# Геометрия выпуклых областей в $\mathbb{R}P^2$
# Метрики на проективных областях

Роланд Хильдебранд

МФТИ, СколТех

Неголономные Дни
Переславль-Залесский, август 2024 г.

# О чём лекции

сегодня

- свойства проективных пространств $\mathbb{R}P^n$
- метрики Гильберта и Блашке на выпуклых множествах
- связь с конической (выпуклой) оптимизацией

далее: специальный случай $\mathbb{R}P^2$:

выпуклые области с метрикой Блашке

# План

- **проективное пространство**
- выпуклые множества в $\mathbb{R}P^n$ и метрики на них
- оптимизация: барьеры и конические программы
- сравнение метрик

# Определение и свойства

## Определение

*Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ определено как множество 1-мерных линейных подпространств пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.*

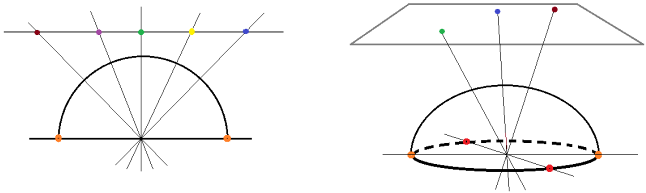
основные свойства

- гладкое многообразие
- размерность $n$
- компактно
- 2-однородно (определение ниже)

топология

- $\mathbb{R}P^1 \sim S^1$
- $n > 1$: $\mathbb{R}P^n \sim S^n/\mathbb{Z}_2$
- $n > 1$: $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{R}P^n \sim \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}P^{n-1}$

# Координатные системы



$\mathbb{R}P^n$ можно рассматривать как $\mathbb{R}^n$ с краем

координатная система на $\mathbb{R}^n$ покрывает почти всё многообразие $\mathbb{R}P^n$ — *аффинные карты*

переход между координатными системами дробно-линейный

$$x' = \frac{Ax + b}{\langle c, x \rangle + d}$$

# Подпространства

пусть $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — линйеное подпространство размерности $k+1$

множество прямых, лежащих в $L$, образует *проективное подпространство* размерности $k$ в $\mathbb{R}P^n$

в частности, 2-мерные подпространства $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ генерируют *прямые* в $\mathbb{R}P^n$

пусть $x \in \mathbb{R}P^n$ — точка, $0 \neq u \in T_x\mathbb{R}P^n$ — направление

тогда существует единственная прямая через $x$ по направлению $u$

прямые — **не** геодезические (нет понятия длины)

# Симметрии

в любой аффинной карте пространство $\mathbb{R}P^n$ выглядит одинаково

значит, отображения, переводящие одну карту в другую (или в ту же самую) сохраняют структуру пространства

группа невырожденных дробно-линейных преобразований

$$x' = \frac{Ax + b}{\langle c, x \rangle + d}$$

изоморфна $GL(n+1, \mathbb{R})/(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$(A, b, c, d) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & d \end{pmatrix}$$

# 2-однородность

## Определение

*Пусть $X$ — множество, $G$ — группа биекций множества $X$, $k \in \mathbb{N}_+$. Группа $G$ действует $k$-транзитивно на $X$ если для любых попарно различных точек $x_1, \dots, x_k \in X$ и попарно различных точек $z_1, \dots, z_k \in X$ найдётся элемент $g \in G$ такой, что*

$$g(x_j) = y_j, \ j = 1, \dots, k.$$

*В этом случае $X$ называется $k$-однородным.*

## Лемма

*Пространство $\mathbb{R}P^n$ 2-однородно.*

в $\mathbb{R}^{n+1}$

- переведём плоскость через $x, y$ в плоскость через $z, w$
- переведём базис $\{z, w\}$ плоскости в базис $\{x, y\}$

# 2-однородность $\mathbb{R}P^1$

любые две (различные) точки $z, w \in \mathbb{R}P^1$ можно отождествить с базисными осями

