

# Геометрия выпуклых областей в $\mathbb{R}P^2$ Конусы и кубические дифференциалы

Роланд Хильдебранд

МФТИ, СколТех

Неголономные Дни  
Переславль-Залесский, август 2024 г.

# План

- конусы, близкие к ортанту
- конусы, близкие к эллипсоидальному
- результат [Dumas, Wolf 2015] про многочлены на  $\mathbb{C}$
- поведение  $U$  на границе  $\Omega$  и граница конуса
- метрики Блашке с непрерывными симметриями

## Связь кубического дифференциала с конусами

пусть даны

- $\Omega \subset \mathbb{C}$  — односвязная область
- $U : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная функция

кроме  $U = 0$ ,  $\Omega = \mathbb{C}$

чтобы восстановить конус, нужно

- решить уравнение Ванга на метрику  $e^U$
- решить задачу Коши на подвижный репер
- установить асимптотику репера на границе

## Уравнение на подвижный репер

задаём произвольно начальное значение репера  
 $F = (e^{-u/2}f_x, e^{-u/2}f_y, f) \in SL(3, \mathbb{R})$  в точке  $z_0 \in \Omega$  и решаем задачу Коши

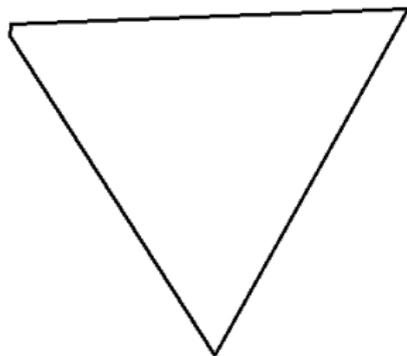
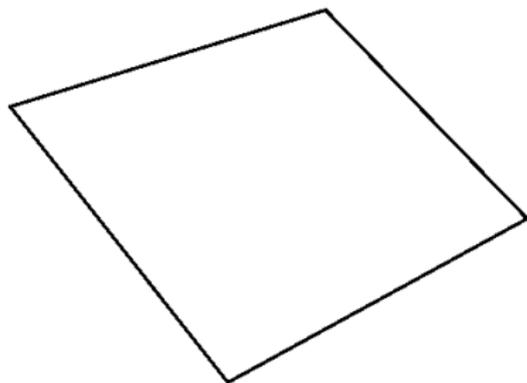
$$F_x = F \begin{pmatrix} -e^{-u} \operatorname{Re} U & \frac{u_y}{2} + e^{-u} \operatorname{Im} U & e^{u/2} \\ -\frac{u_y}{2} + e^{-u} \operatorname{Im} U & e^{-u} \operatorname{Re} U & 0 \\ e^{u/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$F_y = F \begin{pmatrix} e^{-u} \operatorname{Im} U & -\frac{u_x}{2} + e^{-u} \operatorname{Re} U & 0 \\ \frac{u_x}{2} + e^{-u} \operatorname{Re} U & -e^{-u} \operatorname{Im} U & e^{u/2} \\ 0 & e^{u/2} & 0 \end{pmatrix}$$

здесь  $z = x + iy$ ,  $x, y$  вещественные координаты на  $\Omega$

## Близкие к ортанту конусы

компактные 2-х мерные сечения конуса  $K$  разные в разных базисах  $\mathbb{R}^3$

пример: многогранный конус с 4 гранями



все четырёхугольники проективно эквивалентны

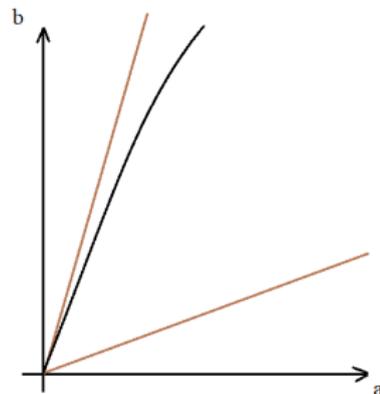
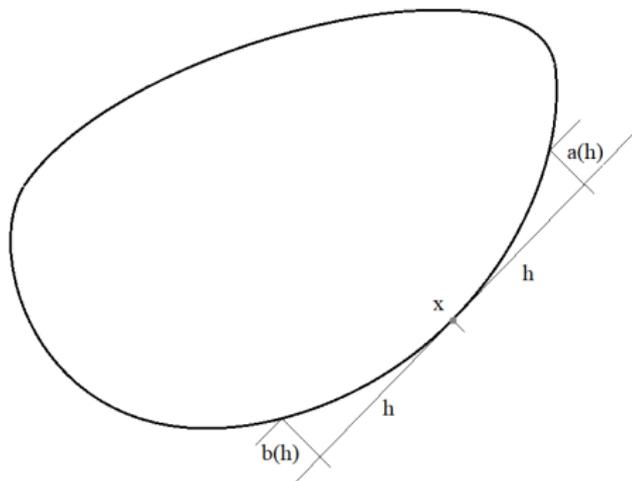
можно получить сечение  $K$  сколь угодно близкое к треугольнику

