О ПРОБЛЕМЕ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА ПОСРЕДСТВОМ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А.В. Фурсиков,
Московский Государственный
Университет им. М.В. Ломоносова

Школа-конференция
Неголономные дни в Переславле,
Лекция 1, Август 26–30.08.2024

Введение

Мы будем изучать задачи управления для дифференциальных уравнений гидродинамичес-

кого типа. Для простоты сначала напомним некоторые понятия теории управления в случае краевой задачи для уравнения тепло-

проводности:

$$\partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) = f(t,x),\ t \in (0,T), x \in \Omega,$$

$$y|_{\partial\Omega} = y_b(t,x'), x' \in \partial\Omega, \quad y|_{t=0} = y_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ - ограниченная область размерности $d \geq 1$, $\partial\Omega$ - граница области, f, y_b, y_0 известные функции, а функция y - искомая. Эта краевая задача описывает распределение температуры $y(t,x)$ в теле Ω для каждого момента времени $t \in (0,T)$.

Задачи управления: (Предварительное описание.) Введем два вида управлений.

1)**Задача нуль управляемости с граничным управлением.** Пусть задана $y_0(x), x \in \Omega$. Найти такую функцию $u(t,x')$, $(t,x') \in (0,T)\times \partial\Omega := \partial\Omega_T$, что решение $y(t,x)$, $(t,x) \in (0,T)\times\Omega := \Omega_T$ задачи

$$\partial_t y(t,x) - \Delta y = 0, \quad y(t,x)|_{t=0} = y_0(x), \tag{1}$$

$$y|_{x'\in\partial\Omega} = u(t,x'), \tag{2}$$

удовлетворяет равенству

$$y|_{t=T} = 0 \tag{3}$$

Функция u из (2) называется граничным управлением.

2) **Задача нуль управляемости с распределенным управлением.** По заданной функции $y_0(x)$ найти такую функцию $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_T$, что решение $y(t,x)$ задачи

$$\partial_t y(t,x) - \Delta y = u(t,x), \quad y|_{t=0} = y_0(x), \tag{4}$$

$$y|_{x'\in\partial\Omega} = 0,\ \forall t \in (0,T), \tag{5}$$

удовлетворяет (3). Функция u из (4) называется распределенным управлением.

Мы опустили заданные функции f, y_b в обоих определениях задачи нуль управляемости только лишь ради простоты. Во многих ситуациях они должны быть использованы. Кроме того, достаточно часто нуль в правой части (3) нужно заменить на соответствующую функцию $\widehat{y}(x)$. Тогда название задачи заменяется на задачу точной управляемости.

Заметим, что задача нуль управляемости с граничным управлением более естественна и поэтому более важна для приложений, чем аналогичная задача с распределенным управлением. Действительно, создать нужную температуру на границе $\partial\Omega$ физического тела Ω (т.е. граничное управление) проще, чем создать надлежащий источник тепла внутри физического тела Ω (т.е. распределенное управление).

Тем не менее, математическая модель с распределчнным управлением также может быть полезной. Давайте покажем, что математическое решение задачи (1)-(3) с граничным управлением может быть сведена к решению задачи с распределенным управлением, удовлетворяющим некоторым дополнительным ограничниям:

Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$, $\omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 1$ – ограниченные области такие, что $\Omega \subset G$, $\omega \subset (G \backslash \Omega)$, $G_T = (0, T) \times G, \omega_T = (0, T) \times \omega$, и ∂G является границей G. Задана функция $z_0(x), x \in G$, такая, что $z_0|_{\partial G} = 0$, найти функцию

$$v(t, x), (t, x) \in G_T : \text{supp}\, v \subset \omega_T \qquad (6)$$

такую, что решение $z(t, x)$ задачи

$$\partial_t z(t, x) - \Delta z = v(t, x), \quad z|_{t=0} = z_0(x), \quad (7)$$

$$z|_{x \in \partial G} = 0, \forall t \in (0, T), \qquad (8)$$

удовлетворяет равенству

$$z(T, x) = 0 \qquad (9)$$

Предположим, что существует решение $(z(t, x), v(t, x))$ задачи (6)-(9), и начальные условия z_0, y_0 задач (6)-(9) и (1)-(3) связаны соотрошеним: $z_0|_{x\in\Omega} = y_0(x)$. Наложим следующие ограничения на функцию $z(t,x)$ указанную выше:

$$y(t,x) = z|_{(t,x)\in\Omega_T},\ u(t,x') = z|_{(t,x')\in\partial\Omega} \tag{10}$$

Так как $\Omega \cap \omega = \emptyset$, то из соотношения (10) следует что $v(t,x) = 0$ для $x \in \Omega$. Это означает, что пара (y,u), определенная в (10) является решением задачи (1)-(3).