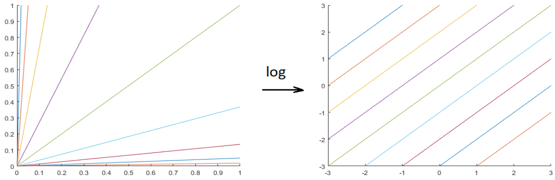
расстояние между точками определить невозможно

если зафиксировать две точки, остаются симметрии вида

$$(x_1, x_2) \mapsto (\alpha x_1, \beta x_2)$$

как отображаются точки $\mathbb{R}P^1$?

# 2-однородность $\mathbb{R}P^1$




отображение $x \mapsto y = \log x$ переводит лучи (точки $\mathbb{R}P^1$) в паралелльные прямые $y_1 - y_2 = const$

симметрия $(x_1, x_2) \mapsto (\alpha x_1, \beta x_2)$ переходит в

$$(y_1, y_2) \mapsto (y_1 + \log \alpha, y_2 + \log \beta)$$

$$y_1 - y_2 \mapsto y_1 - y_2 + \log \alpha - \log \beta$$

симметрия сдвигает прямые (точки $\mathbb{R}P^1$) на постоянную

# 3-однородность $\mathbb{R}P^1$

**Лемма**

*Пространство $\mathbb{R}P^1$ 3-однородное.*

- $x_1, x_2$ переводим в $y_1, y_2$ в силу 2-однородности
- возможно отражением переводим $x_3$ в тот же ортант, что и $y_3$
- сдвигом переводим прямую $x_3$ в прямую $y_3$

# Расстояние в $\mathbb{R}P^1$

пусть в $\mathbb{R}P^1$ зафиксированы две точки $a, b$

введём координатную систему в $\mathbb{R}^2$, в которых $a, b$ — базисные векторы

рассмотрим действие симметрии

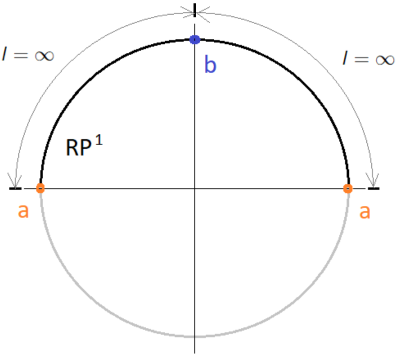
$$(x_1, x_2) \mapsto (\alpha x_1, \beta x_2)$$

для двух точек $x, x' \in \mathbb{R}P^1$, лежащих в положительном ортанте, имеем с обозначением $y = \log x$, $y' = \log x'$

$$\log \frac{x_1 x_2'}{x_2 x_1'} = (y_1 - y_2) - (y_1' - y_2') \mapsto (y_1 - y_2) - (y_1' - y_2')$$

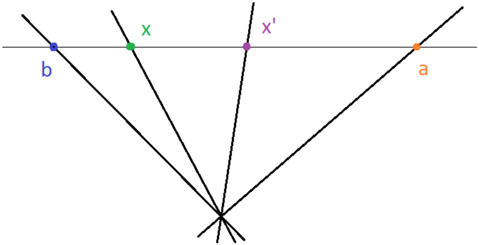
т.е., разницу $(y_1 - y_2) - (y_1' - y_2')$ можно использовать как инвариантное по отношению к симметрии расстояние на точках (лучах), попадающих в положительный ортант

# Расстояние в $\mathbb{R}P^1$




точки $a, b$ делят $\mathbb{R}P^1$ на два интервала бесконечной длины

# Расстояние в $\mathbb{R}P^1$




в аффинной карте из

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$$

получаем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} x-b \\ a-x \end{pmatrix}$$