## Близкие к ортанту конусы

следующие условия эквивалентны [Benoist, Hulin 2014]:

- кривизна отделена от нуля:  $\sup_{\Omega} K < 0$
- $\mathbb{R}_+^3$  отделён от орбиты  $K$  под действием  $SL(3, \mathbb{R})$
- $\Omega = \mathbb{D}$  и  $U$  ограничено в гиперболической метрике, т.е.,  $\sup_{z \in \mathbb{D}} |U(z)|(1 - |z|^2)^3 < \infty$
- граница конуса  $\partial K$  — класса  $C^1$ , строго выпуклая и *квази-симметричная*

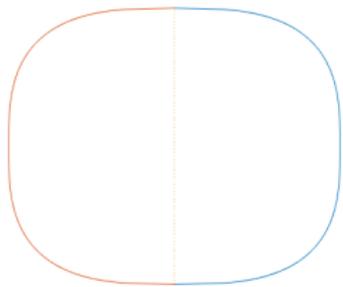
## Квази-симметричные кривые



в каждой точке  $x$  кривая  $(a(h), b(h))$  должна находиться в секторе, отделённом от осей

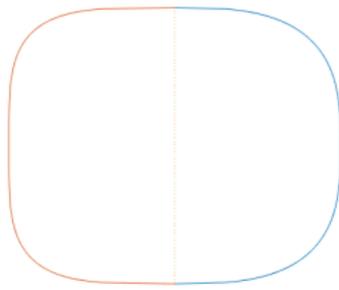
# Примеры

$$-(1 - |y^3|)^{1/3} \leq x \leq (1 - |y^3|)^{1/3}$$



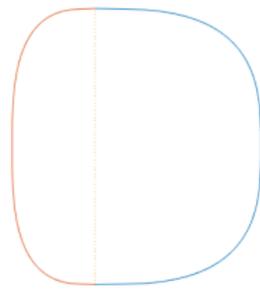
квази-симметрично

$$-(1 - |y^3|)^{1/3} \leq x \leq (1 - |y^4|)^{1/4}$$



не квази-симметрично

$$-\frac{1}{2}(1 - |y^3|)^{1/3} \leq x \leq (1 - |y^3|)^{1/3}$$



квази-симметрично

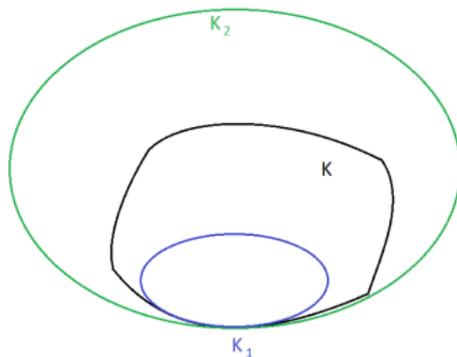
единичный шар в норме  $\|\cdot\|_p$  квази-симметричный даже если одну половину сжать или растянуть на постоянный фактор  
комбинация половин шаров от разных норм  $\|\cdot\|_p$  нарушает квази-симметричность

# План

- конусы, близкие к ортанту
- конусы, близкие к эллипсоидальному
- результат [Dumas, Wolf 2015] про многочлены на  $\mathbb{C}$
- поведение  $U$  на границе  $\Omega$  и граница конуса
- метрики Блашке с непрерывными симметриями

# Сильно выпуклая граница

пусть конус  $K$  вложен между эллипсоидальными конусами  $K_1, K_2$ , которые имеют общий граничный луч с касанием границ 2-го порядка



достаточно иметь сильно выпуклый  $C^3$  отрезок на границе аффинного сечения  $K$

