Примеры и постановки задач управления. Гладкие многообразия, группы Ли и алгебры Ли. Элементы симплектической геометрии

(Лекция 1)

Ю.Л. Сачков

yusachkov@gmail.com

http://control.botik.ru

Курс «Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли»

Школа-конференция «Неголономные дни в Переславле»

26–30.08.2024

План лекции

1. Примеры задач оптимального управления.
2. Постановка задачи оптимального управления.
3. Гладкие многообразия и векторные поля.
4. Группы Ли, алгебры Ли и левоинвариантные задачи оптимального управления.
5. Элементы симплектической геометрии.
6. Принцип максимума Понтрягина.
7. Решение задач оптимального управления.
8. Субримановы задачи.
9. Симметрийный метод исследования оптимальности.

Примеры задач оптимального управления: 1. Остановка поезда

Дано:

- материальная точка массы $m > 0$ с координатой $x \in \mathbb{R}$,
- сила F, ограниченная по модулю величиной $F_{\max} > 0$,
- начальное положение x_0 и начальная скорость $\dot{x}_0$ материальной точки.

Найти:

- силу F, которая переводит точку в начало координат с нулевой скоростью за минимальное время.

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\\
&\dot{x}_2 = u, \qquad |u| \le 1,\\
&(x_1, x_2)(0) = (x_0, \dot{x}_0), \qquad (x_1, x_2)(t_1) = (0, 0),\\
&t_1 \to \min .
\end{aligned}
$$

2. Машина Маркова-Дубинса

Дано:

- Модель машины: единичный вектор, расположенный в произвольной точке плоскости,
- Машина движется вперед с единичной скоростью и может при этом поворачиваться с угловой скоростью, по абсолютной величине не больше единицы.

Найти:

- Движение машины из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за минимальное время.

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = \cos\theta, \qquad && q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2_{x,y} \times S^1_\theta = M, \\
&\dot{y} = \sin\theta, \qquad && |u| \le 1, \\
&\dot{\theta} = u, && \\
&q(0) = q_0, \qquad && q(t_1) = q_1, \qquad t_1 \to \min .
\end{aligned}
$$

3. Субриманова задача на группе движений плоскости

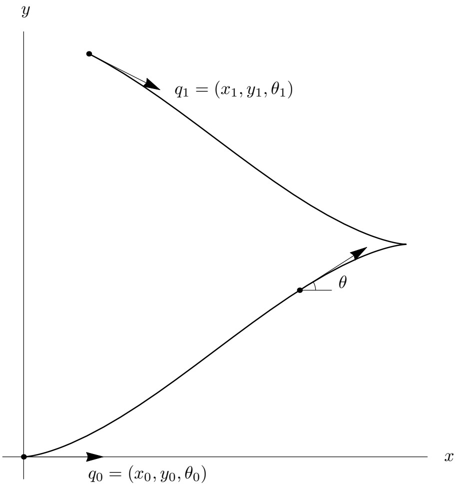
Дано:

- Пусть машина может двигаться вперед и назад с линейной скоростью $u \in \mathbb{R}$ и при этом поворачиваться с угловой скоростью $v \in \mathbb{R}$.

Найти:

- Движение машины из заданного начального состояния в заданное конечное состояние по кратчайшей кривой.
- Расстояние измеряется в пространстве положений и ориентаций машины.

3. Субриманова задача на группе движений плоскости



$$\dot{x} = u\cos\theta, \qquad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1,$$

$$\dot{y} = u\sin\theta, \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\dot{\theta} = v,$$

$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2}\, dt \to \min.$$

4. Эластики Эйлера

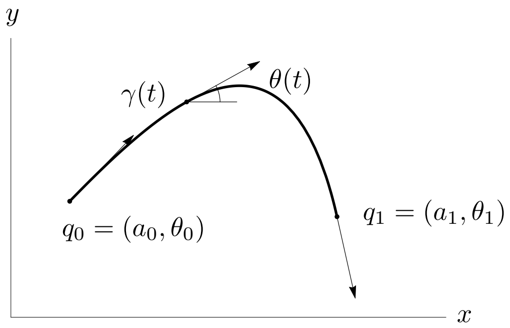
Дано:

- Однородный упругий стержень длины l на плоскости.
- У стержня закреплены конечные точки и касательные на концах.