# Расстояние в $\mathbb{R}P^1$

в итоге

$$d_{a,b}(x,x') = \left|\log \frac{(b-x)(a-x')}{(b-x')(a-x)}\right|$$

под логарифмом стоит *двойное отношение*

$$[x,x';b,a]$$

четырёх точек $a,b,x,x'$

# План

- проективное пространство
- **выпуклые множества в $\mathbb{R}P^n$ и метрики на них**
- оптимизация: барьеры и конические программы
- сравнение метрик

# Собственные выпуклые множества

**Определение**

*Подмножество $C \subset \mathbb{R}P^n$ называется собственным выпуклым множеством, если существует аффинная карта, в которой оно содержится и является выпуклым множеством в обычном смысле.*

нас будут интересовать *замкнутые* собственные выпуклые множества с непустой внутренностью

**Лемма**

*Пусть $C \subset \mathbb{R}P^n$ — замкнутое собственное выпуклое множество. Тогда существует аффинная карта, в которой $C$ заключено в шар единичного радиуса вокруг нуля.*

# Связь с конусами

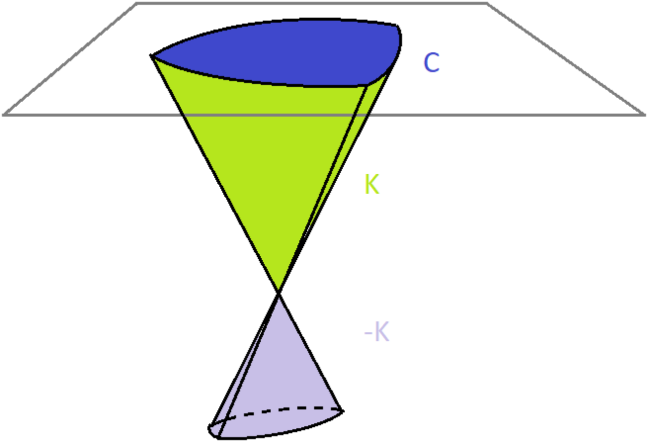
## Определение

*Выступающий (острый) замкнутый выпуклый конус $K \subset \mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью называется регулярным.*

## Лемма

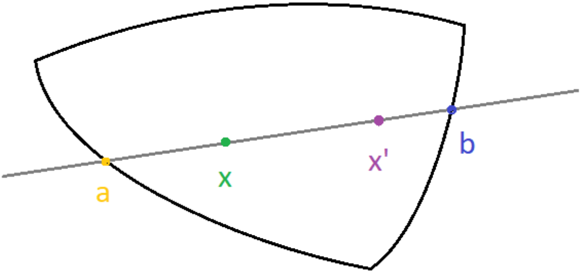
*Замкнутые собственные выпуклые множества $C \subset \mathbb{R}P^n$ с непустой внутренностью находятся в биекции с парами $\{K, -K\}$, где $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — регулярный выпуклый конус.*

# Связь с конусами



# Метрика Гильберта

проективно инвариантная метрика на ограниченных в аффинной карте открытых выпуклых множествах, не содержащих прямых




$$d(x,x') = \left|\log \frac{(b-x)(a-x')}{(b-x')(a-x)}\right|$$

# Метрика Гильберта

свойства

- легко вычислима
- в общем случае не риманова
- геодезические не единственны
- край множества бесконечно удалён
- на эллипсоиде совпадает с гиперболической метрикой в модели Клейна

# Метрика Блашке

есть ещё другая проективно инвариантная метрика на внутренности ограниченных выпуклых областей $\Omega$

**Теорема (Cheng, Yau; A.-M. Li и др.)**

*Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая ограниченная область. Тогда уравнение Монжа-Ампера*

$$\det u'' = (-u)^{-(n+2)}, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

*имеет единственное выпуклое решение.*

**Определение**

*Метрика $g = -\frac{u''}{u}$ на $\Omega$ называется метрикой Блашке.*

# Метрика Блашке

свойства

- аналитическая
- риманова
- край множества бесконечно удалён
- на эллипсоиде совпадает с гиперболической метрикой в модели Клейна
- на симплексе плоская евклидова в координатах $y = \log x$
- в общем случае трудно вычислима