## Близость к эллипсоидальному конусу

### Теорема (Benoist, Hulin 2013)

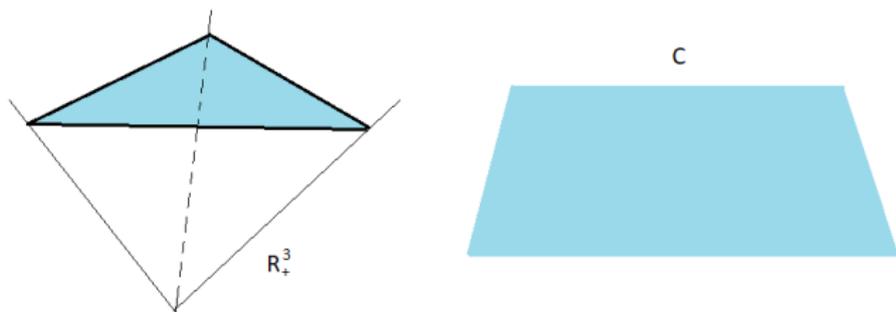
*Пусть  $K_1 \subset K \subset K_2$  как на предыдущем слайде,  $\Omega \subset \mathbb{R}P^2$  — проекция  $K^\circ$ , оснащённая метрикой Блашке. Тогда для любого  $\epsilon$  найдётся аффинная карта на  $\mathbb{R}^2$ , содержащая  $\Omega$ , такая что на доли  $> 1 - \epsilon$  области  $\Omega$  метрика Блашке ближе, чем  $\epsilon$ , к гиперболической метрике.*

на самом деле это касается только окрестности луча касания  $K_1, K_2$

# План

- конусы, близкие к ортанту
- конусы, близкие к эллипсоидальному
- результат [Dumas, Wolf 2015] про многочлены на  $\mathbb{C}$
- поведение  $U$  на границе  $\Omega$  и граница конуса
- метрики Блашке с непрерывными симметриями

# Ортант



$K = \mathbb{R}_+^3$  соответствует случаю  $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $U \equiv 1$

$U \equiv \text{const} \neq 0$  эквивалентно  $U \equiv 1$ :

$z \mapsto \tilde{z} = \alpha z$  и  $U dz^3 = \tilde{U} d\tilde{z}^3$  даёт

$$\tilde{U} = \alpha^{-3} U$$

# Ортант

решение уравнения Ванга

$$|U|^2 = \frac{1}{2}e^{3u} - \frac{1}{4}e^{2u}\Delta u$$

даёт  $e^u \equiv \sqrt[3]{2}$

задача Коши на подвижный репер решается явно

$$F_x = F \begin{pmatrix} -2^{-1/3} & 0 & 2^{1/6} \\ 0 & 2^{-1/3} & 0 \\ 2^{1/6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$F_y = F \begin{pmatrix} 0 & 2^{-1/3} & 0 \\ 2^{-1/3} & 0 & 2^{1/6} \\ 0 & 2^{1/6} & 0 \end{pmatrix}$$

и постоянные матрицы коэффициентов коммутируют

## Ортант

с начальным значением  $F(0) = I$  получаем решение

$$F(\sqrt[3]{2}z) = \exp \left( \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} y \right) \right)$$

последний столбец репера  $F$  задаётся

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x+\sqrt{3}y} \\ e^{x-\sqrt{3}y} \\ e^{-2x} \end{pmatrix}$$

постоянный матричный множитель абсорбируется в линейный изоморфизм  $K$

## Ортант

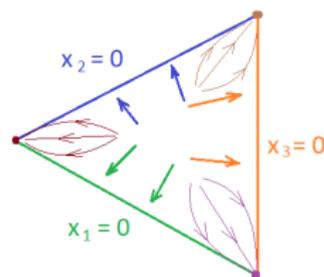
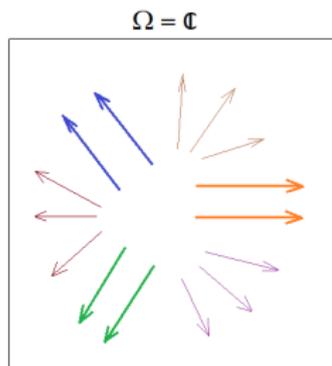
в итоге получаем биекцию  $\Omega = \mathbb{C}$  и поверхности уровня  $F_{can} = const$ , заданную

$$z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2^{-1/3}(x+\sqrt{3}y)} \\ e^{2^{-1/3}(x-\sqrt{3}y)} \\ e^{-2^{2/3}x} \end{pmatrix}$$

образ  $\Omega$  есть поверхность  $x_1 x_2 x_3 = 1$

она асимптотична границе ортанта  $K = \mathbb{R}_+^3$

# Ортант



феномен Стокса:

- по всем, кроме трёх направлений  $\frac{2\pi k}{3}$  ( $U dz^3 \sim \mathbb{R}_+$ ), стремимся к вершинам
- параллельные прямые по этим трём направлениям стремятся к точкам рёбер
- по всем, кроме трёх направлений  $\frac{(2k+1)\pi}{3}$  ( $U dz^3 \sim -R_+$ ), стремимся к вершине с касанием ребра

# Многочлен на $\mathbb{C}$

## Теорема (Dumas, Wolf 2015)

Пусть  $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $U(z) = p(z)$  — многочлен степени  $d$ . Тогда конус  $K \subset \mathbb{R}^3$ , соответствующий паре  $(\Omega, U)$ , является многогранным с  $d + 3$  гранями.

