О ПРОБЛЕМЕ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА ПОСРЕДСТВОМ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А.В. Фурсиков,
Московский Государственный
Университет им. М.В. Ломоносова

Школа-конференция
Неголономные дни в Переславле,
Лекция 4, Август 26–30.08.2024

Система Навье-Стокса (СНС)

$$\partial_t v(t,x) - \Delta v + (v,\nabla)v + \nabla p(t,x) = 0, \quad (1)$$

$$\text{div } v(t,x) = 0, \quad v(t,x)|_{t=0} = v_0(x), \quad (2)$$

$$v(t,\dots,x_m+2\pi,\dots) = v(t,\dots,x_m,\dots), \quad m = 1,2,3 \quad (3)$$

Здесь $v(t,x) = (v_1,v_2,v_3)$, $p(t,x)$ - скорость жидкости и давление, $v_0(x)$ -задано, $t \in (0,T)$, $T \le \infty, x \in \mathbb{T}^3 := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$ (что эквивалентно (3)).

Функциональные пространства

$$V^k := \{v \in (H^k(\mathbb{T}^3))^3 : \text{div} v = 0, \int_{\mathbb{T}^3} v dx = 0\},$$

где $H^k(\mathbb{T}^3)$ - пространство Соболева, и

$$V^{1,2}(Q_T) = \{v \in L_2(0,T;V^2) : \partial_t v \in L_2(0,T;V^0)\},$$

где $Q_T = (0,T) \times \mathbb{T}^3$.

Система Навье-Стокса с управленем (СНС)

$$\partial_t v(t,x) - \Delta v + (v,\nabla)v + \nabla p(t,x) = \sum_{j=0}^{N} \delta(t-t_j)u_j(x), \tag{4}$$

$$\text{div } v(t,x) = 0, \quad v(t,x)|_{t=0} = v_0(x), \tag{5}$$

$$v(t,\ldots,x_m + 2\pi,\ldots) = v(t,\ldots,x_m,\ldots), \tag{6}$$

$m = 1,2,3$. Здесь $\delta(t-t_j)$ это δ-функция Дирака в момент t_j , $u_j(x), j = 0,1\ldots N$ - управление, такое что supp $u_j(\cdot) \subset \omega \subset \mathbb{T}^3$, где ω - заданная подобласть тора $\mathbb{T}^3$. Такое управлене называется импульсным.

Постановка нелокальной задачи стабилизации

Задано $v_0 \in V^1(\mathbb{T}^3)$, найти $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_N$, $u_j \in V^1(\mathbb{T}^3)$, supp $u_j \subset \omega$, $j = 0,1,\ldots N$ так, чтобы решение $(v(t,x), p(t,x)) \in V^{1,2} \times L_2(\mathbb{R}_+; (L_2(\mathbb{T}^3)^3)$ задачи (4)-(6) удвлетворяло условию

$$\|v(t,\cdot)\|_{V^1(\mathbb{T}^3)} \to 0, \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{7}$$

Очень важно, что мы ищем решение (v, p) задачи стабилизации (4)-(7) в пространстве $V^{1,2} \times L_2(\mathbb{R}_+; (L_2(\mathbb{T}^3)^3)$, где доказана единствен-

ность решения задачи (1)-(3). Фазовым пространством для $V^{1,2}$ является $V^1(\mathbb{T}^3)$. Чтобы работать в фазовым пространством $V^0(\mathbb{T}^3)$ мы перейдем от СНС к системе Гельмгольца. Ротор скорости

$$\omega(t, x) = \text{rot } v(t, x) =$$

$$= (\partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2,\ \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3,\ \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1)$$

Система уравнений **Гельмгольца** для rotv:

$$\partial_t \omega(t, x) - \Delta\omega + (v, \nabla)\omega - (\omega, \nabla)v = 0$$

$$\omega(t, x)|_{t=0} = \omega_0(x)$$

где $\omega_0 = \text{rot} v_0$

Структура билинейного оператора

Нелинейный член в уравнениях Гельмгольца:

$$B(\omega) = (v, \nabla)\omega - (\omega, \nabla)v = \Phi(\omega)\omega + B_\tau(\omega),$$

где $B_\tau(\omega)$ - компонента, касательная к сфере

$$\Sigma_\omega = \{u \in V^0 : \|u\|_{V^0} = \|\omega\|_{V^0}\}$$

в точке ω , Φ функционал, и поэтому компонента $\Phi(\omega)\omega$ ортогональна к Σ_ω в ω.

