О ПРОБЛЕМЕ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА ПОСРЕДСТВОМ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А.В. Фурсиков,
Московский Государственный
Университет им. М.В. Ломоносова

Школа-конференция
Неголономные дни в Переславле,
Лекция 3, Август 26–30.08.2024

Система уравнений Навье-Стокса (СНС)

$$\partial_t v(t,x) - \Delta v + (v,\nabla)v + \nabla p(t,x) = 0,$$

$$\mathrm{div} v = 0,$$

$$v(t,\ldots,x_i,\ldots) = v(t,\ldots,x_i+2\pi,\ldots),\ i=1,2,3,$$

$$v(t,x)|_{t=0} = v_0(x)$$

Здесь $v(t,x) = (v_1, v_2, v_3)$ - скорость жидкости, $p(t,x)$ - давление. Энергетическое неравенство:

$$\int_{\mathbb{T}^3} |v(t,x)|^2 dx + 2\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_x v(\tau,x)|^2 dx d\tau \le$$

$$\int_{\mathbb{T}^3} |v_0(x)|^2 dx,$$

где $\mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$ - трехмерный (3D) тор. Образ нелинейного оператора $(v,\nabla)v$ в каждой точке $v \in \Sigma \equiv \{u \in L_2 : \|u\|_{L_2} = 1\}$ касается сферы Σ, т.е. $v \perp_{L_2} (v,\nabla)v$.

Система уравнений Гельмгольца

Ротор скорости

$$\omega(t,x) = \text{rot } v(t,x) =$$

$$= (\partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2,\ \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3,\ \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1)$$

Хорошо известные формулы:

$$(v,\nabla)v = \omega \times v + \nabla \frac{|v|^2}{2},$$

rot $(\omega \times v) = (v,\nabla)\omega - (\omega,\nabla)v$, если $\text{div}\, v = \text{div}\, \omega = 0$

Система уравнений для ротора скорости:

$$\partial_t \omega(t,x) - \Delta\omega + (v,\nabla)\omega - (\omega,\nabla)v = 0$$

$$\omega(t,x)|_{t=0} = \omega_0(x)$$

где $\omega_0 = \text{rot} v_0$.

Функциональные пространста для СНС и системы Гельмгольца

Функциональное пространство:

$$V^m = V^m(\mathbb{T}^3) =$$

$$= \{v(x) \in (H^m(\mathbb{T}^3))^3 : \operatorname{div} v = 0,\ \int_{\mathbb{T}^3} v(x)dx = 0\}$$

где $H^m(\mathbb{T}^3)$ - пространство Соболева. Используя разложение в ряды Фурье

$$v(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \widehat{v}(k)e^{ix\cdot k}, \quad \widehat{v}(k) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v(x)}{(2\pi)^{-3}} e^{-ix\cdot k}dx,$$

где $x\cdot k = \sum_{j=1}^3 x_j k_j,\ k = (k_1, k_2, k_3)$ и формулу rot rot $v = -\Delta v$, где $\operatorname{div} v = 0$, получим

$$\text{rot}^{-1}\omega(x) = i \sum_{k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \frac{k \times \widehat{\omega}(k)}{|k|^2} e^{ix\cdot k}$$

Поэтому оператор

$$\text{rot}\ :\ V^1 \longrightarrow V^0$$

является изоморфизмом пространств.

Система нормального типа и ее вывод

Нелинейный член в системе Гельмгольца имеет вид:

$$B(\omega) = (v, \nabla)\omega - (\omega, \nabla)v$$

Справедлива следующая формула:

$$(B(\omega), \omega)_{V^0} = -\int_{\mathbb{T}^3} \sum_{j,k=1}^{3} \omega_j \partial_j v_k \omega_k dx \neq 0$$

и поэтому

$$B(\omega) = B_n(\omega) + B_\tau(\omega),$$

где $B_n(\omega)$ - компонента, ортогональная сфере

$$\Sigma_\omega = \{u \in V^0 : \|u\|_{V^0} = \|\omega\|_{V^0}\}$$

в точке ω, а вектор $B_\tau(\omega)$ является касательным к Σ_ω в ω. Ясно, что $B_n(\omega) = \Phi(\omega)\omega$ где Φ - неизвестный функционал, который определяется из уравнения

$$\int_{\mathbb{T}^3} \Phi(\omega)\omega(x) \cdot \omega(x) dx = \int_{\mathbb{T}^3} (\omega(x), \nabla) v(x) \cdot \omega(x) dx$$