С другой стороны, каждый многогранный конус с  $d + 3$  гранями соответствует паре  $(\Omega, U) = (\mathbb{C}, p(z))$ , где  $p$  — многочлен степени  $d$ .

## Многочлен на $\mathbb{C}$

при обходе по окружности достаточно большого радиуса фаза  $U(z) \cdot z^3$  меняется на  $2(d+3)\pi$

т.е.,  $U dz^3$  становится  $d+3$  раза положительным и  $d+3$  раза отрицательным, если  $dz$  показывает по направлению от нуля

пусть  $p(z) = cz^d + O(z^{d-1})$

выберем сегмент раствора  $\frac{3\pi}{d+3}$  на  $\mathbb{C}$  и применим преобразование

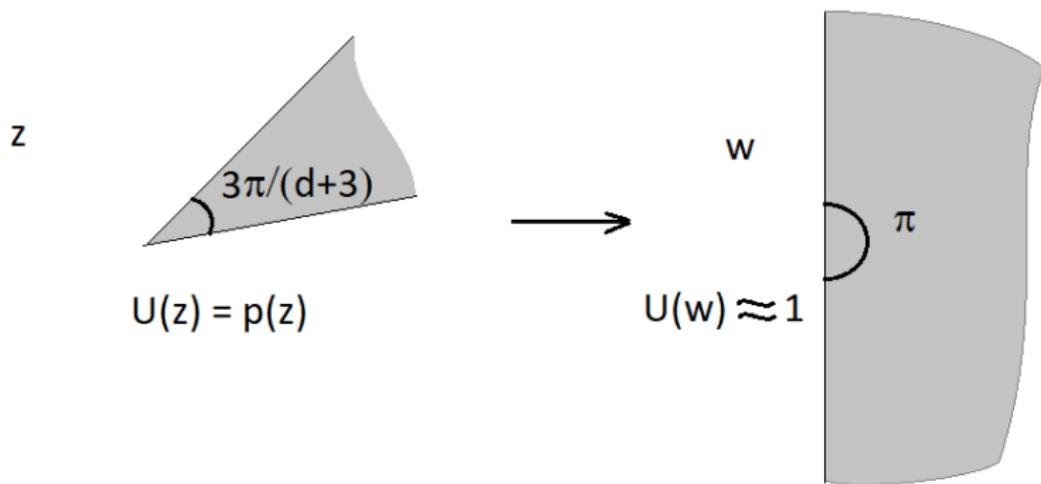
$$w = \beta z^k, \quad k = \frac{d+3}{3}, \quad \beta = \frac{\sqrt[3]{c}}{k}$$

тогда

$$U(z) dz^3 = (1 + o(1)) dw^3$$

сегмент перейдёт в полуплоскость, на которой  $U \approx 1$

## Многочлен на $\mathbb{C}$



в новой координатной системе решение близко к решению для ортанта

- $U$  отличается на  $O(|z|^{-1}) \sim O(|w|^{-1/k})$
- $u$  отличается на экспоненциально малую величину

## Интеграция подвижного репера

нужно проинтегрировать систему

$$F_x = FA, \quad F_y = FB$$

где  $A \approx \hat{A}$ ,  $B \approx \hat{B}$ , и  $\hat{A}, \hat{B}$  явно известны  
известно явное решение системы

$$\hat{F}_x = \hat{F}\hat{A}, \quad \hat{F}_y = \hat{F}\hat{B}$$

определим  $F = G\hat{F}$ , тогда

$$G_x = G\hat{F}(A - \hat{A})\hat{F}^{-1}, \quad G_y = G\hat{F}(B - \hat{B})\hat{F}^{-1}$$

$G$  остаётся конечным

всего проходим через  $d + 3$  вершин и  $d + 3$  граней

# План

- конусы, близкие к ортанту
- случай малых голоморфных функций на  $\mathbb{D}$
- результат [Dumas, Wolf 2015] про многочлены на  $\mathbb{C}$
- поведение  $U$  на границе  $\Omega$  и граница конуса
- метрики Блашке с непрерывными симметриями

## Представление кривых в $\mathbb{R}P^2$

класс изоморфности достаточно гладкой кривой  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  по отношению к действию  $SL(3, \mathbb{R})$  можно представить через ОДУ 3-й степени