Нормальная параболическая система (НПС)

$$\partial_t\omega(t,x) - \Delta\omega - \Phi(\omega)\omega = 0, \ \operatorname{div}\omega = 0, \ \omega|_{t=0} = \omega_0$$

Случай полного (с B_τ) уравнения типа Бюргерса.

Уравнение Бюргерса: $\partial_t v(t,x) - \partial_{xx} v - \partial_x v^2 = 0$

Продифференцированное уравнение Бюргерса $(y(t,x) = \partial_x v(t,x))$

$$\partial_t y(t,x) - \partial_{xx} y - 2y^2 - 2v\partial_x y = 0, \quad y(t,x)|_{t=0} = y_0(x) \qquad (1)$$

$$y(t, x + 2\pi) = y(t,x) \qquad (2)$$

Обозначим $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,

$$L_2^0(\mathbb{T}) = \{w(x) \in L_2(\mathbb{T}) : \int_0^{2\pi} w(x)dx = 0\}$$

Теорема. Существует такое $r > 0$, что для любого $\|y_0\|_{L_2^0(\mathbb{T})} < r$ существует единственное решение $y \in L_2(\mathbb{R}_+; L_2^0(\mathbb{T})) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T})$ задачи (1),(2), и $\|y(t,\cdot)\|_{L_2} \leq c\|y_0\|_{L_2} e^{-t/2} \quad \forall t > 0$.

Структура билинейного оператора

Нелинейный член в продифференцированном уравнении Бюргерса:

$$B(v,y) := 2y^2 + 2v\partial_x y = \Phi(y)y + B_\tau(v,y),$$

где

$$\Phi(y) = \int_0^{2\pi} y^3(x)dx/\|y\|^2_{L_2(\mathbb{T})},\ y \neq 0, \quad \Phi(0) = 0,$$

и $B_\tau(v,y)$ - компонента, касательная к сфере

$$\Sigma_y = \{u \in L_2^0 : \|u\|_{V^0} = \|y\|_{L_2^0}\}$$

в точке y.

Нормальное параболическое уравнение (НПУ)

$$\partial_t y(t,x) - \partial_{xx} y - \Phi(y)y = 0, \qquad (3)$$

$$y(t,x)|_{t=0} = y_0(x) \qquad (4)$$

Явная формула для решения НПУ

Теорема 1. Пусть $S(t,x,z_0)$ - разрешающий оператор для уравнения теплопроводности с периодическим краевым условием:

$$\partial_t z(t,x) - \partial_{xx} z = 0,\ z(t,x+2\pi) = z(t,x),\ z|_{t=0} = z_0, \tag{5}$$

т.е. $S(t,x,z_0) = z(t,x)$. Тогда решение задачи (3),(4) имеет вид

$$y(t,x;y_0) = \frac{S(t,x;y_0)}{1 - \int_0^t \Phi(S(\tau,x;y_0))d\tau} \tag{6}$$

Структура динамического потока для НПУ

$L_2^0(\mathbb{T}) \equiv V^0$ - фазовое пространство для задачи (3), (4).

Определение 1. Множество $M_- \subset V^0$ начальных условий y_0, таких что соответствующее решение $y(t,x;y_0)$ задачи (1),(2) удовлетворяет оценке

$$\|y(t,\cdot;y_0)\|_0 \le \alpha \|y_0\|_0 e^{-t/2} \qquad \forall t > 0$$

для некоторого $\alpha > 1$, зависящего от $\|y_0\|_0$, называется множеством устойчивости.

