

Геометрия выпуклых областей в $\mathbb{R}P^2$ Метрики на проективных областях

Роланд Хильдебранд

МФТИ, СколТех

Неголономные Дни
Переславль-Залесский, август 2024 г.

О чём лекции

сегодня

- приложение оптимального управления
- униформизация метрики Блашке в 2D случае
- ассоциированные семейства
- существование и единственность

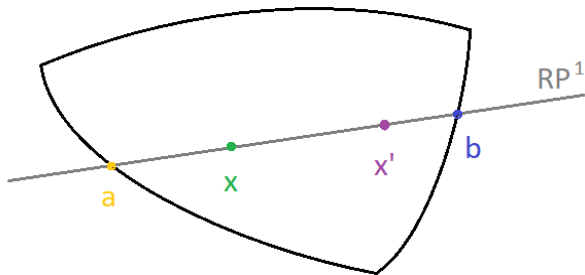
далее: соответствие кубических дифференциалов и конусов в \mathbb{R}^3

План

- сравнение метрик
- самосогласованный случай
- униформизация в 2D
- ассоциированные семейства
- существование и единственность

Метрика Гильберта

на множествах $\Omega \subset \mathbb{R}P^n$ определяется через двойное отношение в $\mathbb{R}P^1$



пусть a, x, x', b — координаты точек на карте в $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^n$
тогда

$$d(x, x') = \left| \log \frac{(b-x)(a-x')}{(b-x')(a-x)} \right|$$

Метрика Блашке

Лемма

Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — регулярный выпуклый конус, соответствующий выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}P^n$. Пусть F — канонический барьер на K ,

$$M = \{x \in K^\circ \mid F(x) = 0\} \subset K$$

гиперповерхность уровня.

Отождествим M с Ω . Тогда метрика $\nu^{-1}F'' = n^{-1}F''$, ограниченная на M , определяет метрику Блашке d_B на Ω .

Сравнение метрик

метрика Гильберта

- легко вычислима
- многие хорошие свойства не выполнены

метрика Блашке

- обладает хорошими свойствами
- трудно вычислима

Насколько эти метрики близки?

Оценка Толозана

Теорема (Tholozan 2017)

Пусть $C \subset \mathbb{R}P^n$ – собственное замкнутое выпуклое множество с непустой внутренней частью, $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – соответствующий регулярный конус.

Пусть $F : K^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ – логарифмично ν -однородная сильно выпуклая функция на K , не обязательно самосогласованная. Идентифицируем $M = \{x \mid F(x) = 0\}$ с $\Omega \subset C^\circ$. Пусть d_F – расстояние в метрике $\nu^{-1}F''$, ограниченной на M . Пусть d_H – расстояние в метрике Гильберта на Ω . Тогда для всех точек $x, y \in \Omega$ имеем соотношение

$$d_F(x, y) \leq \frac{1}{2}d_H(x, y) + 1.$$

если F – канонический барьер, получаем $d_F = d_B$

Редукция к 1D

оценка доказывается цепочкой неравенств

$$d_F(x, y) \leq l_F(x, y) \leq \frac{1}{2}d_H(x, y) + 1$$

здесь $l_F(x, y)$ — длина интервала $[x, y]$ в метрике $\nu^{-1}F''$

первое неравенство — путь по прямой не короче, чем кратчайший путь

второе неравенство — свойство метрик на интервале $[x, y]$

достаточно доказать теорему для $n = 1$

Случай $n = 1$

б.о.о. в аффинной карте на $\mathbb{R}P^1$ множество задано $C = [-1, 1]$
тогда $x \in (-1, 1)$ и расстояние задаётся через $t = \operatorname{artanh} x$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}d_H(x, x') &= \frac{1}{2} \left| \log \frac{1+x'}{1-x'} - \log \frac{1+x}{1-x} \right| = |\operatorname{artanh} x' - \operatorname{artanh} x| \\ &= |t' - t|\end{aligned}$$

для док-ва неравенства нужно отмаксимизировать $l_F(x, x')$ при фиксированных t, t' и сравнить с $d_H(x, x') = 2|t - t'|$

Инвариантность $f'' - f' \otimes f'$

пусть $f = \nu^{-1}F$

из логарифмичной однородности

$$f(\alpha x) = -\log \alpha + f(x), \quad \alpha > 0$$

следует

$$f'(x)[x] = -1, \quad f''(x)[x, x] = 1, \quad f''[x, h] = -f'(x)[h],$$

$$f'(\alpha x) = \alpha^{-1}f'(x), \quad f''(\alpha x) = \alpha^{-2}f''(x)$$

определим форму $h = f'' - f' \otimes f'$

Инвариантность $f'' - f' \otimes f'$

Лемма

Форма h неотрицательно определена с 1-мерным ядром.