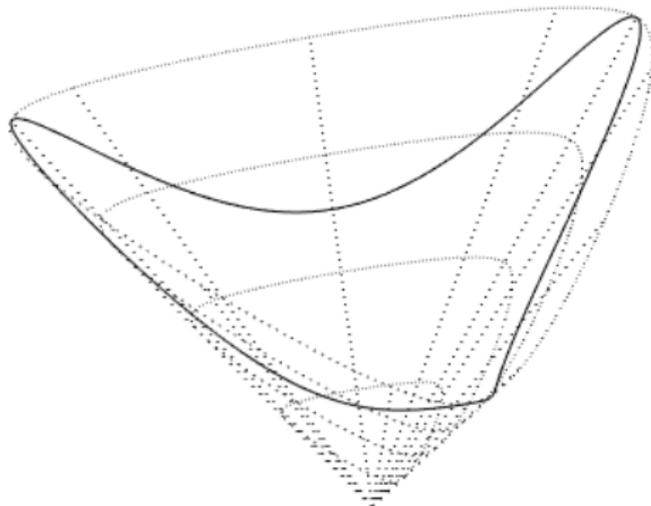
$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + (\dot{\alpha} + \beta)y = 0$$

здесь  $\alpha(t), \beta(t)$  — функции,  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  — векторно-значное решение

разделение на  $\alpha, \beta$  соответствует разложению дифференциального оператора на чётную и нечётную часть [Овсиенко, Табачников]

разные начальные условия  $y(0)$  приводят к изоморфным кривым

## Представление границы конуса



ОДУ можно использовать для представления гладких частей  
или всей границы конуса

## Пример: ОДУ с постоянными коэффициентами

ОДУ  $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$  с постоянными коэффициентами в случае общего положения имеет решение

$$y(t) = (e^{c_1 t}, e^{c_2 t}, e^{c_3 t})^T, \quad c_1 > c_2 > c_3$$

положим

$$p = \frac{c_1 - c_3}{c_2 - c_3}, \quad q = \frac{c_1 - c_3}{c_1 - c_2}$$

тогда  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $p, q \in (1, +\infty)$

решение удовлетворяет условию

$$y_2 = y_1^{1/p} y_3^{1/q}$$

и лежит на границе **степенного конуса**

$$K_p = \{(x, y, z)^T \mid |z| \leq x^{1/p} y^{1/q}, \quad x, y \geq 0\}$$

## Пример: ОДУ с постоянными коэффициентами

специальный случай  $c_2 = \frac{c_1 + c_3}{2}$

тогда  $p = 2$ , и  $K_p \simeq L_3$  — эллипсоидальный конус

специальный случай  $c_1 > c_2 = c_3$

положим  $\tau = (c_1 - c_2)t$ , тогда

$$y = (e^{c_1 t}, e^{c_2 t}, (c_1 - c_2)te^{c_2 t})^T = e^{c_2 t} (e^\tau, 1, \tau)^T$$

решение  $y(t)$  лежит на границе **экспоненциального конуса**

$$K_{\text{exp}} = \text{cl}\{(x, y, z)^T \mid y/z \geq e^{x/z}, z > 0\}$$

## Проективный кубический дифференциал

при репараметризации времени  $t$  функция  $\beta(t)$  преобразуется как кубический дифференциал [Halphen, Wilczynski, ...]  
т.е., после преобразования  $t \mapsto \tilde{t} = \tilde{t}(t)$  получаем

$$\beta(t) dt^3 = \tilde{\beta}(\tilde{t}) d\tilde{t}^3$$

где  $\tilde{\beta}$  — коэффициент  $\beta$  в новой параметризации  
функцию  $\beta(t)$  называют **проективным кубическим дифференциалом** кривой в  $\mathbb{R}P^2$

## Связь с кубическим дифференциалом $U$

### Теорема

Пусть  $\Omega = D$ ,  $U : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная функция, продолжающаяся достаточно гладко на окружность  $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ . Пусть конус  $K \subset \mathbb{R}^3$  соответствует паре  $(\Omega, U)$ . Проекция границы  $\partial K$  на  $\mathbb{R}P^2$  — выпуклая замкнутая кривая в  $\mathbb{R}P^2$ . Пусть  $\beta$  — проективный кубический потенциал этой кривой. Тогда  $\beta$  равно ограничению кубического дифференциала  $\operatorname{Re}(U(z) dz^3)$  на окружность  $\mathbb{T}$ .

## Связь с кубическим дифференциалом $U$

схема доказательства

- Benoist, Hulin:  $\Omega = \mathbb{D}$ ,  $U$  ограничено в гиперболической метрике
- $u$  можно аппроксимировать свёрткой  $|U|^2$  с функцией Грина линеаризации уравнения Ванга
- ограничение подвижного репера на окружность радиуса  $r$  удовлетворяет ОДУ 3-го порядка
- предел коэффициента  $\beta$  в ОДУ совпадает с  $Re(U(z) dz^3)$  на  $\mathbb{T}$

# Конформные изоморфизмы

подход: снизить размерность уравнения Ванга с помощью симметрии

область  $\Omega$  должна обладать непрерывной группой конформных изоморфизмов, сохраняющих  $|U|$

