quad \text{и} \quad x_1 = -\frac{x_2^2}{2}, \quad x_2 \geq 0,$$

  - обозначим объединение этих полупарабол как Γ,
  - после одного переключения параболические дуги с $u = 1$, заканчивающиеся полупараболой $x_1 = -\frac{x_2^2}{2}$, $\quad x_2 \geq 0$, заполняют часть плоскости $\mathbb{R}^2$ ниже Γ,
  - аналогично, после одного переключения параболические дуги с $u = -1$ заполняют часть плоскости над Γ.

Пример: остановка поезда

- Итак, через каждую точку плоскости $\mathbb{R}^2$ проходит единственная экстремальная траектория. Ввиду существования оптимальных управлений экстремальные траектории являются оптимальными.
- Найденное оптимальное управление имеет явную зависимость от текущей точки плоскости: если $x_1 = \frac{x_2^2}{2}, \quad x_2 \leq 0$ или если точка (x_1, x_2) лежит ниже кривой Γ, то $u(x_1, x_2) = 1$, в противном случае $u(x_1, x_2) = -1$.



- Такая зависимость $u(x)$ оптимального управления от текущей точки x пространства состояний называется *оптимальным синтезом*.

Пример: машина Маркова–Дубинса

- Задача оптимального времени имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = \cos\theta, \qquad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2_{x,y} \times S^1_\theta = M,\\
&\dot{y} = \sin\theta, \qquad |u| \leq 1,\\
&\dot{\theta} = u,\\
&q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \qquad q(t_1) = q_1,\\
&t_1 \to \min.
\end{aligned}
$$

- Система полностью управляема: из любого состояния в M машина может попасть в любое другое состояние, двигаясь попеременно вдоль окружностей радиуса 1 и прямых.
- Из теоремы Филиппова следует существование оптимального управления.
- Мы применяем ПМП.

Пример: машина Маркова–Дубинса

- Векторные поля

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y},\\
f_1 &= \frac{\partial}{\partial \theta},\\
f_2 &= [f_0, f_1] = \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
$$

  образуют базис в $T_q M$.
- Определим соответствующие линейные на слоях T^*M гамильтонианы :

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i \rangle, \qquad i = 0, 1, 2.$$

- Укороченный гамильтониан ПМП равен

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_0 + u f_1 \rangle = h_0 + u h_1 .$$

Пример: машина Маркова–Дубинса

- Функции h_0, h_1, h_2 образуют систему координат в T_q^*M, запишем гамильтонову систему ПМП в неканонической параметризации (h_0, h_1, h_2, q) кокасательного расслоения T^*M:

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_0 &= \vec{h}_u h_0 = \{h_0 + uh_1, h_0\} = -uh_2, && (1)\\
\dot{h}_1 &= \{h_0 + uh_1, h_1\} = h_2, && (2)\\
\dot{h}_2 &= \{h_0 + uh_1, h_2\} = uh_0, && (3)\\
\dot{q} &= f_0 + uf_1.
\end{aligned}
$$

- Условие максимальности $h_u(\lambda) = h_0 + uh_1 \to \max\limits_{|u|\le 1}$ означает, что если $h_1(\lambda_t) \neq 0$, то $u(t) = \operatorname{sgn} h_1(\lambda_t)$.
- Рассмотрим случай, когда управление не определяется ПМП: $h_1(\lambda_t) \equiv 0$ (этот случай называется *особым*). Тогда (2) дает $h_2(\lambda_t) \equiv 0$, таким образом, $h_0(\lambda_t) \neq 0$ по условию нетривиальности ПМП, поэтому $u(t) \equiv 0$ по (3). Соответствующая экстремальная траектория $(x(t), y(t))$ является прямой.

Пример: машина Маркова–Дубинса

- Если $u(t) = \pm 1$, то траектория $(x(t), y(t))$ — окружность.
- Можно показать, что оптимальные траектории имеют один из следующих двух типов:
  1. дуга единичной окружности + отрезок + дуга единичной окружности
  2. объединение трех дуг единичных окружностей; при этом, если a, b, c — время по первой, второй и третьей дуге соответственно, тогда $\pi < b < 2\pi$, $\min\{a, c\} < b$, и $\max\{a, c\} < b$.
- Если граничные условия далеки друг от друга, то оптимальная траектория имеет тип 1 и строится следующим образом. Нарисуйте два единичных круга, удовлетворяющих начальному условию, и два единичных круга, удовлетворяющих конечному условию. Проведем четыре общие касательные к исходным и конечным окружностям с учетом направления движения по окружностям, определяемого граничными условиями. Среди четырех построенных экстремальных траекторий найти самую короткую.
- Оптимальный синтез для машины Маркова–Дубинса известен, но он достаточно сложен.