Рассмотрим теперь задачу точной управляемости для системы Навье-Стокса.

Система Навье-Стокса (СНС) течения вязкой несжимаемой жидкости

$$\partial_t v(t,x) - \Delta v + (v,\nabla)v + \nabla p(t,x) = f(x) + u(t,x), \tag{11}$$

$$\text{div } v(t,x) = 0 \quad t > 0, \tag{12}$$

$$v(t,x)|_{t=0} = v_0(x), \tag{13}$$

$$v(t,\ldots,x_j+2\pi,\ldots) = v(t,\ldots,x_j,\ldots), \quad j = 1,2,3 \tag{14}$$

Здесь $v(t,x) = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость течения жидкости, $p(t,x)$ – давление, $u(t,x)$ – управление,

$$\text{supp } u(t,\cdot) \subset \omega \subset \mathbb{T}^3 \quad \forall t,$$

где $\mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$ – трехмерный тор (включение $x \in \mathbb{T}^3$ эквивалентно выплнению периодических краевых условий (14)), ω – открытое множество.

Пусть

$$(\widehat{v}(x), \widehat{p}(x)) = (\tilde{v}(\epsilon, x), \tilde{p}(\epsilon, x)) \tag{15}$$

где пара $(\tilde{v}(t,x), \tilde{p}(t,x))$ удовлетворяет при $t \in (0,\epsilon)$ системе уравнений (11)с $u(t,x) \equiv 0$, (12),(14) и некоторому начальному условию.

Проблема точной управляемости, поствленная Ж.-Л.Лионсом:

Существует ли такое управление u, что

$$v(T,x) = \widehat{v}(x) \qquad (16)$$

где v – решение задачи (11)-(14),а $\widehat{v}$ – векторное поле (15)?

Введем функциональные пространства

$$V^k := \{v \in (H^k(\mathbb{T}^3))^3 : \text{div} v = 0, \int_{\mathbb{T}^3} v dx = 0\},$$

где $H^k(\mathbb{T}^3)$ – пространство Соболева,

$$V^{1,2} = \{v \in L_2(0,T;V^2) : \partial_t v \in L_2(0,T;V^0)\},$$

$$V^0_{00}(\omega) = \{u \in V^0 : u(x) = 0 \text{ при } x \in \mathbb{T}^3 \setminus \omega\}$$

Теорема 1. Пусть заданы $f \in V^0, v_0 \in V^1, T > 0, \widehat{v}$. Тогда существует такое управление $u \in L_2(0,T;V^0_{00}(\omega))$, что решение

$$(v, \nabla p) \in V^{1,2} \times L_2(0,T;(L_2(\mathbb{T}^3)^3)$$

задачи (11)-(14)удовлетворяет условию (16).

Решение задачи Ж.-Л.Лионса о точной управляемости

1) Случай локальной точной управляемости: $\|\hat{v}-v_0\|_{V^1} < \varepsilon$. (С использованием Карлемановских оценок)

A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Ser. Seoul (Global Anan. Res. Ctr.) **34** (1996), p.1-163.

2) Случай нелокальной точной управляемости для двумерной СНС.

J.-M.Coron,A.V.Fursikov, *Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on manifold without boundary*,
Russian J.Math.Phys.**4**:3,(1996), p.1-20.

3) Случай нелокальной точной управляемости для трехмерной СНС.

А.В.Фурсиков, О.Ю.Эмануилов, *Точная управляе уравнений Навье-Стокса и Буссинеска*, Успехи Математических Наук, 54:3 (1999), с.93–146.