и имеет вид

$$\Phi(\omega)=\frac{\int_{\mathbb{T}^3}(\omega(x),\nabla)\mathrm{rot}^{-1}\omega(x)\cdot\omega(x)dx}{\int_{\mathbb{T}^3}|\omega(x)|^2dx},\ \omega\neq 0,$$

$$\Phi(\omega)=0,\qquad \omega\equiv 0$$

Нормальная параболическая система (НПС)

$$\partial_t\omega(t,x)-\Delta\omega-\Phi(\omega)\omega=0,\quad \mathrm{div}\,\omega=0 \quad (1)$$

$$\omega(t,x)|_{t=0}=\omega_0(x) \quad (2)$$

Явная формула для решения НПС

Теорема 1. Пусть $S(t,x,y_0)$ - разрешающий оператор для системы Стокса с периодическими краевыми условиями:

$$\partial_t y-\Delta y=0,\ \mathrm{div}\,y=0,\ y|_{t=0}=y_0, \quad (3)$$

т.е. $S(t,x,y_0)=y(t,x)$. (Мы предполагаем что $\mathrm{div}\,y_0=0$). Тогда решение задачи (1),(2) имеет вид

$$\omega(t,x;\omega_0)=\frac{S(t,x;\omega_0)}{1-\int_0^t\Phi(S(\tau,x;\omega_0))d\tau} \quad (4)$$

Однозначная разрешимость НПС и непрерывная зависимость решений от начальных условий

Лемма 1. $\exists c > 0, \forall u \in V^{1/2}\ \Phi(u) \leq c\|u\|_{3/2}$

Лемма 2. $\forall \beta < 1/2 \quad \exists c_1 > 0 \quad \forall y_0 \in V^{-\beta}(\mathbb{T}^3)$,

$$\int_0^t \Phi(S(t,\cdot,y_0))dt \leq c_1\|y_0\|_{-\beta}.$$

Пусть $Q_T = (0,T) \times \mathbb{T}^3$, $T > 0$ или $T = \infty$. Пространство решений для НПС:

$$V^{1,2(-1)}(Q_T) = L_2(0,T;V^1) \cap H^1(0,T;V^{-1})$$

Условие 1. Если начальное условие $\omega_0 \in V^0 \setminus \{0\}$ и решение $\omega(t,x;\omega_0) \in V^{1,2(-1)}(Q_T)$ то $\omega(t,\cdot,\omega_0) \neq 0\ \forall t \in [0,T]$

Теорема 2. Для каждого $\omega_0 \in V^0$ существует $T > 0$ такое, что существует единственное решение $\omega(t,x;\omega_0) \in V^{1,2(-1)}(Q_T)$ задачи (1),(2), удовлетворяющее Условию 1.

Теорема 3. Решение $\omega(t,x;\omega_0) \in V^{1,2(-1)}(Q_T)$ задачи (1),(2) непрерывно зависит от начального условия $\omega_0 \in V^0$.

Свойства функционала Φ

О ядре функционала $\Phi(S(t;u))$

Определение конуса

$$K\Phi = \{u \in V^0 : \ \Phi(S(t;u)) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\}$$

Если $u \in K\Phi$, то $\lambda u \in K\Phi \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ Пусть

$$L = \{z \in V^0 : \ z(x) = \sum_{k \in \mathcal{U}} \widehat{z}(k) e^{ik\cdot x}, \ \widehat{z}(-k) = \overline{\widehat{z}(k)}\},$$

где

$$\mathcal{U} = \{k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \backslash \{0\} : \ \sum_{j=1}^{3} k_j \text{ нечетна}\}$$

Лемма 3. $L \subset K\Phi, \quad K\Phi \setminus L \neq \emptyset$

Структура динамики потока для НПС.

$V^0(\mathbb{T}^3) \equiv V^0$ является фазовым пространством для задачи (1),(2).

Определение 1. Множество $M_- \subset V^0$ начальных данных ω_0, такое, что соответствующее решение $\omega(t,x;\omega_0)$ задачи(1),(2) удовлетворяет неравенству

$$\|\omega(t,\cdot;\omega_0)\|_0 \leq \alpha \|\omega_0\|_0 e^{-t/2} \qquad \forall t > 0 \quad (*)$$

называется множеством утойчивости. Здесь $\alpha > 1$ - фиксированное число, зависящее от $\|\omega_0\|_0$.