Субримановы структуры и кратчайшие

- *Субриманова структура* на гладком многообразии M — это пара (Δ, g), где
$$\Delta = \{\Delta_q \subset T_q M \mid q \in M\}$$
— это распределение на M, а
$$g = \{g_q \text{ скалярное произведение в } \Delta_q \mid q \in M\}$$
— это *скалярное произведение* (невырожденная положительно определенная квадратичная форма) на Δ.
- Пространства Δ_q и скалярные произведения g_q гладко зависят от $q \in M$, и $\dim \Delta_q \equiv \text{const}$.
- Кривая $q \in \text{Lip}([0, t_1], M)$ называется *горизонтальной* (*допустимой*), если
$$\dot{q}(t) \in \Delta_{q(t)} \text{ для почти всех } t \in [0, t_1].$$
- *Субриманова длина* горизонтальной кривой $q(\cdot)$ определяется как
$$l(q(\cdot)) = \int_0^{t_1} \sqrt{g(\dot{q}, \dot{q})}\, dt.$$

Субримановы структуры и кратчайшие

- *Субриманово расстояние* (*расстояние Карно–Каратеодори*) между точками $q_0, q_1 \in M$ равно
$$d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(\cdot) \text{ горизонтальна}, \ q(0) = q_0, \ q(t_1) = q_1\}.$$
- Горизонтальная кривая $q(\cdot)$ называется *субримановой кратчайшей*, если
$$l(q(\cdot)) = d(q(0), q(t_1)).$$
- Кратчайшие — решения *субримановой задачи оптимального управления*:
$$\dot{q}(t) \in \Delta_{q(t)},$$
$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$
$$l(q(\cdot)) \to \min .$$
- Предположим, что субриманова структура (Δ, g) имеет *глобальный ортонормированный репер* $f_1, \dots, f_k \in \mathrm{Vec}(M)$:
$$\Delta_q = \mathrm{span}(f_1(q), \dots, f_k(q)), \quad q \in M, \quad g(f_i, f_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Субримановы структуры и кратчайшие

- Тогда задача оптимального управления для субримановых кратчайших принимает стандартный вид:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(q), \qquad q \in M, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \tag{4}$$

$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1, \tag{5}$$

$$l = \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{k} u_i^2 \right)^{1/2} dt \to \min. \tag{6}$$

- Субриманова длина не зависит от параметризации горизонтальной кривой $q(t)$. А именно, если

$$\widetilde{q}(s) = q(t(s)), \qquad t(\,\cdot\,) \in \mathrm{Lip}([0, s_1], [0, t_1]), \qquad t'(s) > 0,$$

является перепараметризацией кривой $q(t)$, то $l(\widetilde{q}(\,\cdot\,)) = l(q(\,\cdot\,))$.

- Наряду с функционалом длины удобно рассматривать функционал *энергии*

$$J(q(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} g(\dot q, \dot q)\, dt.$$

- Обозначим $\|\dot q\| = \sqrt{g(\dot q, \dot q)}$.

Лемма

Пусть конечное время t_1 фиксировано. Тогда минимали энергии — это в точности минимали длины постоянной скорости:

$$J(q(\,\cdot\,)) \to \min \quad \Leftrightarrow \quad l(q(\,\cdot\,)) \to \min, \qquad \|\dot q\| = \mathrm{const}\,.$$

Субриманова задача оптимального управления

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(q), \qquad q \in M, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k,$$

$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{k} u_i^2 \right)^{1/2} dt \to \min,$$

или, что эквивалентно,

$$J = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{k} u_i^2 \, dt \to \min .$$

Принцип максимума Понтрягина для СР задач

- Введем линейные на слоях T^*M гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i \rangle, \quad i = 1, \dots, k$. Тогда гамильтониан PMP для СР задачи примет вид

$$h_u^{\nu}(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} u_i h_i(\lambda) + \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^{k} u_i^2 .$$

