О ПРОБЛЕМЕ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА ПОСРЕДСТВОМ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А.В. Фурсиков,
Московский Государственный
Университет им. М.В. Ломоносова

Школа-конференция
Неголономные дни в Переславле,
Лекция 2, Август 26–30.08.2024

Система Навье-Стокса (СНС)

$$\partial_t v(t,x) - \Delta v + (v,\nabla)v + \nabla p(t,x) = f(x), \quad (1)$$

$$\text{div } v(t,x) = 0 \quad t > 0,\ x \in \Omega, \quad (2)$$

$$v(t,x)|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$v(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = u, \quad u(t,x'), x' \in \partial\Omega, \quad (4)$$

Здесь $v(t,x) = (v_1, v_2, v_3)$ - скорость,
$p(t,x)$ - давление.

Пусть задано неустойчивое стационарное решение $\widehat{v}(x) = (\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \widehat{v}_3), \widehat{p}(x)$
системы Навье-Стокса:

$$-\Delta\widehat{v}(x) + (\widehat{v},\nabla)\widehat{v} + \nabla\widehat{p}(x) = f(x), \quad (5)$$

$$\text{div } \widehat{v} = 0 \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

Постановка задачи стабилизации

Для заданного $\sigma > 0$ найти такое управление $u(t,x')$, что решение $v(t,x)$ задачи (1)-(4)для СНС стремится к $\widehat{v}$ с предписанной скоростью σ при $t \to \infty$:

$$\|v(t,\cdot) - \widehat{v}\|_\Omega \equiv \|v(t,\cdot) - \widehat{v}\|_{V^1(\Omega)} \le ce^{-\sigma t}. \quad (7)$$

Здесь

$$V^1(\Omega) = \{v \in (H^1(\Omega))^3 : \mathrm{div} v = 0)$$

где $H^1(\Omega)$ - это пространство Соболева. Управление $u(t,x')$ должно быть с обратной связью, т.е. оно должно реагировать на флюктуации решения $v(t,x)$, подавляя их.

Стабилизация строится при условии, что $\|\widehat{v} - v_0\|_{V^1} < \varepsilon$ при достаточно малом ε.

Сведение к случаю стартового управления

1) Продолжение СНС (1)-(4)

Продолжим область Ω до области $G: \ \Omega \subset G$.
Продолжим $\widehat{v}(x)$ до $a(x), \ x \in G$ с div$a = 0, \ a|_{\partial G} = 0$. подставляя a в СНС мы получим продолжение $g(x), x \in G$ правой части f для СНС (1)

Мы продолжили СНС (1)-(4)на область G, забыв о(4)и поставив правую часть g вместо f:

$$\partial_t w - \Delta w + (w, \nabla) w + \nabla p_1(t,x) = g(x), \quad (8)$$

$$\text{div } w(t,x) = 0 \quad t > 0, \ x \in G \qquad (9)$$

$$w|_{\partial G} = 0, \ w(t,x)|_{t=0} = w_0(x) + u(x) \quad (10)$$

Здесь $w_0(x) = Lv_0(x)$ - продолжение $v_0(x)$ на G; и $u(x)$ - стартовое управление, причем supp $u \subset \omega \Subset G \setminus \Omega$.

Предположим, что стартовое управление u реализует стабилизацию, т.е.

$$\|w(t,\cdot)-a\|_{V^1(G)} \leq ce^{-\sigma t}, \qquad t\to\infty$$

Тогда решение (v,u) исходной задачи стабили-

зации (1)-(7) задается равенством:

$$(v(t,\cdot),u(t,\cdot)) = (\gamma_\Omega w(t,\cdot), \gamma_{\partial\Omega} w(t,\cdot)) \quad (11)$$

где $\gamma_\Omega, \gamma_{\partial\Omega}$ - это операторы сужения с области G на $\Omega, \partial\Omega$, а $w(t,x)$ - это решние задачи (8)-(10) с $w_0 = Lv_0$, где v_0 - это начальное уловие(3). Тогда для любого $t>0$

$$\|v(t,\cdot)-\widehat{v}\|_\Omega \leq \|w(t,\cdot)-a\|_G \leq ce^{-\sigma t}$$

Распределенное управление

$$\partial_t w - \Delta w + (w,\nabla)w + \nabla p_1(t,x) = g(x) + u(t,x), \tag{12}$$

$$\text{div } w(t,x) = 0 \quad t>0,\ x\in G \tag{13}$$

$$w|_{\partial G} = 0,\ w(t,x)|_{t=0} = w_0(x) \tag{14}$$

Здесь $u(t,x)$ - распределенное управление у которого $\forall t>0$ supp $u(t,\cdot)\subset\omega\Subset G\setminus\Omega$.