В Теореме 1 доказано существование решения нелокальной задачи точной управляемости для трехмерной системы Навье-Стокса. Отметим что эта задача некорректна в смысле Адамара. Наша цель - провести аналогичное исследование стабилизации ряда систем гидродинамического типа с помощью управления с обратной связью. Будучи регуляризацией задачи точной управляемости, эта задача стабилизации является корректной в смысле Адамара. Мы начнем с простейших примеров.

Задача стабилизации с помощью граничного управления с обратной связью Рассмотрим простое параболическое уравнение

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} - \alpha y(t,x) = 0, \qquad (17)$$

$$y|_{t=0} = y_0(x), \qquad (18)$$

где $\alpha > 1, x \in (-\pi/2, \pi/2), t \in \mathbb{R}_+, y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$. Мы включили в (17) член с $\alpha > 1$, чтобы задача (17),(18) обладала экспоненциально растущими решениями, так как если $y_0(x) = \cos x$, то $y(t,x) = \cos x e^{(\alpha-1)t}$ удовлетворяет (17),(18).

Постановка задачи: При заданном $\sigma > 0$ найти граничные условия $u_+(t), u_-(t)$ для (17),(18):

$$y(t, -\pi/2) = u_-(t),\ y(t, \pi/2) = u_+(t) \quad (19)$$

такие, чтобы решение $y(t,x)$ задачи (17)-(19) убывало со скоростью σ:

$$\|y(t,\cdot)\|_{L_2(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \le ce^{-\sigma t} \quad (20)$$

где c зависит от σ и $y_0(\cdot)$.

Чтобы решить задачу стабилизации (17)-(20), мы сведем ее к решению задачи стабилизаци с помощью стартового управления. Для этого мы продолжим решение $y(t,x)$ задачи (17)-(19) с прямоугольной полосы $\{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (-\pi/2, \pi/2)\}$ на цилиндр $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$, где $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ - это окружность длиной 2π, т.е. интервал $(-\pi, \pi)$ с отождествленными концами $-\pi$ and π. Другими словами, мы будем рассматривать (17) для $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$ с периодическими граничными условиями:

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} - \alpha z(t,x) = 0, \quad (21)$$

$$z(t, x + 2\pi) = z(t,x), \quad (22)$$

$$z|_{t=0} = z_0(x) := Ey_0(x). \qquad (23)$$

Здесь $z(t,x)$ - это продолжение $y(t,x)$, E - следующий оператор продолжения:

$$Ey_0(x) = \begin{cases} y_0(x), & x \in (-\pi/2, \pi/2), \qquad (24) \\ u(x), & x \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi), \end{cases}$$

а функция $u(x)$ однозначно определяется по y_0; $u(x)$ называется стартовым управлением.

Задача стабилизации со стартовым управлением с обратной связью : По заданному $y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$, $\sigma > 0$ найти такое стартовое управление $u(x) \in L_2((-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi))$, что решение задачи (21)-(23) удовлетворяет оценке

$$\|z(t,\cdot)\|_{L_2(-\pi,\pi)} \leq ce^{-\sigma t}, \quad t \to \infty \qquad (25)$$

Отметим, что по определению стартовое управление $u(x)$ называется управлением с обратной связью, если оно однозначно определяется по y_0.

Мы решим эадачу стабилизации (21)-(25) с помощью метода Фурье. Пусть $z(t,x)$ - решение задачи

(21)-(23), где начальное условие $z_0(x)$ задано. Подставив ряд Фурье $z(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{z}(t,k)e^{ikx}$ в(21)-(23) получим, что коэффициент Фурье $\widehat{z}(t,k):=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}z(t,x)e^{-ikx}dx$ определяется по формуле

$$\widehat{z}(t,k)=e^{-(k^2-\alpha)t}\widehat{z}_0(k), \tag{26}$$

где $\widehat{z}_0(k)$ - коэффиент Фурье начального условия $z_0(x)$. Используя обозначение $\|z\|=\|z\|_{L_2(-\pi,\pi)}$, подставим в равенство Парсеваля соотношение (26). В результате мы получим:

$$\|z(t,\cdot)\|^2=2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{z}(t,k)|^2=$$

$$=2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{z}_0(k)|^2e^{-2(k^2-\alpha)t} \tag{27}$$

В силу (27) неравенство (25) верно тогда и тольк о тогда, когда

$$\widehat{z}_0(k)=0,\ \forall k\in\mathbb{Z}:|k|<\sqrt{\alpha+\sigma} \tag{28}$$

Используя (28), построим оператор E, указанный в (24), что является главным шагом в решении задачи стабилизации (21)-(25).