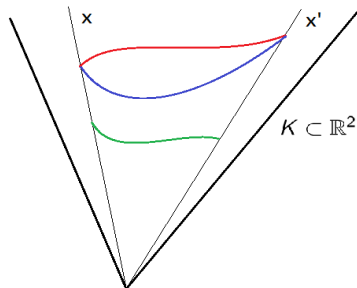
$$\begin{pmatrix} f'' & (f')^T \\ f' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ x^T \end{pmatrix} f'' (I \quad x)$$

$h = f'' - (f') \cdot 1^{-1} \cdot (f')^T$ — компонент Шура единицы

Лемма

Интеграл $\int_x^{x'} \sqrt{h(s)[ds, ds]}$ проективно инвариантен.

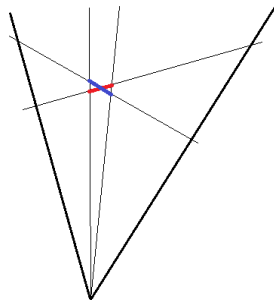
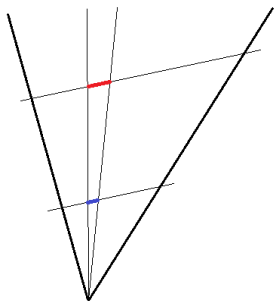
Инвариантность $f'' - f' \otimes f'$



все кривые имеют одинаковую длину

интеграл $\int_x^{x'} \sqrt{h(s)[ds, ds]}$ зависит только от начального луча x и конечного луча x'

Инвариантность $f'' - f' \otimes f'$



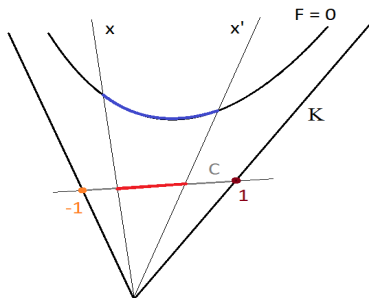
отрезки имеют одинаковую длину в метрике h

слева: $h(s)$ однородно со степенью -2 по s , ds со степенью 1

справа: радиальное направление s находится в ядре $h(s)$

$$h(s)[s, h] = -f'(s)[h] - f'(s)[s] \cdot f'(s)[h] = 0$$

Вычисление $I_F(x, x')$



- $I_F(x, x')$ равно интегралу от $\sqrt{h(s)[ds, ds]}$ по синей дуге, так как на ней $f'(s)[ds] \equiv 0$
- интеграл от $\sqrt{h(s)[ds, ds]}$ по синей дуге равен интегралу по красному сегменту
- сегмент расположим в аффинной карте так, что $C = [-1, 1]$

Вычисление $I_F(x, x')$

Лемма

Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — регулярный выпуклый конус, $C \subset \mathbb{R}P^1$ — его образ, расположенный в аффинной карте так, что $C = [-1, 1]$, F — логарифмично ν -однородная сильно выпуклая функция на K . Тогда расстояние в метрике, определённой на C^o посредством $\nu^{-1}F''$, вычисляется по формуле

$$I_F(x, x') = \int_x^{x'} \sqrt{f''(u) - f'(u)^2} du,$$

где $f(x)$ — ограничение функции $\nu^{-1}F$ на аффинную карту.

Задача максимизации длины

определим переменную

$$w = (1 - x^2)f'(x) - x$$

тогда ($t = \operatorname{artanh} x$)

$$\dot{w} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt} = (-2xf'(x) + (1 - x^2)f''(x) - 1)(1 - x^2)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} - w^2 + 1 &= (1 - x^2)^2 f''(x) - (2xf'(x) + 1)(1 - x^2) \\ &\quad - (1 - x^2)^2 f'(x)^2 + 2x(1 - x^2)f'(x) - x^2 + 1 \\ &= (1 - x^2)^2 (f''(x) - f'(x)^2) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot h(x) > 0 \end{aligned}$$

элемент длины равен $\sqrt{h}dx = \sqrt{\dot{w} - w^2 + 1} dt =: z dt$

Задача максимизации длины

Лемма

Пусть $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - C^1$ функция, удовлетворяющая условию

$$\dot{w} - w^2 + 1 > 0.$$

Тогда $w(t) \in [-1, 1]$ для всех t .