Определение 2. Множество $M_+ \subset V^0$ началных условий y_0, таких что соответствующее решение $y(t,x;y_0)$ существует на конечном интервале времени $t \in (0,t_0)$, и взрывается при $t = t_0$ называется множеством взрывов.

Определение 3. Множество $M_g \subset V^0$ начальных данных y_0, таких что соответствующее решение $y(t,x;y_0)$ существует при $t \in \mathbb{R}_+$, и $\|y(t,x;y_0)\|_0 \to \infty$ при $t \to \infty$ называется множеством роста.

Лемма 4. Множества M_-, M_+, M_g не пусты, и $M_- \cup M_+ \cup M_g = V^0$

Стабилизация НПУ с обратной связью

Рассмотрим задачу стабилизации на цилиндре $\{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3\}$:

$$\partial_t y(t,x) - \partial_{xx} y - \Phi(y) = 0, \qquad (7)$$

$$y|_{t=0} = y_0(x) + u_0(x) \qquad (8)$$

где $y_0(x) \in H^{1/2} \cap L_2^0$ - заданная начальная функция, а $u_0(x) \in L_2^0$ - стартовое управление с носителем в сегменте $[-\rho, \rho] \subset (-\pi, \pi] :=$ $\mathbb{T}$ с фиксированным $0 < \rho < \pi$. Мы должны найти такое u_0, что решение $y(t,x)$ задачи (7), (8) удовлетворяет оценке

$$\|y(t,\cdot)\|_0 \le \alpha e^{-t/2}, \quad \text{при } t \to \infty$$

для некоторого $\alpha > 0$.

Теорема. Для заданных $y_0 \in H^{1/2} \cap L_2^0 \setminus M_-$ и малого фиксированного $\rho > 0$ существует такое $u_0 \in L_2^0$, supp $u_0 \subset [-\rho, \rho]$, что $v_0 + u_0 \in M_-$.

Функционально-полярные координаты.

Обозначим единичную сферу в L_2^0 символом $\Sigma = \{y \in L_2^0(\mathbb{T}) : \|y\| = 1\}$ Функционально-полярные (ф-п) координаты функции $y \in L_2^0$ - это $y(x) = (\rho, \varphi(x))$, где $\rho = \|y\|$, $\varphi(x) = y(x)/\rho \in \Sigma$. Для решений уравнения (1) удобнее использовать вместо Σ множество

$$\Sigma(1) = \{\varphi(x) \in L_2^0(\mathbb{T}) : \|\varphi\| = 1\} \cap H^1(\mathbb{T})$$

Лемма. Уравнение (1) в (ф-п) координатах имеет следующий вид:

$$\partial_t \rho(t) + \|\partial_x \varphi(t,\cdot)\|^2 \rho - \rho^2 \Psi(\varphi(t,\cdot)) = 0,\ \rho|_{t=0} = \rho_0 \tag{9}$$

$$\partial_t \varphi(t,x) - \partial_{xx}\varphi - \|\partial_x \varphi\|^2 \varphi = \rho B_\tau(w,\varphi),\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \tag{10}$$

где $\rho_0 = \|y_0\|$, $\varphi_0 = y_0/\rho_0$, $\Psi(y) = \int_0^{2\pi} y^3(x)dx$, $\partial_x w = \varphi$.

Лемма. Пусть ρ, φ -решение задачи (9),(10) с $\rho_0 \gg 1$, $\Psi(\varphi_0) = -\alpha_1$ и t_0 - такой момент, что $\forall t \in (0, t_0)$

$$\Psi(\varphi((t, \cdot; \varphi_0)) \leq -\alpha, \quad \text{где } 0 < \alpha < \alpha_1.$$

Тогда решение $\rho(t)$ из (9),(10) удовлетворяет оценке

$$\rho(t) \leq \frac{e^{-t/2}}{\rho_0^{-1} + \alpha(1 - e^{-t})} \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Линии уровня функционала Ψ на сфере $\Sigma(1)$.