- *Нормальный случай: Пусть $\nu = -1$.*
- Условие максимальности $\sum_{i=1}^{k} u_i h_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} u_i^2 \to \max\limits_{u_i \in \mathbb{R}}$ дает $u_i = h_i$, тогда гамильтониан принимает вид

$$h_u^{-1}(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} h_i^2(\lambda) =: H(\lambda).$$

- Функция $H(\lambda)$ называется ***нормальным максимизированным гамильтонианом***. Поскольку она гладкая, в нормальном случае экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$.

Анормальный случай

- *Пусть $\nu = 0$.*
- Из условия максимума
$$\sum_{i=1}^{k} u_i h_i \to \max_{u_i \in \mathbb{R}}$$
следует, что $h_i(\lambda_t) \equiv 0, \quad i = 1, \ldots, k$.
- Таким образом, анормальные экстремали удовлетворяют условиям:
$$\dot{\lambda}_t = \sum_{i=1}^{k} u_i(t)\vec{h}_i(\lambda_t),$$
$$h_1(\lambda_t) = \cdots = h_k(\lambda_t) \equiv 0.$$
- Нормальные кратчайшие являются проекциями решений гладкой гамильтоновой системы $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$, поэтому они гладкие. Важный *открытый вопрос* субримановой геометрии заключается в том, являются ли анормальные кратчайшие гладкими.

Оптимальность СР экстремальных траекторий

Горизонтальная кривая $q(t)$ называется *СР геодезической*, если $g(\dot{q}, \dot{q}) \equiv \mathrm{const}$ и короткие дуги $q(t)$ оптимальны.

Теорема (Лежандр)

Нормальные экстремальные траектории являются СР геодезическими.

Пример: геодезические на S^2

- Рассмотрим стандартную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ с римановой метрикой, индуцированной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$.
- Геодезические, выходящие из северного полюса $N \in S^2$, являются большими окружностями на сфере, проходящими через N (меридианами). Такие геодезические оптимальны вплоть до южного полюса $S \in S^2$.
- Вариация геодезических, проходящих через N, дает неподвижную точку S, таким образом, S является сопряженной точкой к N.
- С другой стороны, S — это точка пересечения различных геодезических одинаковой длины, начинающихся в N, поэтому S — это точка Максвелла.
- В этом примере сопряженная точка совпадает с точкой Максвелла из-за однопараметрической группы симметрий (вращений S^2 вокруг прямой $NS \subset \mathbb{R}^3$). Чтобы различать эти точки, нужно разрушить вращательную симметрию, как в следующем примере.

Пример: геодезические на эллипсоиде

- Рассмотрим трехосный эллипсоид с римановой метрикой, индуцированной евклидовой метрикой окружающего $\mathbb{R}^3$.
- Построим семейство геодезических на эллипсоиде, начиная с вершины N, и посмотрим на это семейство из противоположной вершины S.
- Семейство геодезических имеет огибающую — астроиду с центром в S. Каждая точка астроиды является *сопряженной точкой*. В таких точках геодезические теряют свою локальную оптимальность.
- С другой стороны, существует отрезок, соединяющий пару противоположных вершин астроиды, где пары геодезических одинаковой длины встречаются друг с другом. Этот сегмент (кроме его конечных точек) состоит из *точек Максвелла*. В таких точках геодезические на эллипсоиде теряют свою глобальную оптимальность.

Субриманово экспоненциальное отображение

- Рассмотрим нормальную гамильтонову систему ПМП $\dot{\lambda}_t = \vec{H}(\lambda_t)$.
- Гамильтониан H является интегралом этой системы. Можно предположить, что $H(\lambda_t) \equiv \frac{1}{2}$, это соответствует *натуральной параметризации* нормальных геодезических: $\|\dot{q}(t)\| \equiv 1$.
- Обозначим цилиндр $C = T^*_{q_0} M \cap \{H = \frac{1}{2}\}$ и определим субриманово *экспоненциальное отображение*

$$\mathrm{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \to M,$$

$$\mathrm{Exp}(\lambda_0, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda_0) = q(t).$$