Найти:

- Форму стержня.

4. Эластики Эйлера



$$\dot{x} = \cos\theta, \qquad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1,$$
$$\dot{y} = \sin\theta, \qquad u \in \mathbb{R},$$
$$\dot{\theta} = u,$$
$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$
$t_1 = l$ длина стержня,
$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} u^2\, dt \to \min .$$

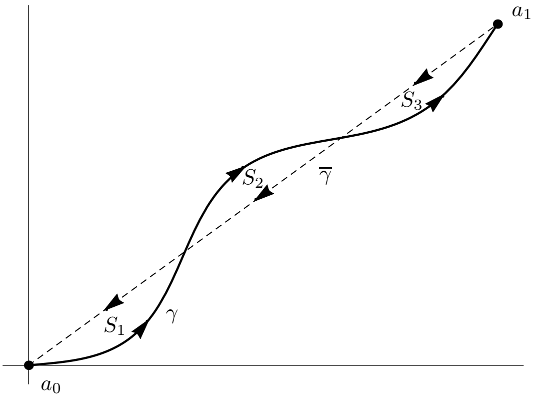
5. Задача Дидоны

Дано:

- Точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$,
- кривая $\overline{\gamma} \subset \mathbb{R}^2$, соединяющая a_1 с a_0,
- число $S \in \mathbb{R}$.

Найти:

- Кратчайшую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую a_1 с a_0, для которой замкнутая кривая $\gamma \cup \overline{\gamma}$ ограничивает в $\mathbb{R}^2$ область алгебраической площади S.



Динамические системы и управляемые системы

- *Гладкая динамическая система* или *обыкновенное дифференциальное уравнение*:
$$\dot{q} = f(q), \qquad q \in M.$$
- Детерминированность: при начальном условии $q(0) = q_0$ и времени $t > 0$ существует единственное решение $q(t)$.
- *Управляемая система*:
$$\dot{q} = f(q, u), \qquad q \in M, \quad u \in U. \tag{1}$$
- *Управление* $u = u(t) \in U \quad \Rightarrow \quad$ неавтономное ОДУ
$$\dot{q} = f(q, u(t)). \tag{2}$$
- Вместе с начальным условием $q(0) = q_0$, ОДУ (2) определяет единственное решение — *траекторию* $q_u(t)$.
- Предположения о регулярности управления $u(\cdot)$: кусочно-постоянно, L^∞, ...

Множества достижимости

- *Множество достижимости* управляемой системы (1) из точки q_0 за произвольное время:

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{q_u(t) \mid q_u(0) = q_0, \quad u \in L^\infty([0, t], U), \quad t \geq 0\}.$$

- множество достижимости из точки q_0 за время $t_1 \geq 0$:

$$\mathcal{A}_{q_0}(t_1) = \{q_u(t_1) \mid q_u(0) = q_0, \quad u \in L^\infty([0, t_1], U)\},$$

- множество достижимости из точки q_0 за время, не превосходящее $t_1 \geq 0$:

$$\mathcal{A}_{q_0}(\leq t_1) = \bigcup_{t=0}^{t_1} \mathcal{A}_{q_0}(t).$$

Задача управляемости

Управляемая система (1) называется:

- *глобально (вполне) управляемой* если $\mathcal{A}_{q_0} = M$ для любого $q_0 \in M$,
- *глобально управляемой из точки* $q_0 \in M$, если $\mathcal{A}_{q_0} = M$,
- *локально управляемой в* q_0, если $q_0 \in \operatorname{int} \mathcal{A}_{q_0}$,
- *локально управляемой за малое время в* q_0, если $q_0 \in \operatorname{int} \mathcal{A}_{q_0}(\leq t_1)$ для любого $t_1 > 0$.

- Задача локальной управляемости: необходимые условия и достаточные условия для произвольной размерности пространства состояний M, однако критерии локальной управляемости имеются только для случая $\dim M = 2$.
- Задача глобальной управляемости: условия глобальной управляемости только для очень симметричных систем (линейных систем, левоинвариантных систем на группах Ли).