Обозначим эту линию уровня так:

$$\Psi_{[\alpha]} = \{\varphi \in \Sigma(1) : \Psi(\varphi) = \alpha\}$$

Лемма. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ линия уровня $\Psi_{[\alpha]}$ является непрерывной гиперповерхностью на сфере $\Sigma(1)$.

Нелокальная стабилизация уравнения типа Бюргерса посредством импульсного управления.

$$\partial_t y(t,x) - y_{xx} - \Phi(y)y - B_\tau(v,y) = \sum_{k=1}^{N} \widehat{u}_k(x)\delta(t-t_k),$$

$$y|_{t=0} = y_0 \qquad (11)$$

Эта задача эквивалентна следующему набору задач P_k на временных интервалах $t \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, N$:

$$\partial_t y(t,x) - y_{xx} - \Phi(y)y - B_\tau(v,y) = 0,$$

$$y|_{t=t_k} = y(t_k, \cdot) + \widehat{u}_k \qquad (12)$$

Мы перепишем задачу (12) (ф-п) координатах. Это дает нам возможность зафиксировать момент t_k, когда функционал $\Psi(\varphi(t,\cdot))$ достигает критического значения α_{cr}. В этот момент мы задаем новый импульс $\widehat{u}_k$, который переводит функционал из критического уровня в более допустимый. Этот импульс строится с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in \Psi_{[-\alpha_{cr}]}$, где $0 < \alpha_{cr} < \alpha$, и $[0, \omega] \subset \mathbb{T}$ - носитель конструируемого импульса. Существует такое $n_0 > 0$ (зависящее от $\varphi(x), x \in [0, \omega]$), что для каждого $n > n_0$ существует $u(x)$ с supp$u \in [0, \omega]$, который удовлетворяет условиям:

$$\int_0^\omega u(x)dx = 0, \ \int_{\mathbb{T}} (\varphi(x) + u(x))^2 dx = 1 + \frac{1}{n},$$

$$\int_{\mathbb{T}} (\varphi(x) + u(x))^3 dx \leq (1 + \frac{1}{n})\alpha.$$

Литература

[1] A.V.Fursikov, On parabolic system of normal type corresponding to 3D Helmholtz system, Advances in Mathematical Analysis of PDEs, Proc. St. Petersburg Math. Soc., XV; AMS Transl.Series 2 232 (2014), 99-118

[2] A.V.Fursikov, Stabilization of the simplest normal parabolic equation by starting control. Communications on pure and applied analysis, 13 (2014), 1815-1854

[3] A.V.Fursikov, L.S.Shatina, Nonlocal stabilization of the normal equation generated by Helmholtz system by starting control.– DCDS, v.38, no.3, March 2018, 1187-1242. Doi: 10.3934/dcds.2018050

[4] A.V.Fursikov, L.S.Osipova, On the nonlocal stabilization by starting control of the normal equation generated by Helmholtz system.- SCIENCE CHINA Math, V.61, No.11, 2018, 2017-2032.

[5] Л.С.Осипова, А.В.Фурсиков, Об одном методе нелокальной стабилизации уравнения типа Бюргерса посредством импульсного управления, Дифференциальные уравнения, том 55, No. 5, 2019, 702-716.

[6] A.V.Fursikov, On the Stabilization Problem by Feedback Control for Some Hydrodynamic Type Systems. In: T.Bondar, G.P.Galdy, S.Necasova, (eds) Fluids Under Control. Advances in Mathematcal Fluid Mechanics. Birkhauser, Cham. (2024), p.1-61.

[7] J.M.Coron, On null asymptotic stabilization of the two-dimensional incompressible Euler equations in a simply connected domains, SIAM J. Control Optim. 37:6 (1999), p.1874-1896.

[8] J.M.Coron, Control and nonlinearity, Math. Surveys and monographs, 136 AMS, Providence, RI, 2007.

[9] M.Krstic, On global stabilization Burgers' equation by boundary control, Systems of control letters, 37, (1999), p.123-141.

[10] J.-F.Raymond, Feedback boundary stabilization of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, J. Math. Pure Appl. 87:6 (2007), p.627-669.

Спасибо

за внимание