Пусть заданы $\sigma>0$ и стационарное решение a (с такой же правой частью g, но без управления). Требуется найти управление $u(t,x)$,
supp $u(t,\cdot)\subset\omega$, такое, что

$$\|w(t,\cdot)-a\|_{V^1(G)} \le ce^{-\sigma t}, \quad \text{при} \quad t\to\infty$$

Управление с обратной связью: $u(t,\cdot) = F(w(t\cdot))$, где $F: V^1(G)\to V^1_{00}(\omega)$ - нерпрерывный оператор, а $V^1_{00}(\omega) = \{v\in V^1(G) : v|_{G\setminus\omega} = 0\}$.

Стартовое управление: замена неизвестной функции

$w(t,x) = y(t,x) + a(x)$:

$$\partial_t y - \Delta y + (a,\nabla)y + (y,\nabla)a + (y,\nabla)y + \nabla p_1(t,x) = 0, \tag{15}$$

$$\text{div } y(t,x) = 0 \quad t > 0,\ x \in G \tag{16}$$

$$y|_{\partial G} = 0,\ y(t,x)|_{t=0} = y_0(x) + u(x) \tag{17}$$

1)Стартовое управление: линейная задача

$$\frac{\partial y(t,\cdot)}{\partial t} + Ay = 0, \quad y|_{t=0} = y_0(x) + u(x), \tag{18}$$

где $Ay = \pi(-\Delta y + (a,\nabla)y + (y,\nabla)a)$,
$\pi : (L_2(G))^3 \to V_0^0(G)$ - ортопроектор,

$V_0^0(G) \equiv \{v \in (L_2(G))^3 : \text{div } v = 0,\ v{\cdot}n|_{\partial G} = 0\}$,

а n- внешняя нормаль к границе ∂G.

$A : V_0^0(G) \to V_0^0(G)$ - секториальный оператор, т.е. $\exists \varphi \in (0, \pi/2), M > 1, \alpha \in \mathbb{R}$ такой, что

$S_{\alpha,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi \le |\arg(\lambda - \alpha)| \le \pi, \lambda \ne \alpha\} \subset \rho(A)$

и $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \le M/|\lambda - \alpha| \ \forall \lambda \in S_{\alpha,\varphi}$. Поэтому, если $\gamma = \partial S_{\alpha,\varphi}$, то

$$e^{-At} = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma (A - \lambda I)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$$

$$= (2\pi i)^{-1} (\sum_j \int_{|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon} \dots d\lambda + \int_{\gamma_\sigma} \dots d\lambda)$$

Здесь λ_j - собственное значение с Re $\lambda_j < \sigma$. Пусть $e_m^k(\lambda_j))$ - это соответствующие собственные и асоциированные функции. Положим

$$X_\sigma^+(A) = [e_m^k(\lambda_j) : \text{Re}\, \lambda_j < \sigma]$$

(Это - подпространство экспоненциально растущих решений (18))

Пусть $A^* : V_0^0(G) \to V_0^0(G)$ - это оператор, сопряженный к A. Оператор A^* является секториальным с тем же сектором $S_{\alpha,\varphi}$, что и у A. Определим как и выше пространство $X_\sigma^+(A^*)$. Мы положим

$$X_\sigma^-(A) = V_0^0(G) \ominus X_\sigma^+(A^*)$$

(Это - пространство экспоненциально убывающих решений (18)). Пусть $\{e_1, \ldots, e_K\}$ - вещественнозначный базис в $X_\sigma^+(A)$,
$\{d_1, \ldots, d_K\}$ - вещественнозначный базис in $X_\sigma^+(A^*)$, и

$$(e_j, d_m)_{V_0^0(G)} = \delta_{j,m}$$

Теорема 1. Базис $\{d_1, \ldots, d_K\}$ можно выбрать так, что для каждой подобласти $\omega \subset G$ множество функций $\{d_1|_\omega, \ldots, d_K|_\omega\}$ линейно независимо.

$$V^k(G) = \{v \in H^k(G) : \text{div}\ v = 0\},\ k = 0, 1, \dots$$

$$V_0^1(G) = \{v \in V^1(G) :\ v|_{\partial G} = 0\}$$

$$V_{00}^1(\omega) = \{v \in V^1(G) :\ v_{G \setminus \omega} = 0\}, \quad \omega \Subset G$$

$$V_- = X_\sigma^-(A) = \{v \in V_0^0(G) :\ \int_G v(x) \cdot d_j(x) dx = 0\},$$

$j = 1, 2 \dots, K$

Теорема 2. Существует линейный оператор $E : V_0^1(G) \to V_{00}^1(\omega)$ такой, что $y_0 + Ey_0 \in V_-$

Доказательство. Рассмотрим в $\omega \Subset G$ задачу $-\Delta w(x) + \nabla p = v(x),\ \text{div}\ w = 0,\ w|_{\partial\omega} = 0;$

$$w = (-\pi\Delta)_\omega^{-1} v,\ (-\pi\Delta)_\omega^{-1} : V_0^1(G) \to V_{00}^1(\omega)$$

.