# План

- проективное пространство
- выпуклые множества в $\mathbb{R}P^n$ и метрики на них
- **оптимизация: барьеры и конические программы**
- сравнение метрик

# Коническое программирование

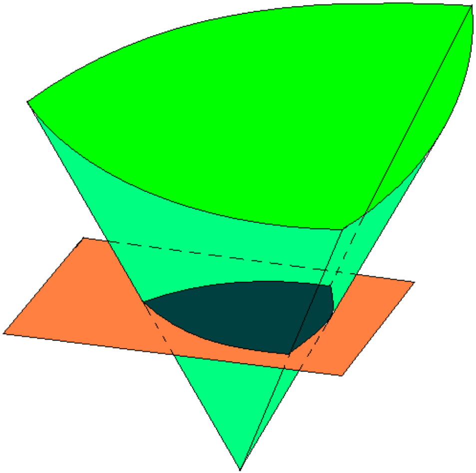
## Определение

*Коническая программа над регулярным конусом $K \subset \mathbb{R}^n$ – это задача оптимизации вида*

$$\min_{x \in K} \langle c, x \rangle : \quad Ax = b.$$

любая задача выпуклой оптимизации может быть приведена к конической программе

# Геометрическая интерпретация



допустимое множество представляется в виде пересечения конуса $K$ с аффинным подпространством

# Примеры

эффективно решаемые классы конических программ

- линейные программы (LP)
- квадратично-конические программы (SOCP)
- полу-определенные программы (SDP)
- геометрические программы (GP)

LP (линейные неравенства): $K = \mathbb{R}^n_+$

SOCP (выпуклые квадратичные ограничения): $K = \prod_j L_{m_j}$,

$L_m = \{(x_0, \dots, x_{m-1})^T \mid x_0 \geq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2}\}$

SDP (линейные матричные неравенства):

$K = \{A \in \mathcal{S}^{n \times n} \mid A \succeq 0\}$

GP (позиномиальные неравенства): $K$ содержит

$K_{\exp} = \mathrm{cl}\{(x, y, z) \mid z > 0,\ e^{y/z} \geq x/z\}$

# Двойственный конус

## Определение

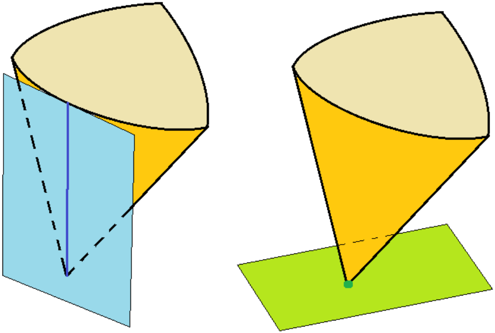
*Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — регулярный выпуклый конус.* Двойственным *к $K$ называется конус*

$$K^* = \{s \in \mathbb{R}_n = (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle s, x\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in K\}.$$

двойственный конус определён в *двойственном* векторном пространстве

для регулярного $K$ конус $K^*$ также является регулярным, и $(K^*)^* = K$

# Двойственный конус



граничный луч двойственного конуса

внутренний луч двойственного конуса

лучам двойственного конуса $K^*$ соответствуют опорные к прямому конусу $K$ гиперплоскости