Пусть

$M_-(\alpha) = \{\omega_0 \in M_-; \omega(t,\cdot;\omega_0)$ удовлетворяет $(*)\}$

где $\alpha \geq 1$ is fixed. Тогда $M_- = \cup_{\alpha \geq 1} M_-(\alpha)$

Определение 2. Множество $M_+ \subset V^0$ начальных данных ω_0, такое что соответствующее решение $\omega(t,x;\omega_0)$ существует только на конечном временном интервале $t \in (0,t_0)$, и взрывается при $t = t_0$ называется множеством взрывов. Справедлива формула:

$$M_+ = \{\omega_0 \in V^0 : \ \exists t_0 > 0 \ \int_0^{t_0} \Phi(S(\tau,\cdot;\omega_0))d\tau = 1\}$$

Определение 3. Множество $M_g \subset V^0$ начальных данных ω_0, такое что соответствующее решение $\omega(t,x;\omega_0)$ существует для времени $t \in \mathbb{R}_+$, и $\|\omega(t,x;\omega_0)\|_0 \to \infty$ при $t \to \infty$, называется множеством роста.

Лемма 4. Множества M_-, M_+, M_g не пусты, и $M_- \cup M_+ \cup M_g = V^0$.

Об одном подмножестве множества устойчивости

Для $\rho > 0, \beta < 1/2$ определим эллипсоид

$$El_\rho^\beta = \{v \in V^0(\mathbb{T}^3) : \ \|v\|_{-\beta}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{|k|^{2\beta}} \le \rho\} =$$

$$= \{v \in V^0(\mathbb{T}^3) : \ \sum_{k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}}^{\infty} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(\rho|k|^{2\beta})} \le 1\}.$$

Лемма 5. Пусть $c_1\rho < 1, \ \rho \le (\alpha - 1)/(\alpha c_1), \ c_1$ - константа из Леммы 2. Тогда $El_\rho^\beta \subset M_-(\alpha)$.

Доказательство. Для решения $S(t, x, \omega_0)$ задачи (3) для системы Стокса мы имеем:

$$\|S(t,\cdot,\omega_0)\|_0^2 = \sum_{k\neq 0} e^{-2|k|^2 t}|\widehat{\omega}_0(k)|^2 =$$

$$= e^{-2t}\sum_{k\neq 0} e^{-2(|k|^2-1)t}|\widehat{\omega}_0(k)|^2 \le e^{-2t}\|\omega_0\|_0^2$$

и в силу Леммы 2 для $\omega_0 \in El_\rho^\beta$, т.е. для $\|\omega_0\|_{-\beta}^2 \le \rho$ мы имеем, что $\omega_0 \in M_-(\alpha)$, если $\alpha \ge 1/(1 - c_1\rho)$, т.е. если $\rho \le (\alpha - 1)/(\alpha c_1)$.

Некоторые подмножества единичной сферы из V^0

Единичная сфера: $\Sigma = \{v \in V^0 : \ \|v\|_0 = 1\}$. Подмножества

$$A_-(t) = \{v \in \Sigma : \int_0^t \Phi(S(\tau, v))d\tau \leq 0\},$$

$$A_0(t) = \{v \in \Sigma : \int_0^t \Phi(S(\tau, v))d\tau = 0\},$$

$$A_- = \cap_{t\geq 0} A_-(t), \ A_0 = \cap_{t\geq 0} A_0(t),$$

$$B_+ = \Sigma \setminus A_- \equiv$$

$$\equiv \{v \in \Sigma : \ \exists t_0 > 0 \ \int_0^{t_0} \Phi(S(\tau, v))d\tau > 0\},$$

$$\partial B_+ = \{v \in \Sigma : \ \forall t > 0 \int_0^t \Phi(S(\tau, v))d\tau \leq 0$$

$$\text{и } \exists t_0 > 0 : \ \int_0^{t_0} \Phi(S(\tau, v))d\tau = 0.$$

О структуре фазового пространства

Важная функция на сфере Σ:

$$B_+ \ni v \to b(v) = \max_{t \ge 0} \int_0^t \Phi(S(\tau, v))d\tau. \quad (5)$$