тогда  $u$  — постоянная на орбитах группы (в силу единственности решения), и уравнение Ванга сводится к ОДУ

непрерывные группы изоморфизмов областей в  $\mathbb{C}$  полностью классифицированы

# Конформные изоморфизмы

только некомпактные односвязные:

- плоскость со сдвигами
- плоскость с вращениями
- диск с вращениями
- полуплоскость со сдвигами вдоль границы
- полоса со сдвигами вдоль границ

если изоморфизм — сдвиг вдоль мнимой оси, то функции с инвариантным модулем

- $U \equiv \text{const}$
- $U = e^z$

если изоморфизм — вращение, то функции с инвариантным модулем

$$U = z^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

## Полуоднородные конусы

в следующих случаях также инвариантна фаза  $U$ , т.е., вся функция  $U$

- $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $U \equiv 1$
- $\Omega \sim \mathbb{D}$ ,  $U \equiv 0$
- $\Omega = (-1/2, 1/2) + i\mathbb{R}$ ,  $U \equiv e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, \pi)$
- $\Omega = (0, +\infty)$ ,  $U \equiv e^{i\varphi}$

модуль постоянной  $U$  можно абсорбировать растяжением / сжатием области

так как  $(\Omega, U)$  остаётся инвариантным, сдвиги не могут менять класс изоморфности конуса

симметрия должна соответствовать **линейным автоморфизмам самого конуса**

# Полуоднородные конусы

## Определение

Регулярный выпуклый конус  $K \subset \mathbb{R}^3$  называется **полу-однородным** если он обладает нетривиальной непрерывной группой автоморфизмов.

$\Omega$	$U \equiv \text{const}$	$K$	# парам.
$\mathbb{D}$	0	$L_3$	0
$\mathbb{C}$	1	$\mathbb{R}_+^3$	0
$ \operatorname{Re} z  < \frac{1}{2}$	$e^{i\varphi}$	асимметричный $K_p$	2
$\operatorname{Re} z > 0$	$e^{i\varphi},  \varphi  < \frac{\pi}{2}$	половинный $K_p^{1/2}$	1
$\operatorname{Re} z > 0$	$\pm i$	$K_{\text{exp}}$	0
$\operatorname{Re} z > 0$	$e^{i\varphi},  \varphi  > \frac{\pi}{2}$	$(K_p^{1/2})^*$	1

$u$  задаётся  $\wp$ -функциями Вейерштрасса [Z. Lin, E. Wang 2016]

## Полуоднородные конусы

асимметричный  $K_p$

$$\{(x, y, z)^T \mid -\alpha x^{1/p} y^{1/q} \leq z \leq \alpha^{-1} x^{1/p} y^{1/q}, x, y \geq 0\}$$

половинный  $K_p^{1/2}$

$$\{(x, y, z)^T \mid 0 \leq z \leq x^{1/p} y^{1/q}, x, y \geq 0\}$$

двойственный  $(K_p^{1/2})^*$

$$\{(x, y, z)^T \mid -\infty \leq z \leq x^{1/p} y^{1/q}, x, y \geq 0\}$$

представляющее  $\partial K$  ОДУ имеет постоянные коэффициенты

## Самоассоциированные конусы

в остальных случаях изометрия *меняет* фазу  $U$

- $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $U = e^z$  (без параметров)
- $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $U = z^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$  (дискретный параметр)
- $\Omega = R \cdot \mathbb{D}$ ,  $U = z^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (дискр. и непр. параметры)
- $\Omega = (-\infty, b) + i\mathbb{R}$ ,  $U = e^z$  (непрерывный параметр)
- $\Omega = (a, \infty) + i\mathbb{R}$ ,  $U = e^z$  (непрерывный параметр)
- $\Omega = (a, b) + i\mathbb{R}$ ,  $U = e^z$  (2 непрерывных параметра)

симметрия общего вида не соответствует линейному автоморфизму конуса

но умножение на фазу и применение симметрии вместе возвращают  $U$  в исходное состояние:

все ассоциированные с  $K$  конусы — снова сам  $K$

## Самоассоциированные конусы

схема решения

- уравнение Ванга решается явно: решение  $u$  задано трансцендентами Пенлеве типа III ( $D_7$ )
- асимптотика подвижного репера в случае гладкой границы даёт ОДУ  $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta \cdot \sin t \cdot y = 0$ ,  $\alpha, \beta = \text{const}$
- гладкая граница в пределе  $z \rightarrow \hat{z} \in \partial\Omega$
- полиэдральная граница в пределе  $z \rightarrow \infty$  и  $U \not\rightarrow 0$  (техника Dumas, Wolf)

вид границы  $\partial K$

- $\Omega = R \cdot \mathbb{D}$ : только гладкая, конус аналитический
- $\Omega = (a, b) + i\mathbb{R}$ : гладкая с двумя особыми лучами
- $\Omega = (-\infty, b) + i\mathbb{R}$ : гладкая с одним особым лучом
- $\Omega = \mathbb{C}$ : только полиэдральная
- $\Omega = (a, \infty) + i\mathbb{R}$ : частично гладкая, частично полиэдр.