Сопряженные точки

- Точка $\mathrm{Exp}(\lambda_0, t_1)$ называется *сопряженной точкой* вдоль геодезической $q(t) = \mathrm{Exp}(\lambda_0, t)$, если она является критическим значением Exp, т.е. $\mathrm{Exp}_{*(\lambda_0, t_1)}$ вырождено.
- Точка $\mathrm{Exp}(\lambda_0, t_1)$ является сопряженной тогда и только тогда, когда якобиан экспоненциального отображения равен нулю: $\det \left(\frac{\partial \,\mathrm{Exp}}{\partial(\lambda_0, t)} \right) \Big|_{t=t_1} = 0$.
- В сопряженной точке геодезическая касается огибающей семейства геодезических, начинающихся из начальной точки q_0.

Локальная оптимальность СР геодезических

Траектория $q(t)$ системы управления с управлением $u(t)$ и заданными граничными условиями называется *локально (сильно) оптимальной*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$J[u] \leq J[\tilde{u}]$$

для любого допустимого управления $\tilde{u}(t)$ такого, что соответствующая траектория $\tilde{q}(t) = q_{\tilde{u}}(t)$ удовлетворяет граничным условиям и неравенству

$$\max_{t \in [0, t_1]} |q(t) - \tilde{q}(t)| < \varepsilon$$

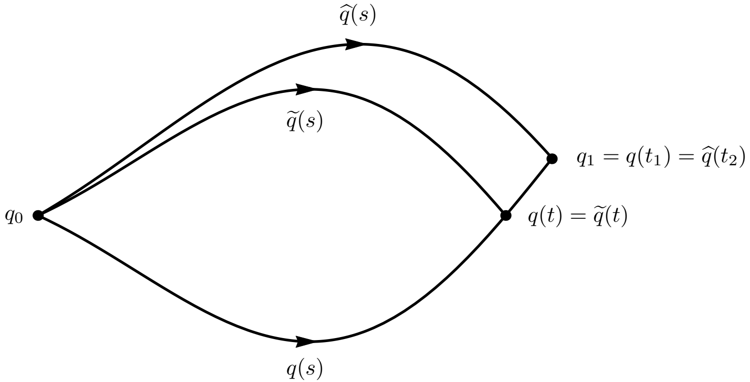
в локальных координатах на M.

Теорема (Якоби)

Пусть нормальная геодезическая $q(t)$ является проекцией единственной, с точностью до скалярного кратного, экстремали. Тогда $q(t)$ теряет свою локальную оптимальность в первой сопряженной точке.

Точки Максвелла

- Точка q_t называется *точкой Максвелла* вдоль геодезической $q_s = \mathrm{Exp}(\lambda_0, s)$, если существует другая геодезическая $\widetilde{q}_s = \mathrm{Exp}(\widetilde{\lambda}_0, s) \not\equiv q_s$ такая, что $q_t = \widetilde{q}_t$.
- См. рисунок: существует геодезическая $\widehat{q}_s$, приходящая в точку $q_1 = q_{t_1}$ раньше, чем q_s.



Точки Максвелла и оптимальность

Лемма

Если M и H вещественно-аналитические, то нормальная геодезическая не может быть оптимальной после точки Максвелла.

Теорема

Пусть $q(t)$ — нормальная геодезическая, которая является проекцией единственной, с точностью до скалярного кратного, экстремали. Тогда $q(t)$ теряет свою глобальную оптимальность либо в первой точке Максвелла, либо в первой сопряженной точке (в первой из этих двух точек).

Симметрийный метод для построения оптимального синтеза

- Общий метод построения оптимального синтеза для субримановых задач с большой группой симметрий (например, для левоинвариантных СР задач на группах Ли).
- Предположим, что для любого $q_1 \in M$ существует кратчайшая $q(t)$, соединяющая q_0 и q_1.
- Более того, предположим для простоты, что все анормальные геодезические одновременно являются нормальными. Таким образом, все геодезические параметризуются нормальным экспоненциальным отображением

$$\mathrm{Exp} : \ N \to M, \qquad N = C \times \mathbb{R}_+, \quad C = T^*_{q_0} M \cap \left\{ H = \frac{1}{2} \right\}.$$

- Если это отображение биективно на $M \setminus \{q_0\}$, то любая точка $q_1 \in M$ связана с q_0 единственной геодезической $q(t)$, и в силу существования кратчайших эта геодезическая является оптимальной.