пусть $w(t_0) > 1$

- $\dot{w}(t_0) > w(t_0)^2 - 1 > 0$
- w строго монотонно растёт при $t \geq t_0$
- $w(t)$ ограничено снизу решением ОДУ $\dot{w} = w^2 - 1$
- уходим на бесконечность за конечное время

аналогично если $w(t_0) < -1$

Задача максимизации длины

получаем задачу вариационного исчисления

$$\int_t^{t'} \sqrt{\dot{w}^2 - w^2 + 1} dt \rightarrow \max$$

$$w : [t, t'] \rightarrow [-1, 1]$$

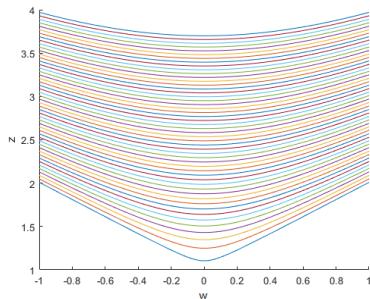
$$\text{уравнение Эйлера: } \ddot{w} = 4w + 6w\dot{w} - 4w^3$$

$$\text{общее решение: } z^2 - 2cz + 1 = w^2, \quad c - \text{константа}$$

на оптимальной траектории: $w[t, t'] = [-1, 1]$ — не реализуемо

$$\begin{aligned} l_F([x, x']) &< \frac{1}{2} d_H(x, x') + \log(1 + \sqrt{1 - e^{-d_H(x, x')}}) \\ &< \frac{1}{2} d_H(x, x') + \log 2 \end{aligned}$$

Задача максимизации длины



оптимальные траектории для разных $d_H(x, x')$

Лучшая оценка

Теорема

Пусть $C \subset \mathbb{R}P^n$ – собственное замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью, $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – соответствующий регулярный конус.

Пусть $F : K^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ – логарифмично ν -однородная сильно выпуклая функция на K , не обязательно самосогласованная, $M = \{x \mid F(x) = 0\}$. Пусть d_F – расстояние в метрике $\nu^{-1}F''$, ограниченной на M , l_F – длина сегмента в $\Omega = C^\circ$ в этой метрике. Пусть d_H – расстояние в метрике Гильберта на Ω . Тогда для всех точек $x, y \in \Omega$ имеем соотношение

$$d_F(x, y) \leq l_F(x, y) < \log \left(\exp\left(\frac{1}{2}d_H(x, y)\right) + \sqrt{\exp(d_H(x, y)) - 1} \right) < d_H(x, y) + \log 2.$$

План

- сравнение метрик
- **самосогласованный случай**
- униформизация в 2D
- ассоциированные семейства
- существование и единственность

Самосогласованные барьеры

допустим теперь, что дополнительно выполнено условие самосогласованности

$$|F'''(x)[h, h, h]| \leq 2(F''(x)[h, h])^{3/2}$$

полагая $f = \nu^{-1}F$, получим

$$|f'''(x)[h, h, h]| \leq 2\sqrt{\nu}(f''(x)[h, h])^{3/2}$$

проективный аналог f'' — форма $h = f'' - f' \otimes f'$

аналогично проективный аналог f''' — кубическая форма

$$C := f''' - 6 \cdot \text{sym}(f'' \otimes f') + 4 \cdot f' \otimes f' \otimes f'$$

Самосогласованные барьеры

Лемма

Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — регулярный конус, F — логарифмично ν -однородная сильно выпуклая функция на K , $f = \nu^{-1}F$. Тогда F самосогласованная тогда и только тогда, когда в аффинной карте на $\mathbb{R}P^n$, покрывающей соответствующую область Ω , справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & |f'''(x)[h, h, h] - 6f''(x)[h, h]f'[h] + 4(f'(x)[h])^3| \leq \\ & \leq 2 \frac{\nu - 2}{\sqrt{\nu - 1}} (f''(x)[h, h] - (f'(x)[h])^2)^{3/2} \end{aligned}$$

для всех $x \in \Omega$, $h \in T_x\Omega$.