Задача оптимального управления

- Пусть $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$. Тогда обычно q_0, q_1 соединяются континуумом траекторий
- *Функционал качества*, который необходимо минимизировать:

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(q, u)\, dt.$$

- *Задача оптимального управления*:

$$\begin{aligned} &\dot{q} = f(q, u), \qquad q \in M, \quad u \in U, \\ &q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1, \\ &J = \int_0^{t_1} \varphi(q, u)\, dt \to \min. \end{aligned}$$

- Другие важные задачи математической теории управления: эквивалентность, стабилизация, наблюдаемость, ...

Гладкие многообразия

Гладкое k-мерное *подмногообразие* $M \subset \mathbb{R}^n$ обычно определяется одной из следующих эквивалентных способов:

(a) неявно системой регулярных уравнений:

$$f_1(x) = \cdots = f_{n-k}(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x}\right) = n - k,$$

(b) или регулярной параметризацией:

$$x = \Phi(y), \qquad y \in \mathbb{R}^k, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\operatorname{rank}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = k.$$

Абстрактное гладкое *многообразие* M (не вложенное в $\mathbb{R}^n$) определяется через систему взаимно согласующихся карт (локальных координат).

Касательные векторы и пространства

Отображение гладких многообразий называется *гладким*, если оно гладко (класса C^∞) в локальных координатах.

Касательное пространство к гладкому подмногообразию $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in M$ для двух приведенных выше определений подмногообразия определяется следующим образом:

(a) $T_x M = \operatorname{Ker} \frac{\partial f}{\partial x}(x)$,

(b) $T_x M = \operatorname{Im} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y)$, $x = \Phi(y)$.

Для заданного гладкого отображения $F : M \to N$ между гладкими многообразиями, для любого $q \in M$ *дифференциал* есть отображение $F_{*q} : T_q M \to T_{F(q)} N$, определенное следующим образом:

$$F_{*q} v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\gamma(t)),$$

где $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — гладкая кривая такая, что $\gamma(0) = q$, $\dot{\gamma}(0) = v$.

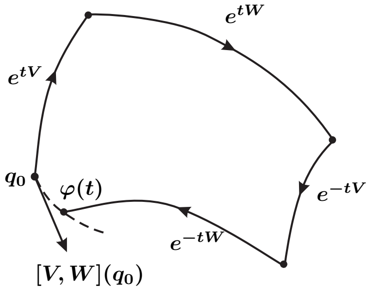
Гладкие векторные поля и их коммутативность

- Гладким *векторным полем* на многообразии M называется гладкое отображение $M \ni q \mapsto V(q) \in T_q M$. Обозначение: $V \in \mathrm{Vec}(M)$.
- *Траектория векторного поля* V через точку $q_0 \in M$ есть решение задачи Коши $\dot{q}(t) = V(q(t)), \quad q(0) = q_0$.
- Предположим, что траектория $q(t)$ существует во все времена $t \in \mathbb{R}$, тогда обозначим $e^{tV}(q_0) := q(t)$. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов $e^{tV} : M \to M$ представляет собой *поток* векторного поля V.
- Будем говорить, что векторные поля V и W *коммутируют*, если их потоки коммутируют:
$$e^{tV} \circ e^{sW} = e^{sW} \circ e^{tV}, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$
- В общем случае векторные поля V и W не коммутируют и кривая
$$\varphi(t) = e^{-tW} \circ e^{-tV} \circ e^{tW} \circ e^{tV}(q_0)$$
удовлетворяет неравенству $\varphi(t) \neq q_0$, $t \in \mathbb{R}$.
- В качестве меры некоммутативности векторных полей V и W принимается главный нетривиальный член разложения Тейлора $\varphi(t)$, $t \to 0$.

Скобка Ли векторных полей

- *Коммутатор* (*скобка Ли*) векторных полей V, W в точке q_0 определяется как $[V, W](q_0) := \frac{1}{2}\ddot{\varphi}(0)$, так что

$$\varphi(t) = q_0 + t^2[V, W](q_0) + o(t^2), \qquad t \to 0.$$



- В локальных координатах $[V, W] = \frac{\partial W}{\partial x} V - \frac{\partial V}{\partial x} W$.