Лемма 1. Для любого $\sigma > 0$ существует единственный оператор продлжения E, указанный в(24), такой, что для любого $y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikx} E y_0(x) dx = 0 \ \forall k: \ |k| < \sqrt{\sigma + \alpha} \tag{29}$$

Доказательство. Положим $B = (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. В силу (24),(29)

$$\int_B e^{-ikx} u(x) dx = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikx} y_0(x) dx := -\tilde{y}_0(k) \tag{30}$$

где $\tilde{y}_0(k)$ - краткое обозначение величины интеграла из левой части последнего равенства. Мы ищем $u(x)$ в следующем виде

$$u(x) = \sum_{|j| < \sqrt{\sigma+\alpha}} \tilde{u}_j e^{ijx}, \quad x \in B, \tag{31}$$

где $\tilde{u}_j$ - некоторые величины. После подстановки (31) в (30) мы получим:

$$\sum_{|j| < \sqrt{\sigma+\alpha}} a_{k,j} \tilde{u}_j = -\tilde{y}_0(k), \tag{32}$$

где

$$a_{k,j} = \int_B e^{-i(k-j)x} dx, \ |k| < \sqrt{\sigma + \alpha}. \tag{33}$$

Матрица $A = \|a_{k,j}\|$ является положительно определенной. Действительно, если $\Phi = \{\phi_k,\ |k| < \sqrt{\sigma+\alpha}\}$ и $\varphi(x) = \sum_k \phi_k e^{ikx},\ x \in B$, в силу (33)

$$(A\Phi, \Phi) := \sum_{k,j} a_{k,j}\phi_j\overline{\phi_k} = \int_B \sum_{k,j} e^{-i(k-j)x}\phi_j\overline{\phi_k}dx =$$

$$\int_B |\varphi(x)|^2 dx \geq 0 \qquad (34)$$

Если для $\varphi(x)$ вместо неравенства в (34) мы имеем равенство, то $\varphi(x) = \sum_{|k|\leq k_0} \phi_k e^{ikx} \equiv 0$ и

$$e^{ik_0x}\varphi(x) = \sum_{|k|\leq k_0} \phi_k e^{i(k+k_0)x} \equiv 0$$

где k_0 - наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $k_0 < \sqrt{\sigma+\alpha}$. Но ряд $e^{ik_0x}\varphi(x)$ является полиномом, он ограничен на единичной окружности комплексной плоскости и равен нулю в почти всех ее точках. Поэтому все его коэффициенты ϕ_k равны нулю. Следовательно $\det A = \det \|a_{jk}\| \neq 0$, система (32) однозначно разрешима, и для каждого $\sigma > 0$ оператор E из (24) существует и единственен. Лемма 1 доказана.

Решим задачу стабилизации (17)-(20) с граничны
управлением, с помощью задачи стабилизации (21)-(25) со стартовым управлением. Как следует из Леммы 1, продолжение $z_0(x) = (Ey_0)(x)$ функции $y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$ на окружность $(-\pi, \pi)$ удовлетворяет неравенству

$$\|z_0\|_{L_2(-\pi,\pi)} \leq c\|y_0\|_{L_2(-\pi/2,\pi/2)}$$

Хорошо известно, что решение $z(t,x)$ краевой задачи (21)-(23) бесконено дифференцируемо при любом $t > 0$ и поэтому ограничения $z(t,x)|_{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times(-\pi/2,\pi/2)} = y(t,x)$ и $z(t,x)|_{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\{\pm\pi/2\}} = u_\pm(t)$ корректно опрделны. Так как $z(t,x)$ удовлетворяет (21)-(25), то функции $(y(t,x), u_+(t), u_-(t))$ удовлетвряют (17),(20).

Спасибо

за внимание