Самосогласованные барьеры

какие дополнительные условия налагаются в $\mathbb{R}P^1$?

полагая

$$w = (1-x^2)f'(x) - x, \quad z = \sqrt{\dot{w} - w^2 + 1} = (1-x^2)\sqrt{f''' - (f')^2}$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{dx}{dt} \left(-\frac{2xz}{1-x^2} + (1-x^2)^2 \frac{f''' - 2f''f'}{2z} \right) \\ &= -2xz + (1-x^2)^3 \frac{f''' - 6f''f' + 4(f')^3}{2z} + (1-x^2) \frac{4f'z^2}{2z} \\ &= -2xz + (1-x^2)^3 \frac{f''' - 6f''f' + 4(f')^3}{2z} + 2(w+x)z \\ 2z\dot{z} &= (1-x^2)^3 (f''' - 6f''f' + 4(f')^3) + 4wz^2 \end{aligned}$$

Формулировка задачи оптимального управления

условие самосогласованности примет вид

$$|2\dot{z} - 4wz| \leq 2 \frac{\nu - 2}{\sqrt{\nu - 1}} z^2 =: 2\gamma z^2$$

получаем задачу оптимального управления

$$\max \int_t^{t'} z \, ds : \quad \dot{w} = z^2 + w^2 - 1, \quad \dot{z} = uz^2 + 2wz, \quad |u| \leq \gamma$$

в области $z > 0, w \in (-1, 1)$

дополнительное условие: функции $w(t), z(t)$ должны существовать на всём \mathbb{R}

Решение задачи оптимального управления

для постоянного управления $u = \text{const}$ ОДУ

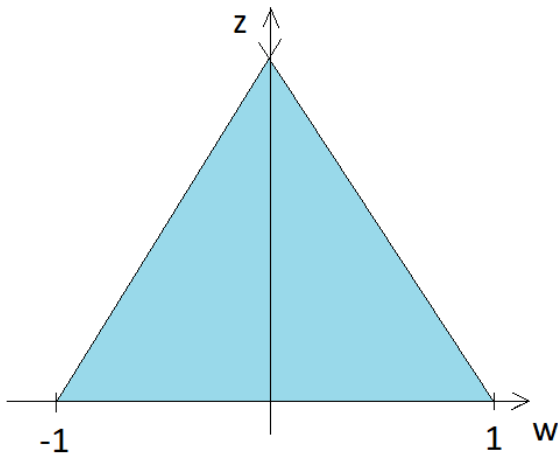
$$\dot{w} = z^2 + w^2 - 1, \quad \dot{z} = uz^2 + 2wz$$

решается аналитически

условие существования $w(t), z(t)$ на \mathbb{R} приводит к
дополнительным условиям

$$z \leq \sqrt{\nu - 1}(1 + w), \quad z \leq \sqrt{\nu - 1}(1 - w)$$

Решение задачи оптимального управления

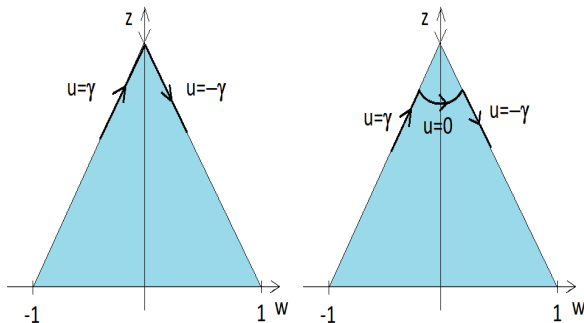


допустимая область в пространстве переменных w, z

Решение задачи оптимального управления

задача решается аналитически

оптимальные управления: $u = \pm\gamma$ и особый режим $u = 0$



решение для $t' - t \leq \log \frac{\nu}{\nu-2}$ (слева) и $t' - t > \log \frac{\nu}{\nu-2}$ (справа)

Результат

Теорема

Пусть $C \subset \mathbb{R}P^n$, $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\Omega = C^\circ$ — как выше.