Пример: Машина на плоскости

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad V = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial}{\partial\theta}.$$

$$[V,W] = \frac{\partial W}{\partial q}V - \frac{\partial V}{\partial q}W = 0\cdot V - \begin{pmatrix}0 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 0 & \cos\theta\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}.$$

Другой способ вычисления скобок Ли через коммутатор дифференциальных операторов:

$$[V,W] = V\circ W - W\circ V = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$= \sin\theta\frac{\partial}{\partial x} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пример: Машина на плоскости

- Наглядный смысл векторных полей $V, W, [V, W]$ для автомобиля в плоскости:
  - V порождает движение вперед,
  - W порождает поворот автомобиля на месте,
  - $[V, W]$ порождает движение автомобиля в направлении, перпендикулярном его ориентации, что физически запрещено.
- Выбирая попеременное движение автомобиля:

  вперед $\to$ вращ. против часовой стрелки $\to$ назад $\to$ вращ. по часовой стрелке,

  мы можем инфинитезимально перемещать машину в запрещенном направлении.
- Итак, скобка Ли $[V, W]$ порождается автомобилем при парковке в ограниченной области.

Группы Ли

- Множество G называется *группой Ли*, если оно есть гладкое многообразие, наделенное такой групповой структурой, что следующие отображения являются гладкими:

$$(g,h) \mapsto gh, \qquad G \times G \to G,$$
$$g \mapsto g^{-1}, \qquad G \to G.$$

  Обозначим через $\mathrm{Id} \in G$ единицу группы G.

- Обозначим через $\mathbb{R}^{n \times n}$ множество всех действительных $n \times n$ матриц. Набор

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det g \neq 0\}$$

  очевидно, является группой Ли относительно матричного произведения, оно называется *общей линейной группой*.

- Основным примером групп Ли являются *линейные группы Ли*, т.е. замкнутые подгруппы группы Ли $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Алгебры Ли

- Множество $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли*, если оно представляет собой векторное пространство, наделенное бинарной операцией $[\cdot\,,\,\cdot]$, называемой *скобкой Ли*, которая удовлетворяет следующим свойствам:
  (1) билинейность: $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z], \qquad x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}, \quad a,\ b \in \mathbb{R},$
  (2) кососимметричность: $[x, y] = -[y, x], \qquad x,\ y \in \mathfrak{g},$
  (3) тождество Якоби: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \qquad x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}.$
- Для любого элемента g группы Ли G отображение $L_g\ :\ h \mapsto gh, \qquad G \to G$, g называется *левым сдвигом*. Векторное поле $X \in \mathrm{Vec}(G)$ называется *левоинвариантным*, если оно сохраняется левыми сдвигами: $(L_g)_*(X(h)) = X(gh), \qquad g,\ h \in G.$
- Скобка Ли левоинвариантных векторных полей левоинвариантна. Таким образом, левоинвариантные векторные поля на группе Ли G образуют алгебру Ли $\mathfrak{g}$, называемую *алгеброй Ли группы Ли* G.
- Существует линейный изоморфизм $\mathfrak{g} \cong T_{\mathrm{Id}} G$, определяющий структуру алгебры Ли на $T_{\mathrm{Id}} G$. Таким образом, касательное пространство $T_{\mathrm{Id}} G$ также называется алгеброй Ли группы Ли G.

Примеры групп Ли G и их алгебр Ли $\mathfrak{g}$

- Общая линейная группа: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$, ее алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$ со скобкой Ли $[A,B] = AB - BA$.
- Специальная линейная группа: $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \operatorname{tr} A = 0\}$.
- специальная ортогональная группа: $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^{\mathsf{T}} = \mathrm{Id},\ \det A = 1\}$, $\mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A + A^{\mathsf{T}} = 0\}$.
- специальная евклидова группа:
$$\mathrm{SE}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} Y & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \mid Y \in \mathrm{SO}(n),\ b \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathrm{GL}(n+1),$$
$$\mathfrak{se}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{so}(n),\ b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Левоинвариантные векторные поля и задачи оптимального управления

- Для группы Ли G касательное пространство есть $T_g G = (L_g)_* T_{\mathrm{Id}} G$, $g \in G$.
- В случае линейной группы Ли $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $(L_g)_* A = gA$, $g \in G$, $A \in T_{\mathrm{Id}} G$.
- Таким образом, *левоинвариантные* векторные поля на линейной группе Ли G имеют вид

$$V(g) = gA, \qquad g \in G, \quad A \in T_{\mathrm{Id}} G.$$

- Управляемая система на группе Ли G

$$\dot{g} = f(g, u), \qquad g \in G, \quad u \in U,$$

называется *левоинвариантной*, если его динамика сохраняется левыми сдвигами:

$$(L_h)_* f(g, u) = f(hg, u), \qquad g, \ h \in G, \quad u \in U.$$

- Задача оптимального управления на G называется *левоинвариантной*, если ее динамика и функционал стоимости сохраняются при левых сдвигах.
- Если задача оптимального управления левоинвариантна на группе Ли, мы можем положить $g(0) = \mathrm{Id}$.