# Двойственная задача

к прямой задаче конической оптимизации

$$\min_{x \in K} \langle c, x \rangle : \quad Ax = b$$

можно определить двойственную задачу

$$\max_{s \in K^*, y} \langle b, y \rangle : \quad s + A^T y = c$$

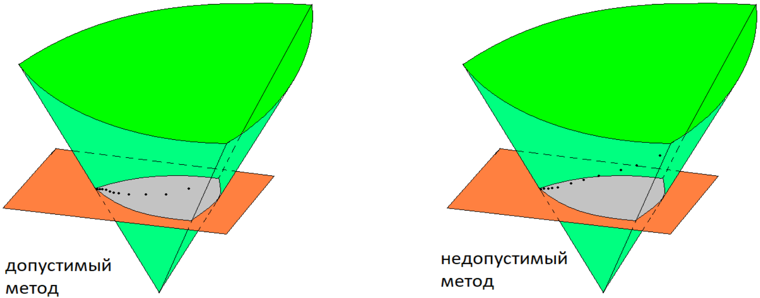
для любых *допустимых* $x, s, y$ имеем

$$\langle c, x \rangle - \langle b, y \rangle = \langle s + A^T y, x \rangle - \langle Ax, y \rangle = \langle s, x \rangle \geq 0$$

значения $\langle b, y \rangle$ — нижние оценки для оптимального значения прямой задачи

значения $\langle c, x \rangle$ — верхние оценки для оптимального значения двойственной задачи

# Методы внутренней точки




итеративные методы, генерирующие последовательность внутренних точек

используют *самосогласованный барьер* на конусе $K$

# Принцип методов внутренней точки

рассмотрим задачу

$$\min_{x \in K} \langle c, x \rangle : \quad Ax = b$$

сложность задачи заключается в нелинейном ограничении

введем пенализирующую функцию (барьер) $F : K^o \to \mathbb{R}$ на внутренности $K$, $F|_{\partial K} = +\infty$

вместо исходной приблизительно решаем задачу

$$\min_{x} (F(x) + \tau \langle c, x \rangle) : \quad Ax = b$$

без нелинейных ограничений, с решением $x_\tau^*$

при $\tau \to +\infty$ $x_\tau^*$ стремится к решению $x^*$ исходной задачи

# Логарифмично однородные барьеры

**Определение (Ю.Е. Нестеров, А.С. Немировский 1994)**

*Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус. Логарифмично однородным самосогласованным барьером на $K$ называется $C^3$ функция $F : K^o \to \mathbb{R}$ на внутренности $K$, удовлетворяющая условиям*

- $F(\alpha x) = -\nu \log \alpha + F(x)$ *(логарифмичная однородность)*
- $F''(x) \succ 0$ *(выпуклость)*
- $\lim_{x \to \partial K} F(x) = +\infty$ *(барьерное свойство)*
- $|F'''(x)[h, h, h]| \leq 2(F''(x)[h, h])^{3/2}$ *(самосогласованность)*

*для всех касательных векторов $h$ в каждой точке $x \in K^o$.*
*Параметр однородности $\nu$ называется параметром барьера.*

# Примеры

для классических задач конического программирования используются следующие барьеры

| класс | $K$ | $F$ | $\nu$ |
|---|---|---|---|
| LP | $\mathbb{R}^n_+$ | $-\sum_{i=1}^n \log x_i$ | $n$ |
| SOCP | $\prod_{j=1}^J L_{n_j}$ | $-\sum_j \log((x_0^j)^2 - (x_1^j)^2 - \dots - (x_{n_j-1}^j)^2)$ | $2J$ |
| SDP | $S^n_+$ | $-\log\det A$ | $n$ |

все перечисленные конусы — *симметричные*
для них данные барьеры стандартные

наличие вычисляемого барьера на конусе $K$ определяет решаемость задачи

# Канонический барьер

**Теорема (Cheng, Yau; A.-M. Li и др.)**

*Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, не содержащая прямой. Тогда существует единственное выпуклое решение $F : D \to \mathbb{R}$ уравнения в частных производных $\log\det F'' = 2F$ с граничным условием $\lim_{x \to \partial D} F(x) = +\infty$.*

**Теорема (X. 2014, Fox 2015)**

*Если $D$ — внутренность выпуклого регулярного конуса $K$, это решение УрЧП является логарифмично однородным самосогласованным барьером на $K$ со значением параметра $\nu = n$. Этот барьер называется* **канонически**м*. Двойственный барьер к каноническому барьеру на конусе $K$ совпадает с каноническим барьером на двойственном конусе $K^*$.*