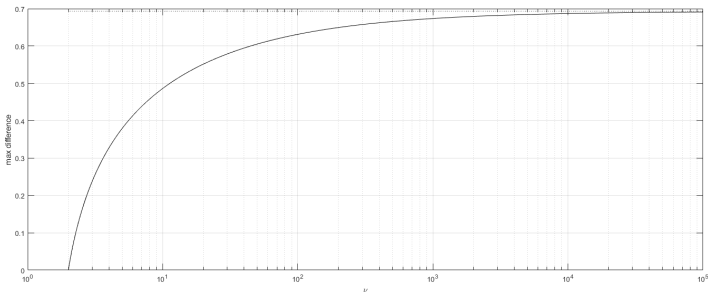
Пусть F — логарифмично ν -однородная сильно выпуклая самосогласованная функция на K , $M = \{x \mid F(x) = 0\}$. Пусть d_F — расстояние в метрике $\nu^{-1}F''$, ограниченной на M , l_F — длина сегмента в $\Omega = C^\circ$ в этой метрике, d_H — расстояние в метрике Гильберта. Тогда для всех $x, y \in \Omega$ имеем $d_F(x, y) \leq l_F(x, y)$ и

$$l_F(x, y) < \begin{cases} \frac{2\mu}{\nu} \log \frac{\nu(E-1)+2}{2}, & \frac{1}{2}d^H(x, y) \leq \log \frac{\nu}{\nu-2}, \\ \log \frac{(\mu-1)(\sqrt{E+1}+\sqrt{E-1})}{(\mu+1)(\sqrt{E+1}-\sqrt{E-1})} + \frac{2\mu}{\nu} \log \frac{2(\nu-1)}{\nu-2}, & \frac{1}{2}d^H(x, y) \geq \log \frac{\nu}{\nu-2}, \end{cases}$$

$$< \frac{1}{2}d_H(x, y) + \log 2 - \log \frac{\mu+1}{\mu-1} + \frac{2\mu}{\nu} \log \frac{2(\nu-1)}{\nu-2}$$

где $E = \exp(\frac{1}{2}d_H(x, y))$, $\mu = \sqrt{\nu-1}$.

Результат



- оценка не улучшаема
- константа достигается в пределе $d_H(x, y) \rightarrow \infty$
- при $\nu = 2$ конус эллиптический и метрики совпадают
- $\log 2$ достигается в пределе $\nu \rightarrow \infty$

Нижняя граница

нижнюю границу этой техникой можно получить только на длину сегмента $l_F(x, y)$

разницу невозможно ограничить константой

открытые вопросы

- можно ли улучшить оценку в случае метрики Блашке?
- насколько могут отличаться d_F и l_F ?
- нижняя граница для метрики Блашке?

План

- сравнение метрик
- самосогласованный случай
- **униформизация в 2D**
- ассоциированные семейства
- существование и единственность

Метрика и кубическая форма

на области Ω определены

- метрика $h = f'' - f' \otimes f'$ — симметричная квадратичная форма
- кубическая форма $f''' - 6 \cdot \text{sym}(f'' \otimes f') + 4 \cdot f' \otimes f' \otimes f'$

в координатной форме h, C заданы коэффициентами $h_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta\gamma}$
пусть $h^{\alpha\beta}$ — коэффициенты обратной матрицы h^{-1}

Лемма

Если h определяет метрику Бляшке, то

$$C_{\alpha\beta\gamma} h^{\alpha\beta} = 0.$$

Обратное утверждение тоже верно.

Случай $n = 2$

пусть $n = 2$, $\Omega \in \mathbb{R}P^2$, $K \subset \mathbb{R}^3$

тогда

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{111} & C_{112} \\ C_{112} & C_{122} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} C_{112} & C_{122} \\ C_{122} & C_{222} \end{pmatrix}$$

Ω — 2-мерное односвязное некомпактное риманово многообразии

Теорема об униформизации

Теорема

Односвязная риманова поверхность **конформно эквивалентна** либо комплексному единичному диску \mathbb{D} , либо комплексной плоскости \mathbb{C} , либо римановой сфере \mathbb{S} , оснащёнными, соответственно, гиперболической, евклидовой или сферической метрикой постоянной (гауссовой) кривизны $K = -1, 0, +1$.