Примеры левоинвариантных задач оптимального управления

Левоинвариантные задачи на группе движений плоскости

$$\mathrm{SE}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \theta \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}),\ x, y \in \mathbb{R} \right\}:$$

- Машина Маркова-Дубинса,
- Субриманова задача на группе движений плоскости,
- Эластики Эйлера.

Левоинвариантная задача на группе Гейзенберга

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}^3 \right\}:$$

- Задача Дидоны.

Элементы симплектической геометрии

- Пусть M — n-мерное многообразие. Объединение $TM = \bigsqcup_{q \in M} T_q M = \{(q, v) \mid q \in M,\ v \in T_q M\}$ называется его *касательным расслоением*.
- Если $(q_1, \ldots, q_n)$ — локальные координаты на M, то любой касательный вектор $v \in T_q M$ имеет разложение $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial q_i}$. Итак, $(q_1, \ldots, q_n;\ v_1, \ldots, v_n)$ — локальные координаты на TM.
- Для любой точки $q \in M$ двойственное пространство $(T_q M)^* = T_q^* M$ называется *кокасательным пространством* к M в q. Дизъюнктное объединение $T^* M = \bigsqcup_{q \in M} T_q^* M = \{(q, p) \mid q \in M,\ p \in T_q^* M\}$ называется *кокасательным расслоением*.
- Если $(q_1, \ldots, q_n)$ — локальные координаты на M, то любой ковектор $\lambda \in T^* M$ имеет разложение $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i \, dq_i$. Таким образом, $(q_1, \ldots, q_n;\ p_1, \ldots, p_n)$ — это локальные координаты на $T^* M$, называемые *каноническими координатами*.
- *каноническая проекция* есть $\pi \colon T^* M \to M, \quad T_q^* M \ni \lambda \mapsto q \in M$.

Элементы симплектической геометрии

- *Дифференциальная 1-форма Лиувилля* $s \in \Lambda^1(T^*M)$ определяется следующим образом:

$$\langle s_\lambda, w \rangle = \langle \lambda, \pi_* w \rangle, \qquad \lambda \in T^*M, \quad w \in T_\lambda(T^*M).$$

  В канонических координатах на T^*M: $\qquad s = p\,dq.$
- Каноническая *симплектическая структура* на T^*M — это дифференциальная 2-форма $\sigma = ds \in \Lambda^2(T^*M)$. В канонических координатах: $\sigma = dp \wedge dq = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.
- *Гамильтониан* (*функция Гамильтона*) — это произвольная функция $h \in C^\infty(T^*M)$.
- *Гамильтоново векторное поле* $\vec{h} \in \mathrm{Vec}(T^*M)$ с функцией Гамильтона h определяется равенством $dh = \sigma(\,\cdot\,, \vec{h})$. В канонических координатах:

$$h = h(q, p),$$

$$\vec{h} = \frac{\partial h}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial h}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Элементы симплектической геометрии

- Соответствующая *гамильтонова система ОДУ* имеет вид

$$\dot{\lambda} = \vec{h}(\lambda), \qquad \lambda \in T^*M.$$

- В канонических координатах:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial h}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial h}{\partial q}, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial h}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial h}{\partial q_i}, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n.$$

- *скобка Пуассона* гамильтонианов $h, g \in C^\infty(T^*M)$ — это гамильтониан $\{h, g\} \in C^\infty(T^*M)$, определяемый равенствами

$$\{h, g\} = \vec{h}g = \sigma(\vec{h}, \vec{g}).$$

- В канонических координатах:

$$\{h, g\} = \frac{\partial h}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial h}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Лемма

Пусть $a, b, c \in C^\infty(T^*M)$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

(1) $\{a, b\} = -\{b, a\}$,

(2) $\{a, a\} = 0$,

(3) $\{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0$,

(4) $\{\alpha a + \beta b, c\} = \alpha\{a, c\} + \beta\{b, c\}$,

(5) $\{ab, c\} = \{a, c\}b + a\{b, c\}$,

(6) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{d}$, $d = \{a, b\}$.