Симметрийный метод для построения оптимального синтеза

- Но обычно экспоненциальное отображение не биективно из-за точек Максвелла.
- Обозначим через $t^1_{\mathrm{Max}}(\lambda) \in (0, +\infty]$ первое время Максвелла вдоль геодезической $\mathrm{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda \in C$. Рассмотрим множество Максвелла в образе экспоненциального отображения $\mathrm{Max} = \left\{ \mathrm{Exp}(\lambda, t^1_{\mathrm{Max}}(\lambda)) \mid \lambda \in C \right\}$.
- Введем ограниченное экспоненциальное отображение

$$\mathrm{Exp} \, : \, \widetilde{N} \to \widetilde{M},$$
$$\widetilde{N} = \left\{ (\lambda, t) \in N \mid t < t^1_{\mathrm{Max}}(\lambda) \right\}, \qquad \widetilde{M} = M \setminus \mathrm{cl}(\mathrm{Max}).$$

- Это отображение вполне может быть биективным, и если это так, то любая точка $q_1 \in \widetilde{M}$ связана с q_0 единственным кандидатом на оптимальную геодезическую; в силу существования эта геодезическая является оптимальной.
- Свойство биективности ограниченного экспоненциального отображения часто можно доказать с помощью следующей классической теоремы Адамара.

Симметрийный метод построения оптимального синтеза

Теорема (Адамар)

Пусть $F : X \to Y$ — гладкое отображение между гладкими многообразиями, для которого выполняются следующие условия:

(1) $\dim X = \dim Y$,

(2) *X, Y связны, а Y односвязно,*

(3) *F невырождено,*

(4) *F является* собственным *(прообраз компактного множества компактен).*

Тогда F — диффеоморфизм, следовательно, биекция.

Симметрийный метод построения оптимального синтеза

- Обычно сложно описать все точки Максвелла, но часто это можно сделать для группы симметрий G экспоненциального отображения.
- Предположим, что у нас есть отображение ε, действующее как в прообразе, так и в образе экспоненциального отображения: $\varepsilon : N \to N, \qquad \varepsilon : M \to M$. Это отображение называется *симметрией экспоненциального отображения*, если она коммутирует с этим отображением: $\varepsilon \circ \mathrm{Exp} = \mathrm{Exp} \circ \varepsilon$ и если она сохраняет время: $\varepsilon(\lambda, t) = (\,*\,, t), \qquad (\lambda, t) \in N$.
- Предположим, что существует группа G симметрий экспоненциального отображения. Если
$$\varepsilon(\lambda, t) \neq (\lambda, t) \text{ и } \mathrm{Exp} \circ \varepsilon(\lambda, t) = \mathrm{Exp}(\lambda, t) = q_1, \qquad \varepsilon \in G, \quad (\lambda, t) \in N,$$
то q_1 является точкой Максвелла.
- Таким образом можно описать *первое время Максвелла, соответствующее группе G*: $t^G_{\mathrm{Max}} : C \to (0, +\infty]$.
- Затем можно применить вышеописанную процедуру с ограниченным экспоненциальным отображением и построить оптимальный синтез.

Задачи

1. Исследуйте задачу Дидоны:
   1.1 Выпишите принцип максимума Понтрягина для этой задачи.
   1.2 Вычислите нормальные и анормальные траектории, параметризованные длиной дуги.
   1.3 Докажите, что проекции нормальных траекторий на плоскость (x, y) — прямые или окружности.
   1.4 Докажите оптимальность нормальных траекторий, проецирующихся в прямые на плоскости (x, y).
   1.5 Вычислите первое сопряженное время и первую точку Максвелла вдоль нормальных траекторий, проецирующихся в окружности на плоскости (x, y).
   1.6 Постройте оптимальный синтез.
2. Исследуйте субриманову задачу на группе Картана (обобщенную задачу Дидоны), см. слайд 5:
   2.1 Выпишите принцип максимума Понтрягина для этой задачи.
   2.2 Вычислите анормальные траектории, параметризованные длиной дуги.
   2.3 Докажите, что все экстремальные траектории задачи Дидоны «вкладываются» в СР задачу на группе Картана.