Klein, Riemann, Schwarz, **Koebe**, **Poincaré**, Hilbert, Weyl, Radó ...
1880–1920

некомпактны только диск \mathbb{D} и плоскость \mathbb{C} с метриками

$$\frac{4|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}, \quad |dz|^2$$

Следствия теоремы униформизации

на Ω существует *глобальная карта*, параметризованная *комплексной* переменной $z \in \mathbb{D}$ (или z в конформно эквивалентной \mathbb{D} области) или $z \in \mathbb{C}$ такая, что

существуют скалярные поля \tilde{u}, u на Ω такие, что

- в случае \mathbb{D} : $h = e^{\tilde{u}} \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = e^u |dz|^2$
- в случае \mathbb{C} : $h = e^u |dz|^2$

в вещественных координатах $z = x + iy$ получаем

$$h = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^u \end{pmatrix}, \quad h^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-u} & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix}$$

откуда

$$C_{122} = -C_{111}, \quad C_{112} = -C_{222}$$

Голоморфный кубический дифференциал

определим комплексную функцию $U = \frac{1}{2}(C_{111} + iC_{222})$ на Ω
тогда $C = 2\operatorname{Re}(U(z)dz^3)$

Лемма

Функция U голоморфна на Ω и удовлетворяет уравнению Ванга

$$|U|^2 = \frac{1}{2}e^{3u} - \frac{1}{4}e^{2u}\Delta u = \frac{1}{2}e^{3u}(1 + K)$$

гауссова кривизна метрики $h = e^u|dz|^2$ задаётся

$$K = -\frac{1}{2}e^{-u}\Delta u \in [-1, 0]$$

здесь Δ — лапласиан:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Теорема Симона-Ванга

Теорема (Simon, Wang 1993)

- Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ — регулярный выпуклый конус. Тогда канонический барьер F на K задаёт решение (u, U) уравнения Ванга на односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с полной метрикой $h = e^u |dz|^2$ и голоморфной функцией U на Ω . Пара (u, U) определена с точностью до конформных изоморфизмов области.
- Каждая односвязная область Ω , оснащённая полной метрикой $h = e^u |dz|^2$ и голоморфным кубическим дифференциалом U , являющимся решением уравнения Ванга, определяют регулярный выпуклый конус $K \subset \mathbb{R}^3$, оснащённый каноническим барьером. Конус определён с точностью до линейных изоморфизмов с единичным определителем.

Восстановление конуса

пусть на Ω задано решение (u, U)

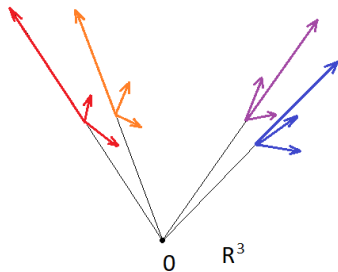
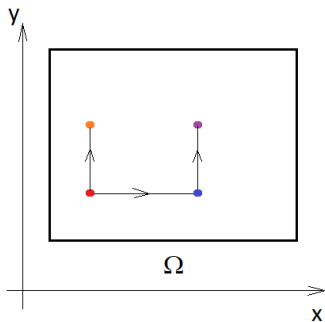
зададим начальное значение

$F = (e^{-u/2}f_x, e^{-u/2}f_y, f) \in SL(3, \mathbb{R})$ в точке $z_0 \in \Omega$ и решим задачу Коши

$$F_x = F \begin{pmatrix} -e^{-u} \operatorname{Re} U & \frac{u_y}{2} + e^{-u} \operatorname{Im} U & e^{u/2} \\ -\frac{u_y}{2} + e^{-u} \operatorname{Im} U & e^{-u} \operatorname{Re} U & 0 \\ e^{u/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$F_y = F \begin{pmatrix} e^{-u} \operatorname{Im} U & -\frac{u_x}{2} + e^{-u} \operatorname{Re} U & 0 \\ \frac{u_x}{2} + e^{-u} \operatorname{Re} U & -e^{-u} \operatorname{Im} U & e^{u/2} \\ 0 & e^{u/2} & 0 \end{pmatrix}$$

матричную функцию $F(z)$ называют **подвижный репер**

Восстановление конуса



- красный репер назначаем произвольно
- интеграцией по x получаем синий репер
- интеграцией по y получаем остальные

План

- сравнение метрик
- самосогласованный случай
- униформизация в $2D$
- ассоциированные семейства
- существование и единственность

Условия на u

Для каких полных метрик e^u на Ω функция U голоморфна [Simon, Wang 1993]?