Теорема (Нётер)

Пусть $a, h \in C^\infty(T^*M)$. *Тогда*

$$a(e^{t\vec{h}}(\lambda)) \equiv \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \{h, a\} = 0.$$

Элементы симплектической геометрии

Опишем теперь последнюю необходимую нам конструкцию симплектической геометрии — *линейный на слоях T^*M гамильтониан*. Пусть $X \in \mathrm{Vec}(M)$. Соответствующий линейный на слоях гамильтониан T^*M определяется следующим образом: $h_X(\lambda) = \langle \lambda, X(q) \rangle, \qquad q = \pi(\lambda)$.

В канонических координатах: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial q_i}, \qquad h_X(q,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i$.

Лемма

Пусть $X, Y \in \mathrm{Vec}(M)$. Тогда:

(1) $\{h_X, h_Y\} = h_{[X,Y]}$,

(2) $[\vec{h}_X, \vec{h}_Y] = \vec{h}_{[X,Y]}$,

(3) $\pi_* \vec{h}_X = X$.

Векторное поле $\vec{h}_X \in \mathrm{Vec}(T^*M)$ называется *гамильтоновым лифтом* векторного поля $X \in \mathrm{Vec}(M)$.

Задачи

Формализуйте следующие задачи как задачи оптимального управления. Какие из них являются левоинвариантными задачами на группах Ли?

1. Дан маятник, совершающий малые колебания под действием силы, ограниченной по абсолютной величине. Найти силу, которая переводит маятник из произвольного положения и скорости в устойчивое равновесие за минимальное время.
2. Дана сфера, катящаяся без проскальзывания и прокручивания по горизонтальной плоскости. Заданы начальная и конечная конфигурация сферы (точки контакта и ориентации в пространстве). Требуется перекатить сферу из начальной конфигурации в конечную вдоль кратчайшей кривой.
3. Рассмотрим следующее естественное обобщение задачи Дидоны. Зададим, кроме двух точек (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, соединяющей их кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$ и числа $S \in \mathbb{R}$, также точку на плоскости $c \in \mathbb{R}^2$. Необходимо найти кратчайшую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), такую, чтобы область $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченная парой кривых γ_0 и γ, имела заданные алгебраическую площадь S и центр масс c.

Гамильтонианы принципа максимума Понтрягина

- Вернемся к задаче оптимального управления.

$$\dot{q} = f(q,u), \qquad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m,$$
$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$
$$J = \int_0^{t_1} \varphi(q,u)\,dt \to \min,$$
$$t_1 \text{ фиксировано или свободно.}$$

- Определим семейство *гамильтонианов ПМП*

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f(q,u) \rangle + \nu\varphi(q,u), \qquad \nu \in \mathbb{R}, \quad u \in U, \quad \lambda \in T^*M, \quad q = \pi(\lambda).$$

Формулировка принципа максимума Понтрягина

Теорема (ПМП)

Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $q(t), t \in [0, t_1]$, оптимальны в задаче с фиксированным t_1, то существуют кривая $\lambda_t \in \mathrm{Lip}([0, t_1], T^*M)$, $\lambda_t \in T^*_{q(t)}M$ и число $\nu \leq 0$ такое, что почти для всех $t \in [0, t_1]$ выполняются следующие условия:

(1) $\dot{\lambda}_t = \vec{h}^{\nu}_{u(t)}(\lambda_t)$,

(2) $h^{\nu}_{u(t)}(\lambda_t) = \max\limits_{w \in U} h^{\nu}_{w}(\lambda_t)$,

(3) $(\lambda_t, \nu) \neq (0, 0)$.

Если терминальное время t_1 свободно, то к (1)–(3) добавляется следующее условие:

(4) $h^{\nu}_{u(t)}(\lambda_t) \equiv 0$.

Кривая λ_t, удовлетворяющая ПМП, называется *экстремальной*, кривая $q(t)$ — *экстремальной траекторией*, управление $u(t)$ — *экстремальным управлением*.