## Самоассоциированные конусы

специальный случай  $\Omega = \mathbb{C}$

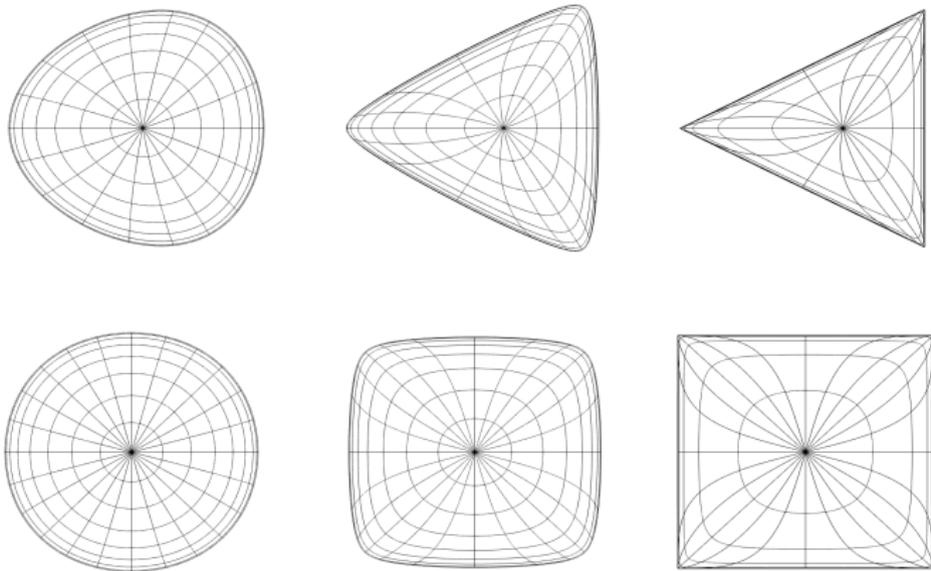
$U = z^k$ : конус над регулярным многогранником с  $k + 3$  гранями

$U = e^z$ : конус над выпуклой оболочкой множества

$$\{(1, n, n^2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

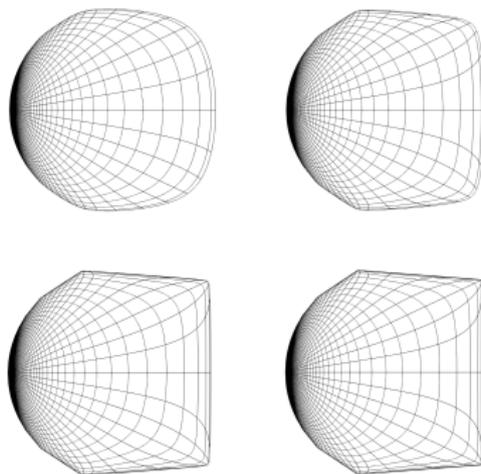
"многогранный" конус с бесконечным количеством граней

## Самоассоциированные конусы



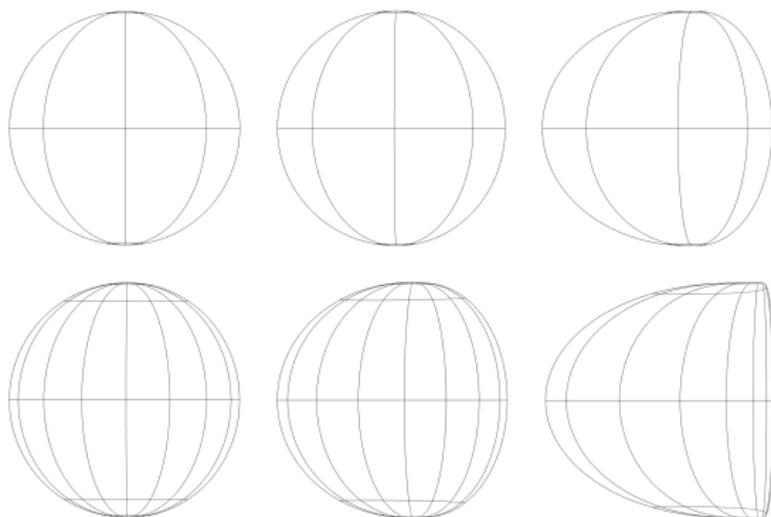
$\Omega = \{z \mid |z| < R\}$ ,  $U = z^k$  с полярной сеткой  
 $k = 0, 1; R = 1, 2, 4$  ( $R = +\infty$ : многогранные конусы)