$4 \log |U|^2 = \log(e^{3u} - e^{2u} \Delta u)$ должна быть гармонична вне нулей U

это даёт условие

$$\Delta \log(K + 1) = 6K$$

где K — кривизна, плюс условие интегрируемости в нулях U
эти условия также достаточны

для данного решения (u, U) пара $(u, e^{i\varphi} U)$ также является решением

множество решений разбивается на изометричные
ассоциированные семейства

разбиение наследуется классами изоморфности конусов $K \subset \mathbb{R}^3$

Ассоциированные семейства и двойственность

двойственный к K конус задаётся

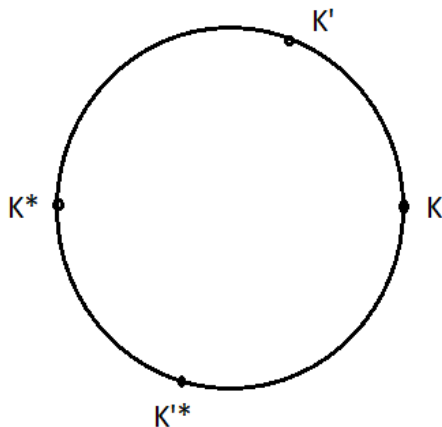
$$K^* = \{s \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, s \rangle \geq 0 \forall x \in K\}$$

если подвижный репер $F(z)$ задаёт поверхность $F = 0$ в K , то F^{-T} — подвижный репер, задающий поверхность $F_* = \text{const}$ в K^*

матричная функция F^{-T} решает задачу Коши для пары $(u, -U)$

если (u, U) генерирует конус K , то $(u, -U)$ генерирует K^*
в ассоциированном семействе конусов антиподы двойственны друг другу

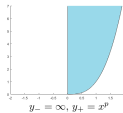
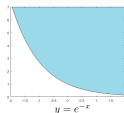
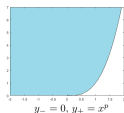
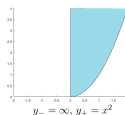
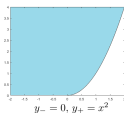
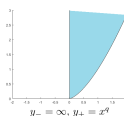
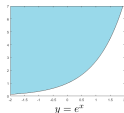
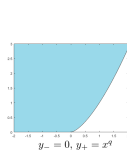
Ассоциированные семейства и двойственность



можно определить "дробную" двойственность

Пример ассоциированного семейства

$U = \text{const}$ на полуплоскости $\Omega = \mathbb{C}_+$ задаёт конусы над надграфиками разных функций ($q \in (1, 2)$, $p \in (2, \infty)$)



План

- сравнение метрик
- самосогласованный случай
- униформизация в $2D$
- ассоциированные семейства
- **существование и единственность**

Условия на U

существование и единственность решения u с **полной** метрикой при данном голоморфном U

- Wang 1997; Loftin 2001; Labourie 2007: Ω — универсальная накрывающая римановой поверхности рода $g \geq 2$
- Benoist, Hulin 2014: $\Omega = \mathbb{D}$ и $|U|^{2/3}|dz|^2$ ограничено в гиперболической метрике
- Dumas, Wolf 2015: $\Omega = \mathbb{C}$, $U \not\equiv 0$ — многочлен
- Wan, Au 1994; Q. Li 2019: $\Omega = \mathbb{D}$
- Q. Li 2019: $\Omega = \mathbb{C}$ и $U \not\equiv 0$

$U \equiv 0$ на \mathbb{C} невозможно

Голоморфные функции и конусы

Теорема

Классы конформной изоморфности пар (U, Ω) , где

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ — односвязная область
- $U : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция
- кроме пары $(0, \mathbb{C})$

состоят в **биективном соответствии** с классами линейной изоморфности регулярных выпуклых конусов $K \subset \mathbb{R}^3$.

открытый вопрос: какие конусы соответствуют \mathbb{C} ?

Структура решения

если $U \neq 0$, то локальным решением уравнения Ванга является функция

$$e^u = 2^{1/3} |U|^{2/3}$$

эта метрика **плоская**

полная метрика получается только в случае $U = \text{const}$ на $\Omega = \mathbb{C}$ и приводит к ортанту $K = \mathbb{R}_+^3$

если $U \equiv 0$, то кривизна $K \equiv -1$ и $e^u |dz|^2$ — метрика **гиперболического** пространства

в общем случае $e^u \sim |U|^{2/3}$ где $|U|$ большое метрика близка к гиперболической где $|U|$ маленькое

Спасибо за внимание