# Свойства

свойства канонического барьера

- эквивариантен по отношению к линейным унимодулярным автоморфизмам конуса: $F(Ax) = F(x)$ для $\det A = 1$, $A_i n \operatorname{Aut}(K)$
- эквивариантен по отношению к двойственности
- совпадает со стандартным на симметричных конусах
- аналитический
- в общем случае трудно вычислим

# Пример канонического барьера

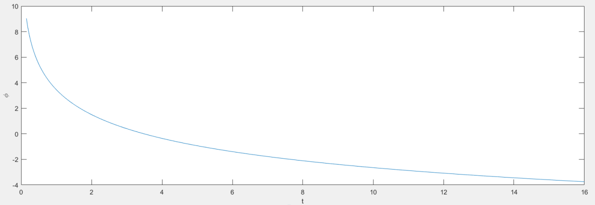
на экспоненциальном конусе

$K_{\exp} = \mathrm{cl}\{(x,y,z) \mid z > 0,\ e^{y/z} \geq x/z\}$

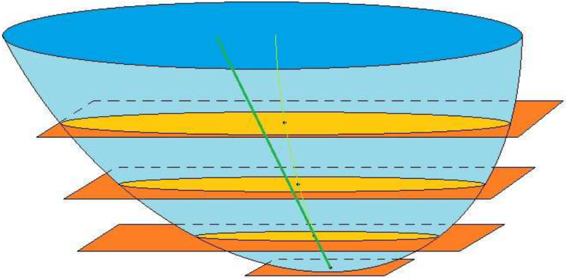
$$F_{can}(x,y,z) = -\log y - 2\log z + \phi\left(\log\frac{y}{z} - \frac{x}{z}\right)$$

$\phi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ задана неявно кривой

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \log(1+\kappa) + 2\kappa \\ \log(1+\kappa) - 3\log\kappa \end{pmatrix} \middle| \ \kappa \in \mathbb{R}_{++} \right\}$$



# Аффинные сферы



гиперповерхность уровня канонического барьера является *аффинной сферой*

*аффинная нормаль* — касательная к центрам тяжести сечений — проходит через вершину конуса

# Связь с метрикой Блашке

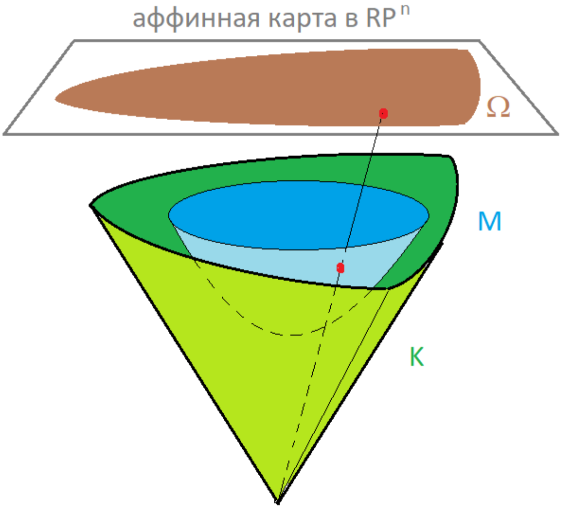
**Лемма**

*Пусть* $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *— регулярный выпуклый конус,* $\Omega \subset \mathbb{R}P^n$ *— ограниченная выпуклая область, определённая внутренностью* $K$*. Пусть* $F$ *— каноничский барьер на* $K$*,*

$$M = \{x \in K^o \mid F(x) = 0\} \subset K$$

*гиперповерхность уровня.*
*Отождествим* $M$ *с* $\Omega$*. Тогда метрика* $\nu^{-1}F''$*, ограниченная на* $M$*, совпадает с метрикой Блашке на* $\Omega$*.*

# Связь с метрикой Блашке



# Спасибо за внимание