Положим $Ev(x) = \sum_{j=1}^K c_j \left((-\pi\Delta)_\omega^{-1} d_j \right)(x)$, где константы $c_j = c_j(v)$ находятся из системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^K c_j \int_\omega (-\pi\Delta)_\omega^{-1} d_j(x) d_k(x) dx = -\int_G d_k(x) v(x) dx,$$

$k = 1, \dots, K$

2) Устойчивое инвариантное многообразие

Пусть $S(t, w_0) \equiv w(t, \cdot)$ - разрешающий оператор нелинейной задачи (15)-(17) in $V_0^1(G)$

Устойчивое инвариантное мнгообразие $M_\sigma(a) \subset V_0^1(G)$ определяется как многообразие конечной коразмерности, определенное в окрестности $\mathcal{O}^\varepsilon(a) \subset V_0^1(G)$ стационарного решения a, инвариантного относительно действия оператора $S(t, \cdot), \forall t > 0$ и удовлетворяющего соотношению

$$\|S(t, w_0) - a\|_G \leq ce^{-\sigma t} \text{ as } t \geq 0 \quad \forall w_0 \in M_\sigma(a) \tag{19}$$

Лемма 1. Для каждого $\sigma > 0$, возможно, кроме дискретного множества θ, существует единственное устойчивое инвариантное многообразие $M_\sigma(a)$ минимально возможной коразмерности.

3) Основная теорема

Предположим, что $\|w_0 - a\|_\Omega < \varepsilon$,
где w_0 - начальное условие, а a - стационарное решение в задаче стабилизации (15)-(17) для СНС.

Теорема 3. Пусть $\sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \theta$. Тогда для достаточно малого ε существует нелинейный оператор $\mathbb{E} : \mathcal{O}^\varepsilon(a) \to V^1_{00}(\omega)$ такой, что $w_0 + \mathbb{E}(w_0) \in M_\sigma(a)$, где $\mathcal{O}^\varepsilon(a) = \{v \in V^1(\Omega) : \|v - a\|_\Omega < \varepsilon\}$.

Управление с обратной связью

$$\partial_t w - \Delta w + (w, \nabla) w + \nabla p_1 = g + \sum_j \delta(t - t_j)(\mathbb{E}w)(t_j, \cdot)$$

$$\text{div } w(t,x) = 0 \quad t > 0,\ x \in G,$$

$$w|_{\partial G} = 0,\ w(t,x)|_{t=0} = w_0(x),$$

где

$$t_j = \min(t > t_{j-1} : \text{dist}(w(t,\cdot), M_\sigma)(a) = \varepsilon/2)$$

Распределенное управление. Стабилизация с обратной связью.

$$\partial_t v(t,x) + Av = u(t,x), \quad v|_{t=0} = v_0 \qquad (20)$$

$$\text{supp}\, u \in \omega \qquad (21)$$

$u(t,\cdot) = \Lambda E v(t,\cdot)$, где E - оператор с обратной связью из линейной задачи стабилизации со стартовым управлением. Пусть
$V = V_0^0(G)$, $V_+ = X^+(A)$, $V_- = X^-(A)$
$P_+ : V \to V_+,\ P_- : V \to V_-$ - ортопроекторы
$P_+ v = v_+,\ P_- v = v_-$
Лемма 2. $a) Ev = EP_+ v,\ b) P_+ Ev = -P_+ v$

Из (20),(21) следует, что $\partial_t v(t,x) + (A - \Lambda E)v = 0$. Следовательно:

$$\partial_t v_+ + (A + \Lambda I)v_+ = 0, \quad v_+|_{t=0} = P_+ v_0$$

$$\partial_t v_- + Av_- = \Lambda P_- E v_+, \quad v_-|_{t=0} = P_- v_0$$

Распределенное управление в нелинейном случае.

Положим $\widehat{A}v = (A + \Lambda I)v_+ + Av_-$.
СНС имеет вид:

$$\partial_t y(t,x) + \widehat{A}y + \widehat{\pi}(y,\nabla)y = 0, \quad y|_{t=0} = y_0$$

Теорема 4. Пусть $\|y_0\|_V < \varepsilon$, где ε достаточно мало. Тогда

$$\|y(t,\cdot)\|_V \le c\|y_0\|_V e^{-\sigma t}, \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Спасибо

за внимание