Очевидно, $b(v) > 0$ и $b(v) \to 0$ при $v \to \partial B_+$.
Определим отображение $\Gamma(v)$:

$$B_+ \ni v \to \Gamma(v) = \frac{1}{b(v)} v \in V^0. \quad (6)$$

Ясно, что $\|\Gamma(v)\|_0 \to \infty$ при $v \to \partial B_+$.
Множество $\Gamma(B_+)$ разделяет V^0 на две части:

$$V_-^0 = \{v \in V^0 :\ [0, v] \cap \Gamma(B_+) = \emptyset\},$$

$$V_+^0 = \{v \in V^0 :\ [0, v) \cap \Gamma(B_+) \neq \emptyset\}.$$

Пусть $B_+ = B_+^f \cup B_+^\infty$, где

$$B_+^f = \{v \in B_+ :\ \max \text{ в (5) достигается при } t < \infty\}$$

$$B_+^\infty = \{v \in B_+ :\ \max \text{ в (5) не достгается при } t < \infty\}.$$

Теорема 4. $M_- = V_-^0,\ M_+ = V_+^0 \cup B_+^f,\ M_g = B_+^\infty$.

Стабилизация с обратной связью Нормальной параболической системы.

На цилиндре $\{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3\}$, где

$\mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$ - трехмерный тор, рассмотрим задачу стабилизации

$$\partial_t v(t,x) - \partial_{xx} v - \Phi(v) v = 0, \tag{7}$$

$$v|_{t=0} = v_0(x) + u_0(x), \tag{8}$$

где, напомним,

$$\Phi(v) = \frac{\int_{\mathbb{T}^3} (v(x), \nabla)\text{curl }^{-1} v(x) \cdot v(x) dx}{\int_{\mathbb{T}^3} |v(x)|^2 dx}, \ v \neq 0,$$

$$\Phi(v) = 0, \qquad v \equiv 0, \tag{9}$$

$v_0(x)$ -заданное начальное векторное поле, а $u_0(x)$ - стартовое управление с носителем в кубе

$$[-\rho, \rho]^3 \subset (-\pi, \pi]^3 := \mathbb{T}^3 \tag{10}$$

с прозвольным фиксированным $0 < \rho < \pi$ (в (10) мы идентифицировали $(-\pi, \pi]^3$ с тором $\mathbb{T}^3$).

Иначе говоря, для любого $v_0 \in V^0$ ищется такое управление $u_0 \in V^0$ с носителем в кубе (10), что решение $v(t,x)$ задачи (7)(8) удовлетворяет неравенству

$$\|v(t,\cdot)\|_0 \le \alpha e^{t/2}, \quad \text{при } t \to \infty$$

с некоторым $\alpha > 0$.

Мы ищем стабилизирующее управление

$$u_0(x) = \lambda u(x), \quad \lambda \in \mathbf{R} \tag{11}$$

с

$$u(x) = \mathrm{rot}(\xi_p(x_1,x_2,x_3)w(x_1,x_2,x_3),0,0), \tag{12}$$

где p - натуральное число, и $\pi/(2p) \le \rho$, $\xi_p(x_1,x_2,x_3)$ - характеристическая функция куба $[-\pi/(2p),\pi/(2p)]^3 \subset \mathbb{T}^3$, а

$$w(x_1,x_2,x_3) = (2\sin x_1 \sin x_2 + \sin x_2 \sin x_3$$
$$+ \sin x_1 \sin x_3)\Pi_{i=1}^3(1+\cos x_i). \tag{13}$$

Теорема. Пусть $v_0 \in M_+ \cup M_g$, $\rho > 0$ -мало и фиксированно. Существует $u_0 \in L_2^0$ вида (12), (13), такое что $v_0 + u_0 \in M_-$.

Основной шаг доказательства состоит в выводе неравенства

$$\int_{\mathbb{T}^3} \Phi(S(t,x;u)dx \geq \beta e^{-18t} \quad \forall t \geq 0 \qquad (14)$$

с положительной константой β, где $S(t,x,u)$ - решение системы Стокса с периодическими граничными условиями и стартовым упралением $u_0(x)$, определенными в (12),(13). Используя (14) можно доказать, что

$$\forall v_0 \in M_+ \cup M_g \quad \exists \alpha > 1,\ \lambda_0 \gg 1 \quad \forall |\lambda| \geq \lambda_0$$

$$1 - \int_0^t \Phi(S(\tau,x,v_0+\lambda u)d\tau > 0 \; \forall t > 0.$$

В силу явнй формулы (4) для решения НПУ (7) мы получаем, что

$$\|v(t,\cdot;v_0+\lambda u)\|_{L_2}^2 \leq \alpha e^{-t}.$$

Это доказывает Теорему.

Спасибо

за внимание