## Самоассоциированные конусы



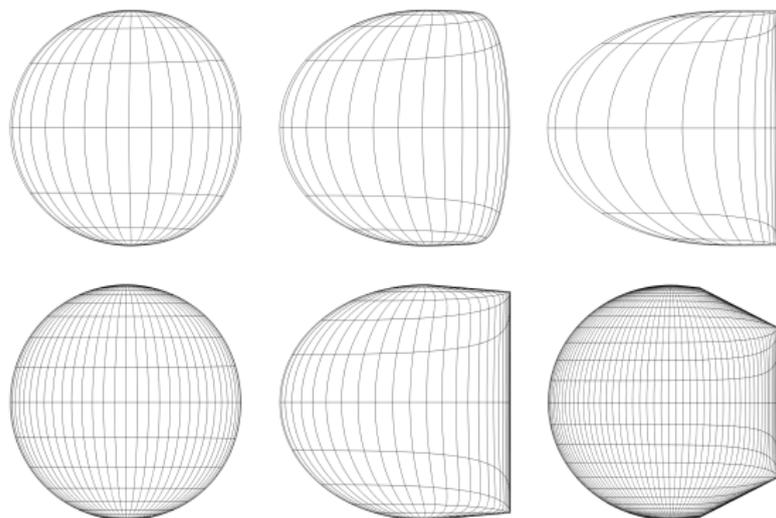
$\Omega = \{z \mid \operatorname{Re} z < b\}$ ,  $U = e^z$  с равномерной сеткой  
 $b = -2, -1, 0, 1$  ( $b = +\infty$  или  $\Omega = \mathbb{C}$ :  $\infty$ -гранный конус)  
аналитический с одним особым лучом

## Самоассоциированные конусы



$\Omega = \{z \mid a < \operatorname{Re} z < b\}$ ,  $U = e^z$  с равномерной сеткой  
 $(a, b) = (-3, 2); (-1, 0); (1, 2); (-4, -2); (-2, 0); (0, 2)$   
аналитический с двумя особенными лучами

## Самоассоциированные конусы



$\Omega = \{z \mid a < \operatorname{Re} z < b\}$ ,  $U = e^z$  с равномерной сеткой  
 $(a, b) = (-6, 2); (-4, 0); (-2, 2); (-12, -4); (-6, 2); (-14, 2)$   
 $b = +\infty$ : есть полиэдральный кусок

## Открытые вопросы

Конусы с метрикой Блашке, обладающей изометриями?

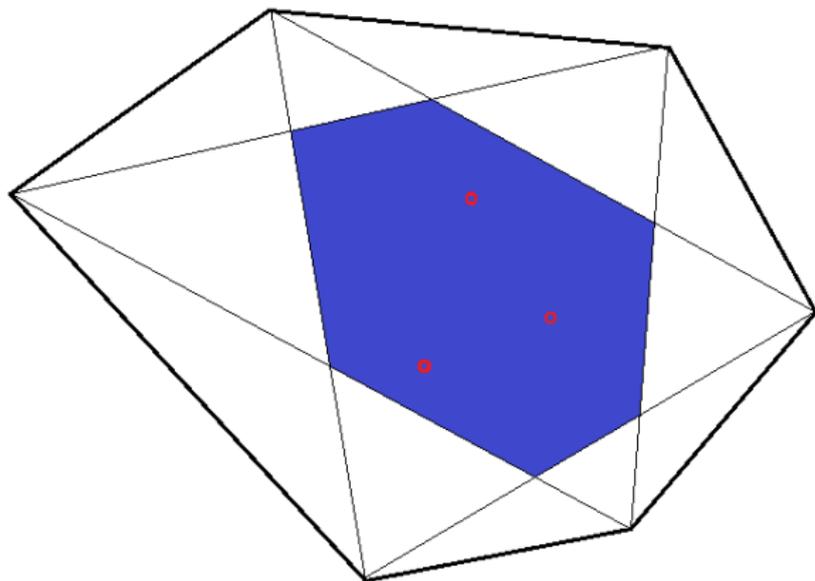
частный случай: конусы с большими группами линейных автоморфизмов

если уравнение Монжа-Ампера сведётся к ОДУ, возможно оно решится в спецфункциях

Какие конусы  $K \subset \mathbb{R}^3$  генерируют метрику Блашке, конформно изоморфную плоской ( $\Omega = \mathbb{C}$ )?

Гипотеза ограды (fence hypothesis): корни многочлена  $U(z) = p(z)$  лежат вне *ограды* в соответствующем многогранном конусе.

## Открытые вопросы



корни должны лежать в закрашенной области

Спасибо за внимание